Chapitre 2

Téorèmes d'existences et d'unicités de solution

Le but de ce chapitre est d'étudier l'existence et l'unicité de solution du problème (2.1) ainsi : Soit $(E, \|.\|)$ un espace de Banach, considérons l'équation différentielle fractionnaire suivante

$$\begin{cases} D_+^\alpha y(t) = Ay(t) + f(t), \quad t \in [0,T] \\ I_+^{1-\alpha} y(0) = y^0, \end{cases} \tag{2.1}$$

où $0 < \alpha < 1$, $A : D(A) \subset E \to E$ est un opérateur linéaire fermé défini sur un espace dense $D(A)$ de l'espace E, $y^0 \in D(A)$ et $f \in L_E^2([0,T])$. Pour résoudre ce problème nous aurons besoin de l'hypothèse suivante

(H_1) $A : D(A) \subset E \to E$ est le générateur d'un C_0-semi groupe $\{Q(t)\}_{t\geqslant 0}$ uniformément borné dans E, c'est-à-dire, qu'il existe $k > 0$ tel que

$$\sup_{t\geqslant 0} \quad \|Q(t)\|_{\mathcal{L}(E)} \leqslant k \tag{2.2}$$

où $(\mathcal{L}(E), \|.\|_{\mathcal{L}(E)})$ est l'espace de Banach de tous les opérateurs linéaires bornés sur E.

Théorème 2.0.18 *[15]*
Soient $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ et $f \in L_E^2([0,T])$. Supposons que (H_1) est satisfaite. Alors pour tout $y^0 \in D(A)$, le problème (2.1) admet une solution unique $y \in L_E^2([0,T])$ donnée par

$$y(t) = \mathbb{P}_\alpha(t) y^0 + \int_0^t \mathbb{P}_\alpha(t-s) f(s) ds, \tag{2.3}$$

où

$$\mathbb{P}_\alpha(t) = \alpha \int_0^\infty \theta t^{\alpha-1} \Phi_\alpha(\theta) Q(t^\alpha \theta) d\theta \tag{2.4}$$

avec Φ_α donnée dans (1.10). De plus,

$$\|y\|_2 \leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \left(\sqrt{\frac{2T^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)}} \|y^0\| + \sqrt{\frac{2T^{3\alpha}}{\alpha^3}} \|f\|_2 \right). \tag{2.5}$$

Démonstration En utilisant la relation (1.17) et la Proposition 1.3.5, la transformée de Laplace de $D_+^\alpha y$ est

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[D_+^\alpha y](\lambda) &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dx} I_+^{1-\alpha} y(x)\right](\lambda) \\ &= \lambda \mathcal{L}[I_+^{1-\alpha} y](\lambda) - I_+^{1-\alpha} y(0^+) \\ &= \lambda^\alpha \mathcal{L}[y](\lambda) - I_+^{1-\alpha} y(0^+).\end{aligned}$$

D'après (2.1) on a

$$\begin{cases} \mathcal{L}[D_+^\alpha y](\lambda) = \mathcal{L}[Ay + f](\lambda) \\ I_+^{1-\alpha} y(0) = y^0. \end{cases}$$

Combinant ces deux dernières relations et la propriété de linéarité de la transformée de Laplace, il s'ensuit que

$$\begin{cases} \lambda^\alpha \mathcal{L}[y](\lambda) - I_+^{1-\alpha} y(0^+) = A\mathcal{L}[y](\lambda) + \mathcal{L}[f](\lambda) \\ I_+^{1-\alpha} y(0) = y^0 \end{cases}$$

i.e,

$$\begin{cases} (\lambda^\alpha I - A)\mathcal{L}[y](\lambda) = \mathcal{L}[f](\lambda) + I_+^{1-\alpha} y(0^+) \\ I_+^{1-\alpha} y(0) = y^0 \end{cases}$$

Donc la transformée de Laplace de la solution du problème (2.1) est

$$\mathcal{L}[y](\lambda) = (\lambda^\alpha I - A)^{-1} \mathcal{L}[f](\lambda) + (\lambda^\alpha I - A)^{-1} y^0. \tag{2.6}$$

On remarque (Théorème 1.2.12) que pour tout $h \in E$

$$(\lambda I - A)^{-1} h = \int_0^\infty e^{-\lambda s} Q(s) h ds.$$

Moyennant la définition de la densité de probabilité ρ_α dont la transformée de Laplace satisfait la relation (1.11)

$$\begin{aligned}(\lambda^\alpha I - A)^{-1} h &= \int_0^\infty e^{-\lambda^\alpha s} Q(s) h ds \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda s^{\frac{1}{\alpha}} u} \rho_\alpha(u) Q(s) h du ds.\end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $t = s^{\frac{1}{\alpha}} u$, il vient que

$$(\lambda^\alpha I - A)^{-1} h = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \left(\int_0^\infty s^{-\frac{1}{\alpha}} \rho_\alpha(t s^{-\frac{1}{\alpha}}) Q(s) h ds \right) dt.$$

Sachant que la transformée de Laplace de ρ_α satisfait

$$\alpha \Phi_\alpha(\theta) = \theta^{-1-\frac{1}{\alpha}} \rho_\alpha(\theta^{-\frac{1}{\alpha}}) \tag{2.7}$$

Donc, grâce de (2.7), on obtient (avec $\theta = t^{-\alpha}s$)

$$\begin{aligned}
(\lambda^\alpha I - A)^{-1}h &= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big(\int_0^\infty s^{-\frac{1}{\alpha}}\rho_\alpha(ts^{-\frac{1}{\alpha}})Q(s)hds\Big)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big(\int_0^\infty \alpha st^{-\alpha-1}\Phi_\alpha(t^{-\alpha}s)Q(s)hds\Big)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\Big(\int_0^\infty \alpha\theta t^{\alpha-1}\Phi_\alpha(\theta)Q(t^\alpha\theta)hd\theta\Big)dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\mathbb{P}_\alpha(t)hdt
\end{aligned}$$

où

$$\mathbb{P}_\alpha(t) = \int_0^\infty \alpha\theta t^{\alpha-1}\Phi_\alpha(\theta)Q(t^\alpha\theta)d\theta. \tag{2.8}$$

