

MCours.com

*Chapitre 3*  
*Conception ET applications*

## *Conception et applications*

**Résumé** : Ce chapitre illustre deux types de commande (la commande prédictive et prédictive floue) chaque type contient deux phases importantes (phase de conception, et de simulation). Dans la première phase on définit le type de commande et comment nous avons calculé et utilisé pour stabiliser le système. La deuxième phase est la simulation du comportement du système.

### I. Commande prédictive

#### I.1 Phase de conception

Le concept de la commande prédictive généralisée réside dans la création d'un effet anticipatif. On exploite pour cela les connaissances explicites sur l'évolution de la trajectoire à suivre dans le futur. Le but de cette méthode est de générer à chaque instant  $k$  le signal de commande  $u(k)$ .

La commande  $u(k)$  sera déterminée par la différence entre l'état actuel  $y(k)$  et l'état prédit incontrôlé  $y_p$ .

La loi de la commande est basée sur la minimisation d'un critère de cout qui consiste à pondérer les variations du signal de  $u(k)$  et de l'erreur de poursuite  $e(k+1)$ . [20]

##### I.1.1 Calcul de la commande $u(k)$ :

Pour l'optimisation de la commande il faut déterminer le modèle augmenté du système à étudier.

Pour plus de simplicité, nous commençons notre étude en supposant que la plante sous-jacente est un système à une seule entrée et une seule sortie, décrit par :

$$x_m(k+1) = A_m x_m(k) + B_m u(k) \quad (\text{III.1})$$

$$y(k) = C_m x_m(k). \quad (\text{III.2})$$

Où  $u(k)$  est la variable d'entrée ou variable manipulée ;  $y(k)$  est la sortie du processus ;  
et  $x_m(k)$  est le vecteur variable d'état avec de dimension  $n_l$ .

Prenant une opération différentielle sur les deux côtés de (III.1), on obtient que

$$x_m(k+1) - x_m(k) = A_m(x_m(k) - x_m(k-1)) + B_m(u(k) - u(k-1)) \quad (III.3)$$

Notons la différence de la variable d'état par :

$$\begin{cases} \Delta x_m(k+1) = x_m(k+1) - x_m(k) \\ \Delta x_m(k) = x_m(k) - x_m(k-1) \end{cases} \quad (III.4)$$

Et la différence entre la variable de commande par :

$$\Delta u(k) = u(k) - u(k-1) \quad (III.5)$$

Donc l'équation (III.3) devient :

$$\Delta x_m(k+1) = A_m \Delta x_m(k) + B_m \Delta u(k) \quad (III.6)$$

Notez que l'entrée dans le modèle d'espace d'état est  $\Delta u(k)$ . L'étape suivante consiste à connecter  $\Delta x_m(k+1)$  à la sortie  $y(k)$ . Pour ce faire, un nouveau vecteur de variable d'état est choisi comme :

$$x(k) = \begin{bmatrix} \Delta x_m(k)^T & y(k) \end{bmatrix}^T$$

Où l'indice supérieur 'T' indique la matrice transposée. Notez que :

$$\begin{aligned} y(k+1) - y(k) &= C_m(x_m(k+1) - x_m(k)) \\ &= C_m \Delta x_m(k+1) \\ &= C_m A_m \Delta x_m(k) + C_m B_m \Delta u(k) \end{aligned} \quad (III.7)$$

Assembler (III.4) avec (III.5) conduit au modèle d'espace d'état suivant :

$$\begin{bmatrix} \Delta x_m(k+1) \\ y(k+1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A & O_m^T \\ C_m A_m & 1 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}}_{x(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_m \\ C_m B_m \end{bmatrix}}_B \Delta u(k) \quad (III.8)$$

$$y(k) = \underbrace{\begin{bmatrix} O_m & 1 \end{bmatrix}}_C \begin{bmatrix} \Delta x_m(k) \\ y(k) \end{bmatrix}$$

n1

Avec  $O_m = [0 \ 0 \dots \ 0]$ , Le triplet (A, B, C) est appelé le modèle augmenté, qui sera utilisé dans la conception de la commande prédictive.

