Chapitre 3

Résultat d'existence pour $(\mathcal{P})$

On s'intéresse dans ce chapitre essentiellement à l'existence de solutions du problème

$$(\mathcal{P})\begin{cases}(i) - au''(t) + bu'(t) + \partial\varphi(u(t)) - \partial\psi(u(t)) \ni f(t), \quad t \in \mathbb{R} \\ (ii) \qquad\qquad u(t+T) = -u(t), \quad t \in \mathbb{R},\end{cases}$$

où $a \geq 0$, $b \neq 0$.

Tout au long de ce chapitre, on suppose que $\varphi : H \to]-\infty, +\infty]$ est une fonction propre, convexe, sci et paire sur H, telle que $\varphi(0) = 0$ et pour tout $L > 0$ l'ensemble

$$\{x \in \mathrm{dom}\,(\varphi) : \varphi(x) \leq L,\ \|x\| \leq L\} \text{ est compact.} \tag{3.1}$$

$$\psi : H \to]-\infty, +\infty] \text{ est propre, convexe, sci et paire.} \tag{3.2}$$

$D(\partial\varphi) \subset D(\partial\psi)$ et pour tout $r > 0$ il existe des constantes $k_r \in [0, 1[$, $l_r > 0$, et $\theta_r \in [0, 2[$, telles que

$$\|(\partial\psi)^0 u\|^2 \leq k_r \|(\partial\varphi)^0 u\|^2 + l_r(\varphi^{\theta_r}(u) + 1),\ \forall\ u \in D(\partial\varphi),\ \|u\| \leq r. \tag{3.3}$$

On note qu'une fois que φ est considérée paire, il s'en suit que $0 \in \partial\varphi(0)$, de sorte que φ atteint son minimum sur H au point 0. Par conséquent, il n'y a pas de perte de généralité en supposant que $\varphi(0) = 0$.

Définition 3.1. *Si* (2.1) *et* (3.1)-(3.3) *ont lieu, alors on entend par une solution de* $(\mathcal{P})$ *toute fonction* u *dans* $W^{2,2}_{loc}(\mathbb{R}, H)$ *(si* $a > 0$*) ou dans* $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}, H)$ *(si* $a = 0$, $b \neq 0$*) satisfaisant* $u(t+T) = -u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, $u(t) \in D(\partial\varphi)$, *p.p.* $t \in \mathbb{R}$, *telle que il existe* $v, w \in L^2_{loc}(\mathbb{R}, H)$ *avec* $v(t) \in \partial\varphi(u(t))$, $w(t) \in \partial\psi(u(t))$ *p.p. sur* $\mathbb{R}$, *et* $-au''(t) + bu'(t) + v(t) - w(t) = f(t)$, *p.p.* $t \in \mathbb{R}$.

Le résultat d'existence principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 3.2. *Soient $a \geq 0$, $b \neq 0$ et (3.1)-(3.3) ont lieu. Alors pour toute f satisfaisant (2.1), le problème $(\mathcal{P})$ admet au moins une solution u, telle que la fonction $t \longmapsto \varphi(u(t))$ est localement absolument continue sur $\mathbb{R}$.*

L'idée principale de la démonstration du Théorème 3.2 est de considérer le problème régularisé suivant

$$\begin{aligned} -au''(t) + bu'(t) + \varepsilon\|u(t)\|u(t) + \partial\varphi(u(t)) - \partial\psi_\lambda(u(t)) \ni f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \\ u(t+T) = -u(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

où $\varepsilon,\ \lambda > 0$. Après avoir établi l'existence de solutions de (3.4), des estimations à priori sont obtenues, qui nous permettent de passer à la limite quand $\varepsilon \to 0^+$ (avec $\lambda > 0$ fixe), ensuite faire tendre λ vers 0^+. Cette démonstration est réalisée au moyen de plusieurs Lemmes.

Lemme 3.3. *Soit (3.1) satisfaite. Soit $\mathscr{F} : L^2(I,H) \to L^2(I,H)$ définie par $\mathscr{F}f = u_f$, où u_f est l'unique solution de :*

$$\begin{aligned} &(i) - u_f''(t) + bu_f'(t) + \partial\varphi(u_f(t)) \ni f(t), \quad t \in I \quad (b \in \mathbb{R}), \\ &(ii) \qquad u_f(T) = -u_f(0), \quad u_f'(T) = -u_f'(0). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Alors, pour tout $r > 0$, l'ensemble $\{\mathscr{F}f : \|f\|_2 \leq r\}$ est relativement compact dans $C(I,H)$. De plus $\mathscr{F}$ est séquentiellement continue de $L^2_w(I,H)$ dans $C(I,H)$.

Démonstration.

Soit $r > 0$, on note $B_{L^2(I,H)}(0,r)$ la boule fermée de centre 0 et de rayon r dans $L^2(I,H)$.

I) Montrons que $\{u_f, \|f\|_2 \leq r\}$ est relativement compact dans $C(I,H)$.

• **Montrons que pour tout $t \in I$, $\{u_f(t), f \in B_{L^2(I,H)}(0,r)\}$ est relativement compact.**

Il est clair que d'après Théorème 2.2, $\mathscr{F}$ est définie sur tout $L^2(I,H)$ à valeurs dans $W^{2,2}(I,H)$.

a) Montrons que $\{\partial\varphi(u_f)\}$ est bornée dans $L^2(I,H)$.

Soit $\|f\|_2 \leq r$. On forme le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de (3.5)(i) avec $(-u_f'')$ on obtient

$$\langle -u_f'', -u_f''\rangle + b\langle u_f', -u_f''\rangle + \langle\partial\varphi(u_f), -u_f''\rangle = \langle f, -u_f''\rangle$$

ce qui équivaut à,

$$\|u_f''\|_2^2 - b\int_0^T (u_f'(t), u_f''(t))dt - \int_0^T (\partial\varphi(u_f(t)), u_f''(t))dt = \int_0^T (f(t), -u_f''(t))dt.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u_f'(t), u_f''(t))dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(\|u_f'(t)\|^2)dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\|u_f'(t)\|^2\Big]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u_f'(T)\|^2 - \|u_f'(0)\|^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u_f'(0)\|^2 - \|u_f'(0)\|^2\Big) \qquad \text{(de (3.5)}(ii)\text{)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De (2.17) (avec $A = \partial\varphi$), on a

$$\int_0^T (\partial\varphi(u_f(t)), u_f''(t))dt \leq 0.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\|u_f''\|_2^2 &= \int_0^T (f(t), -u_f''(t))dt + \int_0^T (\partial\varphi(u_f(t)), u_f''(t))dt \\
&\leq \int_0^T (f(t), -u_f''(t))dt.
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|u_f''\|_2^2 \leq \|f\|_2\|u_f''\|_2.$$

Comme par hypothèse $\|f\|_2 \leq r$, il en résulte que

$$\|u_f''\|_2 \leq \|f\|_2 \leq r.$$

Par conséquent,

$$\|u_f''\|_2 \leq r. \tag{3.6}$$

Comme (2.8) a lieu avec u_f' à la place u, alors on a

$$\|u_f'\|_{L^\infty(I,H)} \leq T^{1/2}\|u_f''\|_2.$$

De (3.6), on a

$$\|u_f'\|_{L^\infty(I,H)} \leq T^{1/2}r.$$

On pose $c_1 = T^{1/2}$, alors on a

$$\|u'_f\|_{L^\infty(I,H)} \leq c_1 r. \tag{3.7}$$

En utilisant (2.8) encore une fois, on trouve

$$\|u_f\|_{L^\infty(I,H)} \leq T^{1/2}\|u'_f\|_2.$$

On a

$$\|u'_f\|_2 \leq T^{1/2}\|u'_f\|_{L^\infty(I,H)}, \tag{3.8}$$

alors de (3.7) on trouve

$$\|u'_f\|_2 \leq Tr, \tag{3.9}$$

donc, pour $c_2 = T^{3/2}$ on obtient

$$\|u_f\|_{L^\infty(I,H)} \leq c_2 r. \tag{3.10}$$

Ici et dans la suite, on utilise $c_1, c_2, \ldots$ etc, pour désigner divers constantes positifs dépendants seulement de T.

En combinant (3.6), (3.9) dans (3.5)(i), on obtient :

$$\begin{aligned}
\|\partial\varphi(u_f)\|_2 &= \|f + u''_f - bu'_f\|_2 \\
&\leq \|f\|_2 + \|u''_f\|_2 + b\|u'_f\|_2 \\
&\leq r + r + bTr < +\infty,
\end{aligned}$$

où $\partial\varphi(u_f(t))$ signifie $f(t) + u''_f(t) - bu'_f(t)$.

Il résulte que

$$\{\partial\varphi(u_f)\} \text{ est bornée dans } L^2(I,H). \tag{3.11}$$

b) Montrons maintenant que $\left\{\dfrac{d}{dt}\varphi(u_f)\right\}$ est bornée dans $L^1(I)$.

