Chapitre 1

Préliminaires

Dans ce chapitre nous présentons certaines théories de bases qui concernent les fonctions spéciales. Dans cet esprit, l'accent sera volontairement porté sur différentes approches de généralisation de la notion de différentiation et d'intégration pour un ordre fractionnaire. On mettra aussi le point sur quelques notions de semi-groupes.

1.1 Fonctions spéciales

1.1.1 La fonction Gamma

La fonction Gamma à été introduite par le mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783) dans son objectif de généraliser le factoriel des valeurs non entiers (voir [19]).

Définition 1.1.1 *La fonction Gamma est définie par l'intégrale suivante*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad z \in \mathbb{C} \textit{ tel que } \quad \mathcal{R}e(z) > 0. \tag{1.1}$$

Nous avons $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Propriété 1.1.1 *La fonction Gamma est caractérisée par les propriétés suivantes :*

1. *La relation de récurrence*

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \textit{avec} \quad \mathcal{R}e(z) > 0. \tag{1.2}$$

   Qu'on peut la démontrer par une intégration par partie.

2. *Généralise le factoriel car*

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.3}$$

3. *Peut être représentée aussi par la limite :*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^z}{z(z+1)...(z+n)}, \quad \mathcal{R}e(z) > 0 \tag{1.4}$$

1.1.2 La fonction bêta

Nous renvoyons le lecteur à [19] pour plus de détails.

Définition 1.1.2 *Soient $p, q \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(p) > 0$ et $\mathcal{R}e(q) > 0$, la fonction bêta est définie par*

$$\beta(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt. \tag{1.5}$$

Remarque 1.1.3 *Par le changement de variable $s = 1 - t$, on a*

$$\beta(p,q) = \beta(q,p). \tag{1.6}$$

Proposition 1.1.4 (Lien entre la fonction Gamma et la fonction bêta)
Soient $p, q \in \mathbb{C}$ tels que $\mathcal{R}e(p) > 0$ et $\mathcal{R}e(q) > 0$, on a

$$\beta(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \tag{1.7}$$

1.1.3 La fonction Mittag-Leffler

La fonction de Mittag-Leffler joue un rôle très important dans la théorie des équations différentielles d'ordre entier. Cette fonction est introduite par Mittage-Leffler en 1903 (voir [19, 16]).

Définition 1.1.5 *Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{R}e(z) > 0$, on définit la fonction de Mittag-Leffler comme suit*

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = \frac{1}{2\pi i}\int_G \frac{\sigma^{\alpha-1}e^\sigma}{\sigma^\alpha - z}d\sigma, \quad \alpha > 0, \tag{1.8}$$

où G est le contour qui commence et se termine à $-\infty$ et encercle l'origine une fois dans le sens des aiguilles d'une montre. En particulier, si $\alpha = 1$ nous trouvons la fonction exponentielle $E_1(z) = e^z$.
Plus généralement, la fonction de Mittag-Leffler à deux paramètres est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0. \tag{1.9}$$

Remarque 1.1.6

1. *Pour $\beta = 1$, on trouve la relation (1.8) car*

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_\alpha(z).$$

2. *Si $\alpha = \beta = 1$, il est clair que*

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

1.1.4 Fonction de Mainardi

Les notions de cette sous section sont prises des références [12, 6].

Définition 1.1.7 *Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in]0,1[$. La fonction de Mainardi est définie par*

$$\Phi_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-z)^n}{n!\Gamma(-\alpha n + 1 - \alpha)} = \frac{1}{2\pi i} \int_G \sigma^{\alpha-1} e^{(\sigma - z\sigma^\alpha)} d\sigma, \tag{1.10}$$

où G est le contour qui commence et se termine à $-\infty$ et encercle l'origine une fois dans le sens des aiguilles d'une montre.