D'où

$$(\lambda^\alpha I - A)^{-1}h = \mathcal{L}[\mathbb{P}_\alpha](\lambda)h \tag{2.9}$$

Remplaçant la relation (2.9) dans l'équation (2.6), il résulte que

$$\mathcal{L}[y](\lambda) = \mathcal{L}[\mathbb{P}_\alpha](\lambda)\mathcal{L}[f](\lambda) + \mathcal{L}[\mathbb{P}_\alpha](\lambda)y^0. \tag{2.10}$$

On obtient en introduisant la transformée de Laplace inverse dans la relation (2.10)

$$\begin{aligned}
y(t) &= (\mathbb{P}_\alpha * f)(t) + \mathbb{P}_\alpha(t)y^0 \\
&= \int_0^t \mathbb{P}_\alpha(t-s)f(s)ds + \mathbb{P}_\alpha(t)y^0.
\end{aligned}$$

Il reste à montrer la relation (2.5). Nous avons,

$$\|y(t)\| = \Big\|\mathbb{P}_\alpha(t)y^0 + \int_0^t \mathbb{P}_\alpha(t-s)f(s)ds\Big\| \leqslant \|\mathbb{P}_\alpha(t)y^0\| + \Big\|\int_0^t \mathbb{P}_\alpha(t-s)f(s)ds\Big\|.$$

En évoquant la relation (2.2) et comme $\int_0^\infty \theta\Phi_\alpha(\theta)d\theta = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}$ (Proposition 1.1.8)

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &\leqslant \int_0^\infty \alpha\theta t^{\alpha-1}\Phi_\alpha(\theta)\|Q(t^\alpha\theta)y^0\|d\theta + \int_0^t\int_0^\infty \alpha\theta(t-s)^{\alpha-1}\Phi_\alpha(\theta)\|Q((t-s)^\alpha\theta)\|\|f(s)\|d\theta ds \\
&\leqslant \int_0^\infty \alpha\theta t^{\alpha-1}\Phi_\alpha(\theta)k\|y^0\|d\theta + \int_0^t\int_0^\infty \alpha\theta(t-s)^{\alpha-1}\Phi_\alpha(\theta)k\|f(s)\|d\theta ds \\
&\leqslant \frac{\alpha k}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha-1}\|y^0\| + \frac{\alpha k}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|ds \\
&\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\|y^0\| + \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|ds
\end{aligned}$$

car $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$. Par conséquent, puisque $(t-s)^{\alpha-1}\in L^1_{\mathbb{R}}([0,T])$ et $f\in L^2_E([0,T])$ et par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
\|y(t)\| &\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\|y^0\|+\frac{k}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t[(t-s)^{\alpha-1}]^{\frac{1}{2}}[(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2]^{\frac{1}{2}}ds\\
&\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\|y^0\|+\frac{k}{\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\|y^0\|+\frac{kT^{\frac{\alpha}{2}}}{\alpha^{1/2}\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\|y^0\|+\frac{kT^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\|y(t)\|^2 &\leqslant \left[\frac{k}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\|y^0\|+\frac{kT^{\alpha}}{\alpha\Gamma(\alpha)}\left(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\\
&\leqslant \frac{k^2}{(\Gamma(\alpha))^2}t^{2\alpha-2}\|y^0\|^2+\frac{k^2T^{2\alpha}}{(\alpha\Gamma(\alpha))^2}\left(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \frac{2k^2}{(\Gamma(\alpha))^2}t^{2\alpha-2}\|y^0\|^2+\frac{2k^2T^{2\alpha}}{(\alpha\Gamma(\alpha))^2}\left(\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2ds\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Soit alors

$$\begin{aligned}
\int_0^T\|y(t)\|^2dt &\leqslant \frac{2k^2}{(\Gamma(\alpha))^2}\|y^0\|^2\int_0^T t^{2\alpha-2}dt+\frac{2k^2T^{2\alpha}}{(\alpha\Gamma(\alpha))^2}\int_0^T\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}\|f(s)\|^2dsdt\\
&\leqslant \frac{2k^2T^{2\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha))^2(2\alpha-1)}\|y^0\|^2+\frac{2k^2T^{2\alpha}}{\alpha^2(\Gamma(\alpha))^2}\int_0^T\|f(s)\|^2\int_s^T(t-s)^{\alpha-1}dtds\\
&\leqslant \frac{2k^2T^{2\alpha-1}}{(\Gamma(\alpha))^2(2\alpha-1)}\|y^0\|^2+\frac{2k^2T^{2\alpha}}{\alpha^2(\Gamma(\alpha))^2}\int_0^T\|f(s)\|^2\frac{(T-s)^{\alpha}}{\alpha}ds\\
&\leqslant \frac{2k^2T^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)(\Gamma(\alpha))^2}\|y^0\|^2+\frac{2k^2T^{3\alpha}}{\alpha^3(\Gamma(\alpha))^2}\|f\|_2^2.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|y\|_2 &\leqslant \left(\frac{2k^2T^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)(\Gamma(\alpha))^2}\|y^0\|^2+\frac{2k^2T^{3\alpha}}{\alpha^3(\Gamma(\alpha))^2}\|f\|_2^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\left[\sqrt{\frac{2T^{2\alpha-1}}{2\alpha-1}}\|y^0\|+\sqrt{\frac{2T^{3\alpha}}{\alpha^3}}\|f\|_2\right].
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Corollaire 2.0.19 *[15] Soit $0<\alpha<1$ et $y^0\equiv 0$. Supposons que (H_1) est satisfaite. Le problème* (2.1) *admet une solution unique $y\in L^2_E([0,T])$ donnée par*

$$y(t)=\int_0^t\mathbb{P}_\alpha(t-s)f(s)ds.$$

De Plus,

$$\|y\|_2 \leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\frac{T^{3\alpha}}{\alpha^3}}\|f\|_2.$$