**I.1.2 L'optimisation de la commande :**

On suppose que l'instant d'échantillonnage  $k_i, /k_i > 0$ . Pour un signal  $r(k_i)$  donné la consigne à un temps d'échantillon  $k_i$ , dans un horizon de prédiction  $N_p$  l'objectif du système de contrôle prédictif est d'amener la sortie prédite aussi proche que possible du signal de consigne, où l'on suppose que la valeur de consigne le signal reste constant dans la fenêtre d'optimisation. Cet objectif est ensuite traduit en un design pour trouver le vecteur  $\Delta u$  «meilleur» des paramètres de commande de telle sorte qu'une fonction d'erreur entre la consigne et la sortie prédite est minimisée.

En supposant que le vecteur de données qui contient les informations de consigne est :

$$R_s^T = \underbrace{[1 \ 1 \dots \ 1]}_{N_p} r(k_i) \quad (III.9)$$

Pour trouver  $\Delta u$  optimal, nous définissons la fonction de coût J qui reflète l'objectif de commande comme suite :

$$J = (R - Y)^T (R - Y) + \Delta U^T \bar{R} \Delta U \quad (III.10)$$

Où le premier terme est liée à l'objectif de minimiser les erreurs entre la sortie prédite et le signal de consigne tandis que le deuxième terme reflète la prise en compte de la taille de  $\Delta U$  lorsque la fonction objectif J est fait pour être aussi faible que possible.

Tel que :

- $R_s^T = [1 \ 1 \dots 1] r(k_i)$  vecteur contient l'information de consigne.
- $\bar{R} = r_w I_{N_c \times N_c}$  ( $r_w \geq 0$ ) C'est une matrice diagonale.
- $\Delta U = [\Delta u(k_i) \ \Delta u(k_i + 1) \dots \Delta u(k_i + N_c - 1)]$  C'est la future séquence de commande et  $N_c$  horizon de contrôle.
- $Y$  c'est la sortie prédit tel que

$$Y = Fx(k_i) + \varphi \Delta U \quad (III.11)$$

$$\text{Où } F = \begin{bmatrix} CA \\ CA^2 \\ CA^3 \\ \vdots \\ \vdots \\ CA^{N_p} \end{bmatrix} \quad \text{et } \varphi = \begin{bmatrix} CB & 0 & 0 & \dots & 0 \\ CAB & CB & 0 & \dots & 0 \\ CA^2 B & CAB & CB & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ CA^{N_p-1} B & CA^{N_p-2} B & CA^{N_p-3} B & \dots & CA^{N_p-N_c} B \end{bmatrix}$$

Pour trouver le  $\Delta U$  optimal qui permettra de minimiser J, en utilisant (III.8), donc J est exprimé comme

$$J = (R_s - Fx(k_i))^T (R_s - Fx(k_i)) - 2\Delta U^T \varphi^T (R_s - Fx(k_i)) + \Delta U^T (\varphi^T \varphi + \bar{R}) \Delta U \quad (III.12)$$

À partir de la première dérivée de la fonction de coût J :

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = -2\varphi^T (R_s - Fx(k_i)) + 2(\varphi^T \varphi + \bar{R}) \Delta U \quad (III.13)$$

La condition nécessaire du minimum J est obtenue comme :

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta U} = 0 \quad (III.14)$$

À partir de laquelle nous trouvons la solution optimale pour le signal de commande :

$$\Delta U = (\varphi^T \varphi + \bar{R})^{-1} \varphi^T (R_s - Fx(k_i)) \quad (\text{III.15})$$

On à

$$R_s^T = [1 \ 1 \dots 1] r(k_i) \Rightarrow R_s = [1 \ 1 \dots 1]^T r(k_i) = \bar{R}_s r(k_i)$$

Donc

$$\Delta U = (\varphi^T \varphi + \bar{R})^{-1} \varphi^T (\bar{R}_s r(k_i) - Fx(k_i)) \quad (\text{III.16})$$

La commande  $u(k_i)$  à appliquer à l'instant d'échantillonnage  $k_i$  est : [17]

$$u(k_i) = u(k_i - 1) + \Delta U \quad (\text{III.17})$$

## I.2. Phase de simulation

Le schéma présentatif de la méthode est donné par la figure (III.1)

