Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre, nous rassemblons des notions de base, quelques résultats fondamentaux utiles, notamment les définitions et les propriétés des opérateurs maximaux monotones dans un espace de Hilbert. Nous rappelons aussi des généralités sur l'analyse convexe et l'analyse fonctionnelle indispensables à l'étude de nos problèmes.

1.1 Notations générales et espaces usuels

Tout au long de ce mémoire nous adoptons les notations suivantes :

- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels.
- $|\cdot|$ est la valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$.
- $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.
- $\mathbb{R}_+$ est l'ensemble des nombres réels positifs.
- $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des n-uplets ordonnées $(x_1, ..., x_n)$ de nombres réels.
- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels.
- H est un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ et de la norme associée $\|\cdot\|$.
- I_H est l'identité de H.
- $\mathbf{1}_A$ est la fonction caractéristique de $A \subset H$, définie par $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 sinon.
- $D(A)$ est le domaine de définition d'un opérateur A, et A^0x quand il existe est l'élément de norme minimale de Ax, i.e., $\|A^0x\| = \inf\limits_{u \in Ax} \|u\|$.

- dom (φ) est le domaine effectif d'une fonction φ.
- $\rightharpoonup$ désigne la convergence faible.
- $\to$ désigne la convergence forte.
- $\mathcal{P}(X)$ ou 2^X est l'ensemble des parties d'un ensemble X.
- p.p. presque partout.
- $I := [0, T]$, $T > 0$ est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
- $\limsup\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} u_k = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{k\geq n} u_k$, où (u_n) est une suite réelle.
- $\liminf\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} u_k = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{k\geq n} u_k$, où (u_n) est une suite réelle.
- u' (resp. u'') est la dérivée première (resp. seconde) de $u : I \to H$ quand elles existent.
- $\nabla u = (\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n})$ est le gradient d'une fonction à plusieurs variables u.
- $C(I, H)$ est l'espace des fonctions continues de I dans H muni de la norme de la convergence uniforme $\|x\|_\infty = \sup\limits_{t\in I} \|x(t)\|$.
- $L^p(I, H)$, $p \in [1, +\infty[$, est l'espace des fonctions mesurables $x : I \to H$ telles que $\displaystyle\int_I \|x(t)\|^p dt < +\infty$ muni de la norme $\|x\|_{L^p(I,H)} = (\displaystyle\int_I \|x(t)\|^p dt)^{1/p}$. On note $L^p(I)$ si $H = \mathbb{R}$. Si $p = 2$ alors $L^2(I, H)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée notée $\|\cdot\|_2$ au lieu de $\|\cdot\|_{L^2(I,H)}$ (pour simplicité) tels que pour tous $f, g \in L^2(I, H)$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^T (f(t), g(t))dt = \int_0^T f(t)g(t)dt$$
$$\|f\|_2 = \left(\int_0^T (f(t), f(t))dt \right)^{1/2} = \left(\int_0^T \|f(t)\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

- fg peut être confondu avec le produit scalaire de deux fonctions f, g dans $L^2(I, H)$.
- $L^2_w(I, H)$ est l'espace $L^2(I, H)$ muni de la topologie faible.
- $L^2_{loc}(\mathbb{R}, H)$ est l'espace des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans H telle que la restriction de chacune d'elles à tout segment $[a, b]$ est $L^2([a, b], H)$ pour tout couple de réels (a, b).
- $L^\infty(I, H)$ est l'espace des fonctions essentiellement bornées définies sur I à valeurs dans H muni de la norme

$$\|f\|_{L^\infty(I,H)} = \inf\{c \geq 0 : \quad \|f(t)\| \leq c \;\; p.p.\}.$$

On note $L^\infty(I)$ si $H = \mathbb{R}$.

- $W^{1,2}(I,H)$ est l'espace des fonctions u absolument continues à dérivée dans $L^2(I,H)$.
- $W^{2,2}(I,H)$ est l'espace des fonctions u absolument continues à dérivée w absolument continue avec w' dans $L^2(I,H)$.
- $W^{2,2}_{loc}(\mathbb{R},H)$ (resp. $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R},H)$) est l'espace des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans H telle que la restriction de chacune d'elles à tout segment $[a,b]$ est $W^{2,2}([a,b],H)$ (resp. $W^{1,2}([a,b],H)$) pour tout couple de réels (a,b).

Le contenu du chapitre a été pris des références [5], [6], [15], [16], [17], [18].

1.2 Rappels et résultats fondamentaux

Dans tout ce qui s'en suit X est un ensemble non vide.

Définition 1.1. *Soit $\Gamma \subset \mathcal{P}(X)$, où $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble de toutes les parties de X. Alors, Γ est dite topologie si*

1. $\emptyset \in \Gamma$, $X \in \Gamma$.
2. *Toute intersection finie d'éléments de Γ appartient à Γ.*
3. *Toute réunion quelconque d'éléments de Γ appartient à Γ.*

Dans ce cas, le couple (X,Γ) est dit espace topologique.
Les éléments de Γ sont appelés ensembles ouverts.
Les sous-ensembles fermés de X sont les complémentaires des ouverts.

