

## CHAPITRE VII:

# CALCUL DU FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTES

La Mécanique de la Rupture permet d'étudier quantitativement le phénomène de propagation de fissures de fatigue. La théorie indique que les contraintes et les déformations à l'extrémité d'une fissure, si la zone plastique est de très petite dimension (plasticité confinée), sont fonction d'un seul paramètre : le facteur d'intensité des contraintes  $K$  (FIC). Ce facteur est lui-même fonction de la contrainte appliquée  $\sigma_{app}$ , de la racine carrée de la longueur de fissure, et d'un paramètre prenant en compte la géométrie de la pièce appelé *fonction complaisance*. En fatigue, les points donnant la vitesse de propagation de la fissure  $da/dN$  en fonction de  $\Delta K$  s'alignent expérimentalement selon une droite (Chapitre I) en échelle bi-logarithmique. Toutefois, aux faibles valeurs de  $\Delta K$  ainsi qu'aux fortes valeurs de ce paramètre, lorsqu'on s'approche respectivement du seuil de propagation  $\Delta K_{seuil}$  et de la ténacité  $K_{IC}$  du matériau, la courbe n'est plus linéaire.

Dans ce chapitre, nous allons nous attacher à la détermination du paramètre  $K$  dans le cas d'une fissure présente dans l'éprouvette munie d'un congé, étudiée dans le Chapitre VI et pour laquelle nous connaissons désormais la répartition des contraintes. Ces calculs aux éléments finis sont en effet indispensables si nous souhaitons représenter les résultats expérimentaux des fissures courtes dans un diagramme  $da/dN - \Delta K$  et les comparer aux courbes de propagation des fissures longues. Afin de valider notre méthode nous débuterons cette étude par des calculs numériques portant sur l'éprouvette SENT afin de comparer les résultats obtenus à ceux issus des normes ASTM.

Plus particulièrement, nous allons étudier le FIC pour trois types de fissures : fissure longue (traversante) dans l'éprouvette SENT, fissure courte de surface et fissure courte de coin dans l'éprouvette munie d'un congé. Ces deux derniers cas seront traités pour plusieurs longueurs (80  $\mu\text{m}$ , 100  $\mu\text{m}$  et 500  $\mu\text{m}$ ) et formes du front de fissure ( $a/c = 0,8$  et  $a/c = 1$ ) ainsi que dans le cas de chargements élastiques et élastoplastiques. Le calcul du FIC sera établi par la méthode de l'intégrale  $J$ .

Nous calculerons l'intégrale  $J$  par la méthode des éléments finis ; puis, à partir de ces résultats, nous proposerons des formules empiriques pour estimer facilement le FIC.

Par raison de symétrie, nous ne modéliserons par la suite que :

- une demi éprouvette pour les fissures longues ;
- un quart d'éprouvette pour les fissures courtes de surface ;
- une demi éprouvette pour les fissures courtes de coin.

## VII-1 Mécanique de la Rupture

### VII-1-1 Mécanique linéaire de la rupture

L'objet essentiel de la Mécanique Linéaire de la Rupture (MLR), utilisée pour décrire l'avancée cyclique d'une fissure dans un solide élastique, réside dans la caractérisation du champ de contrainte et de déformation près de la pointe de fissure. A partir des fonctions de contraintes introduites par Westergaard, la répartition des contraintes en régime élastique au voisinage immédiat de la pointe de fissure, est de la forme :

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} f_{ij}(\theta) + o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad (\text{VII-1})$$

avec  $o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)$  négligeable devant  $\frac{1}{\sqrt{r}}$  quand  $r$  tend vers 0.

$(r, \theta)$  représentent les coordonnées polaires du point considéré par rapport à la pointe de fissure,  $f_{ij}$  des fonctions de  $\theta$  sans dimension et  $K$  le facteur d'intensité des contraintes caractéristique du mode d'ouverture I, II et III.

Dès lors que ce champ asymptotique (qui néglige les termes du second ordre) peut être considéré comme dominant la répartition des contraintes dans une zone située au voisinage de la fissure et grande par rapport à l'échelle de déformation microstructurale, l'amplitude du facteur d'intensité des contraintes apparaît comme un coefficient, indépendant de la configuration, définissant de manière unique le champ des contraintes locales en pointe d'une fissure élastique et pouvant être utilisé comme paramètre caractéristique.

L'une des principales limites de cette approche, en particulier en ce qui concerne la validité du paramètre  $K$ , provient du fait qu'il existe un état de plastification locale. En effet, selon la relation [VII-1] lorsque  $r$  tend vers 0, la contrainte  $\sigma$  tend vers l'infini. En réalité, lorsque la contrainte locale atteint la limite d'élasticité  $\sigma_E$ , il se forme une zone plastifiée en pointe de fissure.

Dans le cas où cette zone plastique est faible comparée à l'étendue du domaine de variation rapide du champ de contraintes, lui-même faible par rapport aux dimensions de la structure fissurée, nous pouvons considérer que sa présence ne provoque pas de perturbation sensible et que l'approche élastique linéaire reste valable.

### VII-1-2 Intégrale de Rice

Dans un plan de chargement où une fissure, dont les surfaces sont libres, est présente, on définit un contour  $\Gamma$  autour de la pointe de la fissure (Figure VII-1). Pour caractériser la singularité du champ de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure, on étudie une intégrale de contour que l'on peut déduire de la loi de conservation de l'énergie. Pour un chargement élastoplastique, Rice [Ric86] a défini un paramètre caractérisant le champ de contrainte en pointe de fissure, appelé *intégrale J*. Celle-ci représente la variation minimum d'énergie potentielle due à la croissance de la fissure. En élasticité, Rice a défini l'intégrale de contour comme suit :

$$J = \int_{\Gamma} W_e dy - T_i \frac{\partial u_i}{\partial x} dS$$

avec :

- $\Gamma$  un contour fermé entourant la pointe de la fissure (Figure VII-1) ;
- $W_e$  la densité d'énergie de déformation élastique égale à  $W_e = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon$  ;
- $T_i$  le vecteur contrainte appliqué sur  $dS$  égal à  $\sigma_{ij}n_j$ ,  $n_j$  étant les normales au contour  $\Gamma$  ;
- $u_i$  le déplacement associé à  $T_i$ .

Le calcul de l'intégrale  $J$  (ou de Rice) sera utilisé pour déterminer le facteur d'intensité de contrainte. En élasticité,  $J$  est égale à l'énergie de propagation d'une fissure définie par Griffith et notée  $G$  : pour un solide élastique,  $G$  correspond à l'énergie spécifique de création de surface libre. L'énergie  $G$  est reliée au facteur d'intensité de contrainte  $K$  par la relation suivante (VII-2) :

$$J = G = \frac{K_I^2}{E'} \quad \text{(VII-2)}$$

avec

$$E' = E \quad \text{en contraintes planes}$$

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \text{en déformations planes}$$

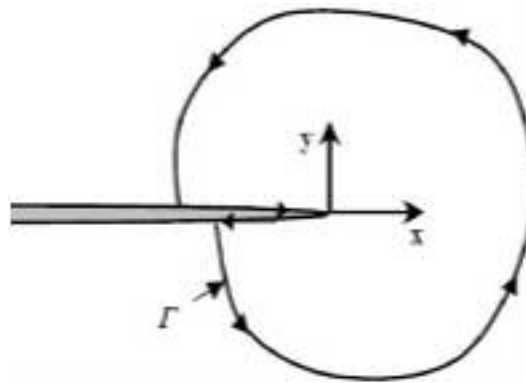


Figure VII-1 : Contour arbitraire  $\Gamma$  autour de la fissure.

Lorsque la structure étudiée n'est pas entièrement plastifiée, autrement lorsqu'on n'est pas en plastification étendue, l'intégrale  $J$  est théoriquement indépendante du contour. Cette invariance de  $J$  vis-à-vis de  $\Gamma$  permet de choisir un contour éloigné de la pointe de la fissure. Ceci évite les imprécisions liées aux erreurs importantes qui affectent généralement le calcul des champs mécaniques singuliers au voisinage de la pointe de fissure.

## VII-2 Calcul du FIC appliqué à l'éprouvette SENT

Dans le cas de cette éprouvette normalisée, nous sommes en présence d'une fissure traversante. Aussi, pour cette raison, nous pourrions nous contenter d'une modélisation bidimensionnelle lors de cette étude. Pour des raisons de symétrie, seule la moitié de l'éprouvette SENT sera maillée. Nous avons utilisé deux types d'éléments à 8 nœuds. Il s'agit d'éléments quadrangles, quadratiques à intégration réduite : CPE8R en déformation plane et CPS8R en contrainte plane (Figure VII-2).

Le maillage de l'éprouvette est présenté dans la Figure VII-3. Afin d'améliorer la convergence du calcul et d'aboutir à un résultat plus fiable, un maillage fin et rayonnant est appliqué autour de la fissure (Figure VII-4). Pour réaliser ce type de maillage, nous avons remaillé tous les éléments en contact avec la pointe de la fissure pour avoir des éléments triangulaires disposant toujours de 8 nœuds. Pour cela, nous avons imposé aux nœuds 1 et 2 les mêmes coordonnées et les mêmes déplacements que le nœud 5 (Figure VII-2). Nous n'avons pas utilisé d'éléments triangulaires directement à la pointe de la fissure car le code ABAQUS impose des éléments quadrangles autour des points définissant le contour utilisé dans le calcul de l'intégrale  $J$ .

Dans la pratique, le contour  $\Gamma$  de l'intégrale est défini par l'ensemble des nœuds du maillage des éléments finis. L'intégration numérique est effectuée sur chaque côté des éléments qui constituent le contour (Figure VII-5).

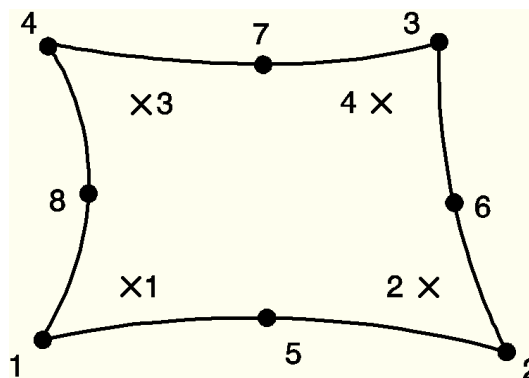


Figure VII-2 : Élément à 8 nœuds avec ses points d'intégration.

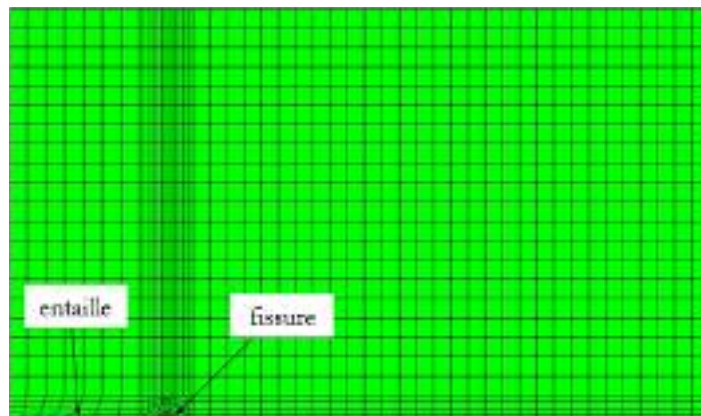


Figure VII-3 : Maillage de la moitié de l'éprouvette SENT.

