

Chapitre II : Calcul du champ électromagnétique

II.1. Introduction

La modélisation de tous dispositifs électromagnétiques nécessite une parfaite connaissance des outils de modélisation basée sur les équations de Maxwell et les lois constituant les propriétés du matériau.

On achève ce chapitre par une représentation de différentes méthodes de résolution des équations aux dérivés partielles qui régissent le comportement du dispositif étudié.

II.2. Equations de maxwell et lois de comportement des milieux

Les différents domaines physiques susceptibles d'être rencontrés dans un dispositif électromagnétique réel, peuvent être représentés schématiquement comme suit [15] :

MCours.com

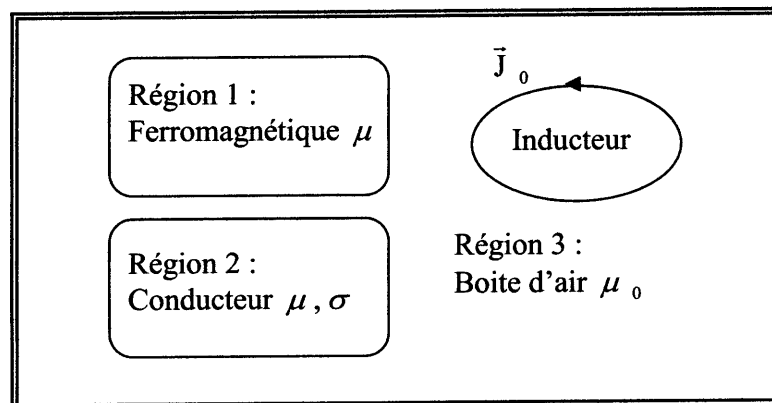


Figure II. 1 : Schéma général d'un dispositif électromagnétique

- Bobines conductrices dans lesquelles circulent des courants électriques.
- Région 1 pour canaliser les lignes du champ magnétique.
- Région 2 dans laquelle circulent les courants induits.
- Une boite d'air englobant toutes les régions précédentes.

II.2.1. Equations de Maxwell

Le comportement des phénomènes électromagnétiques traités dans le domaine de la physique est résumé par l'emploi des équations de Maxwell, appelées aussi équations générales de l'électromagnétisme. Ces équations s'écrivent sous leurs formes différentielles comme suit:

- Equation de Maxwell-Gauss:

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (\text{II. 1})$$

- Equation de Maxwell-Faraday:

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II. 2})$$

- Equation de conservation du flux magnétique:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (\text{II. 3})$$

- Equation de Maxwell-Ampère:

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{II. 4})$$

\vec{E} : Champ électrique [V/m].

\vec{D} : Vecteur de déplacement [A. S / m²].

\vec{H} : Champ magnétique [A/m].

\vec{B} : Induction magnétique [T]

ρ : Densité de charge volumique [C/m³].

\vec{J} : Densité de courant [A/m²] ; dans le cas générale elle est donnée par :

$$\vec{J} = \vec{J}_C + \vec{J}_D + \vec{J}_M \quad (\text{II. 5})$$

\vec{J}_C : Exprime la densité de courant de conduction électrique induit et inducteur donnée par:

$$\vec{J}_C = \vec{J}_{ex} + \vec{J}_{ind} \quad (\text{II. 6})$$

\vec{J}_{ex} : Densité de courante source (courants d'excitations)

\vec{J}_{ind} : Densité de courant résultant du phénomène induit

\vec{J}_D : Représente la densité de courant de déplacement dont l'expression est la suivante:

$$\vec{J}_D = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (\text{II. 7})$$

\vec{J}_M : Densité de courant dûe à la présence du milieu magnétique exprimée par

$$\vec{J}_M = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{M} \quad (\text{II. 8})$$

\vec{M} : Vecteur d'aimantation du milieu magnétique.

Les quatre équations (II. 1), (II. 2), (II. 3), et (II. 4) sont des équations différentielles aux dérivées partielles, linéaires et du premier ordre par rapport au temps et aux coordonnées spatiales. Le choix d'un système de coordonnées est dicté par la symétrie inhérente au problème particulier sous considération [16].