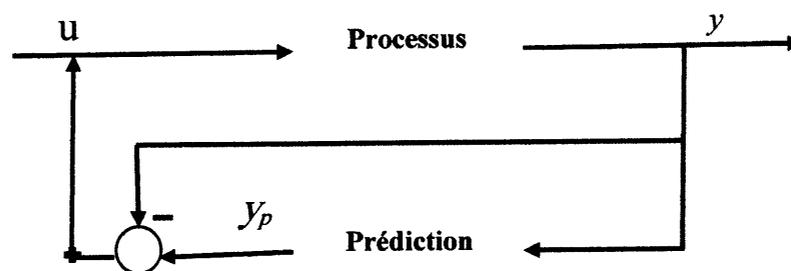


Figure III.1 Contrôle prédictive à retour d'état.

### I.2.1 Application 1 (CONTROLE DE L'HÉLICOPTÈRE INSTABLE)

La fonction de transfert de l'angle de rotor à la vitesse d'avancement de l'hélicoptère dans une condition de vol particulière est donnée par :

$$H(s) = \frac{9.8(S^2 - 0.5S + 6.3)}{(S + 0.6565)(S^2 - 0.2366S + 0.1493)} \quad (\text{III.18})$$

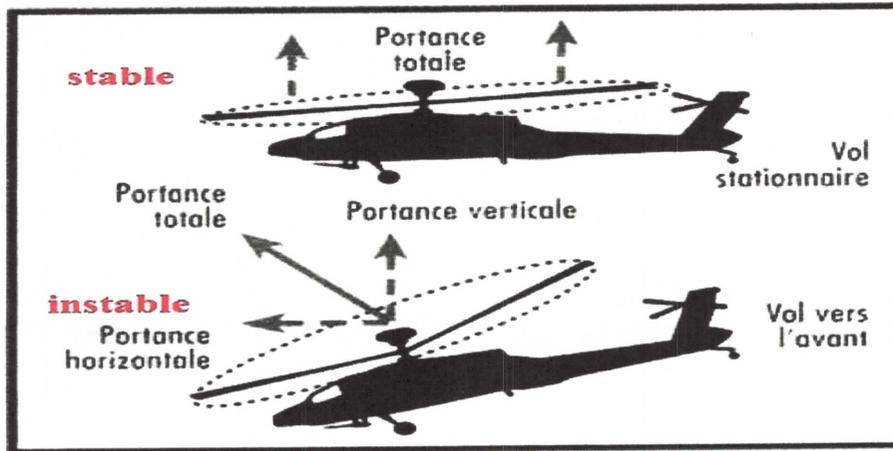


Figure III.2 : Schéma fonctionnel de mouvement d'un hélicoptère

I.2.1.1 Etude de la stabilité

Ce système a des zéros à  $-0.6565$  ;  $+0.25+0.25j$ ,  $+0.25-2.5j$ , et pôles à  $+0.118+0.37j$ ,  $+0.118-0.37j$  il est donc à la fois la phase minimum et instable Certes un système difficile à contrôler [18].

