MCours.com

Chapitre 2

Etude de la stabilité d'un système de processus industriel

Résumé : ce chapitre contient une étude sur la stabilité, on a commencé par la définition notions fondamentales de la stabilité. Nous avons aussi brièvement rappelé quelque définition sur le critère de stabilité de Lyapunov, et on a présenté les deux approches les plus importantes pour le problème de l'étude de la stabilité en commande prédictive.

Etude de la stabilité d'un système de processus industriel

Introduction

La majorité des systèmes physiques non-linéaires peuvent être représentés comme une interconnexion par feedback d'un système dynamique linéaire et d'un autre non-linéaire. Le problème de la stabilité absolue consiste à trouver des conditions suffisantes qui portent sur le système linéaire pour que l'origine soit globalement uniformément asymptotiquement stable (ou GUAS) pour une classe de non-linéarités bien déterminée. Ce problème a été posé pour la première fois par Luré en 1944 et puis plusieurs efforts ont été consacrés à l'étude de ce dernier.

La notion de stabilité constitue une problématique centrale de la théorie du contrôle. Souvent liée à la façon d'appréhender un système, la stabilité possède un large éventail de définitions. Dans ce chapitre, nous nous intéresserons à quelques notions particulières de stabilité. En particulier, on cite la stabilité au sens se Lyapunov et de la commande prédictive. Les résultats que nous développerons aux Chapitres 2 et 3 s'appuieront sur ces concepts pour démontrer des propriétés de stabilité des systèmes à étudiés. **[15]**

II.1. Notions fondamentales de la stabilité

On considère un système non linéaire non autonome de la forme suivante :

$$\dot{x} = f\left(t, x(t)\right) \tag{II.1}$$

<u>Définition</u> .1.1 (Stabilité).

On dit que $x = 0$ est un point d'équilibre stable, si

$$\forall \varepsilon, \forall t_0 \geq 0, \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0 \tag{II.2}$$

Tel que

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0 \quad \text{(II.3)}$$

Autrement dit, la stabilité au sens de Lyapunov de l'origine du système veut dire que pour tout $t \geq t_0$, la solution de condition initiale (t_0, x_0) reste au voisinage de l'origine si x_0 est au voisinage de l'origine. En d'autres termes, pour tout $t \geq t_0$, une petite perturbation de la condition initiale x_0 autour de l'origine donne naissance à une solution $x(t)$ qui reste proche de l'origine.

Notons bien que la stabilité du système n'implique pas la convergence des solutions vers l'origine, c'est pourquoi la notion de stabilité toute seule est insuffisante pour l'étude du comportement des solutions. On définit alors la notion d'attractivité.

<u>Définition</u> .1.2 (Attractivité)

On dit que l'origine x_0 est :

- Un point d'équilibre attractif, s'il existe un voisinage de l'origine $U(0)$, tel que

$$\begin{cases} \forall x_0 \in u(0) \\ \lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0 \end{cases} \quad \text{(II.4)}$$

- Un point d'équilibre globalement attractif si :

$$\begin{cases} \forall x \in \Re^n \\ \lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 0 \end{cases} \quad \text{(II.5)}$$

<u>Définition</u> .1.3 (Stabilité asymptotique)

On dit que l'origine $x = 0$ est

- Un point d'équilibre asymptotiquement stable (ou AS), s'il est stable et attractif.
- Un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable, s'il est stable et globalement attractif.

<u>Définition</u> .1.4 (Bornitude uniforme)

Les solutions du système (2.1) sont dites uniformément bornées, si : $\exists a \geq 0$ et une fonction croissante c :]0, a[$\rightarrow \Re$ tel que $\forall \alpha \in$]0, a[

$$\|x_0\| < \alpha \Rightarrow \|x(t)\| < c(\alpha), \quad \forall t \geq t_0 \quad \text{(II.6)}$$

Les solutions sont dites globalement uniformément bornées, si la propriété précédente est vraie pour $a = +\infty$.

Définition .1.5 (Attractivité uniforme)

On dit que

- l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément attractif (noté UA), si :

$$\exists c > 0 / \forall \|x(t)\| < c, \exists T := T(\varepsilon, c) \tag{II.7}$$

Tel que

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \forall t = T + t_0 \tag{II.8}$$

-l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre globalement uniformément attractif (noté GUA), si :

$$\exists c > 0, \forall \varepsilon > 0, \exists T := T(\varepsilon, c) \tag{II.9}$$

Tel que

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \forall t = T + t_0 \tag{II.10}$$

Définition .1.6 (Stabilité asymptotique uniforme)

On dit que :

- l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre uniformément asymptotiquement stable (noté UAS), s'il est uniformément stable et uniformément attractif.
- l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable (noté GUAS), s'il est globalement uniformément stable et globalement uniformément attractif.

