Chapitre 1

Notations et préliminaires

Dans ce chapitre, nous introduisons quelques notions et définitions de l'analyse fonctionnelle et convexe que nous avons utilisés tout au long de ce mémoire. Aussi, les notions de l'analyse multivoque essentielles à l'étude de nos problèmes différentiels.

Nous utiliserons les notations suivantes tout au long de ce mémoire.

1.1 Notations générales

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par

• E l'espace vectoriel normé muni de la norme $\|.\|_E$.

• E' le dual topologique de E.

• E'' le bidual topologique de E.

• $\langle ., . \rangle$ produit de dualité entre E et E'

• $B(x_0, r)$ La boule ouverte de centre x_0 et de rayon r.

• $\overline{B}(x_0, r)$ La boule fermé de centre x_0 et de rayon r.

• $co(A)$ l'enveloppe convexe d'un ensemble A.

• $\overline{co}(A)$ l'enveloppe convexe fermé d'un ensemble A.

• $d(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \mid x - a \mid$ la distance d'un point x d'un espace metrique X à l'ensemble A (A est une partie non vide de X).

• $\rightarrow$ la convergence forte.

• $\rightharpoonup$ la convergence faible.

Considérons X et Y deux espaces Vectoriels normés

• $\mathcal{F}(X, Y)$ l'espace de toutes les applications $f : X \rightarrow Y$.

• $\mathbf{C}(X,Y)$ l'espace de toutes les applications continues $f : X \to Y$, muni de la norme de la convergence uniforme

$$\|f\|_{\mathbf{C}} = \sup_{t\in X} \|f(t)\|_Y .$$

• $L^p(X,Y)$ l'espace des applications $p^{\text{ème}}$ intégrables $(1 \leq p < \infty)$,
$f : X \to Y$, muni de la norme

$$\|f(.)\|_{L^P} = \Big(\int_X \big(\|f(.)\|_X\big)^p dt\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

• χ_A la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble donné, définie par

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

1.2 Quelques rappels d'analyse fonctionnelle

Les définitions et les résultats que nous allons énoncer sont pris des références [2, 7, 10].

1.2.1 Espace topologique

Définition 1.2.1. *Soit X un ensemble non vide. On dit que Θ est une topologie sur X si Θ vérifie les propriétés suivantes*
1) $\emptyset$ et X sont des éléments de Θ.
2) Toute intersection finie d'éléments de Θ est un élément de Θ. C'est à dire,

$$\forall O_1, O_2, ..., O_n \in \Theta,\ \bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \Theta.$$

3) Toute réunion (quelconque) d'éléments de Θ est un élément de Θ. C'est à dire,

$$\forall (O_i)_{i\in I} \subset \Theta,\ \bigcup_{i=1}^{n} O_i \in \Theta.$$

• *Les éléments de Θ sont appelés les ouverts de la topologie Θ.*

Définition 1.2.2. *On appelle espace topologique le couple (X,Θ) constitué par un ensemble X et par une topologie Θ sur cet ensemble.*

Proposition 1.2.3. *Soit X un espace topologique. Alors*

1) Toute intersection de fermés est un fermé.

2) Toute réunion finie de fermés est un fermé.

Définition 1.2.4. *Soit (X,Θ) un espace topologique et soient $A, B \subset X$.*

- *On dit que A est dense dans B si et seulement si $A \subset B \subset \overline{A}$.*
- *On dit que A est dense dans X ou que A est partout dense si $A \subset X \subset \overline{A}$, et comme nous avons toujours $\overline{A} \subset X$, alors A est partout dense si et seulement si $\overline{A} = X$.*

Définition 1.2.5. ***(Espace séparable)***
Soit (X,Θ) un espace topologique et soit $A \subset X$. On dit que X est séparable si et seulement si il admet un sous ensemble dénombrable partout dense.

Exemple 1.2.1. $\mathbb{R}^n$ *est séparable.*

Rappel sur la topologie la moins fine rendant continues une famille d'applications

Soient X un ensemble et $(Y_i)_i \in I$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, on se donne une application $\varphi_i : X \to Y_i$. La question naturelle qui se pose est de munir X de la topologie θ la moins fine (avec le minimum d'ouverts) qui rende continues toutes les applications $\varphi_{(i\in I)}$.