On rajoute aux équations précédentes les lois de comportement des milieux ainsi que la loi d'Ohm.

II.2.2. Lois constitutives des milieux

Les cinq champs vectoriels précédents ne sont pas aussi indépendants les uns des autres, leurs liaisons sont fonction du milieu où ils règnent.

a. Relations du milieu :

- Relation magnétique

$$\vec{B} = \mu \vec{H} + \vec{B}_r \quad (\text{II. 9})$$

- Relation électrique

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (\text{II. 10})$$

b. Loi d'Ohm :

- Au repos

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (\text{II. 11})$$

- En mouvement

$$\vec{J} = \sigma \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \quad (\text{II. 12})$$

\vec{B}_r : Induction magnétique rémanente.

\vec{v} : Vitesse du point considéré.

σ , μ et ε : Sont les caractéristiques du milieu considéré et représentent respectivement: les tenseurs de conductivité électrique, de la perméabilité magnétique et de la permittivité électrique.

Dans le cas où les milieux considérés sont linéaires, homogènes et isotropes σ , μ et ε se ramènent à des scalaires.

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

μ_0 : Perméabilité du vide égale à $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} [H / m]$.

μ_r : Perméabilité relative.

ε_0 : Permittivité du vide, elle vaut à $10^{-9} / (36 \cdot \pi) [F / m]$.

ε_r : Permittivité relative.

II.3. Conditions de passage entre deux milieux

Jusqu'ici, toutes les relations sources–champ, électrique–magnétique caractérisant un milieu quelconque, ont été définies. Il reste à déterminer les relations entre les grandeurs de deux milieux différents magnétiquement et électriquement (figure I. 2). On intègre les équations de Maxwell entre deux points très voisins de part et d'autre d'une surface séparant ces deux milieux, le résultat nous permet de déduire les constatations suivantes [14] :

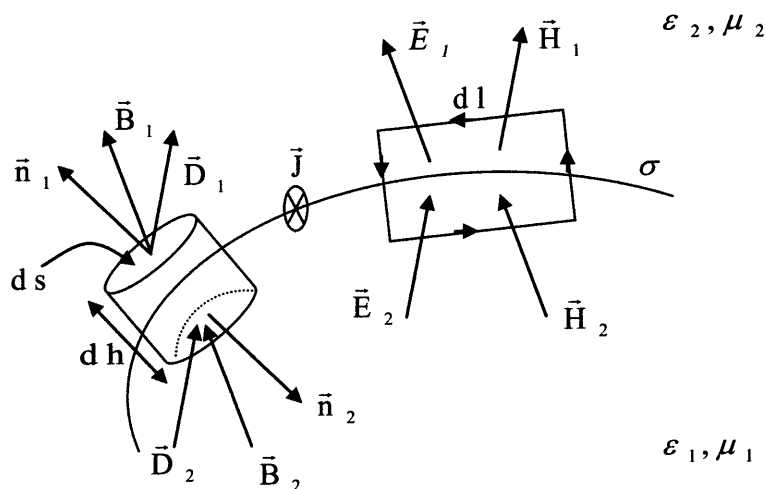


Figure II. 2 : Conditions de passage à l'interface entre deux milieux différents

- pour les grandeurs magnétiques

➤ Conservation de la composante normale de l'induction magnétique \vec{B} .

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II. 13})$$

➤ Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique \vec{H} due aux courants surfaciques \vec{J}_s .

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{n} = \vec{J}_s \quad (\text{II. 14})$$

- Pour les grandeurs électriques

➤ Conservation de la composante tangentielle du champ électrique \vec{E}

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{n} = 0 \quad (\text{II. 15})$$

➤ Discontinuité de la composante normale de l'induction électrique \vec{D} due aux charges surfaciques Q_s

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{n} = Q_s \quad (\text{II. 16})$$

\vec{n} : La normale à la surface de séparation entre les milieux.