Définition .1.7 (Stabilité exponentielle)

On dit que

-l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre exponentiellement stable (noté ES), s'il existe un voisinage de l'origine noté

$$U(0) = \Re^n, \ \exists \lambda_1 > 0 \text{ et } \exists \lambda_2 > 0 \tag{II.11}$$

Tel que

$$\|x(t)\| \le \lambda_1 \|x_0\| e^{-\lambda_2 (t - t_0)}, \forall x_0 \in u(0), \forall t \ge t_0 \ge 0 \tag{II.12}$$

Dans ce cas, la constante λ_2 est appelée le taux ou aussi la vitesse de convergence.

-l'origine $x = 0$ est un point d'équilibre **globalement exponentiellement stable** (noté GES), si $U(0) = \Re^n$.

Remarque 1.1. : Il est important de remarquer que la propriété de la stabilité exponentielle du système entraine nécessairement la stabilité asymptotique de ce dernier. **[15]**

II.2. Stabilité dans MPC avec des contraintes

Dans la conception des systèmes de commande, il est évident que l'une des exigences les plus importantes à vérifier est celle de la stabilité. Pour des systèmes continus linéaires et invariants dans le temps, des conditions nécessaires et suffisantes de stabilité ont été données il y a plus d'un siècle par Routh et Hurwitz [Hahn (1963)]. Les conditions correspondantes pour la stabilité dans les systèmes à temps discret peuvent être trouvées, par exemple, dans le travail de Jury (1971). Toutefois ces critères algébriques intéressants pour l'analyse sont tous peu utilisables à des fins de synthèse. Un critère très utilisé pour la conception et l'étude de la stabilité de systèmes, est le critère de stabilité de Lyapunov [Hahn (1963)], qui sera expliqué par la suite.

Les contrôleurs linéaires, tel que le contrôleur linéaire quadratique (LQG), sont relativement faciles à mettre en œuvre et garantissent, sous certaines hypothèses générales, la stabilité en boucle fermée. Cependant, les problèmes de commande à horizon infini n'ont de solution simple et "fermée" que lorsqu'aucune des variables du procédé n'est contrainte. La difficulté principale pour l'usage d'horizons infinis dans les processus avec contraintes est lie au fait qu'ils doivent se résoudre au moyen de méthodes numériques, qui exigent pour leur solution la mise en œuvre d'un nombre fini (même si grand) de variables.

Les premiers travaux de MPC utilisaient un horizon de prédiction fini. De cette manière on pouvait incorporer de manière naturelle les contraintes dans la formulation et la conception de la stratégie de commande. L'analyse de la stabilité dans les problèmes de commande prédictive avec horizon fini, est une tâche compliquée spécialement dans le cas avec contraintes -Zafiriou (1990) et Zafiriou et Marchal (1991)-, en outre la stabilité est, en général, faible -Bitmead, Gevers et Wertz (1990), Rawlings et Muske (1993)-. Cependant, depuis le début des années 90 un grand effort est fait pour résoudre le problème de la commande prédictive stabilisante avec de nouveaux outils et sous certaines hypothèses de base.

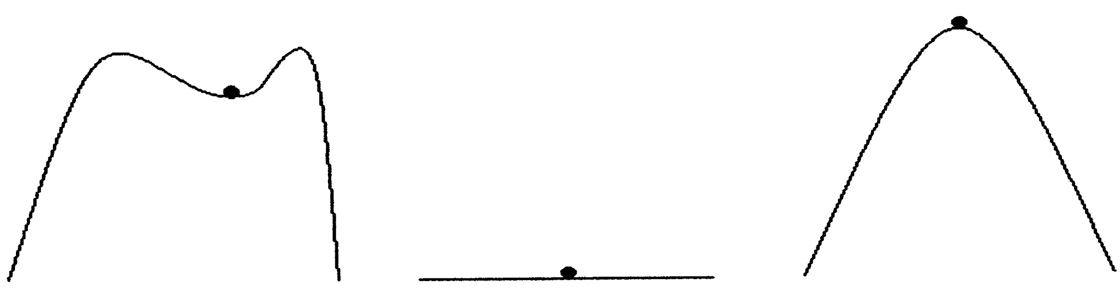
Jusqu'au début des années 90, la recherche de résultats de stabilité dans des systèmes de commande prédictive en présence de contraintes, n'avait pas été étudiée. À partir de cette date, apparaissent des travaux en horizons fini ou infini, dans lesquels il est possible de démontrer la stabilité du système contrôlé par une stratégie MPC sous certaines hypothèses de base. La démonstration de la stabilité du système, s'inspire, en général, de la théorie de Lyapunov. **[16]**

II.2.1 Stabilité de systèmes dynamiques

Il est fait référence aux concepts stabilité et instabilité dans nombre de branches de la science. Il est commun d'entendre dire qu'une monnaie est stable ; à un ingénieur dire qu'une structure est stable ou instable, à un chimiste dire qu'une réaction est stabilisée, etc...