Définition 1.2.6. *Soient θ, θ' deux topologies sur X. On dit que θ est moins fine que θ' s et seulement si $\theta \subset \theta'$.*

Proposition 1.2.7. *Soit τ l'ensemble des parties de X de la forme*

$$\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in F_j} \varphi_i^{-1}(U_i),$$

où U_i est un ouvert quelconque de Y_i, F_j est un sous ensemble fini quelconque de I et J est un ensemble quelconque d'indices. Alors τ définit une topologie sur X.
De plus, τ est la topologie la moins fine qui rende continues toutes les applications $\varphi_i(i \in I)$.

La topologie faible

Soit E un espace vectoriel normé réel. On note E' l'espace dual, c'est-à-dire, l'espace des formes linéaires continues sur E muni de la norme

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in \overline{B}_E(0,1)} |\langle f, x \rangle|.$$

Définition 1.2.8. *Soit $f \in E'$ et soit*

$$\begin{aligned} \varphi_f : & E \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longmapsto \varphi_f(x) = f(x) := \langle f, x \rangle. \end{aligned}$$

La topologie faible sur E notée $\sigma(E, E')$ est la topologie la moins fine rendant continues les applications $\varphi_f (f \in E')$.

Proposition 1.2.9. *Soit E un espace vectoriel normé. La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.*

Proposition 1.2.10. *Soit $(x_n)_n$ une suite de E. On a*

1. *$(x_n)_n$ converge vers x pour $\sigma(E, E')$ (ou faiblement) si et seulement si $(\langle f, x_n \rangle)_n$ converge vers $\langle f, x \rangle$ pour tout $f \in E'$.*
2. *Si $(x_n)_n$ converge fortement vers x, alors $(x_n)_n$ converge faiblement vers x.*
3. *Si $(x_n)_n$ converge faiblement vers x, alors $(\|x_n\|)_n$ est bornée et nous avons*

$$\|x_n\|_E \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|_E.$$

4. *Si (x_n) converge faiblement vers x et $(f_n)_n$ converge fortement vers f dans E', alors $(\langle f_n, x_n \rangle)_n$ converge vers $\langle f, x \rangle$.*

1.2.2 Espace métrique

Définition 1.2.11. *Soit X un ensemble non vide. On dit que $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ est une distance sur X si et seulement si elle vérifie les trois propriétés suivantes :*

1) $\forall x, y \in X, d(x, y) = 0 \iff x = y$.

2) $\forall x, y \in X,\ d(x,\ y) = d(y,\ x)$.

3) $\forall x, y, z \in X, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

• *On appelle espace métrique tout couple (X, d) constitué d'un ensemble X et d'une distance sur X.*

Définition 1.2.12. *Soient X un espace métrique et A une partie non vide de X. La distance d'un point $x \in X$ à l'ensemble A est donnée par*

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Définition 1.2.13. *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de l'espace métrique (X, d). Soit $x \in X$. On dit que la suite $(x_n)_n$ converge vers $x \in X$ si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Proposition 1.2.14.
Soient (X, d) un espace métrique et A un ensemble non vide de X. Alors,

$$x \in \overline{A} \iff d(x, A) = 0 \iff \exists (x_n)_n \subset A, \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Proposition 1.2.15. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que x est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une suite extraite $(x_{\phi(n)})_n \in \mathbb{N}$ de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.*

Définition 1.2.16. ***(Espace métrisable)***
Un espace topologique est dit métrisable s'il existe une distance induisant sa topologie.