Théorème 2.0.20 *[15]*
Soit $\frac{1}{2} < \alpha < 1$*, soient* $y^0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ *et* $v \in L^2(Q)$*. Alors,* (1) *a une solution unique dans* $L^2(Q)$*. De plus,*

$$\|y\|_2 \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(\sqrt{\frac{2T^{2\alpha-1}}{(2\alpha-1)}}\|y^0\|_{L^2(\Omega)} + \sqrt{\frac{2T^{3\alpha}}{\alpha^3}}\|v\|_2\right) \tag{2.11}$$

Démonstration Nous appliquons directement le Théorème 2.0.18 avec $A = \Delta$, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $E = L^2(\Omega)$ et $f = v$. Notons que (2.11) est obtenu à partir de (2.5) en prenant $k < 1$ puisque Δ génère un semi-groupe de contraction. □

Corollaire 2.0.21 *[15] Soit* $0 < \alpha < 1$, $y^0 \equiv 0$ *et* $v \in L^2(Q)$*. Alors, le problème* (1) *a une solution unique dans* $L^2(Q)$*. De plus*

$$\|y\|_2 \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\frac{T^{3\alpha}}{\alpha^3}}\|v\|_2.$$

Désormais, nous utilisant la notation suivante

$$\mathcal{D}^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_t^T (s-t)^{-\alpha} f'(s)ds. \tag{2.12}$$

Considérons l'équation différentielle fractionnaire

$$\begin{cases} -\mathcal{D}^\alpha p(t) - Ap(t) = g(t), \quad t \in [0,T] \\ p(T) = 0, \end{cases} \tag{2.13}$$

où $0 < \alpha < 1$ et $g \in L_E^2([0,T])$.

Proposition 2.0.22 *[15] Soit* $0 < \alpha < 1$*, Supposons que* (H_1) *est satisfaite. Alors, le problème* (2.13) *admet une solution unique* $p \in L^2(Q)$ *donnée par*

$$p(t) = \int_0^t \mathbb{P}_\alpha(t-s)g(s)ds \tag{2.14}$$

où $\mathbb{P}_\alpha$ *est l'opérateur définie par* (2.4)*. De plus,*

$$\|p\|_2 \leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\frac{T^{3\alpha}}{\alpha^3}}\|g\|_2. \tag{2.15}$$

Démonstration Nous procédons en deux étapes.
Etape 1. Nous montrons que (2.13) est une équation de diffusion fractionnaire rétrograde définie avec une dérivée de Caputo. Posons

$$\mathcal{T}_T p(t) = p(T-t), \quad t \in [0,T]. \tag{2.16}$$

Alors,
$$\frac{d}{dt}\mathcal{T}_T p(t) = -p'(T-t) = -\mathcal{T}_T p'(t). \tag{2.17}$$
En fait le changement de variable $t \to T-t$ dans l'expression (2.12)
$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^\alpha p(T-t) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{T-t}^{T}(s-(T-t))^{-\alpha}p'(s)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{T-t}^{T}(s-T+t)^{-\alpha}p'(s)ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-u)^{-\alpha}p'(T-u)du \qquad (u=T-s).
\end{aligned}$$
Alors d'après (2.16) on obtient,
$$\mathcal{D}^\alpha \mathcal{T}_T p(t) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-u)^{-\alpha}(\mathcal{T}_T p)'(u)du$$
i.e.
$$\mathcal{D}^\alpha \mathcal{T}_T p(t) = -D_0^\alpha \mathcal{T}_T p(t).$$

Enfin, en effectuant le changement de variable $t \to T-t$ dans le problème (2.12), on trouve que
$$\begin{cases} -\mathcal{D}^\alpha p(T-t) - Ap(T-t) = g(T-t),\\ p(0)=0\end{cases}$$
qui est équivalent à
$$\begin{cases} -\mathcal{D}^\alpha \mathcal{T}_T p(t) - A\mathcal{T}_T p(t) = \mathcal{T}_T g(t),\\ p(0)=0\end{cases}$$
ou encore
$$\begin{cases} D_0^\alpha \mathcal{T}_T p(t) - A\mathcal{T}_T p(t) = \mathcal{T}_T g(t), \quad T-t\in[0,T]\\ p(0)=0.\end{cases}$$
$T-t\to\tau$ on obtient
$$\begin{cases} D_0^\alpha p(\tau) - Ap(t) = g(t), \quad \tau\in[0,T]\\ p(0)=0.\end{cases} \tag{2.18}$$

Etape 2. Nous montrons que (2.14) et (2.15) sont vérifiées. Utilisant le relation (1.19) et la Proposition 1.3.5, on trouve
$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[D_0^\alpha p](\lambda) =& \mathcal{L}[I_+^{1-\alpha}p'](\lambda)\\
=&\lambda^{\alpha-1}\mathcal{L}[p'](\lambda)\\
=&\lambda^\alpha\mathcal{L}[p](\lambda) - \lambda^{\alpha-1}p(0)
\end{aligned}$$

et on a

$$\begin{cases} \mathcal{L}[D_0^\alpha p](\lambda) - \mathcal{L}[Ap](\lambda) = \mathcal{L}[g](\lambda) \\ p(0) = 0 \end{cases}$$

éliminant $\mathcal{L}[D_0^\alpha p](.)$ de cette dernière relation, on aura

$$\begin{cases} \lambda^\alpha \mathcal{L}[p](\lambda) - \lambda^{\alpha-1} p(0) - A\mathcal{L}[p](\lambda) = \mathcal{L}[g](\lambda) \\ p(0) = 0. \end{cases}$$