Proposition 1.1.8 *Soient $z \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in]0,1[$, nous avons les assertions suivantes*

1. *La transformée de Laplace de la fonction $\Phi_\alpha(z)$ est*

$$\mathcal{L}[\Phi_\alpha](t) = E_\alpha(-z)$$

2.
$$\int_0^{+\infty} t^n \Phi_\alpha(t) dt = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\alpha n + 1)}, \quad n \in \mathbb{N}$$

3. *La fonction Φ_α est une fonction positive, i.e. $\Phi_\alpha(t) \geqslant 0, \quad \forall t > 0$.*

Démonstration

1. Nous avons par la relation (1.10)

$$\Phi_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_G \sigma^{\alpha-1} e^{(\sigma - z\sigma^\alpha)} d\sigma.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \Phi_\alpha(t) e^{-zt} dt &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_G \sigma^{\alpha-1} e^{(\sigma - t\sigma^\alpha)} d\sigma \right] e^{-zt} dt \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_G \sigma^{\alpha-1} e^{\sigma} \left[\int_0^{+\infty} e^{-t(z+\sigma^\alpha)} dt \right] d\sigma \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_G \frac{\sigma^{\alpha-1} e^{\sigma}}{z + \sigma^\alpha} d\sigma \\
&= E_\alpha(-z)
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathcal{L}[\Phi_\alpha](t) = E_\alpha(-z).$$

2. En utilisant la propriété suivante (voir [6]),

$$\int_0^{\infty} t^n \Phi_\alpha(t) dt = \lim_{s \to 0} (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} E_\alpha(-s)$$

et

$$\frac{d^n}{ds^n}E_\alpha(-s) = \frac{d^n}{ds^n}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-s)^n}{\Gamma(\alpha n+1)}$$
$$= \frac{(-1)^n n!}{\Gamma(\alpha n+1)}.$$

On en déduit que

$$\int_0^{\infty} t^n\Phi_\alpha(t)dt = \lim_{s\to 0}(-1)^n\frac{(-1)^n n!}{\Gamma(\alpha n+1)}$$

or $\Gamma(n+1) = n!$.

□

Remarque 1.1.9 *Par la Proposition 1.1.8 (2), on trouve pour* $n = 0$

$$\int_0^{+\infty}\Phi_\alpha(t)dt = 1, \quad \forall t > 0.$$

Autrement dit, Φ_α *est une densité de probabilité. D'autre part, notons par*

$$\rho_\alpha(t^{-1/\alpha}) = \alpha t^{1+\frac{1}{\alpha}}\Phi_\alpha(t).$$

où la transformée de Laplace de ρ_α *est donnée par la relation*

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\rho_\alpha(t)dt = e^{-\lambda^\alpha}. \tag{1.11}$$

En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}(e^{-\lambda^\alpha})(t) =& \mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\lambda^\alpha)^n}{n!}\right)(t)\\
=& \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\mathcal{L}^{-1}(\lambda^{\alpha n})(t)\\
=& \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{-\alpha n-1}}{n!\Gamma(-\alpha n)}\\
=& -\alpha t^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{-\alpha n}}{\alpha(n+1)!\Gamma(-\alpha n-\alpha)}\\
=& \alpha t^{-\alpha-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n t^{-\alpha n}}{n!\Gamma(-\alpha n-\alpha+1)}\\
=& \alpha t^{-\alpha-1}\Phi_\alpha(t^{-\alpha}) = \rho_\alpha(t).
\end{aligned}$$

1.2 Théorie de semi-groupe

Les définitions et les propriétés suivantes ainsi que leurs preuves sont prises de [13, 2].

1.2.1 Semi-groupe d'opérateur linéaire borné

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur, où $D(A) = \{x \in E, \quad Ax \in F\}$ est le domaine de définition de A.

Définition 1.2.1 *Soit $A : D(A) \subset E \longrightarrow F$ un opérateur. A est dit linéaire si $D(A)$ est un sous espace vectoriel de E et pour tous $x, y \in D(A)$,et pour tous $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$.*

$$A(\alpha_1 x + \alpha_2 y) = \alpha_1 Ax + \alpha_2 Ay.$$

Définition 1.2.2 *Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire. A est dit borné si pour tout ensemble borné M de E, $A(M)$ est un sous ensemble borné de F. En d'autre terme, A est dite borné si $A(\overline{B_E}(0,1))$ est un borné de F.*

Proposition 1.2.3 *Soit $A : E \longrightarrow F$ un opérateur linéaire, alors A est borné si et seulement si A est continu i.e.*

$$\exists C > 0, \quad \|Ax\| \leqslant C\|x\|, \quad \forall x \in E.$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus (bornés) sur E muni de la norme $\|.\|_{\mathcal{L}}$. Si $E = F$, on le note $\mathcal{L}(E)$.