1.2.3 Espace complet

Définition 1.2.17. *Soit (X, d) un espace métrique. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite une suite de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall p, q \in \mathbb{N} :\ p, q \geq n_0 \Longrightarrow d(x_p, x_q) < \varepsilon.$$

Définition 1.2.18. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit que X est un espace complet si et seulement si toute suite de Cauchy de X converge dans X.*

Définition 1.2.19. *Soit X un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.*
Une norme sur X est une fonction $N : X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant
1) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2) $\forall x \in X, \lambda \in \mathbb{R};\ N(\lambda x) =\mid \lambda \mid N(x)$.
3) $\forall x \in X, \forall y \in E;\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.
• *Le couple (X, N) où X est un espace vectoriel et N définit une norme sur X est appelé espace normé et on note souvent $\| \, . \, \|$ au lieu de N.*

Définition 1.2.20. *Un espace de Banach est un espace vectoriel (réel ou complexe) normé complet.*

1.2.4 Espace mesurable

Définition 1.2.21. *Soit E un ensemble non vide. On appelle* ***tribu*** *ou* σ***-algèbre*** *sur E une famille Σ de parties de E possedant les proprietes suivantes*
1) $E \in \Sigma$.
2) Si $A \in \Sigma$, *alors* $E \setminus A \in \Sigma$.
3) Si $A_n \in \Sigma$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *alors* $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.
• *On appelle* ***espace mesurable*** *tout couple (E, Σ) formé par un ensemble E et une tribu Σ sur E.*
• *Si la troisiéme relation est vraie pour les unions finies seulement, on dit que Σ est une algèbre sur E.*
• *Si E un espace topologique la tribu Borélienne sur E notée $\mathcal{B}(E)$ est la plus petite tribu contenant la topoligie de E.*

Définition 1.2.22. *Soit (E, Σ) un espace mesurable. On appelle mesure positive une application $\mu : \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}_+$ vérifiant*
1) $\mu(\emptyset) = 0$.
2) μ est σ-additive, c'est à dire que pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Σ disjoints deux à deux (i.e. $A_n \cap A_m = \emptyset$, si $n \neq m$), on a

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

• *Le triplet (E, Σ, μ) est appelé espace mesuré.*

Définition 1.2.23. *Soit E un espace topologique. La mesure $\mu : \mathcal{B}(E) \to \overline{\mathbb{R}}$ est appelée mesure Borélienne.*

Définition 1.2.24. *Soient (E, Σ, μ) un espace mesuré.*
• *On dit que μ est finie (ou que (E, Σ, μ) est finie) si $\mu(E) < +\infty$.*
• *On dit que μ est σ-finie (ou que (E, Σ, μ) est σ-finie) si*

$$\exists (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma,\ \mu(A_n) < +\infty,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n.$$

• *on dit que μ est positive si $\mu(A) \geq 0, \forall A \in \Sigma$.*

Définition 1.2.25. *Soit E un espace topologique séparé et μ une mesure Borélienne ($\mu : \mathcal{B}(E) \to \overline{\mathbb{R}}$).*
• *On dit que μ est* ***régulière*** *si pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert C et un fermé G de E tel que $G \subset A \subset C$ et $\mu(C \backslash G) \leq \varepsilon$.*
• *Toute mesure Borélienne finie et régulière est appelée* ***mesure de Radon****.*

Définition 1.2.26. *Soit (E, Σ, μ) un espace mesuré positif. Soit Z un sous ensemble de E.*

• *on dit que Z est **μ-négligeable**, s'il existe $A \in \Sigma$ tel que $Z \subset A$ et $\mu(A) = 0$.*

• *On dit que μ est complète (ou que (E, Σ, μ) est complet) si toutes les parties μ-négligeable sont mesurables i.e,*

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E),\ (A \subset B,\ B \in \Sigma,\ \mu(B) = 0) \Longrightarrow A \in \Sigma.$$

• *on dit qu'une propriété sur E est vraie μ-presque par tout (μ.p.p), si l'ensemble où elle n'est pas vérifiée est μ-négligeable.*

1.2.5 Compacité

Définition 1.2.27. *Soit X un espace topologique.*

1) *un recouvrement de X est une famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de X telle que $X = \bigcup_{i\in I} A_i$ si de plus I est un ensemble fini, on dit que $(A_i)_{i\in I}$ est un recouvrement fini de X.*

2) *Soit $(A_i)_{i\in I}$ un recouvrement de X. Soit $J \subset I$ tel que $X = \bigcup_{j\in J} A_j$, on dit que $(A_j)_{j\in J}$ est un sous recouvrement de $(A_i)_{i\in I}$.*

3) *un recouvrement ouvert de X est une famille d'ouverts $(U_i)_{i\in I}$ telle que $X = \bigcup_{i\in I} U_i$.*

Définition 1.2.28.