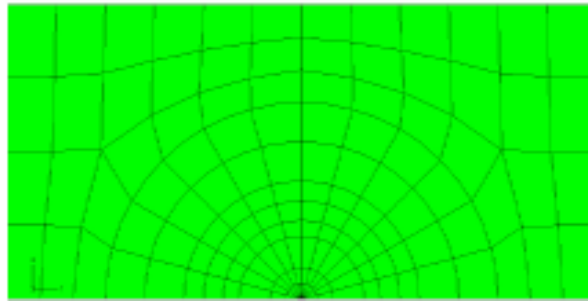


Figure VII-4 : Maillage rayonnant au voisinage de la fissure.

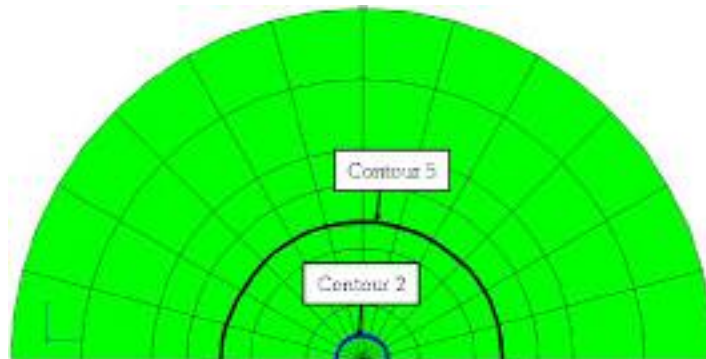
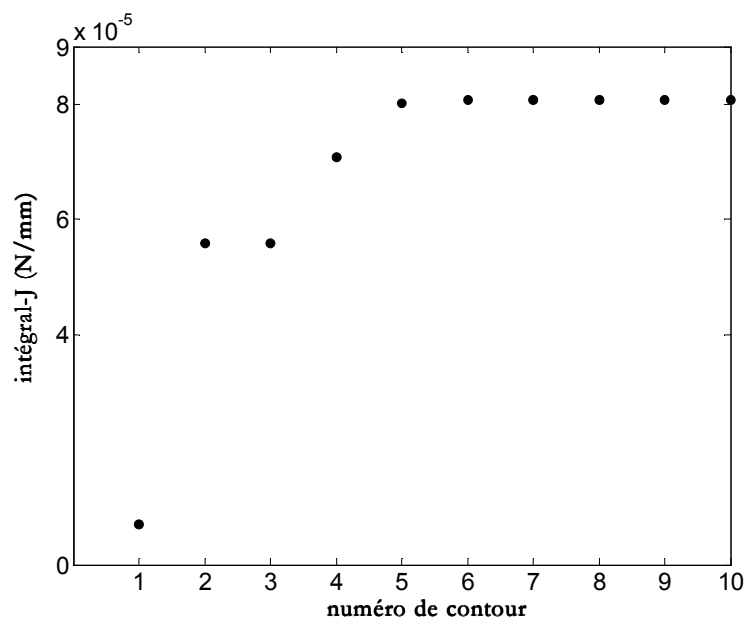


Figure VII-5 : Détail des contours.

Pour une longueur de fissure donnée, et à l'aide du code de calcul ABAQUS, l'indépendance de l'intégrale  $J$  vis-à-vis du contour a tout d'abord été vérifiée. Pour cela, nous avons effectué un calcul sur les dix premiers contours, de telle sorte que chaque contour présente une couche d'éléments autour de la fissure. Les valeurs trouvées sont stables à partir du cinquième contour pour des longueurs de fissures inférieures à  $100\ \mu\text{m}$  (Figure VII-6) et à partir du deuxième contour lorsque la longueur de fissure est supérieure à  $100\ \mu\text{m}$  (Figure VII-7). La documentation d'ABAQUS suggère de prendre la moyenne des calculs issue des différents contours sans prendre en compte la valeur du premier contour.

Figure VII-6 : Evolution de  $J$  en fonction des contours ( $a = 4,035\ \text{mm}$ ).

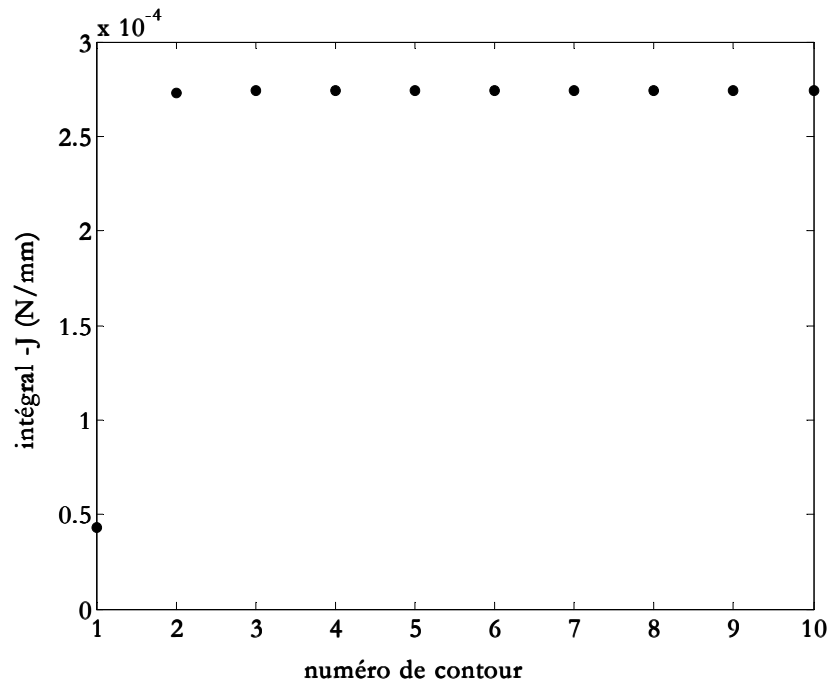


Figure VII-7 : Evolution de  $J$  en fonction des contours ( $a = 9$  mm).

Comme nous l'avons dit précédemment, nous avons utilisé deux types d'éléments lors de nos calculs : CPE8R (état de déformations planes) et CPS8R (état de contraintes planes). Les résultats de calcul ne nous montrent aucune différence significative pour les deux types d'éléments (Figure VII-8). Dans cette figure, nous avons tracé la moyenne des valeurs de l'intégrale  $J$  sur dix contours en fonction de la longueur de la fissure pour les éléments CPE8R et CPS8R. Dans la suite, nous utiliserons exclusivement les éléments CPE8R.

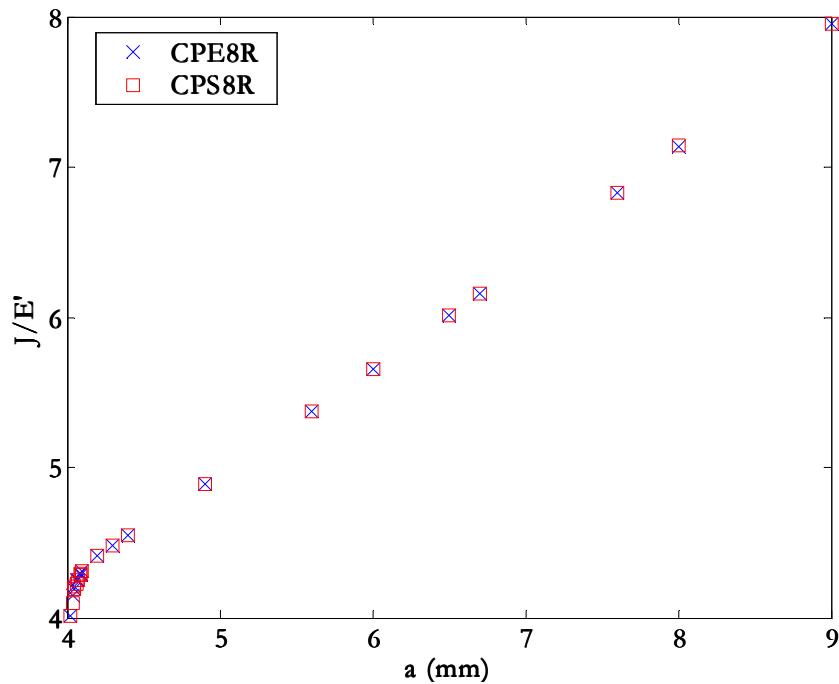


Figure VII-8 : Comparaison des résultats pour les éléments CPE8R et CPS8R.

Le calcul de l'intégrale  $J$  nous a permis de déterminer le facteur d'intensité de contrainte en utilisant les équations établies ci-dessus. Ces valeurs obtenues lors de ces calculs seront comparées à celles déterminées à partir des expressions analytiques proposées pour différents types d'éprouvettes. Pour les éprouvettes SENT, les valeurs de l'amplitude du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K$  sont données à partir des formules polynomiales que l'on trouve dans les ouvrages spécialisés [Roo75]. Ces formules sont de la forme suivante :

$$\Delta K = \frac{\Delta P}{B\sqrt{w}} f\left(\frac{a}{w}\right)$$

avec  $f\left(\frac{a}{w}\right) = \alpha_1\left(\frac{a}{w}\right)^{1/2} + \alpha_2\left(\frac{a}{w}\right)^{3/2} + \alpha_3\left(\frac{a}{w}\right)^{5/2} + \alpha_4\left(\frac{a}{w}\right)^{7/2} + \alpha_5\left(\frac{a}{w}\right)^{9/2}$

Les constantes  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$ , et  $\alpha_5$  sont données dans le Tableau VII-1 :

$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$
1,99	-0,41	18,7	-38,48	53,85

Tableau VII-1 : Valeurs des constantes  $\alpha_i$ .

$\Delta P$  = amplitude du chargement appliqué à l'éprouvette (en N) ;

$a$ ,  $B$ ,  $w$  = longueur de fissure, épaisseur et largeur de l'éprouvette (en mm) ;

$f(a/w)$  = fonction qui rend compte de la variation de complaisance lorsque la longueur  $a$  varie.

La Figure VII-9 a pour but de comparer l'évolution du facteur d'intensité de contrainte en fonction de la longueur de fissure obtenue numériquement, à celle obtenue à partir des polynômes proposés par les normes ASTM.