En 1892, M Lyapunov a formulé de manière précise le concept de stabilité, et ses travaux ont constitué le point de départ pour établir d'autres variantes du concept.

À titre d'exemple, il est d'usage de considérer le mouvement d'une balle qui se déplace sous l'action de la gravité sur différentes surfaces comme celles montrées Figure II.1. Dans les trois cas, la balle se trouve dans une position d'équilibre, mais quel sera le mouvement résultant si la balle est écartée "un peu" de son état d'équilibre ? Dans le cas (a), la balle se maintiendra près de sa position d'équilibre en oscillant autour de celle-ci, et tendra à revenir à cette position d'équilibre, si l'on admet d'existence de frottements, phénomènes dissipateurs d'énergie mécanique (stabilité dite asymptotique). Dans ce cas, l'équilibre est dit asymptotiquement stable. Dans le cas (b), pour toute petite perturbation de la balle, celle-ci restera "près" de la position d'équilibre mais ne tendra pas à s'approcher de cette position, on parlera alors de stabilité (non asymptotique). Finalement en (c), toute petite perturbation entraînera la balle à s'éloigner de sa position d'équilibre ; dans ce cas l'équilibre est alors instable.



(a) asymptotiquement stable (b) stable (c) instable

Figure II.1. Le mouvement d'une balle

II.2.1.1 Définitions

Il est possible d'introduire d'une manière plus mathématique les concepts précédemment mentionnés [Hahn (1963)]. Qui on a définie précédemment (II.1). Avec $f : \Re^n \to \Re^n$ continue et

$f(0)=0$ L'origine est un point d'équilibre. La solution de l'équation (II.1) qui à $t=0$ "passe" par x_0 est dénotée

$$\varphi(t,x_0).\varphi(0,x_0)=x_0 \tag{II.13}$$

Définition .2.1

L'équilibre du système (II.1) est **stable** (au sens de Lyapunov) si pour chaque $\varepsilon>0$, il existe $\eta(\varepsilon)>0$ tel que :

$$\forall\|x_0\|<\eta \Rightarrow \|\varphi(t,x_0)\|<\varepsilon, \forall t\geq 0 \tag{II.14}$$

Toute solution qui à $t=0$ commence dans le cercle de rayon η , ne va pas abandonner le cylindre de rayon ε, **(Figure II.2)**.

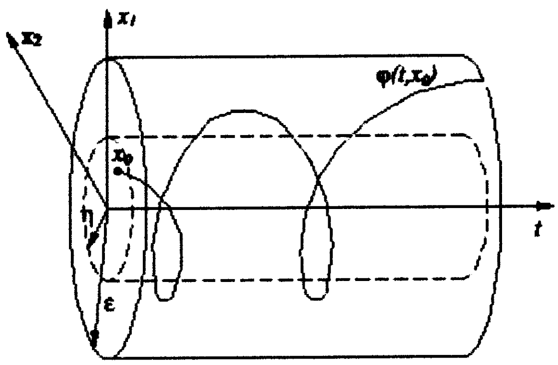


Figure II.2. Stabilité de l'origine pour le cas de n=2.

Définition .2.2

L'équilibre du système (II.1) est **asymptotiquement stable** (au sens de Lyapunov) et attractif, s'il existe η > 0 tel que :

$$\forall\|x_0\|<\eta \Rightarrow \lim\|\varphi(t,x_0)\|=0 \tag{II.14}$$

Toute solution qui à t = 0 commence dans le cercle de rayon η, termine finalement à l'origine, **(Figure II.3)**.

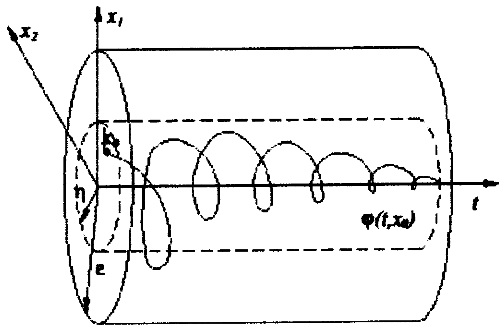


Figure II.3. Stabilité asymptote de l'origine pour le cas de n=2.