*Soit X un espace topologique séparé et A une partie de X. On dit que A est **compacte** s'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue :*
de tout recouvrement de A par des ouverts de X, on peut extraire un sous recouvrement fini.

• *Ceci se traduit de la manière suivante :*
Si $(U_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts telle que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$ alors il existe un sous-ensemble fini $J \in I$ tel que $A \subset \bigcup_{i\in J} U_i$.

Proposition 1.2.29. *Soit X un espace topologique séparé et A une partie de X.*

(a) *Si A est compacte alors A est fermée.*

(b) *Si X est compact et A est fermée, alors A est compacte.*

(c) *Si A est un compact de X et $f : X \to Y$ est continue alors $f(A)$ est un compact de Y.*

Définition 1.2.30. *Soient* $(E, \|.\|_E)$ *un espace vectoriel normé,* $A \subset E$*. On dit que* A *est borné si* $\exists r > 0,\ A \subset B_E(0, r) \iff \exists r > 0, \forall a \in A,\ \|a\|_E < r$*.*

• *Il est clair qu'un ensemble compact est borné.*

Proposition 1.2.31. *soit* A *une partie de* $\mathbb{R}, \mathbb{R}^n$ *ou* $\mathbb{C}$*.*
Alors A *est compacte si et seulement si* A *est une partie fermée et bornée.*

Définition 1.2.32. *Soient* X *un espace topologique séparé,* A *une partie de* X*. On dit que* A *est* ***relativement compacte*** *si son adhérence* $\overline{A}$ *dans* X *est compacte.*

Proposition 1.2.33. *Soit* A *une partie d'un espace métrique* E*.* A *est compacte si et seulement si il vérifie la propriété de Bolzano-Weiestrass : toute suite d'éléments de* A *admet une sous suite convergente dans* A*.*

Proposition 1.2.34.

1. *Une union finie de compacts est compacte.*
2. *Une intersection de compacts est compacte.*

Définition 1.2.35. ***(Espaces réflexifs)***
Soit E *un espace vectoriel normé. On dit que* E *est* ***réflexif*** *si* $J(E) = E''$*, où*

$$J : E \to E''$$
$$x \to J(x) = J_x(f)$$

est un isomorphisme isométrique de E *sur* E''*. Lorsque* E *est réflexif, on identifiera souvent implicitement* E *et* E'' *(à l'aide de l'isomorphisme* J*).*

Remarque 1.2.1. L^2 *est réflexif.*

Théorème 1.2.36. ***(Alaoglu)***
Soit E *un espace de Banach séparable, et soit* $A \subset E$*. Si* A *est borné pour la norme de* E' *et fermé pour la topologie* $\sigma(E', E)$*, alors,* A *est compact pour cette topologie.*

Théorème 1.2.37. *Soit* E *un espace de Banach réflexif et soit* $(x_n)_n$ *une suite bornée dans* E*. Alors il existe une sous-suite extraite* (x_{n_k}) *qui converge pour la topologie* $\sigma(E, E')$*.*

Définition 1.2.38. ***(Équicontinuité)***
Soient $(X, d), (Y, d')$ *deux espaces métriques. Une partie* H *de* $\mathcal{F}(X, Y)$ *est dite équicontinue au point* $x \in X$ *si*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall x' \in X, \forall f \in H : d(x, x') \leq \delta \implies d'(f(x), f(x')) \leq \varepsilon.$$

• *H est dite équicontinue sur* X *si elle est équicontinue en tout point* $x \in X$*.*

Théorème 1.2.39. ***(Théorème d'Ascoli-Arzelà)***
Soit (K,d) *un espace métrique compact,* (X,d') *un espace métrique complet, et* $H \subset C(K,X)$*(l'espace des applications continues définies sur* K *à valeurs dans* X*), muni de la distance de la convergence uniforme, i.e.*