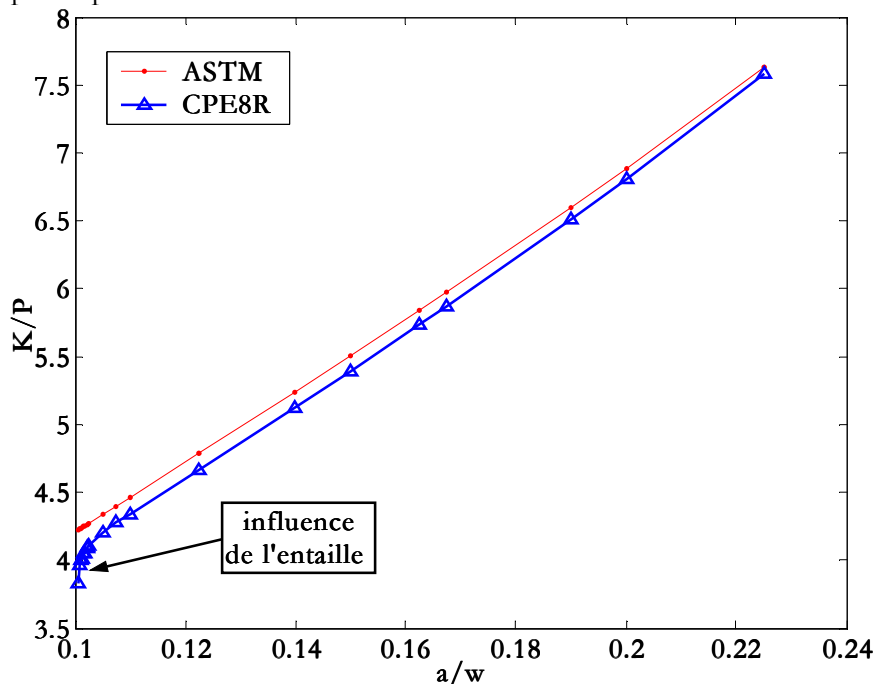


Figure VII-9 : Comparaison entre les évolutions du facteur d'intensité de contrainte, calculé numériquement et à l'aide des relations ASTM.

Dans cette figure, nous avons représenté le rapport entre le facteur d'intensité de contrainte et la charge appliquée ( $K/P$ ) en fonction du rapport entre la longueur de fissure et la largeur de l'éprouvette ( $a/w$ ). Ces courbes montrent une différence notable entre les résultats issus du calcul ABAQUS et des équations ASTM pour des longueurs de fissures inférieures à 4,2 mm ( $0,1 < a/w < 0,105$ ). Cette différence est liée à l'influence de la zone plastique de l'entaille. Au fur et à mesure que la fissure se propage, celle-ci va s'éloigner de la zone influencée par l'entaille et les deux courbes présentent alors une très faible différence de l'ordre de 1% à partir de  $a/w=0,2$ .

A la vue des résultats numériques obtenus grâce à la méthode de l'intégrale  $J$ , appliquée à un maillage rayonnant au cas de l'éprouvette SENT, nous pouvons noter une parfaite concordance avec ceux issus des normes ASTM. Ceci nous permet d'une part, de valider la méthode employée et ainsi d'envisager une application au cas tridimensionnel représenté par la seconde éprouvette. De plus, compte tenu du fait que dans la pratique les mesures de longueur de fissure s'effectuent lorsque celle-ci est éloignée de plus d'un millimètre de l'entaille (chapitre VIII), nous pourrions nous contenter d'appliquer les relations proposées par la norme ASTM dans un souci de simplicité.

## VII-3 Calcul du FIC appliqué à l'éprouvette munie d'un congé

### VII-3-1 Méthode du zoom structural

La technique du *zoom structural* ou « *submodeling* » permet d'étudier la partie locale d'un modèle avec un maillage plus raffiné que celui utilisé dans le modèle initial. Elle est basée sur l'interpolation de la solution du modèle initial. Cette méthode est particulièrement utile lorsqu'il est nécessaire d'obtenir précisément la solution détaillée dans une région donnée où peuvent se trouver un défaut, une entaille, une fissure... Nous supposons bien sûr que le « défaut » situé dans cette région possède un effet négligeable sur l'ensemble de la solution. Pour créer un sous-modèle, il est nécessaire de suivre le processus suivant :

- ❑ il est tout d'abord nécessaire de créer un modèle complet sans se préoccuper de la présence éventuelle de défauts. Ce modèle portera le nom de *modèle global*. Les données de base des résultats, qui seront produites par ce modèle global, seront par la suite employées pour gouverner le sous-modèle ;
- ❑ après un calcul effectué sur le modèle global, un nouveau modèle sera employé pour définir un *sous-modèle* et réaliser un zoom structural sur une partie du modèle global. La géométrie de celui-ci sera directement prélevée à partir du modèle global ;
- ❑ finalement, on applique l'état de conditions limites au sous-modèle. Dans la plupart des cas, on applique les conditions limites aux bords et aux faciès qui ont été créés quand on a extrait le sous-modèle du modèle global. On peut prescrire d'autres états de conditions aux limites aux mêmes régions ; par exemple une condition de symétrie. Les conditions aux limites prescrites ont la priorité sur l'état de conditions limites appliqué au sous-modèle.

L'utilisation du zoom structural possède plusieurs avantages parmi lesquels :

- ❑ changement du type d'élément employé dans le sous-modèle ; cependant, nous ne pouvons pas changer l'aspect dimensionnel : le modèle global et le sous-modèle doivent être bidimensionnels ou tridimensionnels ;
- ❑ définition du sous-modèle lors d'une analyse séparée de l'analyse globale. Le seul lien entre le sous-modèle et le modèle global est le transfert des valeurs issues de l'analyse



- globale aux nœuds appropriés qui fourniront les conditions aux limites du sous-modèle ;
- analyse du sous-modèle menée distinctement de celle du modèle global. Celui-ci peut d'ailleurs être employé à tout niveau ; de plus, le sous-modèle peut également être utilisé comme modèle global en vue d'un autre sous-modèle ;
- globalement, l'utilisation de cette méthode permet de réduire le temps de calcul de manière considérable.

Afin de valider cette méthode, nous avons tout d'abord recalculé les valeurs de l'intégrale  $J$  sur les éprouvettes SENT en utilisant cette fois la technique du zoom structural. Nous n'avons alors obtenu aucune différence notable par rapport aux calculs précédents (§ VII-2). Un calcul a également été effectué dans le cas de la configuration « classique » tridimensionnelle traitée par Newman et Raju (éprouvette parallélépipédique munie d'une fissure circulaire). Les résultats de calcul n'ont alors montré aucune différence notable liée à l'utilisation de la méthode du zoom structural. Dans la suite de notre travail, nous utiliserons donc cette technique sur les éprouvettes munies d'un congé, afin de raffiner plus facilement le maillage dans la région voisine de la fissure.

### VII-3-2 Choix des éléments

Dans ce cas de figure, nous avons dû utiliser une modélisation tridimensionnelle ; toutefois, en raison de la symétrie, nous n'avons maillé qu'un quart de l'éprouvette dans le cas de fissures de surface. Afin de disposer d'un maillage plus fin autour de la fissure, qui nous fournira une solution précise et détaillée, nous avons utilisé la méthode du zoom structural décrite dans le paragraphe précédent. Dans cette étude, nous avons utilisé des éléments linéaires (C3D8R) à 8 nœuds et des éléments quadratiques (C3D20R) à 20 nœuds avec intégration réduite (Figure VI-1 et Figure VI-2) Les maillages du modèle global (quart d'éprouvette) et du sous-modèle sont présentés dans les Figure VII-10 et Figure VII-11.

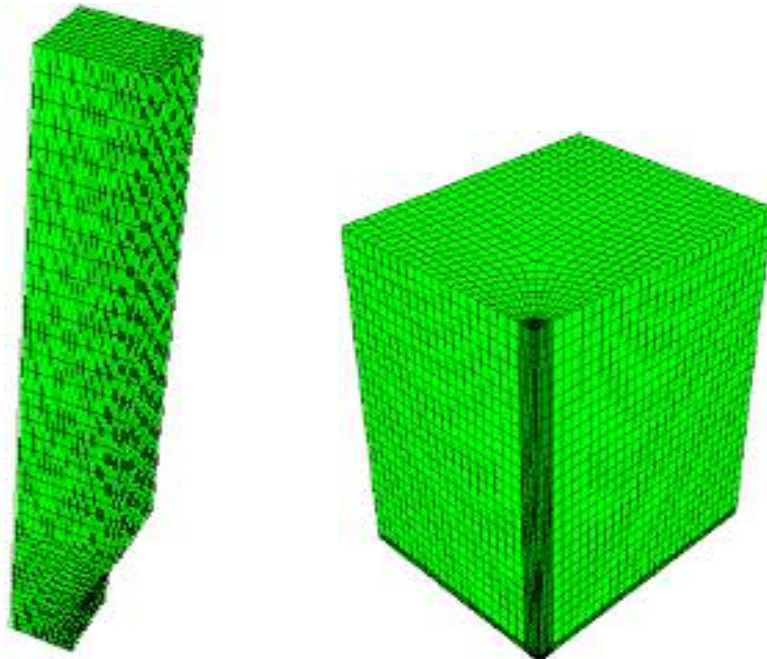


Figure VII-10 : Exemple de maillage d'un quart d'éprouvette avec une partie extraite en tant que sous-modèle.

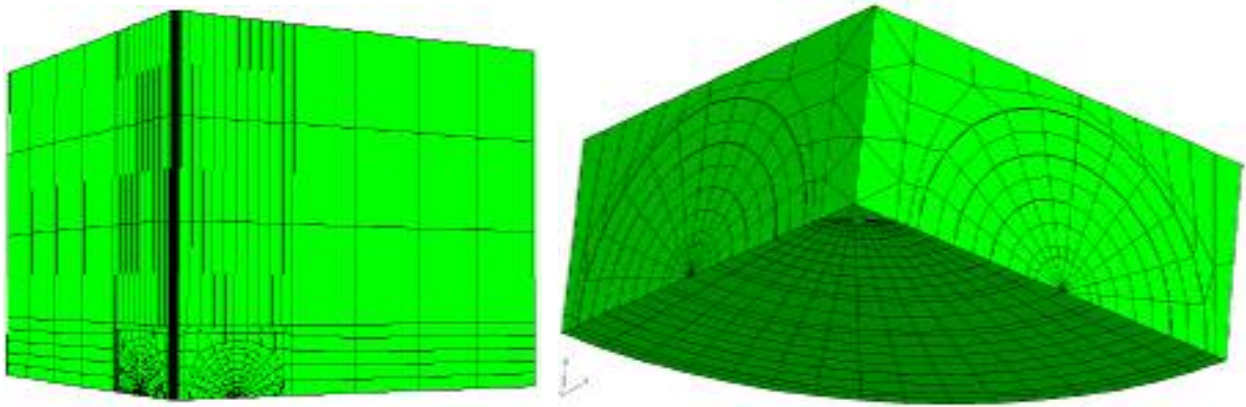


Figure VII-11 : Zoom sur le maillage autour de la fissure.

## VII-4 Calcul du FIC dans le cas d'une fissure de surface

Dans un premier temps, nous allons utiliser la méthode du zoom structural pour déterminer les valeurs de l'intégrale  $J$  dans le cas d'une fissure de surface. Nous utiliserons alors les équations (VII-2) pour relier les valeurs de l'intégrale  $J$  à celles du facteur d'intensité de contrainte  $K_I$ . Parallèlement à ce calcul aux éléments finis, nous évaluerons  $K_I$  à partir des expressions proposées par Newman et Raju [New83, Raj97(1), Raj97(2)] en y introduisant la répartition des contraintes obtenues numériquement dans le Chapitre VI. Ce travail sera effectué dans des configurations élastiques mais également élastoplastiques. Enfin, nous comparerons l'ensemble des résultats obtenus.