Caractérisations 1.2.
Soit (X,Γ) un espace topologique. On dit qu'une partie V de X est un voisinage de $x \in X$ s'il existe un ouvert U de X tel que $x \in U \subset V$.
On appelle adhérence de A notée $\overline{A}$ le plus petit fermé contenant A.
On appelle intérieur de C noté $Int(C)$ le plus grand ouvert de X inclus dans C.
En topologie, une fonction fermée est une fonction pour laquelle l'image de tout fermé est fermée.

Définition 1.3. *On dit que X est un espace séparé si pour tous points distincts x et y dans X, il existe un voisinage V_x de x dans X, et un voisinage V_y de y dans X tels que $V_x \cap V_y = \emptyset$.*

Définition 1.4. *On appelle tribu sur X toute famille Σ de parties de X telle que :*

1. $\emptyset \in \Sigma$.

2. *Σ est stable par passage aux complémentaires.*

3. *Σ est stable par passage aux réunions dénombrables.*

Dans ce cas, le couple (X, Σ) est appelé espace mesurable.

Définition 1.5. *(Application mesurable)*
Soient (X_1, Σ_1) et (X_2, Σ_2) deux espaces mesurables. Une application $f : (X_1, \Sigma_1) \to (X_2, \Sigma_2)$ est dite mesurable si $f^{-1}(A) \in \Sigma_1$, pour tout $A \in \Sigma_2$.

Définition 1.6. *Soit* $(\mathrm{X},\ \Sigma)$ *un espace mesurable. Une mesure sur* $(\mathrm{X},\ \Sigma)$ *est une application $\mu : \Sigma \to [0,\ +\infty]$ vérifiant*

1. $\mu(\emptyset) = 0$.

2. *Pour toute famille $\{A_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ d'éléments de Σ deux à deux disjoints (c'est-à-dire que $A_n \bigcap A_m = \emptyset$ lorsque $n \neq m$), on a la propriété d'additivité dénombrable*
$$\mu\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

On dit alors que $(\mathrm{X},\ \Sigma,\ \mu)$ *est un espace mesuré.*
Lorsque $\mu(\mathrm{X}) < \infty$, on dit que la mesure μ est finie.
Un ensemble A est dit μ-négligeable s'il existe $B \in \Sigma$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

Définition 1.7. *(Mesure de Lebesgue) Il existe une plus petite mesure définie sur une tribu de $\mathbb{R}^n$ qui soit complète et coïncide sur les pavés avec leur volume (c'est-à-dire le produit des longueurs de leurs côtés). Cette mesure est appelée la mesure de Lebesgue et sa tribu de définition la tribu de Lebesgue.*

Définition 1.8. (*Propriété vraie μ-presque partout*)
On dit qu'une propriété est vraie μ-presque partout sur l'espace mesuré $(\mathrm{X},\ \Sigma,\ \mu)$ *si la propriété est fausse sur une partie μ-négligeable de X, on note μ p.p.*
Si μ est la mesure de Lebesgue, on écrit p.p. pour simplicité.

Définition 1.9.
L'application $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0,\ +\infty[$ est une distance sur X *si pour tous $x,\ y,\ z \in \mathrm{X}$, on a*

1. *$d(x,\ y) = 0$ si et seulement si $x = y$,*

2. *$d(x,\ y) = d(y,\ x)$,*

3. *$d(x,\ z) \leq d(x,\ y) + d(y,\ z)$ (inégalité triangulaire).*

   Dans ce cas, on dit que $(\mathrm{X},\ d)$ *est un espace métrique.*

Caractérisations 1.10. *Soit X un espace métrique.*

(i) Un sous-ensemble K de X est dit relativement compact, si de toute suite dans K on peut extraire une sous-suite convergente dans X.

(ii) Un sous-ensemble D de X est dit compact, si de toute suite dans D on peut extraire une sous-suite convergente dans D.

Définition 1.11. *On appelle norme sur un espace vectoriel* X *réel ou complexe, de dimension finie ou infinie, toute application* $x \mapsto ||x||$ *de* X *dans* $\mathbb{R}_+$ *vérifiant les conditions*

i) $\forall x \in \mathrm{X} : \ ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

ii) $\forall x \in \mathrm{X}, \forall \lambda \in \mathbb{R} : \ ||\lambda x|| = |\lambda|.||x||,$

iii) $\forall x, y \in \mathrm{X} : \ ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||.$

Toute norme définit naturellement une distance : $d(x, y) = ||x - y||$.

Définition 1.12. *On appelle espace vectoriel normé le couple* $(\mathrm{X}, ||\cdot||)$ *où* X *est un espace vectoriel et* $||\cdot||$ *est une norme sur* X.