II.4. Equations de Maxwell simplifiées

Dans le domaine de l'électrotechnique, la fréquence utilisée permet de négliger tout aspect propagatif du champ électromagnétique, c'est ce qu'on appelle l'approximation des états – quasi statiques ou des régimes lentement variables, cette condition s'exprime en termes des dimensions de la structure, qui doivent être beaucoup plus petites que la longueur d'onde [17].

$$\lambda = \frac{c}{f} \quad (\text{I. 17})$$

c et f : sont la célérité de la lumière et la fréquence de travail.

Ainsi pour une fréquence de 1 MHz ; la longueur d'onde est de 300 m dans le vide, ce qui justifie l'emploi de cette approximation dans l'étude des dispositifs de dimensions usuelles. L'utilisation de cette approximation, revient à négliger le courant de déplacement $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ devant le courant de conduction $\sigma \cdot \vec{E}$.

Les caractéristiques des matériaux, permettent à leur tour de négliger les effets capacitifs des conducteurs, cela revient à négliger, dans l'ensemble des équations de Maxwell la charge d'espace dans les conducteurs.

En effet ; En prenant la divergence de l'équation (II. 4) , On trouve la loi de conservation de la charge.

$$\overrightarrow{\text{div}} \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (\text{II. 18})$$

En combinant cette équation avec celle de la loi d'Ohm et l'équation (II.1); On obtient l'équation de la charge d'espace.

$$\rho + \frac{\varepsilon}{\sigma} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{II. 19})$$

Dont la solution est :

$$\rho(t) = \rho_0 \cdot \exp\left(\frac{-\sigma}{\varepsilon} \cdot t\right) \quad (\text{II. 20})$$

ρ_0 : Densité de la charge à l'instant $t = 0$.

$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma}$: représente le temps de relaxation ; Il exprime la vitesse avec laquelle la charge disparaît. Ce temps est extrêmement court pour les conducteurs ($4 \cdot 10^{-4}$ S) pour le cuivre.

En récapitulation, les équations de base utilisées sont :

• **Equations de Maxwell simplifiées :**

$$\vec{\text{div}} \vec{E} = 0 \quad (\text{II. 21})$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (\text{II. 22})$$

$$\vec{\text{div}} \vec{B} = 0 \quad (\text{II. 23})$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{H} = \vec{J} \quad (\text{II. 24})$$

$$\vec{J} = \sigma \cdot (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) + \vec{J}_{\text{ex}} \quad (\text{II. 25})$$

• **Relations constitutives des milieux :**

➤ **Relation magnétique**

a. Milieu magnétique linéaire.

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \vec{H} \quad (\text{II.26})$$

b. Milieu non magnétique linéaire.

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad (\text{II. 27})$$

➤ **Relation électrique**

$$\vec{D} = \epsilon \cdot \vec{E} \quad (\text{II. 28})$$

• **Equation de conservation de la densité de courant :**

En prenant la divergence de l'équation (II. 24), on trouve que :

$$\vec{\text{div}} \vec{J} = 0 \quad (\text{II. 29})$$

Cette équation permet d'ajouter aux conditions de passage précédentes, la condition de conservation de la composante normale de la densité de courant.

• **Conditions de passages :**

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II. 30})$$

$$(\vec{J}_2 - \vec{J}_1) \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{II. 31})$$

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \wedge \vec{n} = 0 \quad (\text{II. 32})$$

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \wedge \vec{n} = 0 \quad (\text{II. 33})$$

\vec{n} : La normale à l'interface séparant les deux milieux.

Ces dernières relations expriment que la composante normale des vecteurs d'induction magnétique et densité de courant sont toujours continues (équations (II. 30) et (II. 31)). Il est de même pour les composantes tangentielles des vecteurs champs magnétiques et champs électriques (équations (II. 32) et (II. 33)).

A partir de ces équations ((II. 21) à (II. 33)), on peut avoir accès au calcul des performances globales et au détail des conditions de fonctionnement de tout systèmes électromagnétiques.