Définition 1.2.4 *Soit E un espace de Banach. On appelle semi-groupe d'opérateur linéaire sur E ou simplement semi-groupe, qu'on le note $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$, l'opérateur $T : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{L}(E)$ vérifiant*

1. *$T(0) = I$ (I est l'opérateur identité).*
2. *$T(t+s) = T(t)T(s), \quad pour\ tous\, t, s \geqslant 0.$*

Définition 1.2.5 *Un semi-groupe $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ d'opérateur borné sur E est dit uniformément continu sur E si*

$$\lim_{t \overset{>}{\to} 0} \|T(t) - I\| = 0.$$

1.2.2 Semi-groupe de classe C_0

Dans cette partie, nous introduisons une classe plus générale des semi-groupes où nous étudions leurs propriétés élémentaires.

Définition 1.2.6 *On appelle C_0-semi-groupe (ou semi-groupe fortement continu) d'opérateur linéaire borné sur E une famille $\{T(t)\}_{t>0} \subset \mathcal{L}(E)$ vérifiant les propriétés suivantes*

1. $T(0) = I$;
2. $T(t+s) = T(t)T(s)$, *pour tous* $t, s > 0$;
3. $\lim\limits_{t \to 0} T(t)x = x$, *pour tout* $x \in E$.

Définition 1.2.7 *Le générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-groupe* $\{T(t)\}_{t>0}$, *l'opérateur* A *défini sur l'ensemble*

$$D(A) = \left\{ x \in E / \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t} \, existe \right\}$$

par

$$Ax = \lim_{t \to 0} \frac{T(t)x - x}{t}, \quad pour\ tout\ x \in D(A).$$

Remarque 1.2.8 *Tout semi-groupe uniformément continu est de classe* C_0 *mais l'inverse est faux.*

Théorème 1.2.9 *Soit* $\{T(t)\}_{t>0}$ *un* C_0*-semi-groupe, Alors*

1. *Il existe* $n > 0$ *et* $M \geq 1$ *tels que*

$$\|T(t)\| \leqslant M, \quad \forall t \in [0, n]$$

2. *Il existe* $\omega \geq 0$ *et* $M \geq 1$ *tels que*

$$\|T(t)\| \leqslant M e^{\omega t}, \quad \forall t \geqslant 0.$$

Dans ce cas on dit que $\{T(t)\}_{t>0}$ *est un* C_0*-semi-groupe de type* (M, ω).

Démonstration (voir [2]).

Définition 1.2.10 *Soit* $\{T(t)\}_{t>0}$ *un* C_0*-semi-groupe sur* E.

1. $\{T(t)\}_{t>0}$ *est dit (uniformément) borné s'il est de type* $(M, 0)$, *i.e. s'il existe* $M \geqslant 1$ *tel que*

$$\|T(t)\| \leqslant M, \ \forall t \geqslant 0.$$

2. $\{T(t)\}_{t>0}$ *est un* C_0*-semi-groupe de contraction s'il est de type (1,0), i.e. si*

$$\|T(t)\| \leqslant 1, \ \forall t \geqslant 0.$$

1.2.3 Propriété spectrale des C_0-semi-groupes

Définition 1.2.11 *Soit E un espace de Banach complexe et soit $A : D(A) \subset E \to E$ un opérateur linéaire.*

1. *L'ensemble résolvant de A est*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \lambda I - A : D(A) \subset E \to E \text{ est bijectif et } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E)\}.$$

2. *L'application*

$$\begin{aligned} R(., A) : &\rho(A) \to \mathcal{L}(E) \\ &\lambda \mapsto R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} \end{aligned}$$

est dite, la résolvante de A.