Définition 1.13. *Soit* X *un espace métrique. La suite* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est dite une suite de Cauchy si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N}, p > q \geq n_0 : \ ||x_p - x_q|| < \varepsilon.$$

Définition 1.14. *Soit* $(\mathrm{X}, ||\cdot||)$ *un espace vectoriel normé. On dit que* $(\mathrm{X}, ||\cdot||)$ *est un espace complet si et seulement si toute suite de Cauchy pour* $||\cdot||$*, composée d'éléments de* X*, admet une limite dans* X*. On dit aussi que* X *est un espace de Banach.*

Définition 1.15. *(Continuité séquentielle)*
Soient (X_1, Γ_1)*,* (X_2, Γ_2) *deux espaces topologiques et* $f : \mathrm{X}_1 \longrightarrow \mathrm{X}_2$*. La fonction* f *est dite séquentiellement continue en* $x \in \mathrm{X}_1$ *si pour toute suite* $(x_n) \subset \mathrm{X}_1$ *telle que* $x_n \longrightarrow x$*, alors, on a* $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.
La fonction f *est séquentiellement continue sur* X_1 *si elle est séquentiellement continue en tout point de* X_1.

Remarque 1.16. *Dans les espaces métriques, la continuité séquentielle est équivalente à la continuité.*

Définition 1.17. (1) *Un recouvrement de* X *est une famille* $(A_i)_{i\in I}$ *de partie de* X *telle que* $X \subset \bigcup_{i\in I} A_i$.
Si de plus, I *est un ensemble fini, on dit que* $(A_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement fini de* X.
(2) *Soit* $(A_i)_{i\in I}$ *un recouvrement de* X*. Soit* $J \subset I$ *tel que* $X \subset \bigcup_{j\in J} A_j$*, on dit que* $(A_j)_{j\in J}$ *est un sous-recouvrement de* $(A_i)_{i\in I}$.
(3) *Un recouvrement ouvert de* X *est une famille d'ouverts* $(U_i)_{i\in I}$ *tel que* $X \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Définition 1.18. *On dit que* (X, Γ) *espace topologique est compact s'il est séparé et de tout recouvrement ouvert de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

Définition 1.19. *Soit* (X, Γ) *un espace topologique. On dit que*

(i) $K \subset \mathrm{X}$ *est compact si de tout recouvrement de* K *par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini.*

(ii) $A \subset \mathrm{X}$ *est relativement compact si* $\overline{A}$ *est compact.*

(iii) $D \subset \mathrm{X}$ *est compact si et seulement si* D *est fermé et relativement compact.*

Définition 1.20. *Soient* X, Y *deux espaces vectoriels métriques. Une application continue* A *de* X *dans* Y *est dite compacte si et seulement si l'image de toute partie bornée de* X *est relativement compacte de* Y.

Soient E, X deux espaces normés, $(f_n : X \to E)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications et $f : X \to E$.

Définition 1.21. (*Convergence ponctuelle*)
On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge ponctuellement vers* f *(sur* X*) si et seulement si, pour tout* x *de* X*, la suite* $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge vers* $f(x)$ *dans* E.

Définition 1.22. *(Convergence uniforme)*

1) On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f*(sur* X*) si et seulement si :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in X,\quad (n \geq N \Rightarrow ||f_n(x) - f(x)|| < \varepsilon).$$

2) Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* f *sont bornées, alors pour montrer que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* f *sur* X*, il faut et il suffit de montrer que :*

$$||f_n - f||_\infty \to 0.$$

Définition 1.23.
Soit X *un espace topologique et* $X' = \{f : X \to \mathbb{R}/f \text{ linéaire continue}\}$ *son dual topologique. Soit* $f \in X'$ *et soit*

$$\begin{aligned} \varphi_f : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \varphi_f(x) = \langle f, x\rangle_{X',X}, \end{aligned}$$

où l'on note $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X,X'}$ *les crochets de dualité.*
Lorsque f parcourt X'*, on obtient une famille d'applications* $(\varphi_f)_{f\in X'}$*. On appelle topologie*

faible sur X, la topologie la moins fine sur X rendant les applications $(\varphi_f)_{f\in X'}$ *continues sur* X *et on la note* $\sigma(X, X')$.

Définition 1.24. *(Convergence faible)*
Soit (x_n) *une suite de points de* X, *alors*

$$x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \langle f, x_n\rangle_{X',X} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{X',X} \; \forall f \in X'.$$

On note que la convergence forte entraine la convergence faible.

Définition 1.25. *(Produit scalaire) Soit* H *un espace vectoriel réel. Un produit scalaire sur* H *est une application de* $H \times H$ *dans* $\mathbb{R}$ *qui associe à tout couple* (x, y) *le produit scalaire noté encore* (x, y) *telle que*
(i) *L'application* $x \longmapsto (x, y)$ *est linéaire, i.e., pour tous* $x, y_1, y_2 \in H$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ *on a*

$$(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1(x, y_1) + \alpha_2(x, y_2),$$

(ii) *Pour tous* $x, y \in H$, *on a :* $(x, y) = (y, x)$.
(iii) *Pour tout* $x \in H$, *on a :* $(x, x) \geq 0$ *et* $((x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.