<u>Définition</u> .2.3

L'équilibre du système (II.1) dit être **instable** (au sens de Lyapunov), s'il n'est pas stable.

La Figure II.4 illustre ce concept dans le cas où $\boldsymbol{n}$ **= 2.**

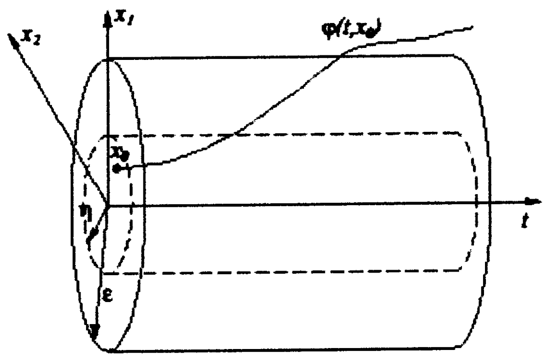


Figure 2.4. Instabilité de l'origine pour le cas de n=2.

II.2.1.1 Méthode directe ou deuxième méthode de Lyapunov :

En 1892, M Lyapunov a présenté deux méthodes (appelées première et seconde méthode de Lyapunov) pour étudier la stabilité de systèmes dynamiques décrits par des équations différentielles -Hahn (1963)-. La deuxième méthode permet d'obtenir des conditions suffisantes de stabilité.

En mécanique, un système est stable si son énergie totale (une fonction définie positive) est continuellement décroissante (ce qui signifie que la dérivée temporelle de l'énergie totale doit être définie négative) jusqu'à atteindre un état d'équilibre.

La seconde méthode de Lyapunov est basée sur une généralisation de ce fait, toutefois, pour des systèmes purement mathématiques il n'y a pas de manière simple pour définir une fonction énergie. Lyapunov a ainsi introduit ce qui est appelé fonction de Lyapunov, qui peut être vue comme une fonction énergie fictive. **[16]**

L'utilisation des fonctions définies positives est une technique parmi les plus efficaces pour analyser la stabilité d'un système gouverné par une équation différentielle ordinaire.

Définition .2.4 (Fonction de classe*k*) :

Une fonction continue α : [0, a [→ [0, +∞ [est dite de classe***k***, si elle est strictement croissante et α(0) = 0. Elle est dite de classe K∞, si de plus, on a a = +∞ et α(r) → +∞ quand r → +∞.

Définition .2.5 (Fonction de classe $k\,l$) :

Une fonction continue $\beta:[0,a[\times[0,+\infty[\rightarrow[0,+\infty[$ est dite de classe $k\,l$, si pour tout **s** fixé, l'application $r\mapsto\beta(r,s)$ est de classe K et pour tout **r** fixé, l'application $s\mapsto\beta(r,s)$ est décroissante et β(r, s) → 0 quand s → +∞.

Voici une autre reformulation des notions de stabilité utilisant les fonctions de classe ***k***et $k\,l$; les démonstrations des propositions suivantes peuvent être consultées dans l'ouvrage.

- **Proposition .2.1**

L'origine x = 0 est un point d'équilibre

-Uniformément stable si et seulement si il existe une fonction α(.) de classe ***k*** et un constante positive c indépendante de t_0 telle que,

$$\|x(t)\|\leq\alpha(\|x_0\|),\qquad \forall t\geq t_0\geq 0\qquad \forall\|x_0\|<c. \tag{II.15}$$

-Globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale x_0.

- **Proposition .2.2**

L'origine $x=0$ est un point d'équilibre

-Uniformément asymptotiquement stable si et seulement s'il existe une fonction $\beta(.,.)$ de classe $k\,l$ et une constante positive **c** indépendante de t_0 telle que,

$$\|x(t)\|\leq\beta(\|x(t)\|,t-t_0),\quad \forall t\geq t_0\geq 0,\quad \forall\|x_0\|<c \tag{II.16}$$

-Globalement uniformément asymptotiquement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale x_0.

❖ **Proposition .2.3**

L'origine x = 0 est un point d'équilibre

-Exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite avec

$$\beta(r,s) = kre^{\gamma s}, k > 0, \gamma > 0, \forall \|x_0\| < c \qquad \text{(II.17)}$$

-Globalement exponentiellement stable si et seulement si l'inégalité précédente est satisfaite pour toute condition initiale x_0.