Théorème 1.2.12 *Soient $\{T(t)]\}_{t>0}$ un C_0-semi-groupe différentiable et A son générateur infinitésimal. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ $(\mathcal{R}e\lambda > 0)$. Alors l'application $R_\lambda : E \to E$*

$$R_\lambda x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x dt$$

définit un opérateur linéaire borné sur E avec $\lambda \in \rho(A)$ et

$$R_\lambda x = R(\lambda, A)x, \quad \text{pour tout} \quad x \in E. \tag{1.12}$$

Démonstration (voir [2]).

Exemple 1.2.1 (Semi-groupe de la chaleur) *Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$. Soit Δ_D le Laplacien de Dirichlet sur Ω, défini de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. On sait que Δ_D est auto-adjoint, négatif et inversible et que son inverse Δ_D^{-1} est auto-adjoint et compact sur $L^2(\Omega)$ (compacité de H^2 dans L^2). La théorie spectrale des opérateurs auto-adjoint compact montre qu'il existe une base Hilbertienne $(\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions propres de Δ_D^{-1} associée aux valeurs propres (μ_n) qui sont réelles, de multiplicité finie et vérifient $\mu_n \to 0$. On en déduit que (φ_n) est une base Hilbertienne de fonctions propres de Δ_D correspondant aux valeurs propres $\lambda_n = 1/\mu_n < 0$ avec $\lambda_n \to -\infty$. Pour tout $u \in L^2(\Omega)$, on notera $c_n(u)$ le coefficient de φ_n dans la décomposition de u. Pour tous $u_0 \in L^2(\Omega)$ et $t \geq 0$, on pose*

$$u(t) = S(t)u_0 = \sum_{n\geq 0} c_n(u_0) e^{\lambda_n t} \varphi_n$$

Il sagit d'un semi-groupe C^0 mais qu'il ne peut être prolongé en groupe car $S(t)$ n'est pas inversible pour $t > 0$. On note aussi que $S(t)$ est une contraction compacte pour $t > 0$ et que $S(t)$ n'est pas uniformément continu en $t = 0$. Enfin, $u(t)$ est solution (au moins formellement) de l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_D u \qquad u(0) = u_0.$$

On note formellement $S(t) = e^{\Delta_D t}$.

1.3 Calcul Fractionnaire

Nous concentrons notre attention sur les propriétés essentielles des dérivées et intégrales fractionnaires, notamment celles de Riemann-Liouville et de Caputo.

1.3.1 Intégrales fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.1 *[1]*
On appelle intégrale fractionnaire à gauche (resp. à droite) de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$, et on la note I_+^α (resp I_-^α), la fonction définie par

$$(I_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad t > a. \tag{1.13}$$

$$(I_-^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t)dt, \quad t < b. \tag{1.14}$$

Propriété 1.3.1 *Nous avons les propriétés suivantes*

1. *Par convention $I_+^0 f(t) = f(t)$, c'est à dire $I_+^0 \equiv I$ est l'opérateur identité.*
2. *L'opérateur intégrale I_+^α est linéaire.*

Dans la suite on va utiliser l'équation (1.13).

Théorème 1.3.2 *[1]*
Soit $f \in L_E^1([a,b])$ et soit $\alpha > 0$. Alors $I_+^\alpha f(t)$ existe presque partout sur $[a,b]$, et

$$I_+^\alpha f \in L_E^1([a,b]).$$

Démonstration Soient $\Lambda = [a,b]^2$, et $k : \Lambda \to \mathbb{R}$ définie par

$$k(t,s) = \begin{cases} (t-s)^{\alpha-1} & \text{si} \quad a \leq s \leq t \leq b \\ 0 & \text{si} \quad a \leq t \leq s \leq b. \end{cases}$$

Alors $k(.,.)$ est mesurable sur Ω, et nous avons

$$\begin{aligned} \int_a^b k(t,s)dt &= \int_a^s k(t,s)dt + \int_s^b k(t,s)dt \\ &= \int_s^b (t-s)^{\alpha-1}dt \\ &= \frac{(b-s)^\alpha}{\alpha}dt \end{aligned}$$

Sachant que le produit de deux fonctions Bochner mesurables est aussi Bochner mesurable (Théorème 4.1.8), on a $f(s)\mathbf{1}_{[a,b]}(s) = f(s)$ sur $[a,b]^2$ est fortement mesurable sur $[a,b]^2$.