Définition 1.26. *Un espace préhilbertien (réel) est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire* $(H, (\cdot, \cdot))$. *Sur cet espace, on définit une norme par* $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$, $x \in H$, *dite norme induite par le produit scalaire.*

Définition 1.27. *Un espace de Hilbert réel est un espace préhilbertien (réel) complet, i.e., un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui est complet pour la norme associée.*

Théorème 1.28. *(Inégalité de Cauchy-Schwarz) Soit* H *un espace préhilbertien, alors, on a pour tous* $x, y \in H$

$$|(x, y)| \leq \sqrt{(x, x)}\sqrt{(y, y)}.$$

De cette inégalité, résulte la continuité des applications de H *dans* $\mathbb{R}$ *:* $x \longmapsto (x, y)$ *et* $y \longmapsto (x, y)$.

Corollaire 1.29. *Soit* H *un espace de Hilbert. Alors*
Toute suite convergente de H *est bornée.*
Toute suite bornée dans H *admet une sous-suite faiblement convergente.*
Soit $(x_n) \subset H$, *si* $x_n \rightharpoonup x$, *alors* $(\|x_n\|)$ *est bornée et* $\|x\| \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

1.3 Généralités sur l'analyse convexe et l'analyse fonctionnelle

Commençons par quelques préliminaires sur les fonctions convexes.

Définition 1.30. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$. Le domaine effectif de φ est l'ensemble noté* $\mathrm{dom}\,(\varphi)$ *défini par*

$$\mathrm{dom}\,(\varphi) = \{x \in H : \ \varphi(x) < +\infty\}.$$

Définition 1.31. *Soit $\varphi : H \to \overline{\mathbb{R}}$, on dit que φ est propre si et seulement si pour tout $x \in H$ $\varphi(x) \neq -\infty$, et il existe $x_0 \in H$ tel que $\varphi(x_0) \neq +\infty$.*
Alors une fonction $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est propre si et seulement si $\mathrm{dom}\,(\varphi) \neq \emptyset$.

Définition 1.32. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$, on dit que φ est convexe sur H si et seulement si,*

$$\forall x, y \in \mathrm{dom}\,(\varphi), \forall \lambda \in [0,1], \varphi(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda\varphi(x) + (1-\lambda)\varphi(y).$$

Remarque 1.33. *1. La somme de deux fonctions convexes est convexe.*
2. Le produit d'une fonction convexe par un réel positif est convexe.
3. La boule de centre $x \in H$, et de rayon r est convexe.

Définition 1.34. *Une fonction $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est dite semi-continue inférieurement (sci) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_\lambda = \{x \in H, \ \ \varphi(x) \leq \lambda\}$ est fermé.*

Remarque 1.35. *Si φ et ψ sont deux fonctions sci en x_0 alors, $\varphi + \psi$ l'est aussi.*

Définition 1.36. *(Différentiabilité au sens de Fréchet)*
Soient E un espace vectoriel normé, F un espace vectoriel topologique séparé, f une application de E dans F et a un point de E.
On dit que f est différentiable (au sens de Fréchet) au point a s'il existe une application linéaire continue $u_a : E \to F$ telle que :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - u_a(h)}{||h||} = 0,$$

où $||\cdot||$ est la norme sur E. Dans ce cas l'application u_a est appelée différentielle de Fréchet de f au point a.
Si f est différentiable en tout point de E, on dit que f est différentiable sur E.

Théorème 1.37. *Soit un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Une fonction $\varphi : [a,b] \to H$ est dite absolument continue si et seulement si elle est l'intégrale de sa dérivée, i.e.,*

$$\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b \varphi'(t)dt.$$

La fonction $\varphi : \mathbb{R} \to H$ est dite localement absolument continue si sa restriction à tout segment $[a, b]$ est absolument continue pour tout couple de réels (a, b).

Remarque 1.38.

1. *Toute fonction absolument continue est une fonction continue.*
2. *Toute fonction absolument continue est dérivable presque partout.*

Définition 1.39. *(Fonction Lipschitz)*
Soit $\varphi : I \to H$. On dit que φ est Lipschitz de rapport $L > 0$ si et seulement si

$$\forall\ x,\ y\ \in\ H:\ ||\varphi(x) - \varphi(y)|| \leq L|x - y|.$$

On dit que φ est une contraction si, elle est Lipschitz de rapport $0 < L < 1$.

Remarque 1.40.
Toute fonction Lipschitz est absolument continue.

1.4 Opérateurs maximaux monotones

Pour commencer, nous définissons les multi-applications, aussi appelées correspondances, applications multivoques ou multi-fonctions.