Par conséquent,

$$(\lambda^\alpha I - A)\mathcal{L}[p](\lambda) = \mathcal{L}[g](\lambda).$$

On déduit que la transformée de Laplace de la solution du problème (2.13) est donnée par

$$\mathcal{L}[p](\lambda) = (\lambda^\alpha I - A)^{-1} \mathcal{L}[g](\lambda). \tag{2.19}$$

Par ailleur, par (2.9) et en introduisant la transformée de Laplace inverse on a

$$\begin{aligned} p(t) &= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}[\mathbb{P}_\alpha](\lambda)\mathcal{L}[g](\lambda)) \\ &= (\mathbb{P}_\alpha * g)(t) \\ &= \int_0^t \mathbb{P}_\alpha(t-s)g(s)ds, \end{aligned}$$

qui est solution du problème (2.13). D'autre part, un même procédé du Théorème 2.0.18, on trouve

$$\begin{aligned} \|p(t)\| &= \left\| \int_0^t \mathbb{P}_\alpha(t-s)g(s)ds \right\| \\ &= \left\| \int_0^t \int_0^\infty \alpha(t-\tau)^{\alpha-1}\theta\Phi_\alpha(\theta)Q((t-s)^\alpha\theta)g(s)d\theta ds \right\| \\ &\leqslant \int_0^t \int_0^\infty \alpha(t-s)^{\alpha-1}\theta\Phi_\alpha(\theta)\big\|Q((t-s)^\alpha\theta)g(s)\big\|d\theta ds \\ &\leqslant \frac{\alpha k}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|g(s)\|ds \\ &\leqslant \frac{\alpha k}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left((t-s)^{\alpha-1}\right)^{\frac{1}{2}} \left((t-s)^{\alpha-1}\|g(s)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} ds \\ &\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|g(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha}T^\alpha\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|g(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \frac{kT^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|g(s)\|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\int_0^T \|p(t)\|^2 dt &\leqslant \frac{k^2T^{2\alpha}}{\alpha^2(\Gamma(\alpha))^2}\int_0^T\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}\|g(s)\|^2 dsdt\\ &\leqslant \frac{k^2T^{2\alpha}}{\alpha^2(\Gamma(\alpha))^2}\int_0^T \|g(s)\|^2\int_s^T (t-s)^{\alpha-1}dtds\\ &\leqslant \frac{k^2T^{3\alpha}}{\alpha^3(\Gamma(\alpha))^2}\|g\|_2^2.\end{aligned}$$

On déduit alors,

$$\|p\|_2 \leqslant \frac{k}{\Gamma(\alpha)}\sqrt{\frac{T^{3\alpha}}{\alpha^3}}\|g\|_2.$$

Ce qui finit la preuve. □

Chapitre 3

Application au Contrôle Optimal

Dans ce chapitre, on cherche à contrôler le problème (1). Plus précisément, on cherche à approcher l'état $y(v)$ du problème (1) par l'état désiré z_d en controllant v.
Soit $v \in L^2(Q)$. Donc, en vertu du résultat du chapitre 2, on sait que la solution $y = y(v)$ de (1) appartient à $L^2(Q)$. A cet égard, on peut définir la fonction $J(.)$ sur $L^2(Q)$ par

$$J(v) = \|y(v) - z_d\|_2^2 + N\|v\|_2^2 \tag{3.1}$$

où $z_d \in L^2(Q)$ et $N > 0$. Le problème du contrôle optimal consiste à trouver $u \in L^2(Q)$ tel que

$$J(u) = \inf_{v \in L^2(Q)} J(v). \tag{3.2}$$

Lemme 3.0.23 *[15] Pour tout $\varphi \in C^\infty(\bar{Q})$, on a*

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega (D_+^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t))\varphi(x,t)dxdt &= \int_\Omega \varphi(x,T) I_+^{1-\alpha} y(x,T)dx - \int_\Omega \varphi(x,0) I_+^{1-\alpha} y(x,0^+)dx \\ &+ \int_0^T \int_{\partial\Omega} y \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\sigma dt - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial \nu} \varphi d\sigma dt \\ &+ \int_\Omega \int_0^T y(x,t)\big(- \mathcal{D}^\alpha \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t)\big) dxdt.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Démonstration Soit $\varphi \in C^\infty(\bar{Q})$, on a

$$\int_0^T \int_\Omega (D_+^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t))\varphi(x,t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega (D_+^\alpha y(x,t)\varphi(x,t))dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta y(x,t)\varphi(x,t)dxdt.$$

Par la formule de Green (4.2.9), sachant que

$$\int_\Omega \Delta y(x,t)\varphi(x,t)dx = -\int_\Omega \nabla y \nabla \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial \nu} \varphi d\sigma,$$

et

$$\int_\Omega y(x,t)\Delta\varphi(x,t)dx = -\int_\Omega \nabla y \nabla \varphi dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} y d\sigma,$$

par soustraction, on trouve

$$-\int_0^T\int_\Omega \Delta y(x,t)\varphi(x,t)dxdt = -\int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial y}{\partial\nu}\varphi d\sigma dt+\int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}yd\sigma dt-\int_0^T\int_\Omega y(x,t)\Delta\varphi(x,t)dxdt. \tag{3.4}$$

Il s'avère, via la relation (1.17) et le Théorème de Fubini (Théorème 4.1.6), que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega D_+^\alpha y(x,t)\varphi(x,t)dxdt &= \int_\Omega\left[\int_0^T \frac{d}{dt}\big(I_+^{1-\alpha}y(x,t)\big)\varphi(x,t)dt\right]dx\\ &= \int_\Omega \varphi(x,T)(I_+^{1-\alpha}y(x,T))dx - \int_\Omega \varphi(x,0)\big(I_+^{1-\alpha}y(x,0^+)\big)dx\\ &- \int_\Omega\left[\int_0^T \big(I_+^{1-\alpha}y(x,t)\big)\varphi'(x,t)dt\right]dx.\end{aligned}$$