II.5. Modèles électromagnétiques

Pour étudier l'évolution des grandeurs électromagnétiques, on doit résoudre les équations de Maxwell (de l'équation (II. 21) à l'équation (II. 24) associées aux conditions de passage (de l'équation (II. 30) à l'équation (II. 33)). Ces équations sont souvent transformées avant d'être appliquées au problème physique à résoudre, cette transformation consiste en l'emploi de différents potentiels : Vecteur ou Scalaire, Magnétique ou Electrique afin de réduire le nombre d'inconnues et le nombre d'équations à résoudre.

Suivant les dispositifs que l'on étudie, certains phénomènes deviennent négligeables, les équations se découplent alors, donnant naissance à des modèles plus simples, représentés par le tableau (II.1) [18].

II.6. Méthodes de résolution des EDP

Comme nous l'avons déjà montré dans les paragraphes précédents, les phénomènes électromagnétiques se traduisent par des équations différentielles aux dérivées partielles (EDP), dont la solution peut être trouvée par différentes méthodes.

On distingue trois types de méthodes :

- Analytiques
- Semi analytiques
- numériques

La différence entre ces trois types des méthodes est illustrée dans le tableau (II.2)

Modèles	Méthodes	Equations	Variables
Magnétostatiques	Potentiel scalaire magnétique total	$div(\mu \overrightarrow{grad} \phi) = 0$	ϕ
	Potentiel scalaire magnétique réduit	$div(\mu \overrightarrow{grad} \dot{\phi}) = div(\mu \vec{H}_0)$	$\dot{\phi}$
	Potentiel vecteur magnétique	$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu} \cdot \overrightarrow{rot} \vec{A}\right) = \vec{J}$	\vec{A}
Magnétodynamiques	Champ magnétique	$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\sigma} \overrightarrow{rot} \vec{H}\right) + \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{0}$	\vec{H}
	Potentiel vecteur magnétique modifié	$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot} \dot{\vec{A}}\right) + \sigma \frac{\partial \dot{\vec{A}}}{\partial t} = 0$	$\dot{\vec{A}}$
	Potentiel vecteur magnétique potentiel scalaire électrique	$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\mu} \overrightarrow{rot} \vec{A}\right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \sigma \overrightarrow{grad} V = \vec{J}_{ex}$ $div(\varepsilon \overrightarrow{grad} V) + div\left(\varepsilon \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = -\rho$	$\vec{A} - V$
	Potentiel vecteur électrique Potentiel scalaire magnétique	$\overrightarrow{rot}\left(\frac{1}{\sigma} \overrightarrow{rot} \vec{T}\right) + \mu \frac{\partial \vec{T}}{\partial t} - \mu \frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{grad} \Omega) = 0$ $Div \mu \cdot (\vec{T} - \overrightarrow{Grad} \Omega) = 0$	$\vec{T} - \Omega$

Tableau II. 1. : Modèles électromagnétiques

TYPES	Méthodes analytiques	Méthodes semi analytiques	Méthodes numériques
Avantages	Simple et faciles à programmer	Simple est faciles à programmer	Applicables aux géométries complexes
	Résultats exacts et précis	Temps de calcul réduit	
	Temps de calcul et espace mémoire très Réduits		
Inconvénients	Nécessitent un développement délicat	Utilisent des approximations	Utilisent des approximations
	Se limitent à des géométries simples	Nécessitent la discrétisation du domaine d'étude	Nécessitent la discrétisation du Domaine d'étude
		Se limitent à des géométries simples	Difficiles à programmer
	Applicables uniquement aux systèmes linéaires	Applicables uniquement aux systèmes linéaires	Temps de calcul et espace mémoire très importants

Tableau II.2 : Comparaison entre les différents types des méthodes de résolutions des EDP

II.6.1. Méthodes analytiques

La méthode analytique couramment utilisée pour la résolution des EDP de manière analytique, est la méthode de séparation de variables. Le principe de cette dernière consiste à mettre l'inconnue sous forme d'un produit des fonctions, dont chacune ne dépend que d'une seule variable [19].

Soit en coordonnées cartésiennes, l'inconnue $V(x, y, z)$ qui écrit comme suit :

$$V(x, y, z) = X(x) \cdot Y(y) \cdot Z(z) \quad (\text{II. 34})$$

Avec :

$V(x, y, z)$: représente la solution de l'EDP de sorte que :

$X(x)$: est une fonction dépendant seulement de la variable x .