Définition 1.41. *Soient T, Y deux ensembles non vides, on appelle multi-application définie sur T à valeurs dans Y toute application de T ayant ses valeurs dans 2^Y. On note*

$$F : T \rightrightarrows Y \quad ou \quad F : T \to 2^Y,$$

c'est à dire pour tout t dans T : $F(t)$ est un sous-ensemble de Y.

Définition 1.42. *Soit $F : T \rightrightarrows Y$ une multi-application.*
On appelle domaine de F que l'on note $D(F)$ l'ensemble suivant

$$D(F) = \{t \in T :\ F(t) \neq \emptyset\}.$$

On appelle image de F que l'on note $R(F)$ l'ensemble

$$R(F) = \{x \in Y :\ \exists t \in T, x \in F(t)\} = \bigcup_{t \in D(F)} F(t).$$

Définition 1.43. *Un opérateur $A : H \rightrightarrows H$ est dit monotone si pour tous $x_1, x_2 \in D(A)$ et tous $y_1 \in Ax_1$, $y_2 \in Ax_2$, on a*

$$(x_2 - x_1, y_2 - y_1) \geq 0. \tag{1.1}$$

Remarque 1.44. *Si $A : H \rightrightarrows H$ est monotone et si $0 \in A0$ alors pour tous $x \in D(A)$, $y \in Ax$ on a $(y, x) \geq 0$.*
Soit $A : H \to H$ un opérateur linéaire, alors A est dit monotone si pour tout $x \in D(A)$, on a $(Ax, x) \geq 0$.

Définition 1.45. *Un opérateur $A : H \rightrightarrows H$ est dit maximal monotone s'il est monotone et si toute extension monotone de A coïncide avec A.*
Propriété : *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. Alors, pour tout $x \in D(A)$, Ax est non vide convexe fermé, et A^0x existe et est unique.*

Définition 1.46. *Un opérateur $A : H \rightrightarrows H$ est dit demi-fermé si la condition suivante est satisfaite : Si $x_n \in D(A), y_n \in Ax_n$ tels que $x_n \to x$ et $y_n \rightharpoonup y$ dans H alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.*

Proposition 1.47. *Tout opérateur maximal monotone est demi-fermé.*

Définition 1.48. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$. On appelle l'opérateur $J_\lambda = (I_H + \lambda A)^{-1}$ la résolvante de A, et l'opérateur $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I_H - J_\lambda)$ l'approximation de Yosida de A, pour tout $\lambda > 0$. Les opérateurs A_λ, J_λ sont univoques et définis sur l'espace H tout entier.*
Si l'opérateur maximal monotone A satisfait

$$A \text{ est impair} \quad (i.e., A(-x) = -Ax,\ \forall x \in D(A)), \tag{1.2}$$

alors $0 \in A0$ et A_λ est impair pour tout $\lambda > 0$.

Proposition 1.49. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$, on a équivalence entre les trois propriétés suivantes :*

1. *A est maximal monotone.*
2. *A est monotone et $R(I_H + A) = H$.*
3. *Pour tout $\lambda > 0$, $(I_H + \lambda A)^{-1}$ est une contraction définie sur H tout entier.*

Théorème 1.50. *Soient M, N deux opérateurs maximaux monotones tels que M est univoque, $0 \in N0$ et*

$$(Mu, N_\lambda u) \geq 0 \quad \forall u \in D(M), \lambda > 0.$$

Alors $M + N$ est maximal monotone. Si de plus il existe $c > 0$ tel que

$$\|u\| \leq c\|(M + N)^0 u\| \qquad \forall u \in D(M) \cap D(N),$$

alors $R(M + N) = H$.

Proposition 1.51. *Soit A une application monotone univoque de $D(A) = H$ dans H. On suppose que A est hémi-continu, c'est à dire pour tout $x \in H$ et tout $y \in H$, $A((1-t)x+ty)) \to Ax$ quand $t \to 0$, alors A est maximale monotone.*

Proposition 1.52. *Soit $A : D(A) \subset H \rightrightarrows H$ un opérateur maximal monotone. Alors, on a*

(i) (a) $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$, $\forall x \in H$ et $\|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\|$ $\forall x \in D(A)$.

(b) L'opérateur A_λ est maximal monotone et Lipschitz de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

(ii) Si $x_\lambda \to x$ et $A_\lambda x_\lambda \rightharpoonup y$, quand $\lambda \to 0^+$, alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.

Démonstration.

(i) (a) Soit $x \in H$. On pose $v = J_\lambda x = (I_H + \lambda A)^{-1}x$. Alors $x = v + \lambda y$ où $y \in Av$. Or $A_\lambda x = \frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda x)$ donc

$$A_\lambda x = \frac{1}{\lambda}(x - v) = y \in Av = AJ_\lambda x.$$

Montrons maintenant que $\|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\|$ pour tout $x \in D(A)$.

Montrons d'abord l'inégalité $\|A_\lambda x - A^0 x\|^2 \leq \|A^0 x\|^2 - \|A_\lambda x\|^2$.