Puisque

$$\begin{aligned}\int_\Omega\left[\int_0^T \varphi'(x,t)(I_+^{1-\alpha}y(x,t))dt\right]dx &= \int_\Omega\left[\int_0^T \varphi'(x,t)\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-s)^{-\alpha}y(x,s)ds\right)dt\right]dx\\ &= \int_\Omega\left[\int_0^T y(x,s)\left(\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_s^T (t-s)^{-\alpha}\varphi'(x,t)dt\right)ds\right]dx\\ &= \int_\Omega\left[\int_0^T y(x,s)\mathcal{D}^\alpha\varphi(x,s)ds\right]dx.\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega D_+^\alpha y(x,t)\varphi(x,t)dxdt &= \int_\Omega \varphi(x,T)(I_+^{1-\alpha}y(x,T))dx - \int_\Omega \varphi(x,0)(I_+^{1-\alpha}y(x,0^+))dx\\ &- \int_\Omega\left[\int_0^T y(x,t)\mathcal{D}^\alpha\varphi(x,t))dt\right]dx \end{aligned}\tag{3.5}$$

Donc en ajoutant (3.4) à (3.5) on obtient (3.3).

Lemme 3.0.24 *[15] Soit y la solution de* (1). *Pour tout $\varphi \in C^\infty(\bar{Q})$ tel que $\varphi(x,T)=0$ dans Ω et $\varphi = 0$ sur Σ. On a*

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega \big(D_+^\alpha y(x,t)-\Delta y(x,t)\big)\varphi(x,t)dxdt &= -\int_\Omega \varphi(x,0)(I_+^{1-\alpha}y(x,0^+))dx\\ &- \int_0^T\int_{\partial\Omega}\frac{\partial y}{\partial\nu}\varphi d\sigma dt + \int_0^T\int_{\partial\Omega} y\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\sigma dt\\ &+ \int_0^T\int_\Omega y(x,t)\big(-\mathcal{D}^\alpha\varphi(x,t)-\Delta\varphi(x,t)\big)dxdt.\end{aligned}$$

Démonstration C'est une conséquence immédiate du Lemme 3.0.23.

Proposition 3.0.25 *[15] Supposons que l' hypothèse du problème* (1) *est vérifiée, alors il existe un contrôle optimal unique u tel que* (3.2) *détient.*

Démonstration Soit $v_n \in L^2(Q)$ une suite minimisante telle que

$$J(v_n) \to \inf_{v \in L^2(Q)} J(v). \tag{3.6}$$

Alors $y_n = y(v_n)$ est une solution de (1), ceci signifie que y_n satisfait :

$$D_+^\alpha y_n - \Delta y_n = v_n \qquad \text{dans} \quad Q, \tag{3.7}$$

$$y_n = 0 \qquad \text{sur} \quad \Sigma, \tag{3.8}$$

$$I_+^{1-\alpha} y_n(x,0) = y^0 \qquad \text{sur} \quad \Omega. \tag{3.9}$$

De plus, en vue de (3.6), il existe $C > 0$ tel que

$$\|v_n\|_2 \leqslant C,$$

$$\|y_n\|_2 \leqslant C.$$

Il résulte de (3.7) que

$$\|D_+^\alpha y_n - \Delta y_n\|_2 \leqslant C. \tag{3.10}$$

Par conséquent, ils existent $u, y, \gamma \in L^2(Q)$ et des sous-suites extraitent de (v_n) et (y_n) (notées aussi (v_n) et (y_n)) telles que

$$v_n \rightharpoonup u \qquad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q) \tag{3.11}$$

$$y_n \rightharpoonup y \qquad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q) \tag{3.12}$$

$$D_+^\alpha y_n - \Delta y_n \rightharpoonup \gamma \qquad \text{faiblement dans} \quad L^2(Q). \tag{3.13}$$

Posons

$$\mathbb{D}(Q) = \Big\{ \varphi \in \mathcal{C}^\infty(Q) \text{ tel que } \varphi|_{\partial\Omega} = 0,\ \varphi(x,0) = \varphi(x,T) = 0 \text{ dans } \Omega \Big\}$$

et notons par $\mathbb{D}'(Q)$ le dual de $\mathbb{D}(Q)$. D'après le Lemme 3.0.24, on a pour tout $\varphi \in \mathbb{D}(Q)$

$$\int_0^T \int_\Omega \big(D_+^\alpha y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t)\big)\varphi(x,t)dxdt = \int_0^T \int_\Omega y_n(x,t)\big(-\mathcal{D}^\alpha \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t)\big)dxdt.$$

Donc par (3.12) on obtient pour tout $\varphi \in \mathbb{D}(Q)$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_0^T \int_\Omega \big(D_+^\alpha y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t)\big)\varphi(x,t)dxdt &= \int_0^T \int_\Omega y(x,t)\big(-\mathcal{D}^\alpha \varphi(x,t) - \Delta\varphi(x,t)\big)dxdt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \big(D_+^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t)\big)\varphi(x,t)dxdt. \end{aligned}$$

Ceci signifie que

$$D_+^\alpha y_n - \Delta y_n \rightharpoonup D_+^\alpha y - \Delta y \quad \text{faiblement dans} \quad \mathbb{D}'(Q).$$

Il résulte que

$$D_+^\alpha y - \Delta y = \gamma \in L^2(Q). \tag{3.14}$$

Donc, par la relation (3.14), on déduit que

$$D_+^\alpha y_n - \Delta y_n \rightharpoonup D_+^\alpha y - \Delta y \qquad \text{faiblement dans } L^2(Q) \tag{3.15}$$