$Y(y)$: est une fonction dépendant seulement de la variable y .

$Z(z)$: est une fonction dépendant seulement de la variable z .

La méthode de séparation de variables étant une partie intéressante, elle sera présentée durant le troisième chapitre.

II. 6. 2. Méthodes semi-analytiques

Ces méthodes ne résolvent pas directement l'EDP. Elles font usage de l'expression analytique du potentiel vecteur magnétique donnée par la formule de Biot et Savart. On présente la méthode des circuits électriques couplés et la méthode des intégrales de frontières.

II.6.2.1. Méthode des circuits électriques couplés

Le principe de cette méthode est basé sur la résolution de l'équation de Poisson définissant la liaison entre le champ magnétique \vec{H} et sa source (la densité de courant J) et la combinaison de la solution obtenue avec l'équation de l'induction (équation de Maxwell Faraday équation (I. 2)) où ce même champ est à son tour source de cette densité.

Soit un conducteur composé de N_s spires principales dont chacune d'elles est subdivisée en spires élémentaires. D'où le schéma électrique équivalent (figure II.3)

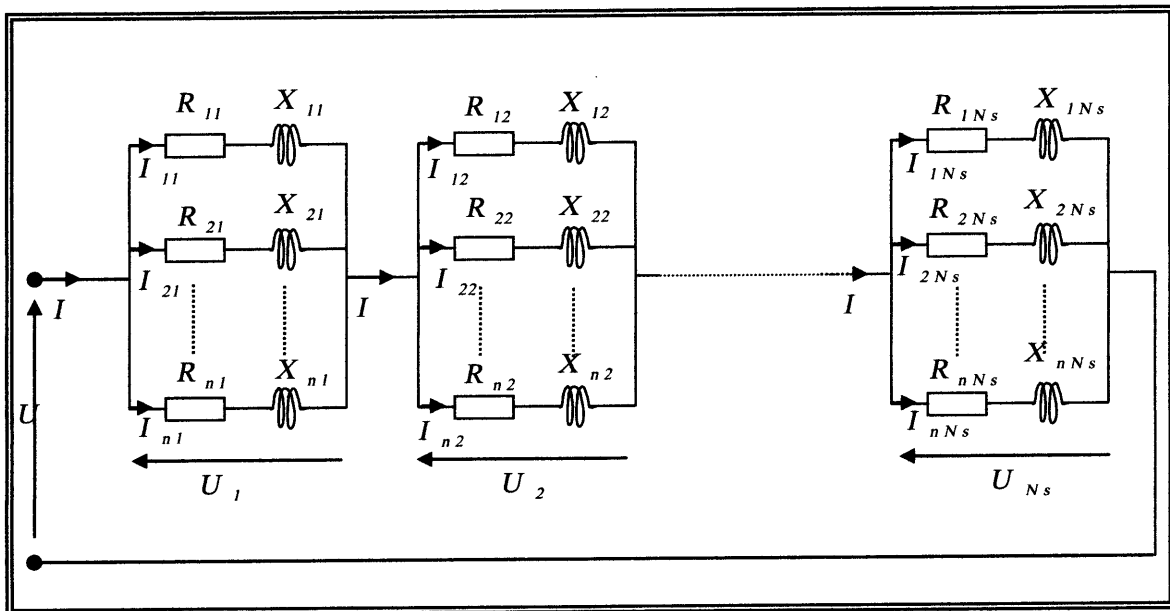


Figure II.3: Schéma électrique équivalent de l'inducteur

On supposera les grandeurs électromagnétiques uniformément réparties à l'intérieur de chacune de spires élémentaires.

La méthode consiste à formuler les équations de Maxwell et la loi d'ohm pour chaque spire élémentaire, de façon à obtenir une équation faisant intervenir les chutes de tension résistives et inductives correspondantes [20].

II.6.2.2. Méthode des intégrales de frontières

La méthode des intégrales de frontières a été d'abord utilisée dans le domaine de la résolution des équations de Maxwell par C. W. Trowbridge et son groupe, puis par Wexler.