De la définition du sous-différentiel de φ, on a :

$$\forall v \in H : (\partial\varphi(u), v - u) + \varphi(u) \leq \varphi(v).$$

Pour $v = 0$, $u = u_f(t)$, on trouve :

$$(\partial\varphi(u_f(t)), -u_f(t)) + \varphi(u_f(t)) \leq \varphi(0),\ t \in I.$$

D'après (3.1) on a $\varphi(0) = 0$, alors

$$\varphi(u_f(t)) \leq (\partial\varphi(u_f(t)), u_f(t)),\ p.p.\ t \in I. \tag{3.12}$$

Comme φ est paire avec $\varphi(0) = 0$ et φ atteint son minimum sur H en 0, alors $\varphi(x) \geq 0,\ \forall x \in H$. En intégrant de 0 à T l'inégalité (3.12), on trouve

$$\int_0^T \varphi(u_f(t))dt \leq \int_0^T (f(t) + u_f''(t) - bu_f'(t), u_f(t))dt =$$
$$\int_0^T (f(t), u_f(t))dt + \int_0^T (u_f''(t), u_f(t))dt - b\int_0^T (u_f'(t), u_f(t))dt.$$

D'une part, nous avons

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u_f'(t), u_f(t))dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(\|u_f(t)\|^2)dt \\
&= \frac{1}{2}\Big[\|u_f(t)\|^2\Big]_0^T \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u_f(T)\|^2 - \|u_f(0)\|^2\Big) \\
&= \frac{1}{2}\Big(\|u_f(0)\|^2 - \|u_f(0)\|^2\Big) \qquad \text{(de (3.5)}(ii)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, par intégration par partie on a

$$\begin{aligned}
\int_0^T (u_f''(t), u_f(t))dt &= \Big[u_f'(t)u_f(t)\Big]_0^T - \int_0^T \|u_f'(t)\|^2 dt \\
&= u_f'(T)u_f(T) - u_f'(0)u_f(0) - \|u_f'\|_2^2 \\
&= u_f'(0)u_f(0) - u_f'(0)u_f(0) - \|u_f'\|_2^2 \qquad \text{(de (3.5)}(ii)) \\
&= -\|u_f'\|_2^2.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int_0^T \varphi(u_f(t))dt &\leq \int_0^T (f(t), u_f(t))dt - \|u_f'\|_2^2 \\
&\leq \|f\|_2\|u_f\|_2 - \|u_f'\|_2^2 \\
&\leq \|f\|_2\|u_f\|_2.
\end{aligned}$$

Comme $\|u_f\|_2 \leq T^{1/2}\|u_f\|_{L^\infty(I,H)}$ et de (3.10) on a

$$\|u_f\|_2 \leq T^{1/2}c_2 r$$

alors,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \varphi(u_f(t))dt &\leq T^{1/2}c_2 r^2 \\
&\leq T^{1/2}c_2(r^2 + 1).
\end{aligned}$$

D'où,

$$\|\varphi(u_f)\|_{L^1(I)} \leq c_3(r^2+1). \tag{3.13}$$

En tenant compte de la Proposition 1.59, nous pouvons également conclure que $t \longmapsto \varphi(u_f(t))$ est absolument continue sur I, pour tout f fixé, et $\dfrac{d}{dt}\varphi(u_f(t)) = (u_f'(t), \partial\varphi(u_f(t)),\ p.p.\ t \in I$. Ceci en combinant avec (3.7), (3.11) conduit à

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|\frac{d}{dt}(\varphi(u_f(t)))\right| dt &= \int_0^T \left|(u_f'(t), \partial\varphi(u_f(t)))\right| dt \\
&\leq \|u_f'\|_2 \|\partial\varphi(u_f)\|_2 \\
&\leq T^{1/2}\|u_f'\|_{L^\infty(I,H)}\|\partial\varphi(u_f)\|_2 \\
&< +\infty.
\end{aligned}$$

Alors, $\exists l > 0$ tel que :

$$\left\|\frac{d}{dt}\varphi(u_f)\right\|_{L^1(I)} < l$$

ce qui entraine

$$\left\{\frac{d}{dt}\varphi(u_f)\right\} \text{ est bornée dans } \ L^1(I). \tag{3.14}$$

c) Ensuite montrons que $\{\varphi(u_f)\}$ est bornée dans $L^\infty(I)$.

On a,

$$\int_0^t \frac{d}{ds}(\varphi(u_f(s)))ds = \varphi(u_f(t)) - \varphi(u_f(0))$$

et

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^t \frac{d}{dt}(\varphi(u_f(s))ds\right| &\leq \int_0^t \left|\frac{d}{ds}(\varphi(u_f(s))\right|ds \\
&\leq \left\|\frac{d}{dt}\varphi(u_f)\right\|_{L^1(I)} \\
&< l.
\end{aligned}$$

D'où,

$$|\varphi(u_f(t)) - \varphi(u_f(0))| < l$$

et

$$\varphi(u_f(t)) < l + \varphi(u_f(0)), \quad t \in I.$$

Par conséquent,

$$\left\{\varphi(u_f)\right\} \text{ est bornée dans } \ L^\infty(I). \tag{3.15}$$

d) De (3.10) et (3.15), $\exists L > 0$ tel que : $u_f(t) \in \mathrm{dom}\,(\varphi)$, $\|u_f(t)\| \leq L$ et $\varphi(u_f(t)) \leq L$. Ceci entraine par (3.1) l'existence d'un sous-ensemble compact K de H tel que $\{u_f(I)\} \subset K$ pour tout f, où $u_f(I) = \{u_f(t), t \in I\}$. Il résulte que, pour tout t dans I, $\{u_f(t), f \in B_{L^2(I,H)}(0,r)\}$ est relativement compact.

- **Montrons que $\{u_f, \|f\|_2 \leq r\}$ est équicontinue.**

Soient $t, s \in I$, d'après (3.7) on a

$$\begin{aligned} \|u_f(t) - u_f(s)\| &= \left\| \int_s^t u_f'(\tau) d\tau \right\| \\ &\leq \|u_f'\|_{L^\infty(I,H)} \int_s^t d\tau \\ &\leq c_1 r |t-s|, \end{aligned}$$

tel que $c_1 r$ est constante. Donc, $\{u_f, \|f\|_2 \leq r\}$ est équicontinue.
Par application du Théorème d'Arzelà-Ascoli (Théorème 1.65), il résulte que $\{u_f, \|f\|_2 \leq r\}$ est relativement compact dans $C(I,H)$.

II) Montrons que $\mathscr{F}$ est séquentiellement continue de $L^2_w(I,H)$ dans $C(I,H)$.

Soit $\{f_n\} \subset B_{L^2(I,H)}(0,r)$, telle que $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^2(I,H)$, quand $n \to \infty$. On a $\sup_n \|f_n\|_2 < +\infty$, comme $\{u_{f_n}\}$ est relativement compact dans $C(I,H)$, alors on peut extraire de $\{u_{f_n}\}$ une sous-suite que l'on note $\{u_{f_n}\}$ qui converge uniformément sur I vers une fonction $u \in C(I,H)$.

De la démonstration du Théorème 2.2, on voit que (3.5) est équivalente à une inclusion de la forme $f \in Bu_f$ où B est un opérateur maximal monotone dans $L^2(I,H)$ ($B = M_{1,b} + N$ désigne le côté gauche de $(3.5)(i)$ avec $(3.5)(ii)$ inclus dans $D(B)$).

Nous avons donc $f_n \in Bu_{f_n}$ où $u_{f_n} \to u$ et $f_n \rightharpoonup f$ dans $L^2(I,H)$. La demi-fermeture de B (voir Proposition 1.47) implique que $f \in Bu$, i.e, u satisfait (3.5). Mais le problème (3.5) admet une unique solution, donc $u = u_f$. Enfin, on déduit que $u_{f_n} \to u_f$ dans $C(I,H)$ et $\mathscr{F}$ est séquentiellement continue de $L^2_w(I,H)$ dans $C(I,H)$.

Ceci termine la démonstration. ■

Remarque 3.4. *En particulier, il découle du Lemme* 3.3 *que l'application* $\mathscr{F}$ *est continue et compacte de* $L^2(I,H)$ *dans* $L^2(I,H)$.

En effet, soit $f_n \to f$ *dans* $L^2(I,H)$ *alors* $f_n \rightharpoonup f$ *dans* $L^2(I,H)$. *D'après la partie* ***II)*** *de la démonstration du Lemme* 3.3 *résulte* $u_{f_n} \to u_f$ *dans* $C(I,H)$. *Or*

$$\|u_{f_n} - u_f\|_2^2 = \int_0^T \|u_{f_n}(t) - u_f(t)\|^2 dt \leq T \|u_{f_n} - u_f\|_\infty^2, \tag{3.16}$$

on en déduit alors que $u_{f_n} \to u_f$ *dans* $L^2(I,H)$ *et* $\mathscr{F}$ *est séquentiellement continue de* $L^2(I,H)$ *dans* $L^2(I,H)$. *De Remarque* 1.16 *résulte la continuité de* $\mathscr{F}$.