Un passage à la limite dans la relation (3.7) et en évoquant la relation (3.11), on conclut que

$$D_+^\alpha y - \Delta y = u \qquad \text{dans} \quad Q. \tag{3.16}$$

Si $y \in L^2(Q) \equiv L^2([0,T]; L^2(\Omega))$, donc en vertue du Lemme 4.1.9, $I_+^{1-\alpha} y(x,t) \in L^2(Q)$ $\big($par définition de $I_+^{1-\alpha} y(x,t)\big)$. Donc, d'une part on a

$$D_+^\alpha y(x,t) = \frac{d}{dt} I_+^{1-\alpha} y(x,t) \in H^{-1}([0,T]; L^2(\Omega)).$$

Alors,

$$D_+^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t) \in L^2([0,T]; L^2(\Omega)) \subset H^{-1}([0,T]; L^2(\Omega)).$$

D'où $\Delta y \in H^{-1}([0,T]; L^2(\Omega))$ puisque (3.14) eu lieu. Ainsi $y(t) \in L^2(\Omega)$ et $\Delta y(t) \in L^2(\Omega)$. On en déduit (en vertu du Théorème 4.2.7) que $y|_{\partial\Omega}$ existe et appartient à $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

D'autre part, on a $\Delta y \in L^2([0,T]; H^{-2}(\Omega))$. Puisque $L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset H^{-2}(\Omega)$, on déduit de la relation (3.14) que

$$D_+^\alpha y(x,t) = \frac{d}{dt} I_+^{1-\alpha} y(x,t) \in L^2([0,T]; H^{-2}(\Omega)).$$

Alors $I_+^{1-\alpha} y(x,t) \in L^2(Q)$ et $\frac{d}{dt} I_+^{1-\alpha} y(x,t) \in L^2([0,T]; H^{-2}(\Omega))$
En conséquence, le Théorème 4.2.8 montre que $I_+^{1-\alpha} y$ appartient à $C([0,T], H^{-1}(\Omega))$. Ceci signifie que $I_+^{1-\alpha} y(x, 0^+)$ existe et appartient à $H^{-1}(\Omega)$.
Maintenant, multipliant (3.7) par $\varphi \in C^\infty(\bar{Q})$, avec $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ et $\varphi(x,T) = 0$ sur Ω, on obtient en utilisant le Lemme 3.0.24

$$\int_0^T \int_\Omega \big(D_+^\alpha y_n(x,t) - \Delta y_n(x,t)\big) \varphi(x,t) dx dt = - \int_\Omega \varphi(x,0) y^0 dx + \int_0^T \int_\Omega y_n(x,t) \big(- \mathcal{D}^\alpha \varphi(x,t) - \Delta \varphi(x,t)\big) dx dt$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ où en utilisant (3.12) et (3.15),

$$\int_0^T \int_\Omega \big(D_+^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t)\big) \varphi(x,t) dx dt + \int_\Omega \varphi(x,0) y^0 dx = \int_0^T \int_\Omega y(x,t) \big(- \mathcal{D}^\alpha \varphi(x,t) - \Delta \varphi(x,t)\big) dx dt. \tag{3.17}$$

Par le Lemme 3.0.23, on obtient pour tout $\varphi \in C^\infty(\bar{Q})$, avec $\varphi|_{\partial\Omega} = 0$ et $\varphi(x,T) = 0$ sur Ω

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega \big(D_+^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t)\big)\varphi(x,t)dxdt + \int_\Omega \varphi(x,0)y^0 dx = \\ \int_\Omega \varphi(x,0) I_+^{1-\alpha} y(x,0^+)dx - \int_0^T \int_{\partial\Omega} y\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} d\sigma dt \\ + \int_0^T \int_\Omega \big(D_+^\alpha y(x,t) - \Delta y(x,t)\big)\varphi(x,t)dxdt,\end{aligned}$$

donc,

$$\int_\Omega \varphi(x,0)y^0 dx = \big\langle \varphi(x,0), I_+^{1-\alpha} y(x,0^+)\big\rangle_{H_0^1(\Omega),H^{-1}(\Omega)} - \int_0^T \left\langle y, \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right\rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega),H^{1/2}(\partial\Omega)} dt.$$

Prenant $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0$ sur $\partial\Omega$ dans cette dernière égalité, on trouve

$$I_+^{1-\alpha} y(x,0^+) = y^0(x), \qquad sur \;\; \Omega, \tag{3.18}$$

et donc

$$y = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega. \tag{3.19}$$

En vertu des relations (3.16), (3.18) et (3.19), on déduit que $y = y(u)$ est une solution de (1). La fonction $v \mapsto J(v)$ étant faiblement semi continue inférieurement, on aura

$$J(u) \leq \liminf_{n\to\infty} J(v_n).$$

En effet, nous avons par définition de $J(.)$ et en appliquant le Lemme de Fatou

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} J(v_n) =& \liminf_{n\to\infty} \big(\|y(v_n) - z_d\|_2^2 + N\|v_n\|_2^2\big) \\ \geq& \|\liminf_{n\to\infty}(y(v_n) - z_d)\|_2^2 + N\|\liminf_{n\to\infty} v_n\|_2^2 \\ =& \|y(u) - z_d\|_2^2 + N\|u\|_2^2,\end{aligned}$$

(en moyennant les relations (3.12) et (3.13)). On déduit de (3.6) que

$$J(u) \leq \inf_{v\in L^2(Q)} J(v),$$

d'où

$$J(u) = \inf_{v\in L^2(Q)} J(v).$$

Pour montrer l'unicité, supposant qu'ils existent $u_1,\ u_2 \in L^2(Q)$ tel que $u_1 \neq u_2$ avec

$$J(u_1) = J(u_2) = \inf_{v\in L^2(Q)} J(v). \tag{3.20}$$

Sachant que J est strictement convexe (i.e.