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in K} \{d'(f(x),g(x)), \forall f,g \in C(K,X)\}.$$

Alors H *est relativement compact si et seulement si* H *est équicontinu et* $H(x)$ *est relativement compact pour tout* $x \in K$*, avec*

$$H(x) = \{f(x)|f \in H\}.$$

Théorème 1.2.40. ***(Corollaire du théorème d'Ascoli-Arzelà)***
Soient I *un intervalle fermé borné de* $\mathbb{R}$*, et* (f_n) *une suite de fonctions absolument continues définies sur* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*.*
On suppose que cette suite de fonctions est équicontinue et qu'il existe un réel $M > 0$ *tel que*

$$|f_n(x)| < M,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in I.$$

Alors, on peut extraire une sous suite (f_{n_k}) *qui converge uniformément sur* I *vers une fonction continue* f*.*

1.2.6 Convexité

Définition 1.2.41. ***(Ensembles convexes)***
Soit E *un espace vectoriel, et soit* $A \subset E$*. On dit que* A *est* ***convexe*** *si et seulement si*

$$\forall u,v \in A; \forall \lambda \in [0,1], \lambda u + (1-\lambda)v \in A.$$

Autrement dit, pour tout $(u,v) \in A$*, le segment de droite*

$$[u,v] = \{\lambda u + (1-\lambda)v / \lambda \in [0,1]\} \subset A.$$

Définition 1.2.42. *On appelle* ***simplexe*** *de* $\mathbb{R}^n$ *l'ensemble* $\triangle_n$ *défini par*

$$\triangle_n = \{(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n / \lambda_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

Définition 1.2.43. *Soit* E *un espace vectoriel et soient* $x_1, x_2, ..., x_n \in E$*. On appelle* ***combinaison convexe*** *des élément* $x_1, x_2, ..., x_n$ *tout élément* $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ *tels que* $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) \in \triangle_n$*.*

Proposition 1.2.44. *Soit E un espace vectoriel et soit $A \subset E$. Alors A est* **convexe** *si et seulement si il contient toutes les combinaisons convexes de ses éléments.*

Proposition 1.2.45. *Soit E un espace vectoriel.*

1. *Si $(A_i)_i \in I$ est une famille quelconque de convexes de E, alors $\bigcap_{i\in I} A_i$ est un convexe de E.*
2. *Si $A, B \subset E$ sont convexes alors $A + B$ est convexe.*

Exemples 1.2.1.

• *Les sous-ensembles convexes de l'espace $\mathbb{R}$ sont les intervalles de $\mathbb{R}$.*

• *Dans un espace vectoriel normé réel E, toute boule (ouverte ou fermée) est convexe.*

Théorème 1.2.46. *Soit $A \subset E$ un sous ensemble convexe, alors A est faiblement fermé (fermé pour $\sigma(E, E'))$ si et seulement si il est fortement fermé.*

Définition 1.2.47. ***(Enveloppe convexes)***

Soit A un sous ensemble d'un espace vectoriel E.

• *On appelle* **enveloppe convexe** *de A, qu'on note $co(A)$ l'intersection de tous les sous ensembles convexes de E qui contenant A. C'est en fait le plus petit convexe de E contenant A.*

• *on appelle* **enveloppe convexe fermé** *de A, qu'on note $\overline{co}(A)$, l'intersection de tous les sous ensembles convexes fermés de E qui contenant A. C'est le plus petit convexe fermé de E qui contient A.*

Théorème 1.2.48. *Soit E un espace vectoriel et $A \subset E$. Alors*

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_j x_j \ ; \ n \in \{0, 1, ...\}, (\lambda_1, ..., \lambda_n + 1) \in \Delta_n, x_1, ..., x_{n+1} \in A \right\}.$$

Théorème 1.2.49. ***(Théorème de Carathéodory)***

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A \subset \mathbb{R}^n$. Alors

$$co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{m} \lambda_j x_j \ où \ (\lambda_1, ..., \lambda_m) \in \Delta_n, \ x_1, ..., x_m \in A, \ tel\ que\ 1 \leq m \leq n+1 \right\}.$$

Théorème 1.2.50. ***(Banach-Mazur)***

Soit E un espace de Banach et soit $(x_n)_n$ une suite d' éléments de E convergent faiblement vers x, alors il existe une suite $(z_n)_n$ telle que z_n est une combinaison convexe des éléments $x_n, x_{n+1}, ...$ convergent fortement vers x. $(z_n = \sum_{i\geq n} \alpha_i x_i, \ \sum_{i\geq n} \alpha_i = 1)$.