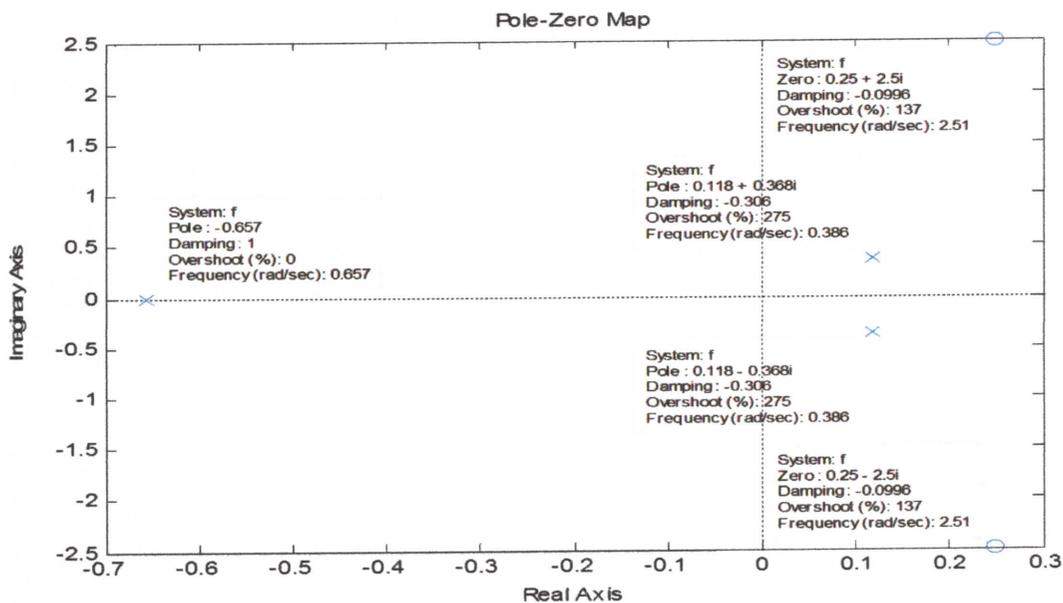


Figure III.3 la position des pôles et les zéro

I.2.1.2 Résultat de simulation

Les figures ci-dessous représentent la réponse du système obtenue avant et après la commande, lorsqu'un modèle exact est supposé, et les paramètres suivant :

- Un horizon de prédiction  $N_p=10$
- Un horizon de contrôle  $N_c=2$ .
- Les conditions initiales du variable d'état  $x(0)=[0 \ 0 \ 0]^T$