Il est clair que $k(t,s)$ est finie presque partout sur $[a,b]^2$, et est une fonction mesurable à valeurs réelles. Nous avons maintenant que

$$k(t,s)f(s)\mathbf{1}_{[a,b]}(s) = k(t,s)f(s) \quad \text{sur} \quad [a,b]^2$$

est une fonction fortement mesurable. Ensuite, nous travaillons sur l'intégrale double

$$\begin{aligned}
\int_a^b \left\| \int_a^b k(t,s)f(s)ds \right\| dt &\leq \int_a^b \left(\int_a^b |k(t,s)| \|f(s)\| ds \right) dt \\
&= \int_a^b \|f(s)\| \left(\int_a^b |k(t,s)| dt \right) ds \\
&= \int_a^b \|f(s)\| \frac{(b-s)^\alpha}{\alpha} ds \\
&\leq \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha} \int_a^b \|f(s)\| ds \\
&= \frac{(b-a)^\alpha}{\alpha} \|f\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

Par le Théorème de Tonelli (Théorème 4.1.8), la fonction $H : \Omega \to E$ telle que $H(t,s) = k(t,s)f(s)$ est Bochner intégrable sur Ω.
D'où par le Théorème de Fubini (Théorème 4.1.6), nous obtenons que $\int_a^b k(t,s)f(s)ds$ est une fonction Bochner intégrable sur $[a,b]$. Alors $(I_+^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds$ est Bochner intégrable sur $[a,b]$, et existe presque partout sur $[a,b]$. □

Lemme 1.3.3 *[1]*
Soit $f \in L_E^1([a,b])$ et soit $\alpha \geqslant 1$, alors

$$I_+^\alpha f \in C_E([a,b]).$$

Démonstration On distingue deux cas.

1. Cas de $\alpha = 1$. On a

$$(I_+^1 f)(t) = \int_a^t f(x)dx. \tag{1.15}$$

Soient $t, x \in [a,b]$ tels que $t \geqslant x$ et $t \to x$ on observe que

$$\begin{aligned}
\left\|(I_+^1 f)(t) - (I_+^1 f)(x)\right\| &= \left\| \int_a^t f(y)dy - \int_a^x f(y)dy \right\| \\
&= \left\| \int_a^x f(y)dy + \int_x^t f(y)dy - \int_a^x f(y)dy \right\| \\
&= \left\| \int_x^t f(y)dy \right\| \\
&\leqslant \int_x^t \|f(y)\| dy \\
&= \int_a^t \| f(y) \| dy - \int_a^x \| f(y) \| dy \underset{t\to x}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

car $\int_a^t \| f(x) \| dx$ est continue sur [a,b].

2. Cas de $\alpha > 1$. Soit $t, x \in [a,b]$ tels que $t \geqslant x$ et $t \to x$ observons que

$$\begin{aligned}
\parallel I_+^\alpha f(t) - I_+^\alpha f(x) \parallel &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_a^t (t-y)^{\alpha-1} f(y)dy - \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)dy \right\| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left\| \int_a^x (t-y)^{\alpha-1} f(y)dy + \int_x^t (t-y)^{\alpha-1} f(y)dy - \int_a^x (x-y)^{\alpha-1} f(y)dy \right\| \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^x |(t-y)^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1}| \parallel f(y) \parallel dy + \int_x^t |t-y|^{\alpha-1} \parallel f(y) \parallel dy \right] \\
&\leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_a^x |(t-y)^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1}| \parallel f(y) \parallel dy + (t-x)^{\alpha-1} \parallel f \parallel_1 \right]
\end{aligned}$$

Comme $t \to x$ on a, $(t-y)^{\alpha-1} \to (x-y)^{\alpha-1}$, ainsi $|(t-y)^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1}| \to 0$. Mais aussi

$$|(t-y)^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1}| \leqslant 2(b-a)^{\alpha-1}.$$

Donc

$$|(t-y)^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1}| \parallel f(y) \parallel \leqslant 2(b-a)^{\alpha-1} \parallel f(y) \parallel \in L_E^1([a,b]).$$

De plus, $|(t-y)^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1}| \parallel f(y) \parallel \to 0$ quand $t \to s$.