On pose maintenant $M = \{f \in L^2(I,H), \|f\|_2 \leq r\}$ *qui est une partie bornée dans* $L^2(I,H)$. *D'après la partie* ***II)*** *de la démonstration du Lemme* 3.3 *la partie* $\mathscr{F}(M) = \{u_f, \|f\|_2 \leq r\}$ *est relativement compact dans* $C(I,H)$, *et de toute suite* $(u_{f_n}) \subset \mathscr{F}(M)$, *on peut extraire une sous suite convergente vers* u_f. *De* (3.16), *il résulte que* $\mathscr{F}(M)$ *est relativement compact dans* $L^2(I,H)$. *D'où la compacité de l'application* $\mathscr{F}$ *(voir Définition* 1.20*).*

Un résultat similaire au Lemme 3.3 a lieu dans le cas des inclusions du premier ordre.

Lemme 3.5. *On suppose que la condition* (3.1) *soit satisfaite. Soit* $\mathscr{F} : L^2(I,H) \to L^2(I,H)$ *définie par* $\mathscr{F}f = u_f$, *où* $u_f \in W^{1,2}(I,H)$ *est une solution de :*

$$\begin{aligned} &(i) \quad bu_f'(t) + \partial\varphi(u_f(t)) \ni f(t), \quad t \in I, \ (b \neq 0) \\ &(ii) \qquad\qquad u_f(T) = -u_f(0). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Alors $\mathscr{F}$ *satisfait les conclusions du Lemme* 3.3.

Démonstration.

Soit $\|f\|_2 \leq r$. On multiplie (3.17)(i) par u_f' et on intègre de 0 à T, on obtient

$$\begin{aligned} b\int_0^T (u_f'(t), u_f'(t))dt + \int_0^T (\partial\varphi(u_f(t)), u_f'(t))dt &= \int_0^T (f(t), u_f'(t))dt \\ b\int_0^T \|u_f'(t)\|^2 dt + \int_0^T (\partial\varphi(u_f(t)), u_f'(t))dt &= \int_0^T (f(t), u_f'(t))dt \\ b\ \|u_f\|_2^2 + \int_0^T (\partial\varphi(u_f(t)), u_f'(t))dt &= \int_0^T (f(t), u_f'(t))dt. \end{aligned}$$

D'après Proposition 1.59, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^T (\partial\varphi(u_f(t), u_f'(t)))dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}\big(\varphi(u_f(t))\big)dt \\ &= \Big[\varphi(u_f(t))\Big]_0^T \\ &= \varphi(u_f(T)) - \varphi(u_f(0)) \\ &= \varphi(-u_f(0)) - \varphi(u_f(0)) \qquad \text{(de (3.17)}(ii)) \\ &= \varphi(u_f(0)) - \varphi(u_f(0)) = 0. \quad \text{(de (3.1) } \varphi \text{ est paire)} \end{aligned}$$

De ce qui précède on a

$$b\|u_f'\|_2^2 = \int_0^T (f(t), u_f'(t))dt \leq \|f\|_2 \|u_f'\|_2,$$

ce qui donne alors

$$\|u_f'\|_2 \leq b^{-1}\|f\|_2.$$

Le reste de la démonstration est identique à celui du Lemme 3.3 en remarquant que $\partial\varphi(u_f(t))$ signifie $f(t) - bu_f'(t)$. ■

Lemme 3.6. *Soit* (3.1) *satisfaite. Soit* $F : H \to H$ *une application continue telle que*

$$\|Fx\| \leq k(\|x\| + 1), \qquad \forall x \in H \tag{3.18}$$

pour une certaine constante $k > 0$. *Alors, pour tout* $f \in L^2(I, H)$ *le problème*

$$\begin{aligned} &(i) - u_\varepsilon''(t) + bu_\varepsilon'(t) + \partial\varphi(u_\varepsilon(t)) + \varepsilon\|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t) + F(u_\varepsilon(t)) \ni f(t), \\ &\qquad\qquad p.p.\ t \in I (b \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0), \\ &(ii) \qquad\qquad u_\varepsilon(T) = -u_\varepsilon(0), \quad u_\varepsilon'(T) = -u_\varepsilon'(0), \end{aligned} \tag{3.19}$$

admet une solution $u_\varepsilon \in W^{2,2}(I, H)$. *De plus, l'application* $t \longmapsto \varphi(u_\varepsilon(t))$ *est absolument continue sur* I.

Démonstration.

Soit $\tilde{\varphi}(u) = \varphi(u) + \frac{\varepsilon}{3}\|u\|^3$, $u \in H$. On remarque que (3.1) est satisfaite pour $\tilde{\varphi}$ au lieu de φ. En effet, $\tilde{\varphi}$ est de la forme $\tilde{\varphi}(u) = \varphi(u) + \frac{\varepsilon}{3}\varphi_1(u)$, où $\varphi_1(u) = \|u\|^3$. La fonction $\tilde{\varphi}$ est convexe sci (voir les Remarques 1.33 et 1.35). Comme φ est propre, alors $\exists u \in H : \varphi(u) < +\infty$ et $\varphi(u) + \frac{\varepsilon}{3}\|u\|^3 < +\infty$. Il s'en suit que $\tilde{\varphi}$ est propre et $\mathrm{dom}\,(\tilde{\varphi}) = \mathrm{dom}\,(\varphi)$. De plus, $\tilde{\varphi}$ est une fonction paire (car elle est somme de deux fonctions paires) et $\tilde{\varphi}(0) = 0$.

Montrons que pour tout $L > 0$**, l'ensemble** $E_1 = \{x \in H : \tilde{\varphi}(x) \leq L,\ \|x\| \leq L\}$ **est compact**.

Rappelons que par hypothèse (voir (3.1)), l'ensemble $E_2 = \{x \in H : \varphi(x) \leq L,\ \|x\| \leq L\}$ est compact.

• Montrons tout d'abord que $E_1 \subset E_2$.

Soit $x \in E_1$ alors $\tilde{\varphi}(x) \leq L$ et $\|x\| \leq L$. Donc $\varphi(x) + \frac{\varepsilon}{3}\|x\|^3 \leq L$ et $\|x\| \leq L$. Il résulte que $\varphi(x) \leq L$ et $\|x\| \leq L$. Par conséquent $x \in E_2$, et l'inclusion a lieu.

• Montrons maintenant que E_1 est fermé.

Soit $(x_n)_n \subset E_1$ telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$: on a $x_n \in E_1$. Par définition de l'ensemble E_1, on a $\tilde{\varphi}(x_n) \leq L$ et $\|x_n\| \leq L$. Comme $\tilde{\varphi}$ est semi-continue inférieurement alors $\tilde{\varphi}(x) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \tilde{\varphi}(x_n) \leq L$. D'autre part, on a $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|$. Ainsi $\|x\| \leq L$. Il résulte que $x \in E_1$, et par conséquent E_1 est fermé.

L'ensemble E_1 étant fermé dans le compact E_2, il est alors compact.

D'après Exemple 1.56, on a $\partial\varphi_2(x) = x\|x\|$ où $\varphi_2(x) = \dfrac{1}{3}\|x\|^3$. De plus, d'après Corollaire 1.57, il résulte que pour tout $u \in \mathrm{dom}\,(\varphi)$,

$$\begin{aligned}\partial\tilde{\varphi}(u) &= \partial\varphi(u) + \varepsilon\, \partial\varphi_2(u)\\ &= \partial\varphi(u) + \varepsilon\, u\|u\|.\end{aligned}$$

On définit $\mathscr{F} : L^2(I, H) \to L^2(I, H)$ par $\mathscr{F}h = u_h$, où u_h est l'unique solution de

$$\begin{aligned}&(i) - u_h''(t) + bu_h'(t) + \partial\tilde{\varphi}(u_h(t)) \ni f(t) - F(h(t)), \qquad p.p.\ t \in I,\\ &(ii) \qquad\qquad u_h(T) = -u_h(0), \quad u_h'(T) = -u_h'(0).\end{aligned} \tag{3.20}$$

D'après (3.18), on a pour tout $h \in L^2(I, H)$

$$\begin{aligned}\forall\, t \in I, \qquad \|F(h(t))\|^2 &\leq k^2(1 + \|h(t)\|)^2\\ &\leq 2k^2(1 + \|h(t)\|^2).\end{aligned}$$

En intégrant sur I on obtient

$$\int_0^T \|F(h(t))\|^2 dt \leq 2k^2T + 2k^2 \int_0^T \|h(t)\|^2 dt < +\infty$$

ce qui donne $\|Fh\|_2^2 < +\infty$ et alors $Fh \in L^2(I, H)$ pour tout $h \in L^2(I, H)$.