### VII-4-1 Formulation du FIC pour un chargement uniforme

Rappelons, que dans le cas d'une fissure de surface semi-elliptique présente dans une plaque de dimensions finies (Figure VII-12), la formulation du FIC proposée par Newman et Raju, pour une répartition uniforme de la contrainte dans l'échantillon, est la suivante (VII-3) :

$$K_I = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{E(k)} F_s\left(\frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \frac{c}{w}, \varphi\right) \quad (\text{VII-3})$$

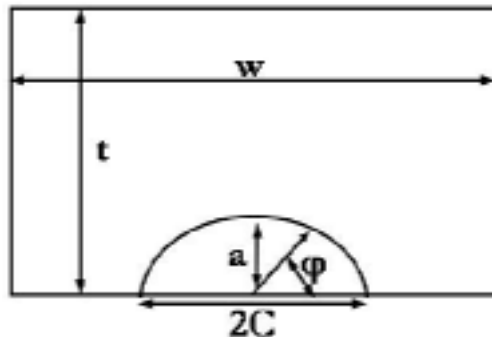


Figure VII-12 : Configuration et notations de la fissure de surface.

où  $\sigma$  est la contrainte de traction,  $E(k)$  l'intégrale elliptique complète de seconde espèce,  $a$  et  $C$  représentent respectivement la profondeur et la demi longueur de la fissure en surface,  $w$  et  $t$

sont la longueur et l'épaisseur de la plaque,  $\varphi$  un paramètre angulaire. Enfin,  $F_S$  est appelé facteur de correction et peut s'écrire :

$$F_S = \left[ M_1 + M_2 \left( \frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left( \frac{a}{t} \right)^4 \right] g \cdot f_\varphi \cdot f_x$$

où pour  $\frac{a}{c} \leq 1$  :

$$M_1 = 1.13 - 0.09 \frac{a}{c}$$

$$M_2 = -0.54 + \frac{0.89}{0.2 + \frac{a}{c}}$$

$$M_3 = 0.5 - \frac{1}{0.65 + \frac{a}{c}} + 14 \left( 1 - \frac{a}{c} \right)^{24}$$

$$g = 1 + \left[ 0.1 + 0.35 \left( \frac{a}{t} \right)^2 \right] (1 - \sin \varphi)^2$$

$$f_w = \left[ \sec \left( \frac{\pi c}{2w} \sqrt{\frac{a}{t}} \right) \right]^{1/2}$$

$$f_\varphi = \left[ \left( \frac{a}{c} \right)^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right]^{1/4}$$

$$E^2(K) = 1 + 1.464 \left( \frac{a}{c} \right)^{1.65}$$

## VII-4-2 Chargement élastique

Le calcul de l'intégrale  $J$  est établi autour de la fissure, pour plusieurs tailles et types de fissures : profils circulaires ( $a/c = 1$  ;  $a = 100 \mu\text{m}$  et  $a = 500 \mu\text{m}$ ) et elliptique ( $a/c = 0,8$  ;  $a = 80 \mu\text{m}$ ). Dans les Figure VII-13 et Figure VII-14, nous avons tracé la valeur de l'intégrale  $J$  en fonction des contours respectivement pour une fissure de surface circulaire ( $a = 100 \mu\text{m}$ ) et elliptique ( $a = 80 \mu\text{m}$ ) pour  $\varphi = \pi/4$ . Ces figures vérifient bien l'indépendance de l'intégrale  $J$  par rapport au contour. En effet, la valeur devient constante à partir du troisième contour. Par la suite, nous utiliserons la valeur moyenne sur les contours sans prendre en compte celle issue du premier contour.

Nous avons calculé l'intégrale  $J$  pour plusieurs valeurs de  $\varphi$  comprises entre 0 et  $\pi/2$ . Afin de comparer les résultats de calculs en utilisant les éléments C3D8R et C3D20R, nous avons tracé dans les Figure VII-15 et Figure VII-16, l'évolution de  $K/P\sqrt{a}$  en fonction de l'angle  $\varphi$  pour des fissures de surface circulaires de taille 100  $\mu\text{m}$  et 500  $\mu\text{m}$ .

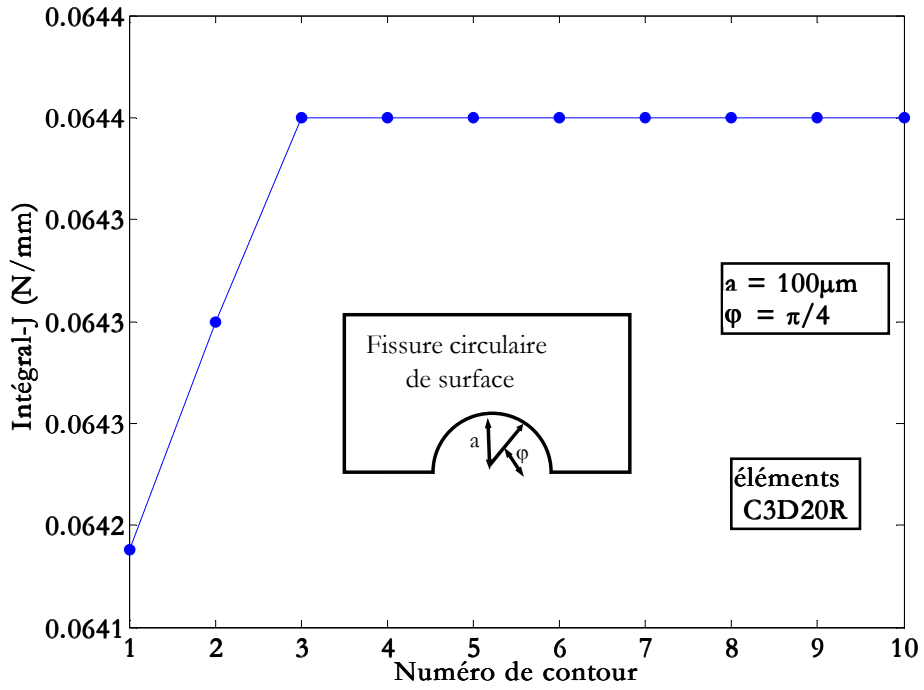


Figure VII-13 : Calcul de  $J$  pour une fissure circulaire ( $a/c = 1$  et  $a = 100 \mu\text{m}$ ).

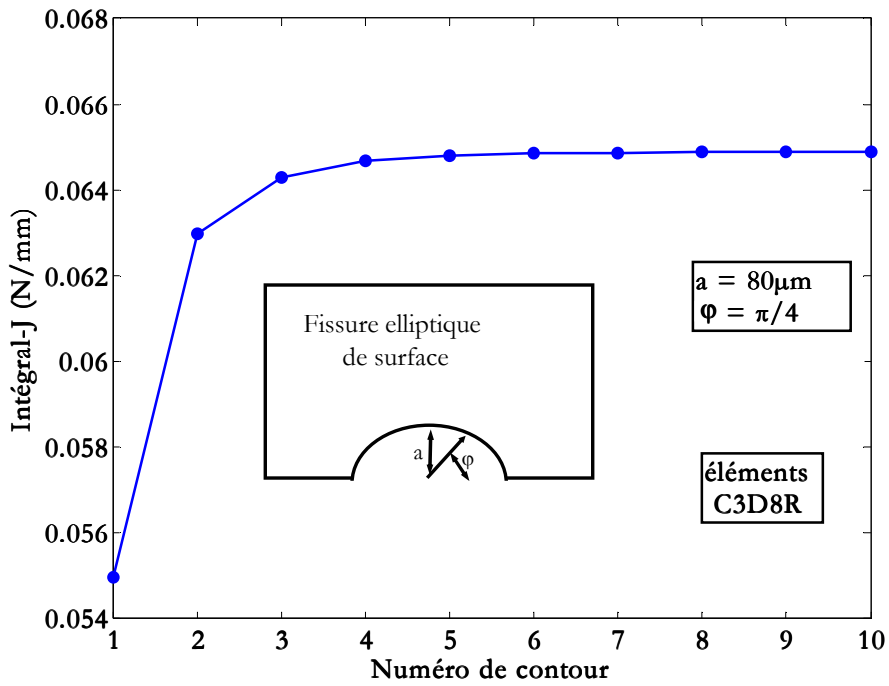


Figure VII-14 : Calcul de  $J$  pour une fissure elliptique ( $a/c = 0,8$  et  $a = 80 \mu\text{m}$ ).

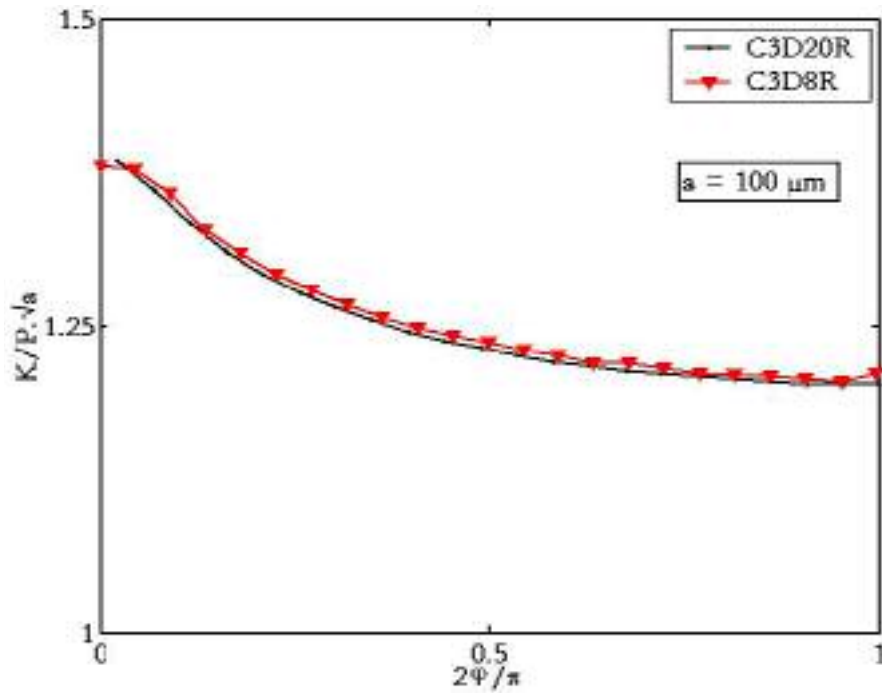


Figure VII-15 : Comparaison des valeurs de  $K$  pour une fissure circulaire ( $a/c = 1$  et  $a = 100 \mu\text{m}$ ) pour deux types d'éléments (C3D8R et C3D20R).