$$J(tu_1 + (1-t)u_2) < tJ(u_1) + (1-t)J(u_2),$$

Pour tous $u_1,\ u_2 \in L^2(Q)$ et $t \in]0,1[$ avec $u_1 \neq u_2$.) on a alors

$$J\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}J(u_1) + \frac{1}{2}J(u_2) = J(u_1),$$

contradiction avec (3.20). □

Théorème 3.0.26 *[15]*
Si u est une solution de (3.2)*, alors il existe $p \in L^2(Q)$ tel que (u, y, p) satisfait le système optimal suivant*

$$\begin{cases} D_+^\alpha y - \Delta y = u \quad \textit{dans} \quad Q \\ y = 0 \quad \textit{sur} \quad \Sigma \\ I_+^{1-\alpha} y(x, 0^+) = y^0 \quad \textit{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3.21}$$

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha p - \Delta p = y - z_d \quad \textit{dans} \quad Q \\ p = 0 \quad \textit{sur} \quad \Sigma \\ p(T) = 0 \quad \textit{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3.22}$$

$$u = -\frac{p}{N} \quad \textit{dans} \quad Q. \tag{3.23}$$

Démonstration Les relations (3.16), (3.18) et (3.19) donne la relation (3.21). Pour montrer (3.22) et (3.23), nous exprimons les conditions d'optimalités d'Euler-Lagrange qui caractérisent le contrôle optimal u

$$\frac{d}{d\mu} J(u + \mu\varphi) \mid_{\mu=0} = 0, \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in L^2(Q). \tag{3.24}$$

L'état $z(\varphi)$ associé au contrôle $\varphi \in L^2(Q)$ est une solution de

$$\begin{cases} D_+^\alpha z - \Delta z = \varphi \quad \text{dans} \quad Q \\ z = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma \\ I_+^{1-\alpha} z(x, 0^+) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3.25}$$

La relation (3.24) donne,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\mu} J(u + \mu\varphi) =& \frac{d}{d\mu}\left(\left\| y(u+\mu\varphi) - z_d \right\|_2^2 + N \left\| u + \mu\varphi \right\|_2^2 \right) \\ =& \frac{1}{2}\left[\left\langle \frac{d}{d\mu}\big(y(u+\mu\varphi) - z_d\big), y(u+\mu\varphi) - z_d \right\rangle + N \left\langle \frac{d}{d\mu}\big(u+\mu\varphi\big), u + \mu\varphi \right\rangle \right] \\ =& \frac{1}{2}\left[\big\langle z(\varphi), y(u+\mu\varphi) - z_d \big\rangle + N \big\langle \varphi, u + \mu\varphi \big\rangle \right], \end{aligned}$$

alors quand $\mu \to 0$, on trouve

$$\int_0^T \int_\Omega z(\varphi)(y(u) - z_d)dxdt + N \int_0^T \int_\Omega u\varphi dxdt = 0, \quad \varphi \in L^2(Q). \tag{3.26}$$

Pour interpréter (3.26), on considère l'équation d'état adjoint

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha p - \Delta p = y(u) - z_d \quad \text{dans} \quad Q \\ p = 0 \qquad \text{sur} \quad \Sigma \\ p(T) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{3.27}$$

Puisque $y(u) - z_d \in L^2(Q)$, appliquant la Proposition 2.0.22 avec $(A, D(A)) = (\Delta, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$, on déduit que le problème (3.27) admet une solution unique dans $L^2(Q)$. Donc, en multipliant (3.25) par, p, la solution de (3.27), on obtient par le Lemme 3.0.24.

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega (D_+^\alpha z - \Delta z)pdxdt &= \int_0^T \int_\Omega (\mathcal{D}^\alpha p - \Delta p)zdxdt \\ &= \int_0^T \int_\Omega (y(u) - z_d)zdxdt. \end{aligned}$$

Donc, en vertu de (3.25) et (3.26), on déduit que

$$\int_0^T \int_\Omega \varphi pdxdt = -N \int_0^T \int_\Omega \varphi udxdt, \quad \varphi \in L^2(Q).$$

Par conséquence,

$$u = -\frac{p}{N} \quad \text{dans} \quad Q.$$

□

Chapitre 4

Appendice

4.1 Espaces de Bochner

Soit E un espace de Banach séparable muni de la norme $\|.\|$, E^* son dual et $(S, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, une focntion $f : S \to E$ est dite mesurable si et seulemment si la fonction $\langle f, x^* \rangle$ est mesurable pour tout $x^* \in E^*$ (voir [7]).

Définition 4.1.1 *Une fonction $f : S \to E$ est dite μ-simple si et seulement si*

$$f = \sum_{n=1}^{N} \mathbf{1}_{A_n} \otimes x_n,$$

avec $A_n \in \mathcal{A}$ satisfaisant $\mu(A_n) < \infty$ et $x_n \in E$ pour tout $1 \leq n \leq N$.

$\mathbf{1}_A$ désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A et $(f \otimes x)(s) := f(s)x$.

Définition 4.1.2 *Une fonction $f : S \to X$ est dite fortement μ-mesurable (ou Bochner mesurable) s'il existe une suite de fonctions μ-simples $f_n : S \to E$ telles que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ μ-presque partout.*

Définition 4.1.3 *Pour tout $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace de toutes (classes d'équivalences) les fonctions fortement μ-mesurable $f : S \to E$ telles que*

$$\int_S \|f\|^p d\mu < \infty,$$

on le note $L^p_E(S)$. Si $p = \infty$, $L^\infty_E(S)$ est l'espace de toutes (classes d'équivalences) les fonctions fortement μ-mesurables $f : S \to E$ telles qu'il existe $c > 0$ où $\mu\{\|f\| > c\} = 0$. Munis des normes

$$\|f\|_p := \left(\int_S \|f\|^p d\mu \right)^{1/p}$$

et (respectivement)

$$\|f\|_\infty := \inf \left\{ c \geq 0 : \ \mu\{\|f\| > c\} = 0 \right\},$$

les espace $L^p_E(S)$, $1 \leq p \leq \infty$, sont des espaces de Banach.