Le problème (3.20) est de la forme

$$\begin{aligned}&(i) - v''(t) + bv'(t) + \partial\tilde{\varphi}(v(t)) \ni g(t), \text{ p.p. } t \in I\\ &(ii) \qquad\qquad v(T) = -v(0), \quad v'(T)) = -v'(0)\end{aligned}$$

avec $g \in L^2(I, H)$ et $\tilde{\varphi}$ satisfaisant aux hypothèses du Théorème 2.2. Alors on a l'existence et l'unicité de la solution, et l'application

$$\begin{aligned}\mathscr{F} : L^2(I, H) &\to W^{2,2}(I, H)\\ h &\longmapsto u_h\end{aligned}$$

où u_h est l'unique solution de (3.20), est bien définie à valeurs dans $W^{2,2}(I, H)$ (voir Théorème 2.2).

Nous allons appliquer le théorème du point fixe Schauder à $\mathscr{F}$ (voir Théorème 1.66).

En vertu du Lemme 3.3 et l'hypothèse sur F, l'application $\mathscr{F}$ est continue et compacte.

Nous montrons maintenant que pour un $r > 0$ suffisamment grand, $\mathscr{F} : B \to B$, où $B = \{h \in L^2(I, H) : \ \|h\|_2 \leq r\}$ est la boule fermée.

Tout d'abord, on va montrer que

$$\varepsilon \int_0^T \|u_h(t)\|^3 dt \leq \int_0^T \|f(t)\|\|u_h(t)\| dt + k \int_0^T (\|h(t)\| + 1)\|u_h(t)\| dt.$$

Nous multiplions $(3.20)(i)$ par $u_h(t)$, intégrons sur I et utilisons (3.18), $(3.20)(ii)$, nous obtenons

$$-\int_0^T (u_h(t), u_h''(t))dt + b\int_0^T (u_h(t), u_h'(t))dt + \int_0^T (v(t), u_h(t))dt$$
$$= \int_0^T (f(t), u_h(t))dt + \int_0^T (-F(h(t)), u_h(t))dt,$$

où $v(t) \in \partial\tilde{\varphi}(u_h(t))$.

Par intégration par partie, utilisons $(3.20)(ii)$ nous aurons

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_h''(t), u_h(t))dt &= \Big[u_h'(t)u_h(t)\Big]_0^T - \int_0^T \|u_h'(t)\|^2 dt\\ &= \Big(u_h'(T)u_h(T) - u_h'(0)u_h(0)\Big) - \int_0^T \|u_h'(t)\|^2 dt\\ &= u_h(0)u_h'(0) - u_h'(0)u_h(0) - \int_0^T \|u_h'(t)\|^2 dt\\ &= -\|u_h'\|_2^2.\end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant $(3.20)(ii)$ on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^T (u_h(t), u_h'(t))dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(\|u_h(t)\|^2)dt\\ &= \frac{1}{2}\Big[\|u_h(t)\|^2\Big]_0^T\\ &= \frac{1}{2}\Big(\|u_h(T)\|^2 - \|u_h(0)\|^2\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\|u_h(0)\|^2 - \|u_h(0)\|^2\Big)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Tenons compte de

$$v(t) \in \partial\tilde{\varphi}(u_h(t)) = \partial\varphi(u_h(t)) + \varepsilon\|u_h(t)\|u_h(t)$$

on obtient

$$\|u_h'\|_2^2 + \int_0^T (w(t), u_h(t))dt + \varepsilon\int_0^T \|u_h(t)\|^3 dt$$
$$= \int_0^T (f(t), u_h(t))dt + \int_0^T (-F(h(t)), u_h(t))dt,$$

où $w(t) \in \partial\varphi(u_h(t))$.

De (1.2) et (1.6), $0 \in \partial\varphi(0)$. Comme $\partial\varphi$ est un opérateur monotone alors,

$$(w(t) - 0, u_h(t) - 0) \geq 0, \quad w(t) \in \partial\varphi(u_h(t)), t \in I.$$

Le membre droit de l'égalité précédente est positif, alors

$$\varepsilon \int_0^T \|u_h(t)\|^3 dt \leq \int_0^T (f(t), u_h(t))dt + \int_0^T (-F(h(t), u_h(t))dt.$$

D'où,

$$\varepsilon \int_0^T \|u_h(t)\|^3 dt \leq \int_0^T \|f(t)\| \|u_h(t)\| dt + \int_0^T \|F(h(t))\| \|u_h(t)\| dt$$

tenons en compte (3.18), il résulte

$$\varepsilon \int_0^T \|u_h(t)\|^3 dt \leq \int_0^T \|f(t)\| \|u_h(t)\| dt + k \int_0^T (\|h(t)\| + 1) \|u_h(t)\| dt \tag{3.21}$$

qui est l'estimation cherchée.

• Maintenant nous allons montrer que : $\|u_h\|_2^3 \leq T^{1/2} \|u_h\|^3_{L^3(I,H)}$.

Par l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u_h(t)\|^2 dt &\leq \Big(\int_0^T (\|u_h(t)\|^2)^{3/2} dt \Big)^{2/3} \Big(\int_0^T 1^3 dt \Big)^{1/3} \\ &= \Big(\int_0^T \|u_h(t)\|^3 dt \Big)^{2/3} T^{1/3}. \end{aligned}$$

Alors,

$$\|u_h\|_2 \leq \Big(\int_0^T \|u_h(t)\|^3 dt \Big)^{1/3} T^{1/6}.$$

Par conséquent,

$$\|u_h\|_2^3 \leq T^{1/2} \|u_h\|^3_{L^3(I,H)}. \tag{3.22}$$

• Ensuite montrons que $\|u_h\|_2^2 \leq \mu(1 + k(\|h\|_2 + 1))$.

De (3.22) on a

$$\varepsilon T^{-1/2} \|u_h\|_2^3 \leq \varepsilon \|u_h\|^3_{L^3(I,H)}.$$

En vertu de (3.21), par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \varepsilon T^{-1/2} \|u_h\|_2^3 &\leq \|f\|_2 \|u_h\|_2 + k \int_0^T \|h(t)\| \|u_h(t)\| dt + k \int_0^T \|u_h(t)\| dt \\ &\leq \|f\|_2 \|u_h\|_2 + k \|h\|_2 \|u_h\|_2 + k T^{1/2} \|u_h\|_2 \end{aligned}$$

donc,

$$\|u_h\|_2^2 \leq \frac{T^{1/2}}{\varepsilon} \|f\|_2 + \frac{kT^{1/2}}{\varepsilon} \|h\|_2 + \frac{kT}{\varepsilon}.$$

Soit $\mu = max\big(\frac{T^{1/2}}{\varepsilon} \|f\|_2, \frac{T^{1/2}}{\varepsilon}, \frac{T}{\varepsilon}\big)$, alors

$$\|u_h\|_2^2 \leq \mu + k\mu \|h\|_2 + k\mu = \mu(1 + k(\|h\|_2 + 1)). \tag{3.23}$$

Si $\|h\|_2 \leq r$, il suffit de choisir r assez grand tel que $\mu(1 + k(r+1)) \leq r^2$, pour conclure à partir de (3.23) que $\|u_h\|_2 \leq r$.

Donc, $\mathscr{F} : B = \{h \in L^2(I,H) : \|h\|_2 \leq r\} \rightarrow B$. De plus, $\mathscr{F}$ est continue, par le théorème du point fixe du Schauder $\mathscr{F}$ admet un point fixe $u_\varepsilon \in L^2(I,H)$ i.e., $\mathscr{F}u_\varepsilon = u_\varepsilon$ et alors (3.19) est satisfaite.
Enfin, comme $f + u''_\varepsilon - bu'_\varepsilon - \varepsilon\|u_\varepsilon\|_2 u_\varepsilon - Fu_\varepsilon \in L^2(I,H)$ et $u_\varepsilon \in W^{2,2}(I,H)$ alors, de Proposition 1.59 l'application $t \longmapsto \varphi(u_\varepsilon(t))$ est absolument continue sur I.
La démonstration du Lemme est alors complète. ■

Une démonstration similaire basée sur Lemme 3.6 entraine le lemme suivant.

Lemme 3.7. *Soit* (3.1) *satisfaite. Soit $F : H \rightarrow H$ une application continue satisfaisant* (3.18). *Alors pour tout $f \in L^2(I,H)$, le problème*

$$\begin{aligned} bu'_\varepsilon(t) + \partial\varphi(u_\varepsilon(t)) + \varepsilon\|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t) + F(u_\varepsilon(t)) \ni f(t), \quad t \in I, \\ u_\varepsilon(T) = -u_\varepsilon(0), \end{aligned} \tag{3.24}$$

où $b \neq 0$, $\varepsilon > 0$ admet au moins une solution $u_\varepsilon \in W^{1,2}(I,H)$, telle que $t \longmapsto \varphi(u_\varepsilon(t))$ est absolument continue sur I.

Dans la prochaine étape, on fait tendre ε vers 0^+.