Nous désignons par  $K$  le facteur d'intensité de contrainte et  $P$  la charge appliquée à l'éprouvette ; enfin,  $a$  désigne la profondeur de la fissure. Ces figures montrent qu'il n'y a pas de différence significative entre les résultats en utilisant des éléments C3D8R ou C3D20R. Le facteur d'intensité de contrainte, plus élevé en surface, diminue pour des valeurs de  $\phi$  comprises entre 0 et  $\pi/4$ , ensuite il se stabilise lorsqu'on s'approche de  $\phi = \pi/2$ .

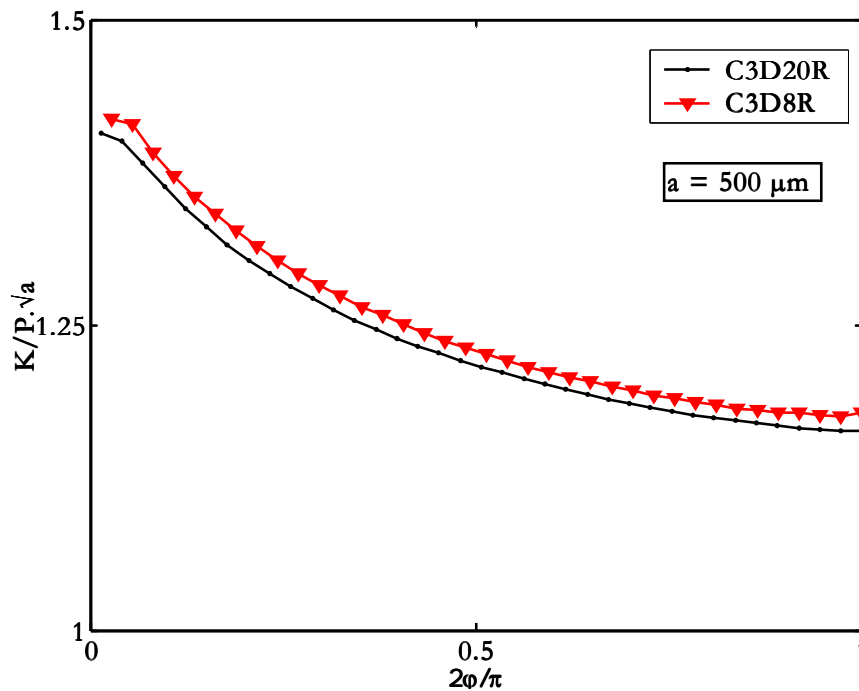


Figure VII-16 : Comparaison des valeurs de  $K$  pour une fissure circulaire ( $a/c = 1$  et  $a = 500 \mu\text{m}$ ) pour deux types d'éléments (C3D8R et C3D20R).

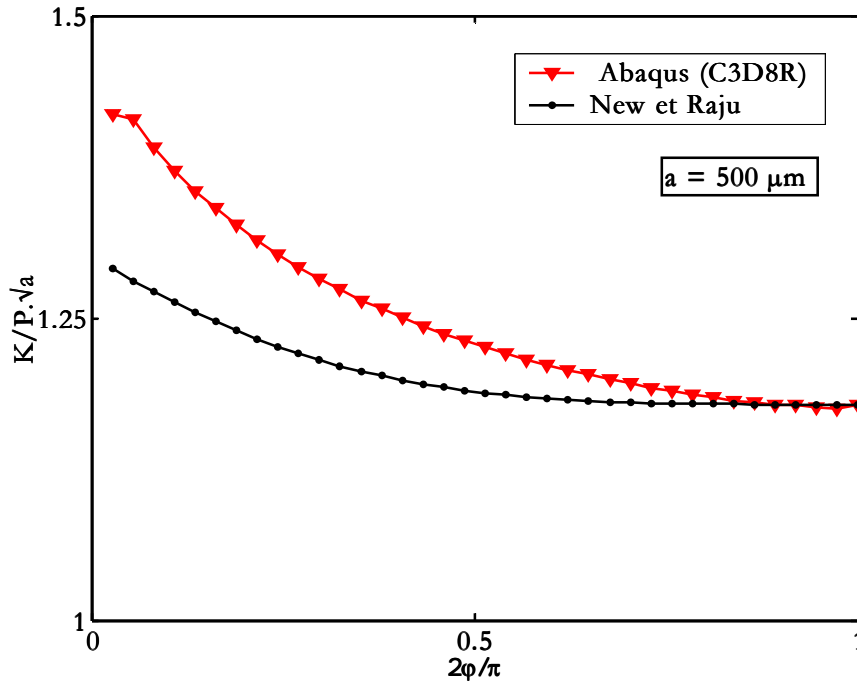


Figure VII-17 : Calcul de  $K$  par ABAQUS et les équations de Newman et Raju ( $a/c = 1$  et  $a = 500 \mu\text{m}$ ).

Dans la Figure VII-17, nous avons comparé les valeurs de  $K/P\sqrt{a}$  issues du calcul ABAQUS avec celles provenant des équations proposées par Newman et Raju pour une fissure circulaire de surface ( $a = 500 \mu\text{m}$ ). Cette figure montre que pour  $0 < \varphi < 3\pi/4$  le calcul ABAQUS donne des valeurs maximales de  $K$  plus élevées que celles obtenues avec les équations de Newman et Raju. En effet, la différence est de l'ordre de 10% pour  $\varphi = 0$ , puis s'amenuise pour finalement devenir nulle pour  $\varphi = \pi/2$ .

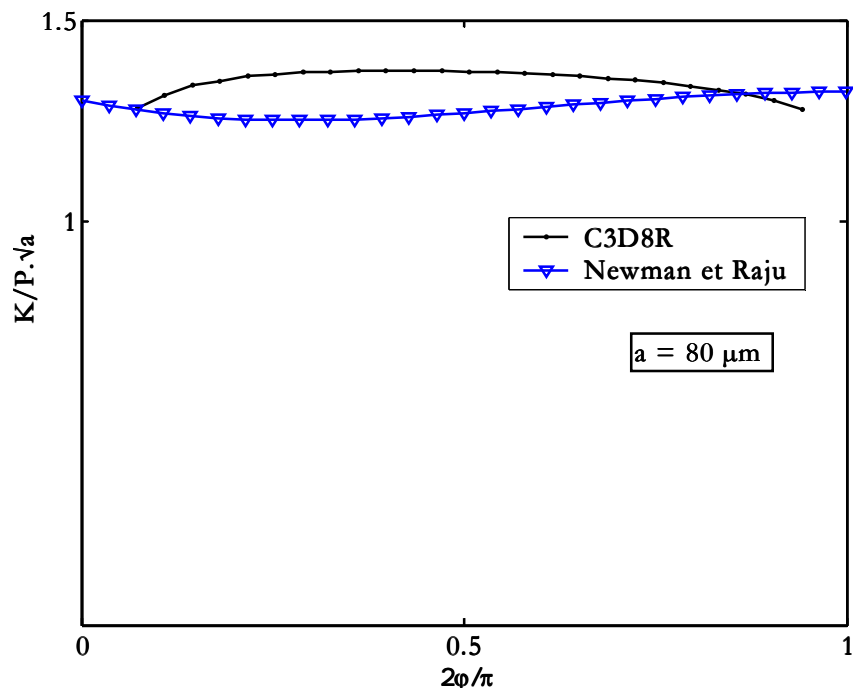


Figure VII-18 : Calcul de  $K$  par ABAQUS et les équations de Newman et Raju pour une fissure elliptique ( $a/c = 0,8$  et  $a = 80 \mu\text{m}$ ).

Nous verrons par la suite que le front de la fissure n'est pas toujours circulaire. En effet, nous avons remarqué qu'après rupture par fatigue, les fronts de fissuration possèdent une forme semi-elliptique (Partie D). Comme dans le cas des fissures circulaires, nous avons effectué des calculs par éléments finis pour des fissures semi-elliptiques avec un rapport longueur de fissure en surface sur profondeur  $a/2c$  égal à 0,4. La Figure VII-18 montre un exemple de comparaison entre le calcul ABAQUS et les expressions analytiques de Newman et Raju pour une fissure elliptique de profondeur 80  $\mu\text{m}$ .

Cette figure montre que la valeur du FIC reste pratiquement constante tout au long du front de fissure contrairement au cas de la fissure circulaire où le FIC diminue avec l'augmentation de  $\varphi$  : nous pouvons donc conclure sur la stabilité du front de fissuration elliptique correspondant à un rapport  $a/c$  égal à 0,8. Cette conclusion permet ainsi de retrouver numériquement un résultat expérimental (Chapitre XI).

En résumé, ces calculs par éléments finis nous ont permis d'estimer les valeurs de  $K/P\sqrt{a}$  pour une fissure de surface circulaire et elliptique qui vaut à cœur pour  $\varphi = \pi/2$  :

$$\frac{K}{P\sqrt{a}} \approx 1,18 \quad \text{pour une fissure circulaire de surface} \quad \text{(VII-4)}$$

$$\frac{K}{P\sqrt{a}} \approx 1,32 \quad \text{pour une fissure elliptique de surface} \quad \text{(VII-5)}$$

### VII-4-3 Chargement élastoplastique

La valeur du facteur de concentration de contrainte en surface est de l'ordre de 2,0 (Figure VI-9). Compte tenu des chargements appliqués à l'éprouvette, la plasticité à fond d'entaille reste confinée. Cette hypothèse nous permet d'appliquer, dans le cas élastoplastique, la même méthode de calcul de l'intégrale  $J$  que celle utilisée dans le cas élastique. Nous allons pour cela reprendre l'ensemble des calculs menés précédemment en introduisant cette fois la loi de comportement de l'acier S355NL établie expérimentalement et comparer les résultats obtenus. Ces calculs vont ainsi permettre de prendre en compte l'influence de la zone plastique formée lors de divers essais.

Les Figure VII-19 et Figure VII-20 indiquent les valeurs obtenues pour  $K/P\sqrt{a}$  dans le cas de fissures circulaires et elliptiques et montrent une différence entre les résultats dans le cas du chargement élastique et du chargement élastoplastique. Dans le cas élastoplastique, nous pouvons en particulier noter une diminution des valeurs de  $K/P\sqrt{a}$  par rapport au cas élastique : cette différence demeure au maximum de l'ordre de 10%.

Une éventuelle correction, apportée à la valeur de  $K$  par la plasticité, ne semble donc pas nécessaire dans notre cas d'étude. Dans l'ensemble des cas traités au cours de notre travail, le comportement reste très proche des estimations élastiques pour les chargements étudiés. Ces calculs suggèrent donc la validité d'une approche en termes de  $\Delta K$  pour le cas des fissures de surface.