Définition 4.1.4 *Une fonction fortement μ-mesurable $f : S \to E$ est dite Bochner intégrable si et seulement si*

$$\int_S \|f\| d\mu < \infty,$$

et dans ce cas on a

$$\left\| \int_S f d\mu \right\| \leq \int_S \|f\| d\mu.$$

Théorème 4.1.5 (Théorème de convergence dominée) *Soit $f_n : S \to E$ une suite de fonctions Bochner intégrables. S'il existe une fonction $f : S \to E$ et une fonction positive intégrable $g : S \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ p.p. et $\|f_n\| \leq g$ p.p., alors f est Bochner intégrable et on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_S \|f_n - f\| d\mu = 0.$$

En particulier,

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f_n d\mu = \int_S f d\mu.$$

Théorème 4.1.6 (Théorème de Fubini) *Soient $(S, \mathcal{A}, \mu)$ et $(T, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et soit $f : S \times T \to E$ une fonction Bochner intégrable.*

1. *Pour presque tout $s \in S$, la fonction $t \mapsto f(s,t)$ est Bochner intégrable.*
2. *Pour presque tout $t \in T$, la fonction $s \mapsto f(s,t)$ est Bochner intégrable.*
3. *Les fonctions $s \mapsto \int_T f(s,t) d\nu(t)$ et $t \mapsto \int_S f(s,t) d\mu(s)$ sont Bochner intégrables et*

$$\int_{S\times T} f(s,t) d\mu \times \nu(s,t) = \int_T \int_S f(s,t) d\mu(s) d\nu(t) = \int_S \int_T f(s,t) d\nu(t) d\mu(s).$$

Théorème 4.1.7 (Théorème de Tonelli) *Soient $(S, \mathcal{A}, \mu)$ et $(T, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés σ-finis et soit $f : S \times T \to E$ une fonction Bochner intégrable. Si $\int_S d\mu(s) \int_T |f| d\nu(t)$ existe, alors*

$$\int_{S\times T} f(s,t) d\mu \times \nu(s,t) = \int_T \int_S f(s,t) d\mu(s) d\nu(t) = \int_S \int_T f(s,t) d\nu(t) d\mu(s).$$

Théorème 4.1.8 *Soit $(S, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soient X et Y deux espaces de Banach. Si $f : S \to X$ et $g : S \to Y$ sont deux fonctions fortements μ-mesurables (l'une de ces fonctions à valeurs réelles), alors le produit $fg : S \to X \times Y$ est fortement μ-mesurable.*

Lemme 4.1.9 *Soient $0 < \alpha < 1$, $g \in L^p([0,T])$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ et $\phi :]0,T] \to \mathbb{R}^+$ est une fonction définie par :*

$$\phi(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Alors pour presque tout $t \in [0,T]$, la fonction $s \mapsto \phi(t-s)g(s)$ est intégrable sur $[0.T]$. Posons

$$\phi * g(t) = \int_0^t \phi(t-s) g(s) ds.$$

Alors, $\phi * g \in L^p([0,T])$ et

$$\|\phi * g\|_p \leqslant \|\phi\|_1 \|g\|_p.$$

4.2 Espaces de Sobolev

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont $\partial\Omega$ désigne sa frontière. Pour plus de détails concernant les espaces de Sobolev, consultez [10].

Définition 4.2.1 *On note $H^s(\Omega)$ l'espace des distibutions u définies dans Ω telles que*

1. *$\partial^\alpha u \in L^2(\Omega)$ pour $|\alpha| \leq m$ lorsque $s = m$ est un entier positif.*
2. *$u \in H^m(\Omega)$ et*
$$\int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^{n+2\sigma}} dxdy < +\infty$$
pour $|\alpha| = m$ lorsque $s = m + \sigma$ est non entier et positif avec m un entier et σ la partie fractionnaire de s, $0 < \sigma < 1$.

On munit $H^s(\Omega)$ de la norme (naturelle)

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha v\|_2^2} \quad \text{dans le cas } 1 \text{ et}$$

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \left(\|u\|^2_{H^m(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega \int_\Omega \frac{|\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(y)|}{|x-y|^{n+2\sigma}} dxdy \right)^{1/2} \quad \text{dans le cas } 2.$$

Notons que $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Proposition 4.2.2 *$H^s(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour la norme $\|.\|_{H^s(\Omega)}$.*

Définition 4.2.3 *$H_0^s(\Omega)$ est l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^s(\Omega)$. ($\mathcal{D}(\Omega)$ désigne l'espace vectoriel des fonctions définies sur Ω, à valeurs réelles, qui sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω et à support compact inclus dans Ω).*

Définition 4.2.4 *Si $s < 0$, alors $H^s(\Omega)$ est le dual de $H_0^{-s}(\Omega)$.*

Lemme 4.2.5 *Si $u \in H^s(\Omega)$ alors $\partial^\alpha u \in H^{s-|\alpha|}(\Omega)$.*

Remarque 4.2.6 *Les espaces de Sobolev forment une chaine décroissante d'espace*

$$... \supset H^{-1} \supset L^2 \supset H^1 \supset ...$$

Théorème 4.2.7 *Soit s un réel quelconque inférieur ou égale à 0, si $u \in H^{s+2}(\Omega)$ alors $u\,|_{\partial\Omega} \in H^{s+\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$.*

Théorème 4.2.8 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière lipschitzienne. Alors,*

$$H^k(\Omega) \subseteq C^k(\Omega), \text{ si } k < s - \frac{n}{2}.$$

Théorème 4.2.9 (Formule de Green) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe $\mathcal{C}^2$, et $n(x)$ sa normale extérieure. Soit $u \in H^2(\Omega)$, $v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = -\int_\Omega \nabla u \, \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma.$$