Lemme 3.8. *Sous les hypothèses du Lemme* 3.6, *supposons que F est la différentielle au sens de Fréchet d'une fonction G Fréchet différentiable et paire sur H. Alors, pour tout $f \in L^2(I,H)$, le problème*

$$\begin{aligned} -u''(t)+bu'(t) + \partial\varphi(u(t)) + F(u(t)) \ni f(t), \quad t \in I, \\ u(T) = -u(0), \quad u'(T) = -u'(0), \end{aligned} \tag{3.25}$$

où $b \neq 0$, admet une solution $u \in W^{2,2}(I,H)$ telle que

$$t \longmapsto \varphi(u(t)) \ \ \textit{est absolument continue sur } I. \tag{3.26}$$

Démonstration.
Montrons que $\{u_\varepsilon\}$ est relativement compacte dans $C(I,H)$.

Soit u_ε une solution de (3.19). Par hypothèse sur F, on a

$$\begin{aligned}\langle Fu_\varepsilon, u'_\varepsilon\rangle &= \int_0^T (F(u_\varepsilon(t)), u'_\varepsilon(t))dt \\ &= G(u_\varepsilon(T)) - G(u_\varepsilon(0)) \\ &= G(-u_\varepsilon(0)) - G(u_\varepsilon(0)) \qquad (\text{de } (3.19)(ii)) \\ &= G(u_\varepsilon(0)) - G(u_\varepsilon(0)) \qquad (G \text{ est paire}) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

On forme le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de $(3.19)(i)$ avec u'_ε

$$-\langle u''_\varepsilon, u'_\varepsilon\rangle + b\langle u'_\varepsilon, u'_\varepsilon\rangle + \langle v(t), u'_\varepsilon\rangle + \varepsilon\int_0^T (\|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t))dt + \langle Fu_\varepsilon, u'_\varepsilon\rangle = \langle f, u'_\varepsilon\rangle,$$

$$v(t) \in \partial\varphi(u_\varepsilon(t)).$$

On a

$$\begin{aligned}\langle u''_\varepsilon, u'_\varepsilon\rangle &= \int_0^T (u''_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t))dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}(\|u'_\varepsilon(t)\|^2)dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[\|u'_\varepsilon(t)\|^2\Big]_0^T \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|u'_\varepsilon(T)\|^2 - \|u'_\varepsilon(0)\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|u'_\varepsilon(T)\|^2 - \|u'_\varepsilon(T)\|^2\Big) \qquad (\text{de } (3.19)(ii)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

On a d'après Proposition 1.59 et le fait que φ est paire, (3.1) et $(3.19)(ii)$

$$\begin{aligned}\int_0^T (v(t), u'_\varepsilon(t)))dt &= \int_0^T \frac{d}{dt}\big(\varphi(u_\varepsilon(t))\big)dt, \ v(t) \in \partial\varphi(u_\varepsilon(t)) \\ &= \Big[\varphi(u_\varepsilon(t))\Big]_0^T \\ &= \varphi(u_\varepsilon(T)) - \varphi(u_\varepsilon(0)) \\ &= \varphi(-u_\varepsilon(0)) - \varphi(u_\varepsilon(0)) \\ &= \varphi(u_\varepsilon(0)) - \varphi(u_\varepsilon(0)) \\ &= 0.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après Exemple 1.56, on a $\partial\varphi_2(x) = x\|x\|$ où $\varphi_2(x) = \dfrac{1}{3}\|x\|^3$. D'après

Proposition 1.59 et tenons compte de (3.19)(ii), on trouve

$$\begin{aligned}\int_0^T (\|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t), u'_\varepsilon(t))dt &= \int_0^T (\partial\varphi_2(u_\varepsilon(t)), u'_\varepsilon(t))dt \\ &= \int_0^T \frac{d}{dt}\Big(\varphi_2(u_\varepsilon(t))\Big)dt \\ &= \Big[\varphi_2(u_\varepsilon(t))\Big]_0^T \\ &= \varphi_2(u_\varepsilon(T)) - \varphi_2(u_\varepsilon(0)) \\ &= \varphi_2(-u_\varepsilon(0)) - \varphi_2(u_\varepsilon(0)) \\ &= \varphi_2(u_\varepsilon(0)) - \varphi_2(u_\varepsilon(0)) \quad (\varphi_2 \text{ est paire}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Par (3.27), on a $\langle F(u_\varepsilon), u'_\varepsilon\rangle = 0$. Alors,

$$b\|u'_\varepsilon\|_2^2 = \int_0^T (f(t), u'_\varepsilon(t))dt.$$

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$\begin{aligned} b\|u'_\varepsilon\|_2^2 &\le \|f\|_2\|u'_\varepsilon\|_2 \\ \|u'_\varepsilon\|_2 &\le b^{-1}\|f\|_2. \end{aligned} \tag{3.28}$$

De (3.28) et (2.8) où u est remplacé par u_ε, on obtient

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)} \le T^{1/2}b^{-1}\|f\|_2. \tag{3.29}$$

On pose $f_\varepsilon(t) = f(t) - F(u_\varepsilon(t)) - \varepsilon\xi_\varepsilon(t)$, où $\xi_\varepsilon(t) = \|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t)$ pour tout $t \in I$ et on réécrit (3.19) comme suit

$$\begin{cases} -u''_\varepsilon(t) + bu'_\varepsilon(t) + \partial\varphi(u_\varepsilon(t)) \ni f_\varepsilon(t), \quad t \in I, \\ \\ u_\varepsilon(T) = -u_\varepsilon(0), \quad u'_\varepsilon(T) = -u'_\varepsilon(0). \end{cases} \tag{3.30}$$

De (3.29) et (3.18), on trouve

$$\begin{aligned}\|f_\varepsilon\|_2 &= \|f + Fu_\varepsilon - \varepsilon\xi_\varepsilon\|_2 \\ &\le \|f\|_2 + \|Fu_\varepsilon\|_2 + \varepsilon\|\xi_\varepsilon\|_2 \\ &\le \|f\|_2 + \|g\|_{L^2(I)} + \varepsilon T\|u_\varepsilon\|^2_{L^\infty(I,H)} \\ &\le \|f\|_2 + \|g\|_{L^2(I)} + \varepsilon T^2 b^{-2}\|f\|_2^2 \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

où g est définie par $g(t) = k(1 + T^{1/2}b^{-1}\|f\|_2)$, $t \in I$ et $g \in L^2(I, \mathbb{R})$.
D'où, $\{f_\varepsilon\}$ est bornée dans $L^2(I, H)$.
Par application du Lemme 3.3 à (3.30) entraine que $\{u_\varepsilon\}$ est relativement compacte dans $C(I, H)$. On peut alors supposer que

$$u_\varepsilon \to u \text{ dans } C(I, H)\ (\varepsilon \to 0^+). \tag{3.31}$$

Montrons que u est une solution de (3.25).
De la continuité de F et (3.31), alors $F(u_\varepsilon(t)) \to F(u(t))$ dans H, $\forall t \in I$. De plus $\|Fu_\varepsilon(t)\| \leq g(t)$ pour tout $t \in I$. Donc, par Théorème 1.63, on trouve que $Fu_\varepsilon \to Fu$ dans $L^2(I, H)$. Comme l'application $t \longmapsto \xi_\varepsilon(t) = \|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t)$ est bornée dans $L^\infty(I, H)$ donc est bornée dans $L^2(I, H)$, on en déduit que $\varepsilon\xi_\varepsilon \to 0^+$ dans $L^2(I, H)$ quand $\varepsilon \to 0$. Donc

$$f_\varepsilon \to f - Fu \text{ dans } L^2(I, H). \tag{3.32}$$

Le passage à la limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$ dans (3.30) est possible, en vertu de (3.31)-(3.32). On remarque que (3.30) est équivalente à une inclusion de la forme $Bu_\varepsilon \ni f_\varepsilon$ dans $L^2(I, H)$ où $B = M_{1,b} + N$ qui est maximal monotone sur $L^2(I, H)$ (Théorème 2.2). Alors, par la propriété de B, B est demi-fermé (voir Proposition 1.47) avec (3.31) qui entraine $u_\varepsilon \to u$ dans $L^2(I, H)$ et (3.32), il s'en suit que u est une solution de (3.25).
Comme $f + u'' - bu' - Fu \in L^2(I, H)$, $u \in W^{2,2}(I, H)$, par Proposition 1.59 l'application $t \longmapsto \varphi(u(t))$ est absolument continue sur I. ■

Lemme 3.9. *Supposons que les hypothèses du Lemme 3.8 soient satisfaites. Alors pour tout $f \in L^2(I, H)$, il existe au moins une solution $u \in W^{1,2}(I, H)$ de*

$$bu'(t) + \partial\varphi(u(t)) + F(u(t)) \ni f(t), \quad t \in I \quad (b \neq 0)$$
$$u(T) = -u(0),$$

telle que (3.26) soit vérifiée.

On prend $b = 0$ dans (3.25) et on montre le Lemme suivant.