Définition .2.6

Une fonction continue $V : \Re^+ \times \Re^n \rightarrow \Re^+$ est dite :

- définie positive, s'il existe une fonction α de classe ***k***, telle que

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \Re^n, V(t,x) \geq \alpha(\|x\|). \qquad \text{(II.18)}$$

-définie positive et radialement non-bornée (ou propre), si l'inégalité précédente est vérifiée pour tout $x \in \Re^n$ avec une fonction α de classe ***k***∞.

-limitée ou decresent, s'il existe une fonction γ de classe ***k***, telle que **[15]**

$$\forall t \geq 0, \forall x \in \Re^n, V(t,x) \leq \gamma(\|x\|). \qquad \text{(II.18)}$$

Définition .2.7 (fonction de Lyapunov)

Soit la fonction V(x) qui satisfait les conditions suivantes :

1. V(x) est continue et différentiable.

2. V(0) = 0.

3. V(x) > 0, ∀x ≠ 0.

L'état d'équilibre x = 0 de l'équation (II.1) est :

-(a) Stable dans le sens de Lyapunov si $\dot{V}(x)$ est semi défini négatif.

-(b) Asymptotiquement stable dans le sens de Lyapunov si $\dot{V}(x)$ est défini négatif.

$\dot{V}(x)$ est la dérivée temporelle de la fonction V(x) évaluée le long des trajectoires de (II.1).

Cette fonction *V(x)* est appelée fonction de Lyapunov. La stabilité (ou stabilité asymptotique) de la position d'équilibre, étant satisfaites les conditions du théorème de Lyapunov, est due au fait que pour la fonction *V(x)*, qui possède les propriétés précédemment indiquées, on peut construire dans un environnement de l'origine des coordonnées une famille de surfaces fermées iso-valeur décrites au moyen de l'équation :

$$V(x) = C \quad (\geq 0) \tag{II.19}$$

Ces surfaces entourent l'origine des coordonnées. Dans ce cas, au fur et à mesure que diminue le scalaire *C* ces surfaces viennent se contracter vers l'origine des coordonnées

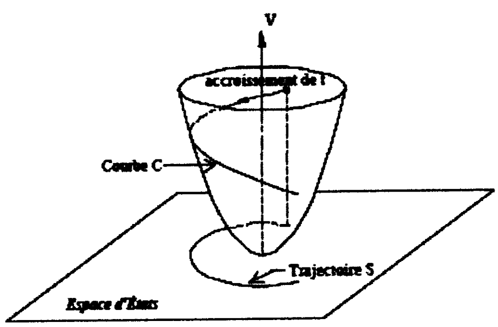


Figure II.5. Fonction de Lyapunov pour un système autonome.

L'idée de ce théorème est facile à comprendre sur la Figure 2.5. Si nous nous déplaçons le long de la courbe *C* sur la surface *V*(*x*) dans la direction de croissance de *t*, la valeur de *V*(*x*) diminue (c'est le cas montré) ou au moins reste constante. Ainsi, la trajectoire *S*, qui est la projection de la courbe *C* dans l'espace d'état, se situe dans une surface délimitée qui enferme l'origine. Par conséquent l'origine est stable [La Salle et Lefschetz (1973)].

Bien que la théorie de Lyapunov ait été établie pour des équations différentielles, on peut développer une théorie semblable pour les équations aux différences. Il est fait un rappel d'un résultat fondamental qui sera repris par la suite par le cas de systèmes linéaires discrets.

II.2.1.2. Analyse de stabilité de Lyapunov de systèmes en temps discret

Soit le système autonome en temps discret décrit par :

$$x(k+1) = Ax(k) \tag{II.20}$$

Où $x(k) \in \Re^n$ est le vecteur des variables d'état dans le temps k, $A \in \Re^{n\times m}$ est la matrice dynamique du système.

On choisit une fonction de Lyapunov candidate

$$V\left(x(k)\right) = x(k)^T Px(k) \tag{II.21}$$

Ou $P \in \Re^{n\times m}$ est une matrice symétrique, définie positive. L'accroissement de $V(x(k))$ est donné par :

$$\begin{aligned} \Delta V\left(x(k)\right) &= V\left(x(k1)\right) - V\left(x(k)\right) \\ &= x(k)^T A^T PAx(k) - x(k)^T Px(k) \\ &= x(k)^T \left[A^T PA - P\right] x(k) \end{aligned} \tag{II.22}$$

Comme $V(x(k))$ a été choisie positive définie, il est requis pour avoir la stabilité asymptotique que $\Delta V(x(k))$ soit défini négatif. Par conséquent :

$$\Delta V\left(x(k)\right) = -x(k)^T Qx(k), Q > 0 \tag{II.23}$$

Avec :

$$Q = (A^T PA - P) \tag{II.24}$$

L'équation précédente est appelée équation de Lyapunov pour les systèmes discrets. On peut aussi démontrer la nécessite.