Soit $x \in D(A)$, alors on a

$$\begin{aligned}
\|A_\lambda x - A^0 x\|^2 &= \|A^0 x\|^2 + \|A_\lambda x\|^2 - 2(A_\lambda x, A^0 x) \\
&= \|A^0 x\|^2 + \|A_\lambda x\|^2 - 2(A_\lambda x, A^0 x + A_\lambda x - A_\lambda x) \\
&= \|A^0 x\|^2 + \|A_\lambda x\|^2 - 2(A_\lambda x, A_\lambda x) - 2(A_\lambda x, A^0 x - A_\lambda x) \\
&= \|A^0 x\|^2 - \|A_\lambda x\|^2 - 2(A_\lambda x, A^0 x - A_\lambda x)
\end{aligned}$$

Rappelons que $A^0 x$ est un élément de Ax, i.e., $A^0 x \in Ax$ et $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$. Comme A est monotone, il résulte pour tout $\lambda > 0$

$$(A_\lambda x, A^0 x - A_\lambda x) = \frac{1}{\lambda}(x - J_\lambda x, A^0 x - A_\lambda x) \geq 0,$$

et alors $-2(A_\lambda x, A^0 x - A_\lambda x) \leq 0$.

Il s'en suit que

$$\|A_\lambda x - A^0 x\|^2 \leq \|A^0 x\|^2 - \|A_\lambda x\|^2,$$

et

$$\|A_\lambda x - A^0 x\|^2 + \|A_\lambda x\|^2 \leq \|A^0 x\|^2.$$

On conclut que $\|A_\lambda x\|^2 \leq \|A^0 x\|^2$. D'où $\|A_\lambda x\| \leq \|A^0 x\|$ pour tout $x \in D(A)$.

(b) **Montrons que A_λ est maximal monotone et Lipschitz de rapport $\frac{1}{\lambda}$.**

Soient $x_1, x_2 \in H$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) \leq \|x_1 - x_2\| \|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|. \tag{1.3}$$

Or

$(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) = (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, \lambda A_\lambda x_1 - \lambda A_\lambda x_2) + (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2)$
$= \lambda(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2) + (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2)$

$$= \lambda\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|^2 + (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2), \tag{1.4}$$

en remplaçant x_i par $\lambda A_\lambda x_i + J_\lambda x_i$ $i = 1, 2$.

De (i) (a), on a $A_\lambda x_i \in AJ_\lambda x_i$, $i = 1, 2$, l'opérateur A étant monotone entraine que

$$(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, J_\lambda x_1 - J_\lambda x_2) \geq 0.$$

De retour à (1.4), on trouve pour tout $\lambda > 0$

$$(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) \geq \lambda\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|^2. \tag{1.5}$$

On conclut que $(A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) \geq 0$ pour tous $x_1, x_2 \in H$, et A_λ est monotone.

En combinant (1.3) et (1.5), on trouve

$$\lambda\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|^2 \leq (A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2, x_1 - x_2) \leq \|x_1 - x_2\|\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|,$$

et alors

$$\lambda\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|^2 \leq \|x_1 - x_2\|\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\|,$$

ce qui donne

$$\|A_\lambda x_1 - A_\lambda x_2\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x_1 - x_2\|, \ \forall x_1, x_2 \in H.$$

D'où A_λ est Lipschitz de rapport $\frac{1}{\lambda}$.

Maintenant il suffit de montrer que A_λ est hémi-continu pour déduire que A_λ est maximal monotone.

Soient $x, y \in H$. On a du fait que A_λ est Lipschitz de rapport $\frac{1}{\lambda}$

$$\begin{aligned}\|A_\lambda((1-t)x + ty) - A_\lambda(x)\| &\leq \frac{1}{\lambda}\|(1-t)x + ty - x\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|t(x-y)\|.\end{aligned}$$

Quand $t \to 0$, il résulte que $A_\lambda((1-t)x + ty)) \to A_\lambda x$ et A_λ est hémi-continu. De Proposition 1.51, on déduit que A_λ est maximal monotone.

(ii) **Montrons que si $x_\lambda \to x$ et $A_\lambda x_\lambda \rightharpoonup y$, quand $\lambda \to 0^+$, alors $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.**

Soit $(x_\lambda) \subset H$ convergeant vers $x \in H$ telle que $A_\lambda x_\lambda \rightharpoonup y$, quand $\lambda \to 0^+$.