Proposition 1.2.51. *L'envloppe convexe d'un sous ensemble compact d'un espace de dimension fini est compacte.*

Proposition 1.2.52. *Soit E un espace vectoriel topologique et soient $A \subset E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors*

1) $\overline{co}(A) = \overline{co(A)}$.

2) $\overline{co}(\alpha A) = \alpha \overline{co}(A)$.

Proposition 1.2.53. *Soit U un convexe compact de $\mathbb{R}^n$, d'intérieur non vide.*
Alors $U = co(Fr(u))$.

Théorème 1.2.54. *Soit $(A_n)_n$ une suite de sous ensembles d'un espace métrique (X, d)*
Alors,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\geq 0} \overline{\bigcup_{m\geq n} A_m} = \bigcap_{\varepsilon>0} \Big(\bigcap_{n\geq 0} \bigcup_{m\geq n} B(A_m, \varepsilon) \Big).$$

Et

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n\geq 0} \bigcap_{m\geq n} A_m = \bigcap_{\varepsilon>0} \Big(\bigcup_{n\geq 0} \bigcap_{m\geq n} B(A_m, \varepsilon) \Big).$$

Lemme 1.2.55. *Considérons une suite de sous ensembles K_n contenus dans un sous ensemble bornée d'un espace de dimension finie X ($X = \mathbb{R}^n$).*
Alors,

$$\overline{co}\Big(\limsup_{n\to\infty} K_n \Big) = \bigcap_{N>0} \overline{co}\Big(\bigcup_{n\geq N} K_n \Big).$$

1.2.7 Application continue

Définition 1.2.56. ***(Application continue)***
Soient $(X, d), (Y, d')$ deux espaces métriques et $f : X \to Y$. On dit que f est continue au point $x_0 \in X$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : d(x, x_0) < \delta \implies d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

• *f est continue sur X si et seulement si elle est continue en tout point $x \in X$.*

Remarque 1.2.2. *Si $(E.\|.\|), (\tilde{E}.\|.\|_{\tilde{E}})$ sont deux espaces vectoriels normés. On dit que $f : E \to \tilde{E}$ est continue au point $x_0 \in E$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X : \|x - x_0\|_E < \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_{\tilde{E}} < \varepsilon.$$

Proposition 1.2.57. *Si f est continue au point x_0, alors $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Définition 1.2.58. ***(Applications absolument continues)***
Soit E un espace de Banach. Une fonction $f : [a, b] \to E$ est dite absolument continue si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour toute partition dénombrable de l'intervalle $[a, b]$ par des intervalles disjoints $[a_k, b_k]$ vérifiant $\sum\limits_k (b_k - a_k) < \delta$, on a

$$\sum_k \|f(b_k) - f(a_k)\| \leq \varepsilon$$

.

Théorème 1.2.59. *Une fonction $f : [a, b] \to E$ est absolument continue si et seulement si elle est l'intégrale de sa dérivée i.e*

$$f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(t)dt. \tag{1.1}$$

Remarque 1.2.3.
• *Une fonction absolument continue est continue.*

Théorème 1.2.60. ***(Théorème de Lusin)***
Soit (T, d) un espace métrique compact et (T, Σ, μ) un espace mesuré de Radon avec μ positive.
Soit X un espace de dimension finie.
Alors, pour toute fonction $\phi : T \to X$ μ-mesurable et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $T_\varepsilon \subset T$ tel que $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ et la restriction de ϕ à T_ε est continue.