Lemme 3.10. *On suppose que (3.1) soit vérifiée. Soit $F : H \to H$ une fonction continue telle que*

$$\|Fx\| \leq k(\|x\|^\alpha + 1), \quad x \in H, \tag{3.33}$$

pour certaines constantes $k > 0$ et $\alpha \in [0, 1[$. Alors pour tout $f \in L^2(I, H)$, le problème

$$\begin{aligned} -u''(t) + \partial\varphi(u(t)) + F(u(t)) \ni f(t), \quad t \in I, \\ u(T) = -u(0), \quad u'(T) = -u'(0), \end{aligned} \tag{3.34}$$

admet une solution $u \in W^{2,2}(I,H)$ *satisfaisant* (3.26).

Démonstration.

Montrons que $\{u_\varepsilon\}$ **et** $\{Fu_\varepsilon\}$ **sont bornées dans** $L^\infty(I,H)$**.**

Il est clair que (3.33) est plus forte que (3.18) car

$$\|Fx\| \leq k(\|x\|^\alpha + 1) \leq k(\|x\| + 1),\ x \in H.$$

Du Lemme 3.6, il existe $u_\varepsilon \in W^{2,2}(I,H)$ satisfaisant (3.19) avec $b = 0$.

On multiplie (3.19)(i) (où $b = 0$) par $(-u''_\varepsilon(t))$ et on intègre sur I, en utilisant (3.19)(ii) on obtient

$$\int_0^T (-u''_\varepsilon(t), -u''_\varepsilon(t))dt + \int_0^T (-u''_\varepsilon(t), \partial\tilde{\varphi}(u_\varepsilon(t)))dt = \int_0^T (f(t), u''_\varepsilon(t))dt + \int_0^T (F(u_\varepsilon(t)), -u''_\varepsilon(t))dt,$$

alors

$$\|u''_\varepsilon\|_2^2 - \int_0^T (u''_\varepsilon(t), \partial\tilde{\varphi}(u_\varepsilon(t)))dt = \int_0^T (f(t), u''_\varepsilon(t))dt + \int_0^T (F(u_\varepsilon(t)), -u''_\varepsilon(t))dt.$$

De (2.17) avec $A = \partial\tilde{\varphi}$, on a

$$\int_0^T (u''_\varepsilon(t), \partial\tilde{\varphi}(u_\varepsilon(t)))dt \leq 0.$$

Alors, le côté droit de l'égalité précédente est positif

$$\int_0^T (f(t), u''_\varepsilon(t))dt + \int_0^T (F(u_\varepsilon(t)), -u''_\varepsilon(t))dt \geq 0.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\|u''_\varepsilon\|_2^2 \leq \|f\|_2\|u''_\varepsilon\|_2 + \|Fu_\varepsilon\|_2\|u''_\varepsilon\|_2,$$

qui donne

$$\|u''_\varepsilon\|_2 \leq \|f\|_2 + \|Fu_\varepsilon\|_2. \tag{3.35}$$

En remplaçant dans (2.8) (u par u'_ε), on déduit de (3.35) que

$$\begin{aligned} \|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)} &\leq T^{1/2}\|u''_\varepsilon\|_2 \\ &\leq T^{1/2}(\|f\|_2 + \|Fu_\varepsilon\|_2) \\ &\leq c_4(\|f\|_2 + \|Fu_\varepsilon\|_2) \end{aligned}$$

où $c_4 = T^{1/2}$.

En remplaçant dans (2.8) (u par u_ε), on obtient

$$\begin{aligned} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)} &\leq T^{1/2}\|u'_\varepsilon\|_2 \\ &\leq T\|u'_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)} \\ &\leq c_4T(\|f\|_2 + \|Fu_\varepsilon\|_2) \\ &\leq c_5(\|f\|_2 + \|Fu_\varepsilon\|_2) \end{aligned} \tag{3.36}$$

où $c_5 = c_4 T = T^{3/2}$, c_4, c_5 sont indépendants de ε.
De (3.33), en combinant une inégalité de type

$$xy^\alpha \leq (1-\alpha)x^{\frac{1}{1-\alpha}} + \alpha y,\ \forall x, y > 0,\ \alpha \in [0,1[, \tag{3.37}$$

avec (3.36) on aura

$$\{u_\varepsilon\} \text{ et } \{Fu_\varepsilon\} \text{ sont bornées dans } L^\infty(I,H). \tag{3.38}$$

En effet, si on prend $x = 1$, $y = \|u_\varepsilon(t)\|$, en remplaçant dans l'inégalité (3.37), on trouve

$$\|u_\varepsilon(t)\|^\alpha \leq 1 - \alpha + \alpha\|u_\varepsilon(t)\|,\ t \in I,\ \alpha \in [0,1[.$$

Alors, de (3.33) on obtient

$$\begin{aligned}\|F(u_\varepsilon(t))\| &\leq k(1-\alpha+\alpha\|u_\varepsilon(t)\|+1)\\ &\leq k(2+\alpha\|u_\varepsilon(t)\|),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|F(u_\varepsilon(t))\|^2 &\leq k^2(2+\alpha\|u_\varepsilon(t)\|)^2\\ &\leq 2(4k^2) + 2\alpha^2k^2\|u_\varepsilon(t)\|^2.\end{aligned}$$

En intégrant sur I on obtient

$$\begin{aligned}\|Fu_\varepsilon\|_2^2 = \int_0^T \|F(u_\varepsilon(t))\|^2 dt &\leq \int_0^T 8k^2 dt + 2\alpha^2k^2 \int_0^T \|u_\varepsilon(t)\|^2 dt\\ &= 8k^2T + 2\alpha^2k^2\|u_\varepsilon\|_2^2.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\|Fu_\varepsilon\|_2 &\leq (8k^2T + 2\alpha^2k^2\|u_\varepsilon\|_2^2)^{1/2}\\ &\leq 2\sqrt{2}kT^{1/2} + \sqrt{2}\alpha k\|u_\varepsilon\|_2\\ &\leq 2\sqrt{2}kT^{1/2} + \sqrt{2}\alpha kT^{1/2}\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)}.\end{aligned}$$

Alors de (3.36) on trouve

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)} \leq c_5(\|f\|_2 + d_1k + d_1k\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)})$$

ce qui entraine

$$(1-d_2k)\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)} \leq c_5\|f\|_2 + d_2k < +\infty,$$

où $d_1 = 2\sqrt{2}T^{1/2}$, $d_2 = d_1 c_5$.

Pour un choix approprié de k, T, on conclut que

$$\{u_\varepsilon\} \text{ est bornée dans } L^\infty(I, H).$$

En combinant cela avec (3.33), on déduit que

$$\|F(u_\varepsilon(t))\| \leq k(2 + \alpha \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(I,H)}) < \infty.$$

D'où,

$$\{Fu_\varepsilon\} \text{ est bornée dans } L^\infty(I, H).$$

Montrons que u est une solution de (3.34).

On pose $f_\varepsilon(t) = f(t) - F(u_\varepsilon(t)) - \varepsilon\|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t)$. De (3.38) et (3.33), on conclut que $\{f_\varepsilon\}$ est bornée dans $L^2(I, H)$.

En appliquant Lemme 3.3 au problème

$$\begin{cases} -u''_\varepsilon(t) + \partial\varphi(u_\varepsilon(t)) \ni f_\varepsilon(t), \quad t \in I, \\ u_\varepsilon(T) = -u_\varepsilon(0), \end{cases} \tag{3.39}$$

implique que $\{u_\varepsilon\}$ est relativement compact dans $C(I, H)$. Alors, on peut supposer que

$$u_\varepsilon \to u \text{ dans } C(I, H) \ (\varepsilon \to 0^+). \tag{3.40}$$

De la continuité de F et (3.40), alors on a $F(u_\varepsilon(t)) \to F(u(t))$ dans H, $\forall t \in I$. De plus, $\{Fu_\varepsilon\}$ est bornée dans $L^\infty(I, H)$ (donc bornée dans $L^2(I, H)$). Il s'en suit que $Fu_\varepsilon \to Fu$ dans $L^2(I, H)$ par Théorème 1.63.

Comme l'application $t \longmapsto \xi_\varepsilon(t) = \|u_\varepsilon(t)\|u_\varepsilon(t)$ est bornée dans $L^\infty(I, H)$ donc est bornée dans $L^2(I, H)$, on en déduit que $\varepsilon\xi_\varepsilon \to 0$ dans $L^2(I, H)$ quand $\varepsilon \to 0$. D'où

$$f_\varepsilon \to f - Fu \text{ dans } L^2(I, H) \ (\varepsilon \to 0^+). \tag{3.41}$$

Nous allons passer à la limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$ dans le problème (3.39), en tenant compte de (3.40) et (3.41). On remarque que le problème (3.39) est équivalent à une inclusion de la forme $Bu_\varepsilon \ni f_\varepsilon$ dans $L^2(I, H)$ où $B = M_{1,0} + N$ qui est maximal monotone sur $L^2(I, H)$ (voir Théorème 2.2). De la propriété de demi-fermeture de B (voir Proposition 1.47), de (3.40) qui donne $u_\varepsilon \to u$ dans $L^2(I, H)$ et de (3.41), il s'en suit que u est une solution de (3.39). Comme $f + u'' - Fu \in L^2(I, H)$, $u \in W^{2,2}(I, H)$, de la Proposition 1.59, l'application $t \longmapsto \varphi(u(t))$ est absolument continue sur I. ■

Maintenant, on démontre le résultat du chapitre.