❖ **<u>Théorème</u> .2.1**

Soit le système en temps discret décrit par l'équation (2.5). Une condition nécessaire et suffisante pour que l'état d'équilibre **x = 0** soit asymptotiquement stable, est que, étant donnée une matrice $Q \in \Re^{n\times n}$ symétrique et définie positive, il existe une matrice $P \in \Re^{n\times n}$ symétrique et définie positive satisfaisant. **[16]**

❖ **<u>Théorème</u> .2.2**

Considérons le système (2.1). Supposons que ce système admet une fonction de Lyapunov $V(t,x)$ et supposons qu'il existe des constantes c_1, c_2, c_3 et $c_4 > 0$, telles que,

$\forall x \in U(0), \quad \forall t \geq t_0$ On a :

$$c_1 \|x\|^2 \leq V(t,x) \leq c_2 \|x\|^2 \tag{II.25}$$

$$\dot{V}(t,x) \leq -c_3 \|x\|^2 \tag{II.26}$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial x}(t,x) \right\| \leq c_4 \|x\| \tag{II.27}$$

Alors, $x = 0$ est un point d'équilibre **exponentiellement stable.** Si $U(0) = \Re^n$, alors l'origine est un point d'équilibre globalement exponentiellement stable. **[15]**

II.2.2. Solutions au problème de stabilité en MPC

Sur le problème de la stabilité de stratégies MPC en présence de contraintes, sont considérées les deux approches qui paraissent les plus significatives, vu l'écho qu'elles ont soulevé dans la communauté internationale de commande.

Les deux approches sont proches en ce sens que la démonstration de la stabilité se base sur le fait qu'il est possible de démontrer que, s'il existe une solution admissible, la fonction de coût J est décroissante de manière monotone et qu'elle peut, aussi, être interprétée comme une fonction de Lyapunov.

II.2.2.1. Première Solution

Elle est présente dans des méthodes comme celles développées par Clarke et Scatolini (1991), Clarke, Mouche et Scatolini (1991), Mouche et Zhang (1992), et dans Kouvaritakis, Rossiter et Chang (1992). Il s'agit de forcer à ce que la sortie prédite du modèle coïncide avec la référence (ou une valeur proche) après un nombre fini d'instants d'échantillonnages. Ceci se fait en ajoutant une restriction d'égalité sur la sortie finale atteinte par le système. Cette stratégie est connue comme CRHPC "*Constrained Receding Horizon Predictive Control*".

Cette solution introduit une restriction artificielle qui s'ajoute au problème. On obtient par conséquent une solution sous-optimale en réduisant l'espace admissible et, dans le pire des cas cela peut apporter des problèmes de faisabilité. On pourrait essayer d'atténuer ce problème en choisissant un long horizon de prévision *m* après l'horizon de d'optimisation N_Y, ce qui présente l'inconvénient d'augmenter le nombre de variables de décision et par conséquent de rendre difficile la solution du problème d'optimisation, (Figure II.6).

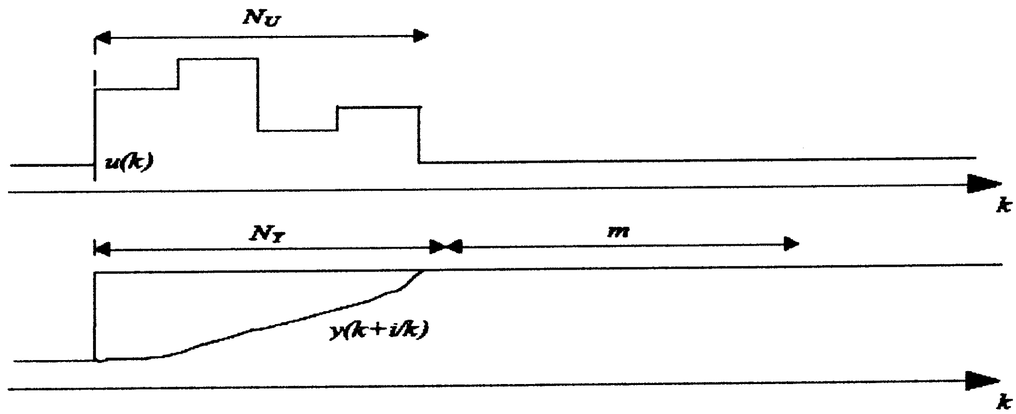


Figure II.6. Stratégie CRHPC.