Alors par le Théorème de convergence dominé de Lebesgue on conclut que, quand $t \to x$,

$$\int_a^x |(t-y)^{\alpha-1} - (x-y)^{\alpha-1}| \parallel f(y) \parallel dy \to 0.$$

Par conséquence, quand $t \to x$

$$\parallel I_+^\alpha f(t) - I_+^\alpha f(x) \parallel \to 0$$

Il résulte que $I_+^\alpha f \in C_E([a,b])$. □

Exemple 1.3.1 *1. Soit $f(t) = (t-a)^m$. Par définition*

$$I_+^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds.$$

A l'aide du changement de variable $s = a + \tau(t-a)$ on trouve

$$\begin{aligned}
I_+^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} (s-a)^m ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+m} \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1} \tau^m d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t-a)^{\alpha+m} \beta(m+1, \alpha) \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(\alpha+m+1)} (t-a)^{\alpha+m}.
\end{aligned}$$

2. *Soit $f(t) = c$, $c = Cte$ une fonction définie sur [a,b]. On a*

$$(I_+^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} c ds$$
$$= \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-s)^{\alpha-1} ds.$$

Par le changement de variable $s = a + \tau(t-a)$, On a alors $ds = (t-a)d\tau$, d'où (Sachant que $\Gamma(1) = 1$)

$$(I_+^\alpha f)(t) = \frac{c}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 (t-a)^\alpha (1-\tau)^{\alpha-1} d\tau$$
$$= \frac{c(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\beta(1,\alpha)$$
$$= \frac{c(t-a)^\alpha \Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}$$
$$= \frac{c(t-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Théorème 1.3.4 (Loi de composition) *[18]*
Soient $\alpha, \beta \geqslant 0$, $f \in L_E^1([a,b])$. Alors

$$I_+^\alpha (I_+^\beta f)(t) = I_+^\beta (I_+^\alpha f)(t) = I_+^{\alpha+\beta} f(t)$$

est vérifiée presque partout sur $[a,b]$. Si de plus $f \in C_E([a,b])$ ou $\alpha + \beta \geqslant 1$, alors cette identité est vraie sur $[a,b]$. Autrement dit, la famille $\{I_+^\alpha f, \quad \alpha > 0\}$ possède la propriété de semi-groupe.

Démonstration La preuve découle directement de la définition.

$$I_+^\alpha (I_+^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} I_+^\beta f(t) dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}\int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s) ds dt$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x f(s)\int_s^x (x-t)^{\alpha-1}(t-s)^{\beta-1} dt ds.$$

Par le changement de variable $t = s + (x-s)\tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. On obtient,

$$I_+^\alpha (I_+^\beta f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \int_0^1 (1-\tau)^{\alpha-1}\tau^{\beta-1} d\tau$$
$$= \frac{\beta(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds$$
$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds$$
$$= I_a^{\alpha+\beta} f(x) \qquad \text{(Vraie presque partout sur [a,b])}$$

Si $f \in C_E([a,b])$, alors $I_+^\beta f \in C_E([a,b])$ donc $I_+^\alpha (I_+^\beta f) \in C_E([a,b])$ et $I_+^{\alpha+\beta} f \in C_E([a,b])$.
□

Proposition 1.3.5 *[8, 5]*
Soit $\alpha > 0$, alors la transformée de Laplace de $I_+^\alpha f$ est formulée comme suit

$$\mathcal{L}[I_+^\alpha f](t) = t^{-\alpha}\mathcal{L}[f](t), \quad t > 0.$$

Démonstration On peut écrire $I_+^\alpha f$ comme une convolution de deux fonction ϕ (définie dans le Lemme 4.1.9) et f

$$\begin{aligned} I_+^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t)dt \\ &= (\phi * f)(t). \end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{L}[I_+^\alpha f](t) = \mathcal{L}[\phi](t)\mathcal{L}[f](t).$$

Comme $\mathcal{L}[\phi](t) = t^{-\alpha}$, on déduit que $\mathcal{L}[I_+^\alpha f](t) = t^{-\alpha}\mathcal{L}[f](t)$. □