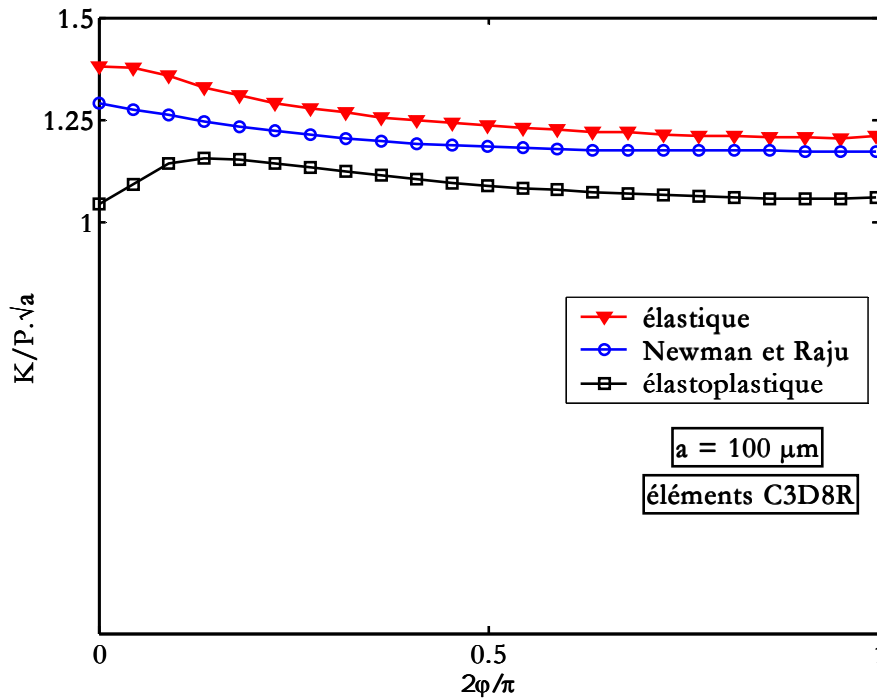


Figure VII-19 : Calcul de K pour des comportements élastique et élastoplastique pour une fissure circulaire ( $a/c = 1$  et  $a = 100 \mu\text{m}$ ,  $\sigma_{app} = 260 \text{ MPa}$ ).

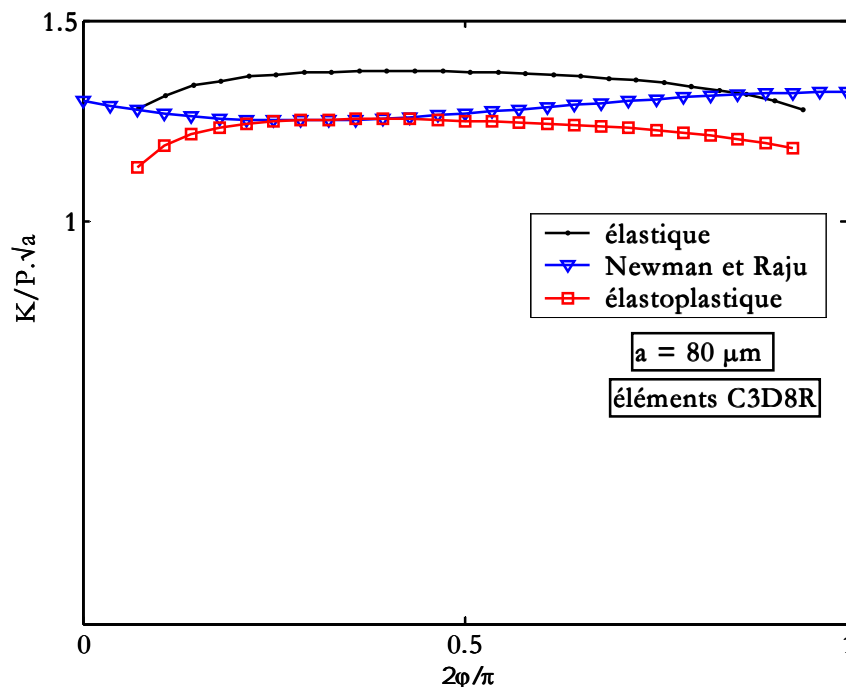


Figure VII-20 : Calcul de K pour des comportements élastique et élastoplastique pour une fissure elliptique ( $a/c = 0,8$  et  $a = 80 \mu\text{m}$ ,  $\sigma_{app} = 260 \text{ MPa}$ ).

#### VII-4-4 Correction possible

Dans le cas d'un chargement élastoplastique, cette différence pourrait par exemple être prise en compte par une correction de la longueur de fissure  $a$  due à cette zone plastique à l'aide d'un paramètre  $a_{zp}$  et considérer ainsi que la longueur de fissure serait :



$$a_{ep} = a + a_{r\bar{x}} \quad (\text{VII-6})$$

où  $r_{zp} = \frac{1}{n\pi} \left( \frac{K}{\sigma_y} \right)^2$ ,  $n = 2$  en contraintes planes et 6 en déformations planes.

Le principe de cette correction de la zone plastique est d'associer, à la grandeur calculée sous un chargement élastoplastique sur une éprouvette fissurée, la même grandeur sous un chargement élastique avec une fissure de longueur majorée. Dans notre étude, la grandeur est l'intégrale  $J$ . La correction entre  $J_p$ , déterminée dans le cas élastoplastique, et  $J_e$ , obtenue avec le même chargement dans le cas élastique, serait de la forme suivante :

$$J_p(a) = J_e \left( a \left( 1 + \frac{a+r_{zp}}{a} \right) \right) \quad (\text{VII-7})$$

où  $a$  est la longueur réelle de la fissure, la valeur de  $n$  sera déterminée par la correction.

Les corrections de zone plastique sont déterminées à partir du calcul de l'intégrale  $J$  dans le cas élastique et élastoplastique en tenant compte de la loi de comportement du matériau. La Figure VII-21 représente les variations  $J_p/J_e - 1$  en fonction de  $(K/\sigma_e)^2/a$  pour une fissure circulaire ( $a/c = 1$  et  $a = 100 \mu\text{m}$ ) et une fissure elliptique ( $a/c = 0,8$  et  $a = 80 \mu\text{m}$ ). Les valeurs des longueurs corrigées sont :

□  $r_{zp} = \frac{1}{3,27\pi} \left( \frac{K}{\sigma_y} \right)^2$  pour les fissures circulaires, ce qui équivaut à une correction de l'ordre de  $8 \mu\text{m}$  ;

□  $r_{zp} = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{K}{\sigma_y} \right)^2$  pour les fissures elliptiques, ce qui équivaut à une correction de l'ordre de  $6 \mu\text{m}$ .

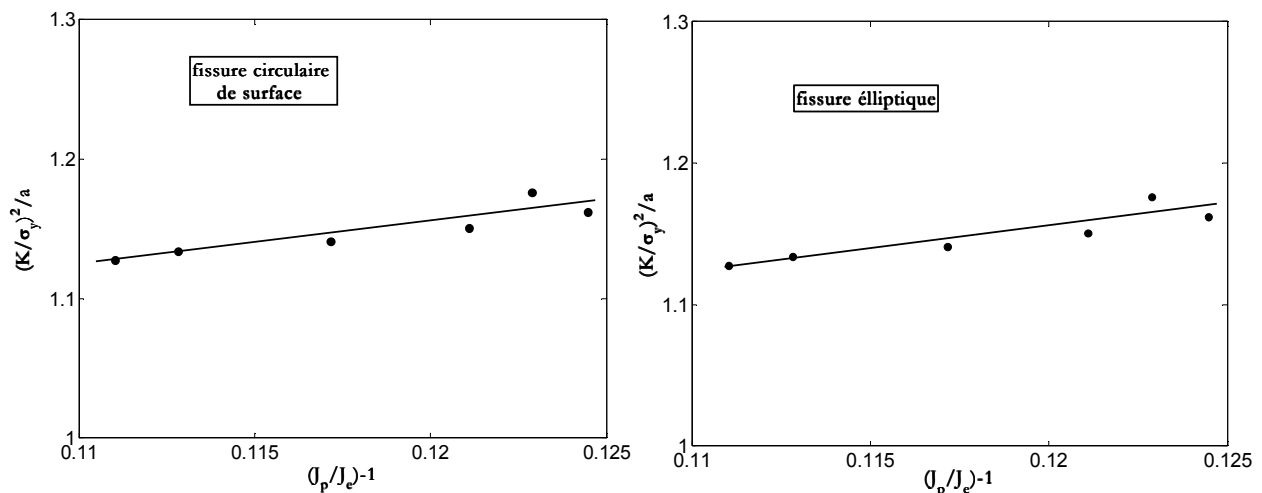


Figure VII-21 : Correction de la zone plastique

Les chargements appliqués sont légèrement supérieurs à la limite d'élasticité du matériau, ce qui donne un facteur d'intensité de contrainte faible et par conséquent, une petite correction de la longueur fissurée.

## VII-5 Calcul du FIC dans le cas d'une fissure de coin

Pour l'étude des fissures de coin, nous utiliserons la même technique numérique que celle employée pour les fissures de surface (méthode du zoom structural). L'étude sera effectuée sur des fissures de coin circulaire et elliptique de différentes tailles. Pour des raisons de symétrie, une demi-éprouvette sera cette fois maillée et nous avons utilisé, comme dans le cas de fissures de surface, des éléments C3D8R et C3D20R. Parallèlement à ces calculs aux éléments finis, nous évaluerons  $K_I$  à partir des expressions proposées par Newman et Raju [New83, Raj97(1), Raj97(2)] en y introduisant la répartition des contraintes obtenues numériquement dans le Chapitre VI. Ce travail sera appliqué à des configurations élastiques mais également élastoplastiques. Enfin, nous comparerons l'ensemble des résultats obtenus.

### VII-5-1 Formulation du FIC pour un chargement uniforme

Dans le cas d'une fissure de coin semi-elliptique présente dans une plaque de dimensions finies, la formulation du FIC proposée par Newman et Raju, pour une répartition uniforme de la contrainte dans l'échantillon, est la suivante (VII-8) :

$$K_I = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{E(k)} F_c \left( \frac{a}{c}, \frac{a}{t}, \varphi \right) \quad (\text{VII-8})$$

où  $\sigma$  est la contrainte de traction appliquée,  $E(k)$  l'intégrale elliptique complète de seconde espèce,  $c$  et  $a$  la longueur et la profondeur de la fissure,  $w$  et  $t$  la longueur et l'épaisseur de la plaque,  $\varphi$  un paramètre angulaire.  $F_c$  désigne le facteur de correction qui s'écrit :

$$F_c = \left[ M_1 + M_2 \left( \frac{a}{t} \right)^2 + M_3 \left( \frac{a}{t} \right)^4 \right] g_1 g_2 \cdot f_\varphi \quad (\text{VII-9})$$

où pour  $\frac{a}{c} \leq 1$  :

$$M_1 = 1.08 - 0.03 \left( \frac{a}{c} \right)$$

$$M_2 = -0.44 - \frac{1.06}{0.3 + \left( \frac{a}{c} \right)}$$

$$M_3 = -0.5 + 0.25 \left( \frac{a}{c} \right) + 14.8 \left( 1 - \frac{a}{c} \right)^{15}$$

$$g_1 = 1 + \left[ 0.08 + 0.4 \left( \frac{a}{t} \right)^2 \right] (1 - \sin \varphi)^3$$

$$g_2 = 1 + \left[ 0.08 + 0.15 \left( \frac{a}{t} \right)^2 \right] (1 - \cos \varphi)^3$$

$$f_\varphi = \left[ \left( \frac{a}{c} \right)^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \right]^{1/4}$$

$$E^2(K) = 1 + 1.464 \left( \frac{a}{c} \right)^{1.65}$$

### VII-5-2 Chargement élastique

Nous avons débuté cette étude par une vérification de l'indépendance de la valeur de l'intégrale  $J$  pour les fissures de coin circulaire (Figure VII-22) et elliptique (Figure VII-23) vis-à-vis du contour. Les Figure VII-24 à Figure VII-27 représentent les valeurs de  $K$  calculées à partir de l'intégrale  $J$  le long du front de fissure en coin de forme circulaire ( $a/c = 1$  ;  $a = 100 \mu\text{m}$  et  $500 \mu\text{m}$ ) et elliptique ( $a/c = 0,8$  ;  $a = 80 \mu\text{m}$ ). Nous avons utilisé des éléments à 8 nœuds et 20 nœuds pour réaliser ces calculs.