Montrons que $J_\lambda x_\lambda \to x$ quand $\lambda \to 0^+$.
Pour tout $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned}\|J_\lambda x_\lambda - x\| &= \|J_\lambda x_\lambda - x_\lambda + x_\lambda - x\| \\ &= \| - \lambda A_\lambda x_\lambda + x_\lambda - x\| \\ &\leq \lambda \|A_\lambda x_\lambda\| + \|x_\lambda - x\|.\end{aligned}$$

Or $A_\lambda x_\lambda \rightharpoonup y$ quand $\lambda \to 0^+$, alors d'après Corollaire 1.29, la suite $(\|A_\lambda x_\lambda\|)$ est bornée. Il s'en suit que $\lambda\|A_\lambda x_\lambda\| \to 0$ quand $\lambda \to 0^+$. De plus, on a $x_\lambda \to x$ (par hypothèse). Par conséquent $J_\lambda x_\lambda \to x$ quand $\lambda \to 0^+$.
On sait d'après (i) (a) que $A_\lambda x \in AJ_\lambda x$, $\forall x \in H$. On a $J_\lambda x_\lambda \to x$, $A_\lambda x_\lambda \in AJ_\lambda x_\lambda$, et $A_\lambda x_\lambda \rightharpoonup y$, quand $\lambda \to 0^+$. L'opérateur A étant maximal monotone donc demi-fermé (Proposition 1.47), il résulte que $x \in D(A)$ et $y \in Ax$.
La démonstration de la proposition est alors terminée. ■

1.5 Opérateurs sous-différentiels

Définition 1.53. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre, convexe et sci, le sous-différentiel de φ est l'opérateur multivoque noté $\partial\varphi$ défini par*

$$\partial\varphi(x) := \{y \in H : \ \varphi(z) - \varphi(x) \geq (y, z - x), \ \forall z \in H\}.$$

Les éléments du sous-différentiel sont appelés sous-gradients et l'on a $D(\partial\varphi) \subset \operatorname{dom}(\varphi)$.

Lemme 1.54. *Soit φ une fonction convexe, sci et différentiable sur son domaine, alors*

$$\forall x \in Int(\operatorname{dom}(\varphi)) : \ \partial\varphi(x) = \{\nabla\varphi(x)\}.$$

Lemme 1.55. *Soient $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe fermée, et $\psi :]-\infty, +\infty] \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe et croissante. On pose $\Phi = \psi \circ \varphi$ alors*

$$\forall x \in Int(\operatorname{dom}(\varphi)) : \partial\Phi(x) = \big\{x_1 x_2 : \ x_1 \in \partial\psi(\varphi(x)), x_2 \in \partial\varphi(x)\big\}.$$

Exemple 1.56. *Soit $\varphi(x) = ||x||$, $x \in H$, $\psi(t) = \frac{1}{3}t^3$, $t \in \mathbb{R}$ et $\Phi(x) = \psi(\varphi(x)) = \frac{1}{3}||x||^3$. On sait que*

$$\partial\varphi(x) = \begin{cases} \{\frac{x}{||x||}\} & \text{si } x \neq 0, \\ \{x, \ ||x|| \leq 1\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc, d'après le Lemme 1.55

$$\partial\Phi(x) = \psi'(||x||)\partial\varphi(x) = x||x||.$$

Corollaire 1.57. *Soient φ et ψ deux fonctions convexes, sci, propres sur H.*
Si $\mathrm{dom}\,(\varphi) \cap Int(\mathrm{dom}\,(\psi)) \neq \emptyset$ *alors* $\partial(\varphi+\psi) = \partial\varphi + \partial\psi$.

Proposition 1.58. *Soit $A = \partial\varphi$ où $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est propre, convexe et sci. Alors A est maximal monotone. De plus, les fonctions φ_λ définies par :*

$$\varphi_\lambda(x) = \inf\left(\varphi(y) + \frac{1}{2\lambda}\|x-y\|^2\right) \quad x \in H,\ \lambda > 0.$$

sont convexes et Fréchet différentiables sur H avec $\partial\varphi_\lambda = A_\lambda$.
Si $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est propre, convexe et sci telle que

$$\varphi \text{ est paire } \ (\text{i.e.}, \varphi(-x) = \varphi(x),\ \forall x \in H), \tag{1.6}$$

alors, $\partial\varphi$ est impair et φ_λ $(\lambda > 0)$ est pair.

Proposition 1.59. *Soit $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ une fonction propre, convexe et sci. Soient $u \in W^{1,2}(I, H)$ et $g \in L^2(I, H)$ satisfaisant $u(t) \in D(\partial\varphi)$, $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$ p.p. sur I. Alors $u(t) \in \mathrm{dom}\,(\varphi)$, pour tout $t \in I$, la fonction $t \mapsto \varphi(u(t))$ est absolument continue sur I, et $(d/dt)\varphi(u(t)) = (u'(t), g(t))$ p.p. $t \in I$.*

1.6 Quelques résultats et définitions utiles

Nous rappelons dans cette section quelques résultats et définitions utiles dans les démonstrations de nos résultats principaux.

Définition 1.60. *Soient f, g deux fonctions dérivables, de dérivées continues sur I à valeurs dans H. La formule d'intégration par parties est donnée par*

$$\int_0^T f(t)g'(t)dt = f(T)g(T) - f(0)g(0) - \int_0^T f'(t)g(t)dt.$$

Définition 1.61. *(Inégalité de Hölder)*
Soient $f \in L^p(I, H), g \in L^q(I, H)$, $p, q \in]1, +\infty[$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Alors, on a

$$\|fg\|_{L^1(I,H)} \leq \|f\|_{L^p(I,H)}\|g\|_{L^q(I,H)}.$$

Si $p = 2$ alors, cette inégalité est dite inégalité de Cauchy-Schwarz.