On suppose qu'il n'existe pas de perturbations ni de bruit agissant sur le système. Il n'existe pas non plus de changement de consigne, le système est stabilisable et contrôlable et le problème a une solution (il est faisable).

La solution du problème consiste à minimiser la fonction coût :

$$J(N_Y,N_U)=\sum_{j=1}^{N_U}\eta\left[y(k+i/k)-w(k+i/k)\right]^2+\sum_{j=1}^{N_U}\lambda\left[\Delta u(k+i-1/k\right]^2 \qquad \text{(II.28)}$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases}\Delta u(k+i-1/k)=0, & i>0\\ y(k+N_Y+1/K)=w(k+N_Y+1/k), & i=1,\ldots\ldots,m.\end{cases} \qquad \text{(II.29)}$$

- **Démonstration**

L'idée principale de la démonstration de la stabilité est que si l'on trouve une solution admissible et que l'horizon N_Y est suffisamment grand pour couvrir la partie transitoire des variables de sortie, la fonction coût est monotonement décroissante (s'il n'existe pas de perturbation externe ni de bruit) et il est possible de l'interpréter comme une fonction de Lyapunov qui garantit la stabilité.

Dans la démonstration, est considéré le vecteur des valeurs futures des incréments de la commande à l'instant $k+1$, celui calculé au moment précédent (optimal), en ajoutant un zéro comme dernier élément: $\Delta u^*(k+1)=[\Delta u(k+1/k),\ldots\Delta u(k+N_u-1/k)]^T$. Ce vecteur de signaux de commande future a les propriétés suivantes :

1. $\Delta u^*(k+i/k+1)=\Delta u(k+i/k)$ (II.30)

2. $y^*(k+i/k+1)=y(k+i/k)$ (II.31)

3. $\Delta u^*(k+NU+i/k+1)=0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \forall i \geq 0$ (II.32)

Le fait que la commande sous optimale $\Delta u^*(k+1)$ soit simplement une version décalée dans le temps de la commande optimale $\Delta u(k)$ additionnant un zéro à la fin, fait que le problème, en plus d'être faisable car il l'était à l'instant précédent (on a supposé que le problème a initialement une solution), entraîne une diminution ou au moins l'égalité de la valeur de la fonction coût $\left(J^*(k+1) \leq J(k)\right)$ étant donné que :

$$J^*(k+1)=J(k)+\eta\left[e(k+N_Y+1/k)\right]^2-\eta\left[e(k+1/k)\right]^2-\lambda\left[\Delta u(k/k)\right]^2 \quad \text{(II.33)}$$

Où $e(k+1/k)=y^*(k+1/k)-w(k+1/k)$. Comme le vecteur des incréments futurs des signaux de commande appliqués satisfait les contraintes finales $e(k+N_Y+1/k)=0$, on a :

$$J^*(k+1)=J(k)-\eta\left[e(k+1/k)\right]^2-\lambda\left[\Delta u(k/k)\right]^2 \quad \text{(II.34)}$$

C'est-à-dire, la valeur de $J^*(k+1)$ est celle de $J(k)$ moins quelques termes positifs ou nuls.

Etant donné que le vecteur Δu^* est tel que $\Delta u^*(k+i/k+1)=\Delta u(k+i/k)$ et en l'absence de perturbations, l'implantation à l'instant $k+1$ du vecteur de commande $\Delta u^*(k+1)$ produit les prévisions $y^*(k+i/k+1)=y(k+i/k)$. Ainsi, ce vecteur satisfait les contraintes terminales

($\Delta u^*(k+NU+i/k+1)=0, \forall i \geq 0$). Par conséquent le vecteur des futures augmentations de la commande optimale $\Delta u(k+1)$ qui satisfait également les contraintes finales et qui minimise la fonction de coût, conduira à une fonction coût qui sera plus petite ou égale à celle calculée avec le vecteur des signaux sous optimaux:

$$J(k+1) \leq J^*(k+1) \leq J(k) \quad \text{(II.35)}$$

Par conséquent $J(k)$ peut être interprète comme une fonction de Lyapunov dont le non croissance permet d'affirmer la stabilité du système commandé.

II.2.2.2 Seconde Solution

Elle est formée par des algorithmes qui utilisent un horizon de prédiction infini comme : Rawlings et Muske (1993), le GPC$_\infty$ de Scokaert (1997) ou le contrôleur d'horizon infini de Rossiter, Gossner et Kouvaritakis (1996) et Lit, Kwon et Choi (1998).