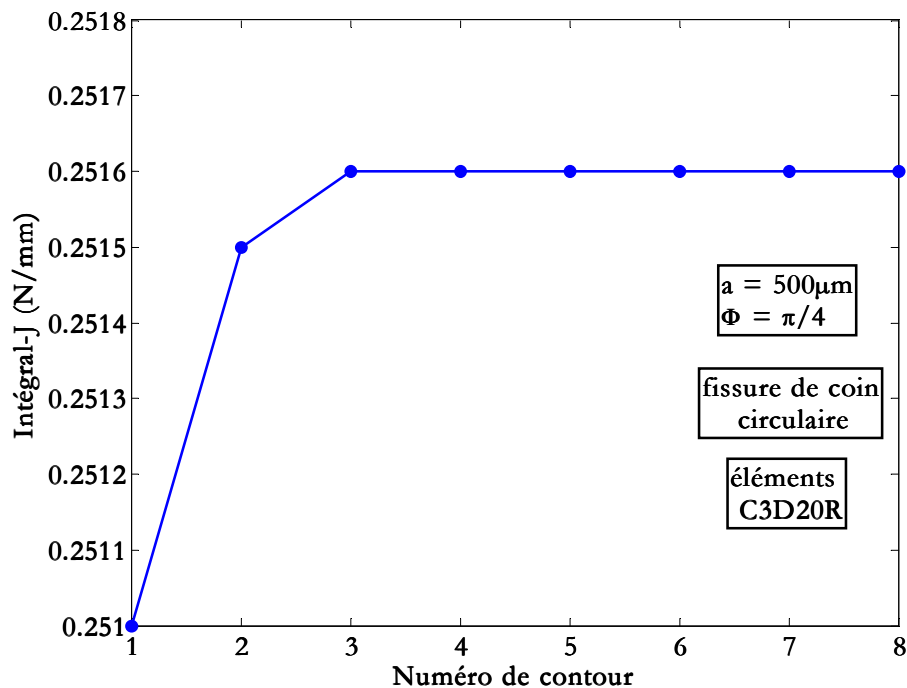


Figure VII-22 : Calcul de  $J$  pour une fissure circulaire ( $a/c = 1$  et  $a = 500 \mu\text{m}$ ).

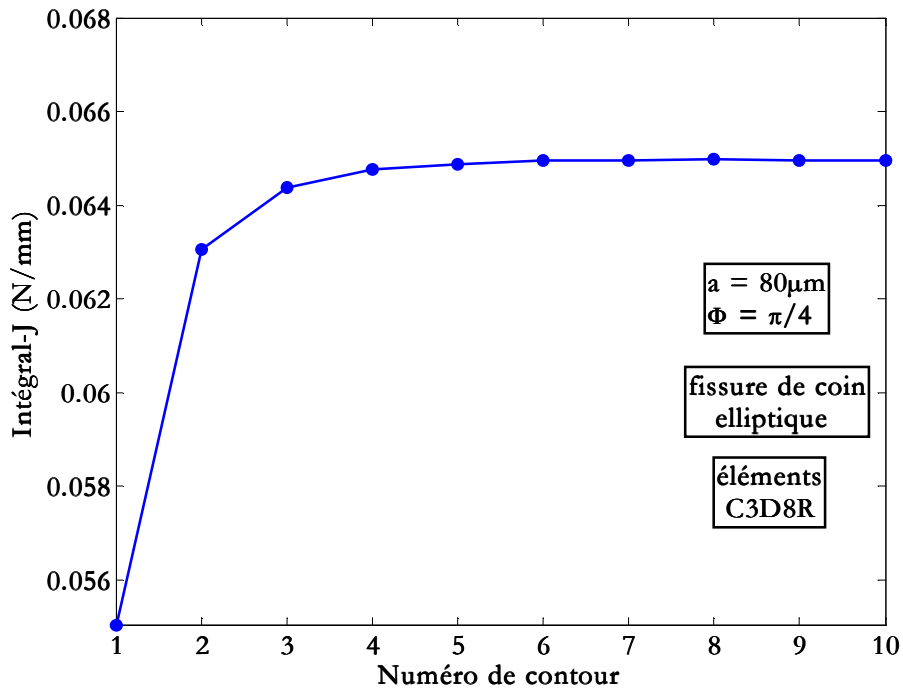


Figure VII-23 : Calcul de J pour une fissure elliptique ( $a/c = 0,8$  et  $a = 80 \mu\text{m}$ ).

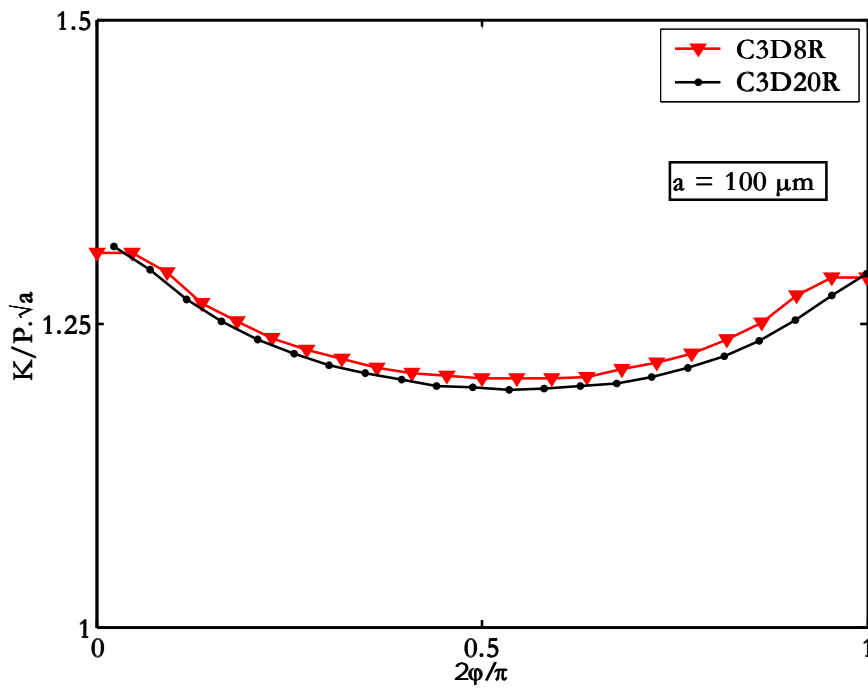


Figure VII-24 : Comparaison des valeurs de K pour deux types d'éléments dans le cas d'une fissure de coin circulaire ( $a/c = 1$  et  $a = 100 \mu\text{m}$ ).

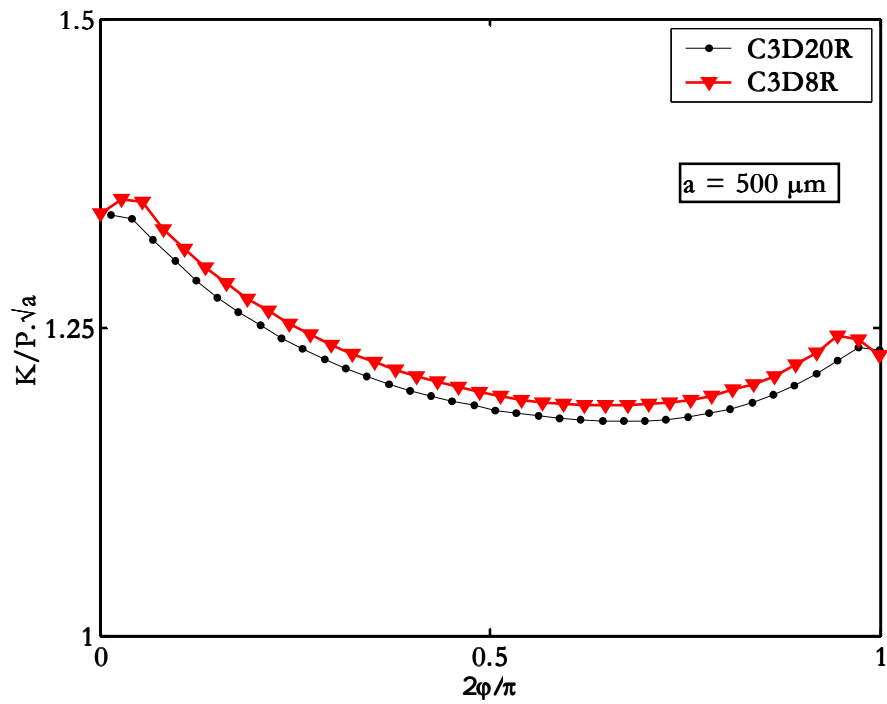


Figure VII-25 : Comparaison des valeurs  $K$  pour deux types d'éléments dans le cas d'une fissure de coin circulaire ( $a/c = 1$  et  $a = 500 \mu\text{m}$ ).

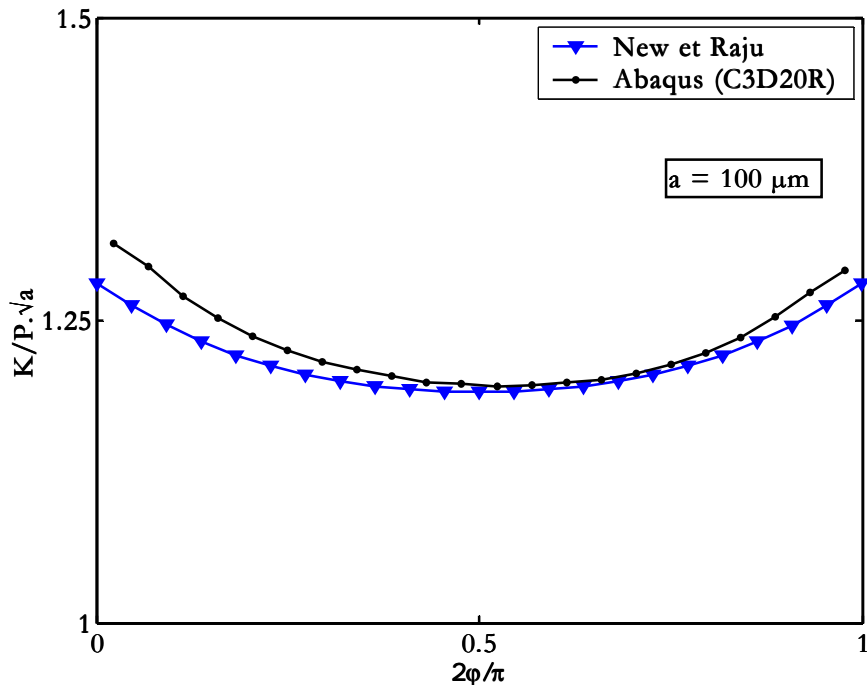


Figure VII-26 : Calcul de  $K$  par ABAQUS et les équations de Newman et Raju pour une fissure de coin circulaire ( $a/c = 1$  et  $a = 100 \mu\text{m}$ ).