Démonstration. (Démonstration du Théorème 3.2**)**
On distingue deux cas.
Si $a > 0, b \neq 0$. Pour tout $\lambda > 0$, on considère le problème approximatif

$$\begin{aligned} &(i) - au''_\lambda(t) + bu'_\lambda(t) + \partial\varphi(u_\lambda(t)) - \partial\psi_\lambda(u_\lambda(t)) \ni f(t), \quad p.p.\ t \in I \\ &(ii) \qquad u_\lambda(T) = -u_\lambda(0), \quad u'_\lambda(T) = -u'_\lambda(0). \end{aligned} \tag{3.42}$$

Des propriétés de $\partial\psi_\lambda$ (voir Proposition 1.52(i) et Proposition 1.58), on peut prendre $F = -\partial\psi_\lambda$ dans Lemme 3.8 pour déduire l'existence d'une fonction $u_\lambda \in W^{2,2}(I,H)$ satisfaisant (3.42) et telle que l'application $t \longmapsto \varphi(u_\lambda(t))$ soit absolument continue sur I. Soit $v_\lambda(t) = f(t) + au''_\lambda(t) - bu'_\lambda(t) + \partial\psi_\lambda(u_\lambda(t))$. On remarque que $v_\lambda \in L^2(I,H)$ et $v_\lambda(t) \in \partial\varphi(u_\lambda(t))$ $p.p.$ sur I. On réécrit (3.42)(i) comme suit

$$-au''_\lambda(t) + bu'_\lambda(t) + v_\lambda(t) - \partial\psi_\lambda(u_\lambda(t)) = f(t), \quad t \in I. \tag{3.43}$$

Montrons maintenant que : $\|v_\lambda\|_2^2 \leq (\|f\|_2 + \|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2)\|v_\lambda\|_2$.
Tout d'abord, on forme le produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle$ de (3.43) avec u'_λ on obtient,

$$\begin{aligned} &- a\int_0^T (u''_\lambda(t), u'_\lambda(t))dt + b\int_0^T (u'_\lambda(t), u'_\lambda(t))dt \\ &+ \int_0^T (v_\lambda(t), u'_\lambda(t))dt - \int_0^T (\partial\psi_\lambda(u_\lambda(t)), u'_\lambda(t))dt = \int_0^T (f(t), u'_\lambda(t))dt. \end{aligned} \tag{3.44}$$

En utilisant (3.42)(ii) on aura

$$\begin{aligned} \int_0^T (u''_\lambda(t), u'_\lambda(t))dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\big(\|u'_\lambda(t)\|^2\big)dt \\ &= \frac{1}{2}\Big[\|u'_\lambda(t)\|^2\Big]_0^T \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|u'_\lambda(T)\|^2 - \|u'_\lambda(0)\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(\|u'_\lambda(0)\|^2 - \|u'_\lambda(0)\|^2\Big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On a $v_\lambda(t) \in \partial\varphi(u_\lambda(t))$ alors d'après la Proposition 1.59 et (3.42)(ii), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^T (v_\lambda(t), u'_\lambda(t)) &= \int_0^T \frac{d}{dt}\big(\varphi(u_\lambda(t))\big)dt \\
&= \Big[\varphi(u_\lambda(t))\Big]_0^T \\
&= \varphi(u_\lambda(T)) - \varphi(u_\lambda(0)) \\
&= \varphi(-u_\lambda(0)) - \varphi(u_\lambda(0)) \\
&= \varphi(u_\lambda(0)) - \varphi(u_\lambda(0)) \quad (\varphi \text{ est paire}) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De même, on trouve

$$\int_0^T (u'_\lambda(t), \partial\psi_\lambda(u_\lambda(t)))dt = 0.$$

De retour à (3.44)

$$b\|u'_\lambda\|_2^2 = \int_0^T (f(t), u'_\lambda(t))dt,$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$b\|u'_\lambda\|_2^2 \leq \|f\|_2\|u'_\lambda\|_2.$$

Ceci montre que (3.28) et (3.29) sont vérifiées avec u_λ au lieu de u_ε, c-à-d

$$\|u'_\lambda\|_2 \leq b^{-1}\|f\|_2$$

et

$$\|u_\lambda\|_{L^\infty(I,H)} \leq T^{1/2}b^{-1}\|f\|_2.$$

Ensuite, on multiplie (3.43) par $v_\lambda(t)$ et on intègre sur I, on aura

$$\begin{aligned}
&- a\int_0^T (u''_\lambda(t), v_\lambda(t))dt + b\int_0^T (u'_\lambda(t), v_\lambda(t))dt \\
&+ \int_0^T (v_\lambda(t), v_\lambda(t))dt - \int_0^T (\partial\psi_\lambda(u_\lambda(t)), v_\lambda(t))dt = \int_0^T (f(t), v_\lambda(t))dt,
\end{aligned}$$

De (2.17) et le fait que $\displaystyle\int_0^T (u'_\lambda(t), v_\lambda(t))dt = 0$, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz on trouve

$$\begin{aligned}
\|v_\lambda\|_2^2 &\leq \|f\|_2\|v_\lambda\|_2 + \|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2\|v_\lambda\|_2 \\
&\leq (\|f\|_2 + \|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2)\|v_\lambda\|_2. \qquad (3.45)
\end{aligned}$$

Rappelons que $D(\partial\varphi) \subset D(\partial\psi)$ (voir (3.3)). D'une part, on a par définition

$$\|(\partial\varphi)^0(u_\lambda(t))\| = \inf\{\|y\|, y \in \partial\varphi(u_\lambda(t))\}$$

et comme $v_\lambda(t) \in \partial\varphi(u_\lambda(t))$ alors,

$$\|(\partial\varphi)^0(u_\lambda(t))\| \leq \|v_\lambda(t)\| \; p.p. \quad t \in I.$$

D'autre part, de Proposition 1.52, et le fait que $\partial\psi_\lambda = (\partial\psi)_\lambda$ on a

$$\|\partial\psi_\lambda(u_\lambda(t))\| \leq \|(\partial\psi)^0(u_\lambda(t))\| \; p.p. \quad t \in I.$$

Ceci, la bornitude de l'ensemble $\{u_\lambda : \lambda > 0\}$ dans $L^\infty(I, H)$ et la condition (3.3) impliquent qu'il existe $k \in [0, 1[, \theta \in [0, 2[$ et $c_6 > 0$ tels que

$$\|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2 \leq c_6\left(1 + \|\varphi^\theta(u_\lambda)\|_{L^1(I)}^{1/2}\right) + k\|v_\lambda\|_2, \quad \forall\lambda > 0. \tag{3.46}$$

En effet, de (3.3), comme $\|u_\lambda\|_{L^\infty(I,H)} \leq r$, où $r = T^{1/2}b^{-1}\|f\|_2, \exists k_r \in [0, 1[,\ l_r > 0$ et $\theta_r \in [0, 2[$ tels que

$$\|(\partial\psi)^0(u_\lambda(t))\|^2 \leq k_r\|(\partial\varphi)^0(u_\lambda(t))\|^2 + l_r(\varphi^{\theta_r}(u_\lambda(t)) + 1) \quad \forall u_\lambda(t) \in D(\partial\varphi), \|u_\lambda(t)\| \leq r.$$

Alors,

$$\|\partial\psi_\lambda(u_\lambda(t))\|^2 \leq k_r\|v_\lambda(t)\|^2 + l_r(\varphi^{\theta_r}(u_\lambda(t)) + 1),$$

et

$$\begin{aligned}
&\|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2^2 \leq k_r\|v_\lambda\|_2^2 + l_r(\|\varphi^{\theta_r}(u_\lambda)\|_{L^1(I)} + T) \\
&\|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2 \leq \sqrt{k_r}\|v_\lambda\|_2 + \sqrt{l_r}\left((\|\varphi^{\theta_r}(u_\lambda)\|_{L^1(I)})^{1/2} + \sqrt{T}\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2 \leq c_6(1 + \|\varphi^\theta(u_\lambda)\|_{L^1(I)}^{1/2}) + k\|v_\lambda\|_2,$$

où

$$\begin{aligned}
c_6 &= \max(\sqrt{l_r}, \sqrt{l_r T}), \\
k &= \sqrt{k_r} \in [0, 1[, \\
\theta &= \theta_r \in [0, 2[.
\end{aligned}$$

Montrons maintenant que $\{\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\}$ est bornée dans $L^2(I, H)$.