1.3.2 Dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville

Définition 1.3.6 *[1] Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Soient $\alpha > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n = [\alpha] + 1$. On appelle dérivée fractionnaire d'ordre α de Riemann-Liouville la fonction définie par*

$$\begin{aligned} D_+^\alpha f(x) &= \frac{d^n}{dt^n}(I_+^{n-\alpha} f)(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt. \end{aligned} \tag{1.16}$$

En particulier,

1. Si $\alpha = 0$, on aura $D_+^0 f(x) = f(x)$.
2. Si $f \in C_E^1([a, b])$, alors
$$D_+^\alpha f(x) = \frac{d}{dx} I_+^{1-\alpha} f(x). \tag{1.17}$$

Exemple 1.3.2 *Soit $f(t) = (t-a)^m$*

$$D_+^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1}(t-a)^m dt.$$

En fait le changement de variable $t = a + s(x-a)$ on aura,

$$\begin{aligned} D_+^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n+m-\alpha}\int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1}s^m ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\beta(n-\alpha, m+1)\frac{d^n}{dx^n}(x-a)^{n+m-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(n+m-\alpha+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha+m+1)\Gamma(n-\alpha+1)}(x-a)^{m-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha+1)}(x-a)^{m-\alpha}. \end{aligned}$$

Théorème 1.3.7 *[14] Soient f et g deux fonctions dont les dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville existent, pour c_1 et $c_2 \in \mathbb{R}$, on a*

$$D_+^\alpha(c_1 f(x) + c_2 g(x)) = c_1 D_+^\alpha f(x) + c_2 D_+^\alpha g(x) \tag{1.18}$$

Lemme 1.3.8 *[3]*

1. *Soient $\alpha > 0$ et $f \in L_E^1([a,b])$. Alors l'égalité, $D_+^\alpha I_+^\alpha f(x) = f(x)$ est vraie pour presque tout $x \in [a,b]$.*
2. *S'il existe une fonction $g \in L_E^1([a,b])$ telle que $f = I_+^\alpha g$ alors, $I_+^\alpha D_+^\alpha f = f$ presque pour tout $x \in [a,b]$.*

Démonstration Pour la 1$^{\text{ère}}$ relation en utilisant la Définition 1.3.6. On a

$$D_+^\alpha I_+^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_+^{n-\alpha} I_+^\alpha f(x) = \frac{d^n}{dx^n} I_+^n f(x) = f(x).$$

La 2$^{\text{ème}}$ assertion est une conséquence de la 1$^{\text{ère}}$

$$I_+^\alpha D_+^\alpha f = I_+^\alpha (D_+^\alpha I_+^\alpha g) = I_+^\alpha g = f.$$

□

Théorème 1.3.9 *[8, 5]*
Si $f \in L_E^1([a,b])$, $\alpha > 0$, la transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville de f est

$$\mathcal{L}[D_+^\alpha f](t) = t^\alpha \mathcal{L}[f](t) - \sum_{k=0}^{n-1} t^{n-k-1} \left(\frac{d^k}{dt^k} f(t) \right)_{t=0}$$

avec $n-1 < \alpha < n$, cette transformée de Laplace est bien connue.

Remarque 1.3.10 *La dérivée fractionnaire d'une constante n'est pas en générale nulle. En effet, Soit $f(t) = c$ une constante*

$$\begin{aligned}
D_+^\alpha f(t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-x)^{-\alpha} f(x) dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-x)^{-\alpha} c dx \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t (t-x)^{-\alpha} dx \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \left(\frac{(t-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right) \\
&= \frac{c}{\Gamma(1-\alpha)} (t-a)^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

1.3.3 Dérivée fractionnaire de Caputo

Définition 1.3.11 *[1] Soit $f : [a,b] \to E$ une fonction telle que $f^{(n)} \in L^1_E([a,b])$. On définit la dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}_+$ par*

$$D^{\alpha}_{a} f(t) := I^{n-\alpha}_{+} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(x)dx, \qquad t > a. \tag{1.19}$$

avec $[\alpha] = n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 1.3.12 *Il est évident que la dérivée d'une fonction constante au sens de Caputo est égale à zéro, et nous remarquons que*

$$D^{\alpha}_{+} c \neq \quad D^{\alpha}_{a} c.$$

Exemple 1.3.3 *Soit la fonction f définit par : $f(t) = (t-a)^m$ et soit $n-1 < \alpha < n$. Alors on a*

$$f^{(n)}(\tau) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} (\tau - a)^{m-n}.$$