Ces contrôleurs peuvent être déterminés, du fait que le problème associe est transformé, après quelques manipulations, en un problème équivalent d'horizon fini avec un système dépendant de matrices de poids. De cette manière, on résout la difficulté de manier des restrictions dans le cadre d'horizon de prédiction infini. Pour transformer la fonction d'horizon infini :

$$J_\infty(k)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(x(k+i/k)^T Qx(k+i/k)+u(k+i/k)^T Ru(k+i/k)\right) \tag{II.36}$$

En une fonction équivalente d'horizon fini, il est fait l'hypothèse que pour $i \geq N$ la loi de commande appliquée est un retour d'état $u(k+i-1/k) = Kx(k+i-1/k)$ -Chmielewski et Manousiouthakis (1996) et Scokaert et Rawlings (1998)-.

Ainsi la fonction coût peut être réécrite de la manière suivante :

$$J_\infty(k)=\sum_{i=0}^{N-1}\left(x(k+i/k)^T Qx(k+i/k)+u(k+i/k)^T Ru(k+i/k)\right)+$$

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(x(k+i/k)^T Qx(k+i/k)+u(k+i/k)^T Ru(k+i/k)\right) \tag{II.37}$$

En développant le second terme de l'expression précédente, il vient :

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(x(k+i/k)^T Qx(k+i/k)+u(k+i/k)^T Ru(k+i/k)\right)=$$

$$x(k+N/k)^T(Q+K^TRK)x(k+N/k)+$$

$$x(k+N+1/k)^T(Q+K^TRK)x(k+N+1/k)+\ldots$$

$$x(k+N+j/k)^T(Q+K^TRK)x(k+N+j/k)+\ldots \tag{II.38}$$

Ou de manière équivalente :

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(x(k+i/k)^T Qx(k+i/k)+u(k+i/k)^T Ru(k+i/k)\right)=$$

$$x(k+N/k)^T(Q+K^TRK)x(k+N/k)+$$

$$x(k+N+1/k)^T(A+BK)^{Tj}(Q+K^TRK)(A+BK)^j x(k+N+1/k)+\ldots$$

$$x(k+N+1/k)^T(A+BK)^{Tj}(Q+K^TRK)(A+BK)^j x(k+N+1/k)+\ldots \tag{II.39}$$

Soit :

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(x(k+i/k)^T Qx(k+i/k)+u(k+i/k)^T Ru(k+i/k)\right)=$$

$$x(k+N+1/k)^T\sum_{i=0}^{\infty}\left[(A^T+B^TK^T)^i(Q+K^TRK)(A+BK)^i\right]x(k+N+1/k) \qquad \text{(II.40)}$$

S'on fait :

$$P=\sum_{i=0}^{\infty}\left[(A^T+B^TK^T)^i(Q+K^TRK)(A+BK)^i\right] \qquad \text{(II.41)}$$

La série converge si le système est stable, alors

$$(A+BK)^T P(A+BK)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[(A^T+B^TK^T)^i(Q+K^TRK)(A+BK)^i\right]$$

$$=P-(Q+K^TRK) \qquad \text{(II.42)}$$

L'équation précédente est une équation de Lyapunov. Le problème de MPC à horizon infini, se transforme en la minimisation de la fonction objectif d'horizon fini suivante :

$$J(k)=x(N/k)Px(N/k)+\sum_{i=0}^{N-1}\left(x(k+i/k)^T Qx(k+i/k)^T Ru(k+i/k)\right) \qquad \text{(II.43)}$$

Remarque .2.1 Il est possible de dériver une procédure semblable à celle effectué par les équations (2.18)-(2.25), si au lieu de considérer $u(k+i-1/k)=Kx(k+i-1/k)$ pour $i \geq N$, on utilise $u(k+i-1/k)=0$ -Rawlings et Muske (1993)-. Ceci implique que "on éteint" le contrôle et on laisse le système opérer en boucle ouverte. Ceci n'est possible que si le système est stable en boucle ouverte. **[16]**

Conclusion

Dans ce chapitre On a brièvement rappelé quelque définition sur la stabilité, et le critère de stabilité de Lyapunov, On a présenté les deux approches les plus importantes pour le problème de l'étude de la stabilité en commande prédictive. Il a été rappelé que toutes deux s'appuient sur le fait que la fonction de coût est monotonement décroissante, ce qui peut être interprété comme la décroissance d'une fonction de Lyapunov.

MCours.com