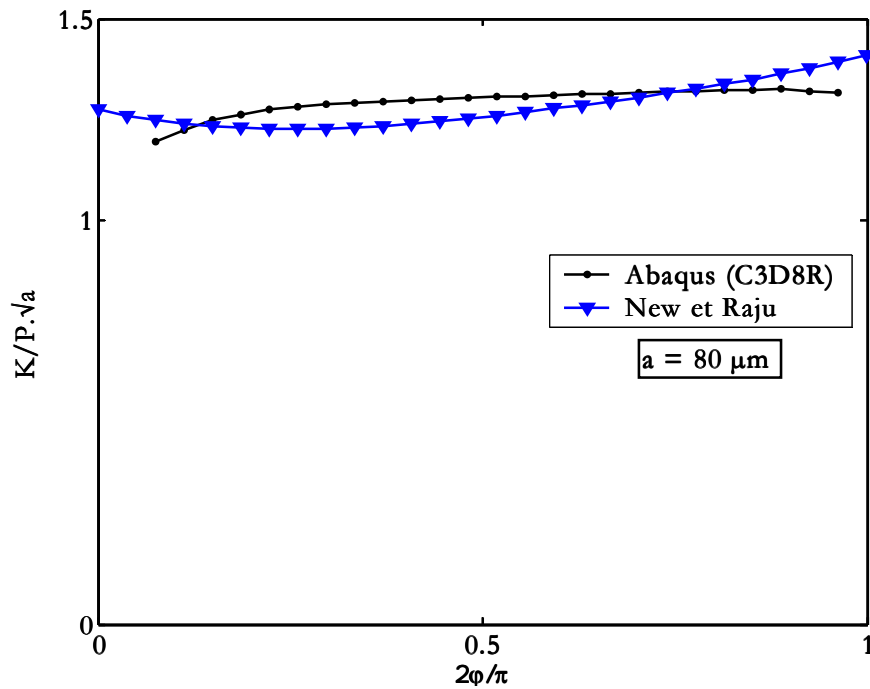


Figure VII-27 : Calcul de  $K$  par ABAQUS et les équations de Newman et Raju pour une fissure de coin elliptique ( $a/c = 0,8$  et  $a = 80 \mu\text{m}$ ).

Ces résultats montrent que les calculs effectués sont fiables dans la mesure où les calculs de  $K$  laissent apparaître encore une fois une différence maximale de l'ordre de 10% par rapport aux équations de Newman et Raju. De plus, à la vue des résultats obtenus pour les fissures semi-circulaires (Figure VII-24 à Figure VII-26), il semblerait que cette forme de front ne corresponde pas à un front de fissuration stable. Les mêmes conclusions avaient été tirées pour des fissures circulaires de surface (Figure VII-15 à Figure VII-17). Par contre, les fissures elliptiques ( $a/c = 0,8$ ) de surface ou de coin présentent un front stable (Figure VII-18 et Figure VII-27). En effet, les valeurs de  $K$  tout le long du front de fissure restent quasiment constantes.

Comme dans le cas de fissures de surface, la valeur de  $K/P\sqrt{a}$ , pour les fissures de coin circulaires ou elliptiques à partir des calculs par éléments finis, vaut à  $\varphi = \pi/2$  :

$$\frac{K}{P\sqrt{a}} \approx 1,28 \quad \text{pour les fissures circulaires de coin} \quad \text{(VII-10)}$$

$$\frac{K}{P\sqrt{a}} = 1,32 \quad \text{pour les fissures elliptiques de coin} \quad \text{(VII-11)}$$

### VII-5-3 Chargement élastoplastique

L'évolution de  $K/P\sqrt{a}$  en fonction de l'angle  $\varphi$  a été reproduite dans les Figure VII-28 et Figure VII-29. Ces figures indiquent les valeurs obtenues pour  $K/P\sqrt{a}$  dans le cas de fissures circulaires et elliptiques et montrent une différence entre les résultats dans le cas des chargement élastique et élastoplastique. De la même manière que pour les fissures de surface, nous pouvons noter une faible différence entre des calculs élastique élastoplastique pour l'ensemble des chargements

considérés. Une éventuelle correction, apportée à la valeur de  $K$  par la plasticité, ne semble donc pas encore une fois nécessaire dans cette étude.

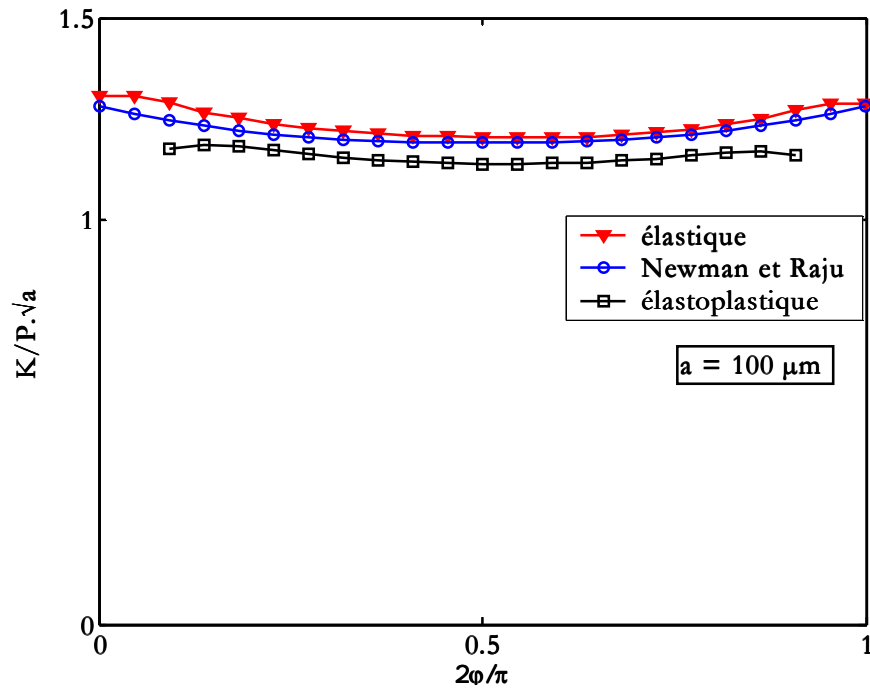


Figure VII-28 : Calcul de  $K$  pour des comportements élastique et élastoplastique pour une fissure de coin circulaire ( $a/c = 1$  et  $a = 100 \mu\text{m}$ ).

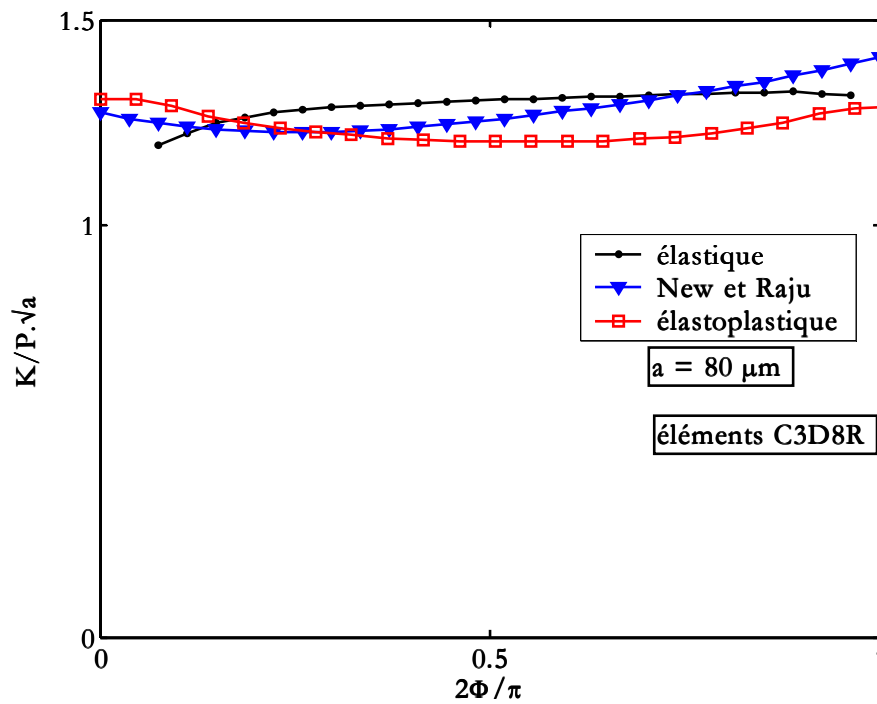


Figure VII-29 : Calcul de  $K$  pour des comportements élastique et élastoplastique pour une fissure de coin elliptique ( $a/c = 0,8$  et  $a = 80 \mu\text{m}$ )

## VII-6 Conclusions

L'ensemble des calculs aux éléments finis effectués au cours de ce chapitre demeure des simulations numériques représentatives des différentes configurations (chargement et fissuration) rencontrées par l'éprouvette destinée à l'étude des fissures courtes. Ceux-ci nous ont permis d'établir précisément la répartition des contraintes dans l'échantillon qu'il y ait ou non plastification en fond d'entaille.

Aux termes de tous ces calculs, il peut être clairement établi que pour des chargements  $\sigma_{app}$  appliqués à cet échantillon et inférieurs à 260 MPa, le « comportement » en pointe de fissure reste très proche des estimations élastiques à la seule condition de prendre en compte la répartition réelle des contraintes dans l'échantillon. Ces calculs suggèrent donc la validité d'une approche en termes de  $\Delta K$  pour le cas des fissures.

De plus, nous avons pu noter que l'utilisation des expressions de Newman et Raju, établies dans le cas d'un chargement uniforme, restent applicables à des cas de chargement non uniformes. En effet, sous réserve d'introduire dans ces expressions la répartition des contraintes rencontrées dans le congé de l'éprouvette (Chapitre VI), nous pouvons évaluer de manière précise les valeurs du facteur d'intensité de contrainte  $K$ .

Pour ces différentes raisons, les relations de Newman et Raju, qui peuvent aussi être remplacées par les expressions (VII-5) et (V-11), seront utilisées pour le calcul du facteur d'intensité des contraintes (FIC) des fissures courtes se développant dans l'échantillon étudié. Nous verrons par la suite que les différences de comportement entre fissures courtes et fissures longues observées sur les courbes de propagation sont telles que les corrections apportées au calcul du FIC sont en définitive de peu d'importance.