D'où

$$D^{\alpha}_{a} f(t) = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{m-n} d\tau$$

En effectuant le changement de variable $\tau = a + s(t-a)$ on obtient

$$\begin{aligned}
D^{\alpha}_{a} f(t) &= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-n+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{m-n} d\tau \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-n+1)} (t-a)^{m-\alpha} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{m-n} ds \\
&= \frac{\Gamma(m+1)\beta(n-\alpha, m-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-n+1)} (t-a)^{m-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(m+1)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-n+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(m-n+1)\Gamma(m-\alpha+1)} (t-a)^{m-\alpha} \\
&= \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-\alpha+1)} (t-a)^{m-\alpha}.
\end{aligned}$$

Lemme 1.3.13 *[1] Soit $\alpha > 0$ et $f \in C_E([a,b])$, alors $D^{\alpha}_{a} I^{\alpha}_{a} f(t) = f(t)$. (i.e. D^{α}_{a} est l'inverse à gauche de la dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville).*

Théorème 1.3.14 *[18] Soit $\alpha > 0$ et $f \in AC^n([a,b])$. Alors,*

$$I^{\alpha}_{+} D^{\alpha}_{a} f(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k, \qquad \forall t \in [a,b]$$

(i.e. D^{α}_{+} n'est pas l'inverse à droite de la dérivée fractionnaire de Riemann- Liouville).

Proposition 1.3.15 *[18] Nous donnons les propriétés suivantes :*

1. *Si* $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$ *et* $\alpha\in\mathbb{R}$ *on a alors,*

   (a)
   $$\lim_{\alpha\to n} D_a^\alpha f(t)=f^{(n)}(t).$$

   (b)
   $$\lim_{\alpha\to n-1} D_a^\alpha f(t)=f^{(n-1)}(t)-f^{(n-1)}(a).$$

2. *La dérivée fractionnaire de Caputo est un opérateur liniéair i.e., soit* $n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$ *et* $\lambda\in\mathbb{C}$
   $$D_a^\alpha(\lambda f(t)+g(t))=\lambda D_a^\alpha f(t)+D_a^\alpha g(t).$$

Théorème 1.3.16 *[21, 4]*
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$ *(*$n-1<\alpha<n$, $n\in\mathbb{N}$*), la relation entre l'opérateur de Riemann-Liouville et de Caputo est donnée par*

$$D_a^\alpha f(t)=D_+^\alpha f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)}f^{(k)}(a). \tag{1.20}$$

Théorème 1.3.17 *[5]*
Si $f\in C_E([a,b])$ *et pour* $\alpha>0$*. Alors la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo de* f *est*

$$\mathcal{L}[D_a^\alpha f](t)=t^\alpha\mathcal{L}[f](t)-\sum_{k=0}^{n-1}t^{\alpha-k-1}f^{(k)}(a). \tag{1.21}$$

Démonstration Pour $n-1<\alpha\leqslant n$, $n\in\mathbb{N}^*$, $t>0$ on a

$$D_a^\alpha f(t)=I_+^{n-\alpha}f^{(n)}(t),$$

alors par la Proposition 1.3.5

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D_a^\alpha f](t)&=\mathcal{L}[I_+^{n-\alpha}f^{(n)}](t)\\&=t^{\alpha-n}(\mathcal{L}[f^{(n)}])(t)\end{aligned}$$

or

$$\mathcal{L}[f^{(n)}](t)=t^n\mathcal{L}[f](t)-\sum_{k=0}^{n-1}t^{n-k-1}f^{(k)}(a).$$

Donc

$$\mathcal{L}[D_a^\alpha f](t)=t^\alpha(\mathcal{L}[f])(t)-\sum_{k=0}^{n-1}t^{\alpha-k-1}f^{(k)}(a).$$

□