1.3 Multi-applications (ou fonctions multivoques)

Pour plus de résultats sur les multi-applications voir [1, 7, 6, 9].

1.3.1 Rappels sur les multi-applications

Définition 1.3.1. *Soient X, Y deux ensembles non vides, on appelle* ***multi-application*** *ou fonction multivoque définie sur X à valeurs dans Y, toute application F définie sur X à valeurs dans $\mathcal{P}(Y)$ et on note $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ ou $F : X \rightrightarrows Y$.*
Pour tout $t \in X$, $F(t) \subset Y$ est un sous ensemble de Y.
• *On appelle* ***domaine*** *(effectif) de F le sous ensemble de X défini par*

$$Dom(F) = \{t \in X : F(t) \neq \emptyset\}.$$

• *On appelle* ***image*** *de F le sous ensemble de Y défini par*

$$Im(F) = \{y \in Y : \exists t \in X, y \in F(t)\}.$$

• *Si $A \subset X$, on appelle image de A par F qu'on note $F(A)$ le sous ensemble de Y défini par $F(A) = \bigcup\limits_{t \in A} F(t)$ et on peut écrire*

$$F(A) = \{y \in Y : \exists t \in A,\ y \in F(t)\}.$$

Ainsi, $Im(F) = F(X)$.

Définition 1.3.2. ***(Graphe d'une multi-application)***
Soient X et Y deux ensembles non vides, et soit $F : X \rightrightarrows Y$. On appelle ***le graphe*** *de F qu'on note* ***gph(F)*** *le sous ensemble de $X \times Y$ défini par*

$$gph(F) = \{(x, y) \in X \times Y, y \in F(x)\}.$$

Exemples 1.3.1.

1) Soit F une multi-application définie par

$$\begin{aligned} F : [0,1] &\rightrightarrows [0,1] \\ x &\mapsto F(x) = [0, x]. \end{aligned}$$

Calculons le graphe de F

$$\begin{aligned} gph(F) =&\{(x, y) \in [0,1] \times [0,1], y \in F(x)\} \\ =&\{(x, y) \in [0,1] \times [0,1], y \in [0, x]\} \\ =&\{(x, y) \in [0,1] \times [0,1], y \leq x\}. \end{aligned}$$

2) Soit F une multi-application définie par

$$\begin{aligned} F : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] &\rightrightarrows \mathbb{R} \\ x &\mapsto F(x) = \{r \cos x / 0 \leq r \leq 1\}. \end{aligned}$$

Calculons le graphe de F

$$\begin{aligned} gph(F) &= \left\{(x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \mathbb{R}, y \in F(x)\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0,1], y \in \{r \cos x / 0 \leq r \leq 1\}\right\}. \end{aligned}$$

1.3.2 Continuité des multi-applications

Définition 1.3.3. *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. F est dite semi-continue supérieurement au point $x_0 \in X$, si pour tout ouvert V de Y tel que $F(x_0) \subset V$, il existe un ouvert U de X tel que $x_0 \in U$ et $F(x) \subset V$, $\forall x \in U$.*

- *On dit que F est semi-continue supérieurement sur X si elle est semi-continue supérieurement en tout point $x \in X$.*

Théorème 1.3.4. *Soient X et Y deux espaces métriques, $F : M \rightrightarrows Y$ une multi-aplication à valeurs compacts, alors F est semi-continue supérieurement sur X si et seulement si pour chaque $x \in X$ et chaque suite $(x_n)_n$ de X telle que $x_n \longrightarrow x$, et $(y_n)_n$ de Y avec $(y_n)_n \in F(x_n)$, il existe une sous-suite $(y_m)_m$ de $(y_n)_n$ telle que*

$$\lim_{m\to\infty} y_m \in F(x).$$

Proposition 1.3.5. *Soient X, Y deux espaces topologiques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application semi-continue supérieurement à valeurs fermées. Alors le graphe de F est fermé dans $X \times Y$.*

- *Le réciproque est donnée par le lemme suivant*

Lemme 1.3.6. *Soient X, Y deux espaces topologiques et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides, avec Y un espace compact. Si le graphe de F est fermé alors F est s.c.s.*