De (3.45) et (3.46), il résulte

$$\begin{aligned}
\|v_\lambda\|_2 &\leq \|f\|_2 + \|\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\|_2, \\
&\leq \|f\|_2 + c_6(1 + \|\varphi^\theta(u_\lambda)\|_{L^1(I)}^{1/2}) + k\|v_\lambda\|_2, \quad \forall\lambda > 0,
\end{aligned}$$

alors

$$(1 - k)\|v_\lambda\|_2 \leq \|f\|_2(1 + \|\varphi^\theta(u_\lambda)\|_{L^1(I)}^{1/2}) + c_6(1 + \|\varphi^\theta(u_\lambda)\|_{L^1(I)}^{1/2}).$$

D'où,

$$\|v_\lambda\|_2 \leq c_7(1 + \|\varphi^\theta(u_\lambda)\|_{L^1(I)}^{1/2}), \tag{3.47}$$

où $c_7 = \dfrac{2}{1-k}\max(\|f\|_2, c_6)$ qui est indépendant de λ.
D'autre part, de la définition du sous-différentiel et le fait que $\varphi(0) = 0$

$$\varphi(u_\lambda(t)) \leq (v_\lambda(t), u_\lambda(t)), \ p.p. \quad t \in I \tag{3.48}$$

avec $v_\lambda(t) \in \partial\varphi(u_\lambda(t))$.
Comme $\beta = \sup\{u_\lambda(t), \lambda > 0, \ t \in I\} < \infty$, et $\varphi(x) \geq 0, \ \forall x \in H$ (car φ est paire et atteint son minimum en $\varphi(0) = 0$) alors, (3.48) implique

$$\begin{aligned} \varphi(u_\lambda(t)) &\leq \|v_\lambda(t)\|\|u_\lambda(t)\| \\ &\leq \beta\|v_\lambda(t)\|. \end{aligned}$$

Donc $\|\varphi(u_\lambda)\|_{L^2(I)}^2 \leq \beta^2\|v_\lambda\|_2^2$, il en résulte que

$$\|\varphi(u_\lambda)\|_{L^2(I)} \leq c_8\|v_\lambda\|_2, \tag{3.49}$$

où $c_8 = \beta > 0$.
Ainsi (3.47), (3.49) et $\theta < 2$ entrainent que

$$\begin{aligned} \|v_\lambda\|_2 &\leq c_7\big(1 + \big(\int_0^T |\varphi^\theta(u_\lambda(t))|dt\big)^{1/2}\big), \\ &\leq c_7\big(1 + \big(\int_0^T |\varphi(u_\lambda(t))|^2 dt\big)^{1/2}\big), \quad \theta < 2 \\ &\leq c_7(1 + \|\varphi(u_\lambda)\|_{L^2(I)}) \\ &\leq c_7(1 + c_8\|v_\lambda\|_2) \end{aligned}$$

et $(1 - c_7 c_8)\|v_\lambda\|_2 \leq c_7$, (on peut choisir les constante c_7, c_8 assez petit de sorte que le coefficient de $\|v_\lambda\|_2$ soit positif). Alors, on a $\|v_\lambda\|_2 < +\infty$.
De (3.49), on obtient

$$\|\varphi(u_\lambda)\|_{L^2(I)} < +\infty.$$

D'où,

$$\{\varphi(u_\lambda)\} \text{ et } \{v_\lambda\} \text{ sont bornées dans } L^2(I) \text{ et } L^2(I, H) \text{ respectivement.} \tag{3.50}$$

En utilisant (3.50) dans (3.3) (rappelons que $\{u_\lambda\}$ est bornée dans $L^\infty(I, H)$) et tenant compte de (3.46), on trouve

$$\{\partial\psi_\lambda(u_\lambda)\} \text{ est bornée dans } L^2(I, H). \tag{3.51}$$

Il est clair que (3.42)(i) peut être exprimé comme suit

$$-au''_\lambda(t) + bu'_\lambda(t) + \partial\varphi(u_\lambda(t)) \ni f(t) + \partial\psi_\lambda(u_\lambda(t)), \quad t \in I.$$

En combinant ceci avec (3.51) permet d'appliquer Lemme 3.3 (comme $f + \partial\psi_\lambda(u_\lambda) \in L^2(I, H)$) et de déduire que $\{u_\lambda\}$ est relativement compact dans $C(I, H)$.
Donc, on peut supposer que

$$u_\lambda \to u \text{ dans } C(I, H), \qquad \text{quand } \lambda \to 0^+. \tag{3.52}$$

Alors, de (3.51), (3.52) et Proposition 1.52(ii), on aura

$$\partial\psi_\lambda(u_\lambda) \rightharpoonup w \text{ dans } L^2(I, H) \ (\lambda \to 0^+) \tag{3.53}$$

où $w \in \partial\psi(u)$, i.e., $w(t) \in \partial\psi(u(t))$, p.p. $t \in I$.
Comme dans (3.30) (avec $f_\varepsilon(t) = f(t) + \partial\psi_\varepsilon(u_\varepsilon(t))$ et λ au lieu de ε), un passage à la limite quand $\lambda \to 0^+$ dans (3.42) se découle facilement maintenant, en tenant compte de (3.52), (3.53). Il s'en suit que le problème (3.42)(i) est équivalent à une inclusion de la forme $f_\lambda \in Bu_\lambda$ dans $L^2(I, H)$, où $B = M_{a,b} + N$ qui est maximal monotone sur $L^2(I, H)$ (voir Théorème 2.2). Alors, B est demi-fermé avec (3.52) qui donne $u_\lambda \to u$ dans $L^2(I, H)$ quand $\lambda \to 0^+$ et (3.53), il s'en suit que $u \in W^{2,2}(I, H)$ satisfaisant

$$\begin{gathered} -au''(t) + bu'(t) + v(t) - w(t) = f(t), \quad t \in I \\ u(T) = -u(0), \quad u'(T) = -u'(0), \end{gathered} \tag{3.54}$$

pour certains $v \in L^2(I, H)$, $v(t) \in \partial\varphi(u(t))$, p.p. $t \in I$. De plus, de Proposition 1.59, comme $f + u'' - bu' - w \in L^2(I, H)$, $u \in W^{2,2}(I, H)$, l'application $t \longmapsto \varphi(u(t))$ est absolument continue sur I.
De (3.54), (2.1) et le fait que $\partial\varphi$ et $\partial\psi$ sont des opérateurs impairs impliquent que u peut être prolongé par T-anti-périodicité sur $\mathbb{R}$ assurant ainsi une solution de $(\mathcal{P})$.
En effet, supposons qu'il existe une solution T-anti-périodique sur $[0, T]$ et montrons qu'il existe une solution sur $[T, 2T]$. Considérons le problème

$$\begin{gathered} -au''(t+T) + bu'(t+T) + \partial\varphi(u(t+T)) - \partial\psi(u(t+T)) \ni f(t+T)\, t \in [0, T], \\ u(t+T) = -u(t), \quad u'(t+T) = -u'(t), \quad f(t+T) = -f(t). \end{gathered}$$

Alors, nous obtenons

$$au''(t) - bu'(t) + \partial\varphi(-u(t)) - \partial\psi(-u(t)) \ni -f(t), \ \ t \in [0, T].$$

Comme $\partial\varphi$ et $\partial\psi$ sont impairs et u, u', u'' sont T-anti-périodiques alors l'inclusion est équivalente à

$$au''(t) - bu'(t) - \partial\varphi(u(t)) + \partial\psi(u(t)) \ni -f(t),\ t \in [0,T],$$

qui peut être exprimée comme suit

$$-au''(t) + bu'(t) + \partial\varphi(u(t)) - \partial\psi(u(t)) \ni f(t),\ t \in [0,T].$$

On conclut que l'étude d'existence de solution sur $[T, 2T]$ se ramène à l'étude sur $[0,T]$ dont la solution T-anti-périodique existe déjà. En procédant de façon analogue sur les intervalles $[iT, (i+1)T]$, $i = -1, \cdots, 0, 1, \cdots$, nous obtenons une solution sur $\mathbb{R}$ (en tenant compte du fait que sur $[(i-1)T, iT]$ le problème admet une solution T-anti-périodique).
Si $a = 0, b \neq 0$, alors on remplace (3.42) par le problème ($\lambda > 0$)

$$\begin{aligned} &bu'_\lambda(t) + \partial\varphi(u_\lambda(t)) - \partial\psi_\lambda(u_\lambda(t)) \ni f(t), \quad t \in I, \\ &u_\lambda(T) = -u_\lambda(0), \end{aligned} \tag{3.55}$$

qui a une solution $u_\lambda \in W^{1,2}(I, H)$ en vertu du Lemme 3.9 (où $F = -\partial\psi_\lambda$). Le passage à la limite quand $\lambda \to 0^+$ dans (3.55) peut être fait exactement comme ci-dessus (en utilisant Lemme 3.5 au lieu du Lemme 3.3).
Ceci achève la démonstration. ■