Elle permet la détermination des grandeurs inconnues sur les frontières du domaine qui sont maillées à l'aide d'un maillage de type élément fini et les inconnues résultantes sont calculées en construisant un système linéaire.

En fait, la connaissance de la variable inconnue sur les frontières du domaine suffit pour connaître la solution en tout point.

II.6.3. Méthodes numériques

II.6.3.1. Méthodes des différences finies

C'est une méthode basée sur le théorème de Taylor où on remplace l'opérateur différentiel par un opérateur aux différences finis [21].

Les démarches de cette méthode sont les suivantes :

- Discrétisation du domaine d'étude
- Approximation des dérivées par différences finis
- Résolution du système d'équations

II.6.3.2. Méthodes des éléments finis

Elle utilise une approximation simple des variables inconnues pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques [22].

Cette méthode se base principalement sur les quatre démarches suivantes :

- Discrétisation géométrique du domaine d'étude en éléments finis.
- Approximation des dérivées partielles sur chaque élément.
- Assemblage et calcul des matrices élémentaires.
- Résolution de l'équation matricielle après la prise en compte des conditions aux limites.

On cherche donc tout d'abord à exprimer à partir du model local, constitué des équations aux dérivées partielles et des conditions aux limites, une formulation qui porte sur le domaine de résolution. Cette présentation intégrale peut se faire à partir de l'une des deux méthodes de formulation variationnelle (méthode de Ritz) ou la méthode des résidus pondérés (méthode de Galerkin). La première concerne les milieux pour lesquels on peut exprimer l'énergie du système tandis que la seconde procédure est plus générale et ne nécessite pas la connaissance de l'expression de cette énergie.

Soit par exemple l'équation de Poisson suivante :

$$\Delta U = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \phi_c = 0 \quad (\text{II. 35})$$

Le principe des résidus pondérés consiste à remplacer cette équation aux dérivées partielles par l'intégrale W telle que :

$$W = \int_V \psi(x, y, z) [L[\phi(x, y, z)] - \phi_c(x, y, z)] dV = 0 \quad (\text{II. 36})$$

Où $\psi(x, y, z)$ est une fonction de pondération et L représente l'opérateur différentiel.

Après intégration par partie

$$W = \iint_{(\Omega)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot \frac{\partial U}{\partial y} \right) dx dy - \iint_{(\Omega)} \psi \phi_c d\Omega + \int_{(s)} \psi \frac{\partial U}{\partial \eta} ds = 0 \quad (\text{II. 37})$$

L'approximation de la fonction ϕ est une approximation par sous domaines ϕ^e qui sont appelés éléments. Les fonctions approchées $\phi^e(x, y)$ sur chaque élément sont construites de manière à être continues sur l'élément ϕ^e et satisfait les conditions de continuités entre les différents éléments.

$$\phi^e(x, y) = \sum_j N_j(x, y) \cdot \phi_j \quad (\text{II. 38})$$

N_j : Représente la fonction d'interpolation, qui d'ailleurs peut être choisie en utilisant la méthode de Galerkin qui consiste à mettre la fonction de pondération égale à la fonction d'interpolation.

A partir de l'intégrale W , après discrétisation et approximation de la fonction inconnue sur chaque élément, et après intégration par partie, nous obtenons le système matriciel suivant :

$$W = \sum_{e=1}^{N_e} ([K]^e \cdot [\phi_m]^e - [\phi_c]^e) = 0 \quad (\text{II. 39})$$

II.7. Conclusion

La modélisation des machines n'est complète que si l'on peut déterminer les grandeurs électromagnétiques locales à partir de leurs sources, cela s'effectue grâce aux équations de Maxwell associées avec les relations constituant les milieux considérés.

La résolution des différents modèles qui régissent le dispositif étudié peut se faire par plusieurs méthodes notamment les méthodes analytiques, méthodes semi analytiques, et les méthodes numériques.

Puisque le but principal de notre travail est la modélisation d'un dispositif électromagnétique, nous allons donner des notions générales sur la modélisation dans le chapitre suivant.

MCours.com