Théorème 1.3.7. *Soit X un espace métrique, M un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et $F : X \rightrightarrows M$ une multi-application si F est s.c.s, alors la multi-application $co(F) : x \in X \rightrightarrows co(F(x)) \subset \mathbb{R}^n$ est aussi s.c.s.*

Théorème 1.3.8. *Soient X, Y deux espaces métriques, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application s.c.s à valeurs compactes, alors*

$$\limsup_{x'\to x} F(x') = F(x).$$

1.3.3 Mesurabilité des multi-applications

Définition 1.3.9. *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique et $F : X \rightrightarrows Y$. On dit que F est $(\Sigma, \mathcal{B}(Y))$-mesurable si pour tout ouvert V de Y*

$$F^{-1}(V) = \{x \in X; F(x) \cap V \neq \emptyset\} \in \Sigma.$$

Proposition 1.3.10. *Soit (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique séparable et soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) *F est Σ-mesurable.*

ii) *Pour chaque $y \in Y$, la fonction*

$$\begin{aligned} g_y : T &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto d(y, F(x)) \end{aligned}$$

est Σ-mesurable.

Définition 1.3.11. *Soit $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application. On appelle sélection de F toute application $f : dom(F) \to Y$ vérifiant*

$$f(x) \in F(x), \forall x \in dom(F).$$

Théorème 1.3.12. *Soient (X, Σ, μ) un espace mésuré tel que Σ est μ-complète et soient (Y,d) un espace métrique séparable et $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application à valeurs non vides fermées. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

i) *F est Σ-mesurable.*

ii) *Le graphe de F est mesurable.*

iii) *$F^{-1}(B) \in \Sigma$ pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(Y)$.*

iv) *$F^{-1}(C) \in \Sigma$ pour tout fermé C de Y.*

Théorème 1.3.13. ***(Théorème d'existence de sélections mesurables de Castaing)*** *Soient (X, Σ) un espace mesurable, Y un espace métrique complet séparable, $F : X \rightrightarrows Y$ une multi-application Σ-mesurable à valeurs fermées. Alors F admet au moins une sélection mesurable.*

1.4 Quelques résultats de convergence

Théorème 1.4.1. ***(Théorème de la convergence dominée de Lebesgue)*** *Soit $1 \leq p < \infty$ et soit $(f_n)_n \subset L^p([0, T], \mathbb{R}^n)$. On suppose que*

1. *$(f_n)_n$ converge presque partout vers une fonction f sur $[0, T]$.*
2. *Il existe une application positive $g(\cdot) \in L^p([0, T], \mathbb{R})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$|f_n(t)| \leq g(t) \quad p.p\ t \in [0, T].$$

Alors $f(\cdot) \in L^p([0,T],\mathbb{R}^n)$ *et la suite* $(f_n)_n$ *converge vers* f *dans* $L^p([0,T],\mathbb{R}^n)$*.*

Théorème 1.4.2.
Soit $1 \leq p < \infty$ *et soit* $(f_n)_n \subset L^p([0,T],\mathbb{R}^n)$ *une suite convergente vers une fonction* $f \in L^p([0,T],\mathbb{R}^n)$ *pour la norme de* $L^p([0,T],\mathbb{R}^n)$*. Alors, il existe une sous suite* $(f_{n_k})_k$ *convergente vers* f *p.p sur* $[0,T]$*.*

1.5 Théorème de Lyapunov

Le résultat de cette section est pris de la référence [4].

Théorème 1.5.1. *Soient* $f_1, f_2..., f_n$ *des fonctions intégrables définies de* $[a,b]$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $p_1, ..., p_n$ *des fonctions mesurables vérifiant*

$$0 \leq p_i(t) \leq 1 \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p_i(t) = 1, \forall t \in [a,b].$$

Alors, il existe une suite d' ensembles mesurables (A_i) *formant une partition de* $[a,b]$*, telle que*

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{[a,b]} \chi_{A_i}(t) f_i(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \int_{[a,b]} p_i(t) f_i(t)dt.$$