Définition 1.62. *(Convergence faible dans $L^p(I, H)$)*
Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions dans $L^p(I, H)$, $1 \leq p < +\infty$. Soient $f \in L^p(I, H)$ et q le conjugué de p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$). Alors, la suite $(f_n)_n$ converge faiblement vers f dans $L^p(I, H)$ si et seulement si

$$\forall g \in L^q(I, H) : \lim_{n\to\infty} \int_I f_n(t)g(t)dt = \int_I f(t)g(t)dt.$$

Théorème 1.63. *(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)*
Soit $(f_n)_n$ *une suite de fonctions dans* $L^p(I,H)$, $1 \leq p < +\infty$. *On suppose que*

1) $f_n(t) \longrightarrow f(t)$ *p.p sur* I.
2) *Il existe une fonction* $g \in L^p(I,\mathbb{R}_+)$ *telle que pour tout* n : $\|f_n(t)\| \leq g(t)$ *p.p sur* I.

Alors, on a $f \in L^p(I,H)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^p(I,H)} \longrightarrow 0$.

Définition 1.64. *Soit* K *une partie de* $C(I,H)$. *On dit que* K *est équicontinue en* $t_1 \in I$ *si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall t_2 \in I, \forall x \in K : |t_1 - t_2| \leq \eta \Rightarrow \|x(t_1) - x(t_2)\| \leq \varepsilon.$$

Si la partie K *est équicontinue en tout point* $t_1 \in I$, *alors* K *est équicontinue sur* I.

Théorème 1.65. *(Théorème d'Arzelà-Ascoli)*
On dit qu'une partie K *de* $C(I,H)$ *est relativement compacte si et seulement si les deux conditions sont satisfaites :*

1. *La partie* K *est équicontinue sur* I.
2. *L'ensemble* $\{x(t) :\ x \in K\}$ *est relativement compact pour tout* $t \in I$.

Théorème 1.66. *(Théorème du point fixe de Schauder)*
Soit K *un sous-ensemble non-vide convexe fermé borné d'un espace de Hilbert* H *et* $F : K \to K$ *une application continue. Si* $F(K)$ *est relativement compact, alors* F *admet un point fixe i.e.,* $\exists x \in K : F(x) = x$.

Définition 1.67. *Soit* $f : I \to H$. *On dit que* f *est* T*-anti-périodique d'anti-période* T, *si*

$$\forall t \in I : t + T \in I \quad \text{et} \quad f(t+T) = -f(t).$$

On dit que f *est* T*-périodique de période* T, *si*

$$\forall t \in I : t + T \in I \quad \text{et} \quad f(t+T) = f(t).$$

Proposition 1.68. *Soit* $u : I \to H$ *une fonction* T*-anti-périodique, alors*
(i) $\int_{t-T}^{t+T} u(s)ds = 0$ *pour tout* $t \in I$.
(ii) *Si de plus elle est dérivable, alors l'application* $t \mapsto u'(t)$ *est* T*-anti-périodique et* $t \mapsto \|u'(t)\|^2$ *est* T*-périodique.*

Démonstration.
(i) Pour tout $t \in I$, on a

$$\int_{t-T}^{t+T} u(s)ds = \int_{t-T}^{t} u(s)ds + \int_{t}^{t+T} u(s)ds. \tag{1.7}$$

Posons $v = s + T$ alors

$$\begin{aligned}\int_{t-T}^{t} u(s)ds &= \int_{t}^{t+T} u(v-T)dv \\ &= -\int_{t}^{t-T} u(v)dv \qquad (\text{ car } u \text{ est } T\text{-anti-périodique}).\end{aligned}$$

Revenons à (1.7), on trouve

$$\begin{aligned}\int_{t-T}^{t+T} u(s)ds &= -\int_{t}^{t+T} u(s)ds + \int_{t}^{t+T} u(s)ds \\ &= 0.\end{aligned}$$

(ii) De la définition de la dérivée de u et le fait que u est T-anti-périodique, on a pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}u'(t+T) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(t+T+h) - u(t+T)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-u(t+h) + u(t)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h}\end{aligned}$$

Alors, u' est T-anti-périodique.

On sait que $\|u'(t)\|^2 = (u'(t), u'(t))$ pour tout $t \in I$. Comme u est T-anti-périodique alors pour tout $t \in I$

$$\begin{aligned}\|u'(t+T)\|^2 = (u'(t+T), u'(t+T)) &= (-u'(t), -u'(t)) \\ &= \|u'(t)\|^2.\end{aligned}$$

Il résulte que $t \longmapsto \|u'(t)\|^2$ est T-périodique. ■