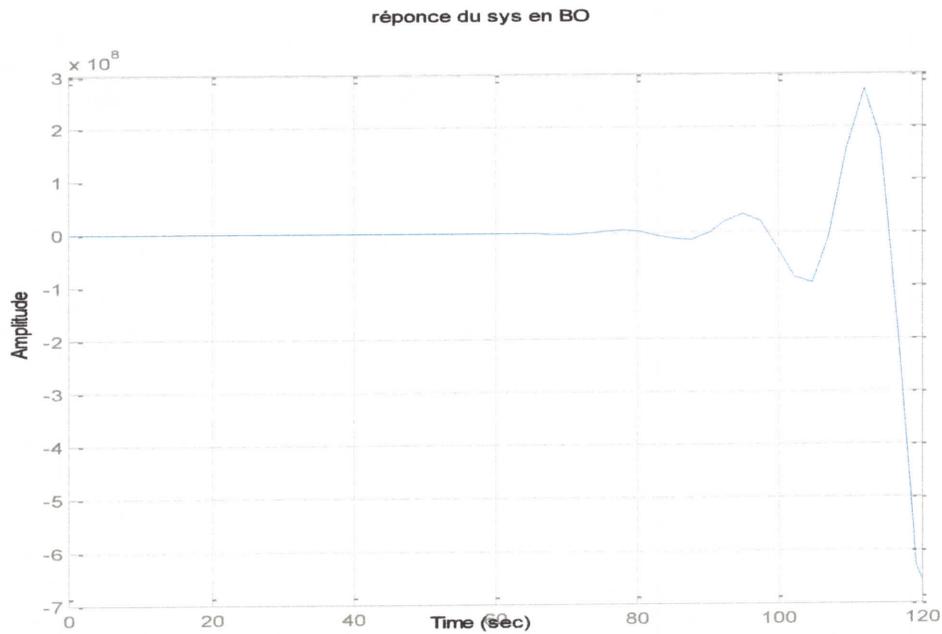


Figure III.4: réponse du système en boucle ouvert

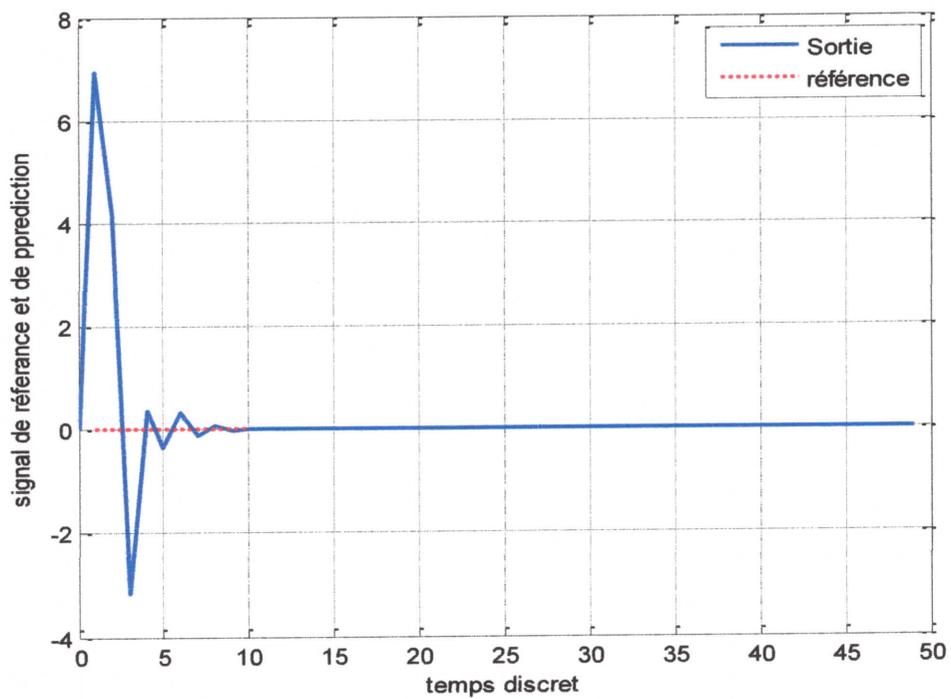


Figure III.5 : signaux de consigne et de prédiction

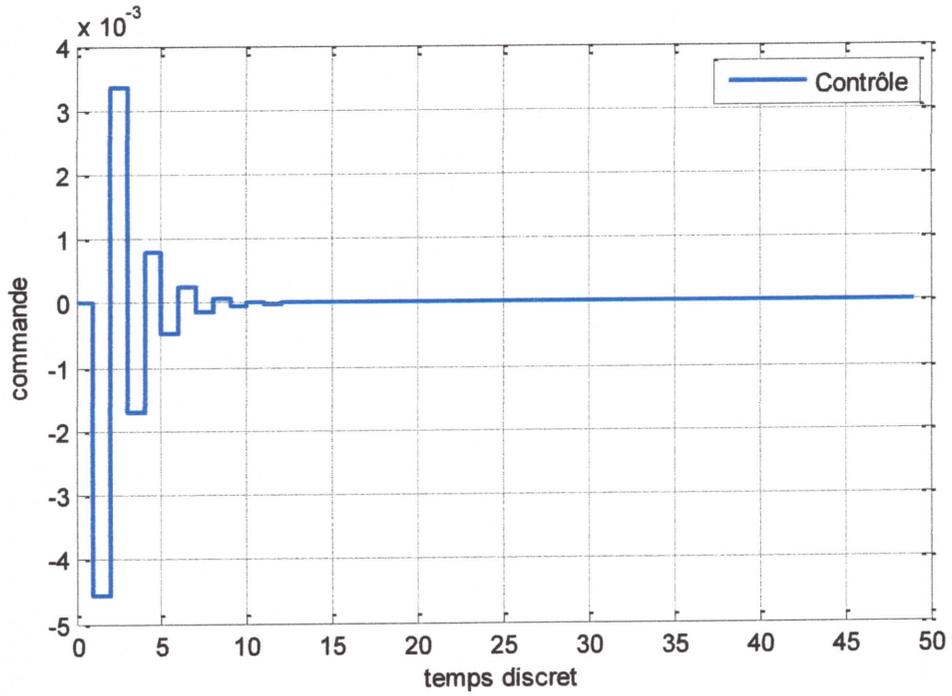


Figure III.6 : Signal de commande appliquée

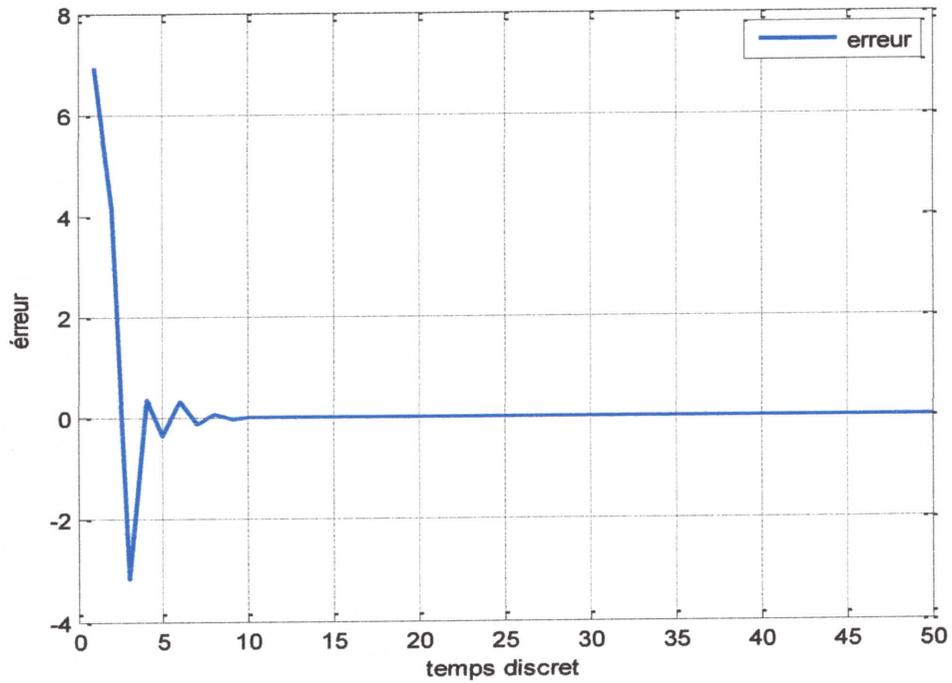


Figure III.7 : L'erreur de poursuite

### I.2.2. Application 2 (CONTROLE D'UN SATELLITE)

On considère les équations linéarisées d'un satellite au voisinage d'une orbite circulaire parcourue à vitesse  $\omega$  Constante :

$$\ddot{r} = 3\omega^2 r + 2\omega\dot{\theta} + u_r \quad (\text{III.19})$$

$$\ddot{\theta} = -2\omega\dot{r} + u_\theta \quad (\text{III.20})$$

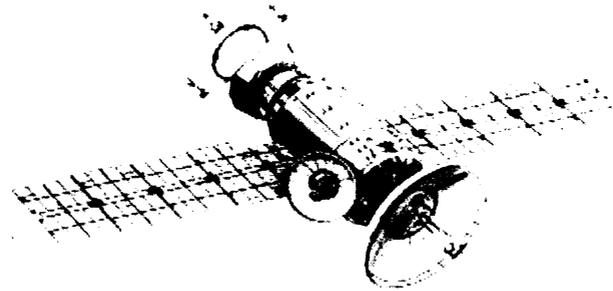


Figure III.8 : Schéma fonctionnel d'un satellite.

Le satellite est commandé par deux moteurs. Le premier fournit une force radiale  $u_r$  et le second une force tangentielle  $u_\theta$ . La sortie mesurée  $y_r$  est la position radiale  $r$ , La sortie mesurée  $y_\theta$  est la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$ .

Nous pouvons écrire le modèle d'état suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_3 \\ \dot{x}_2 = x_4 \\ \dot{x}_3 = 3\omega^2 x_1 + 2\omega x_4 + u_r \\ \dot{x}_4 = -2\omega x_3 + u_\theta \\ y_r = x_1 \\ y_\theta = x_2 \end{cases} \quad (\text{III.21})$$

Où

$$x_1 = r, \quad x_2 = \theta, \quad x_3 = \dot{r}, \quad x_4 = \dot{\theta}.$$

Les matrices d'état de ce système s'écrivent donc [19] :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3\omega^2 & 0 & 0 & 2\omega \\ 0 & 0 & -2\omega & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_r = [0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$$

$$C_r = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$B_\theta = [0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$$

$$C_\theta = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

$$D = 0$$

### 1.2.2.1 Etude de la stabilité du système

**Système 1:** La sortie de la position radiale  $y_r$  est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont à parties réelles strictement négatives.

Les zéro du ce système sont (0 , 0). Les pôles sont (+0.0 + 0.0i; -0.0 + 0.0i; -2.15\*10<sup>-16</sup>+ 1.0i; -2.15\*10<sup>-16</sup>- 1.0i). Donc le système est instable.

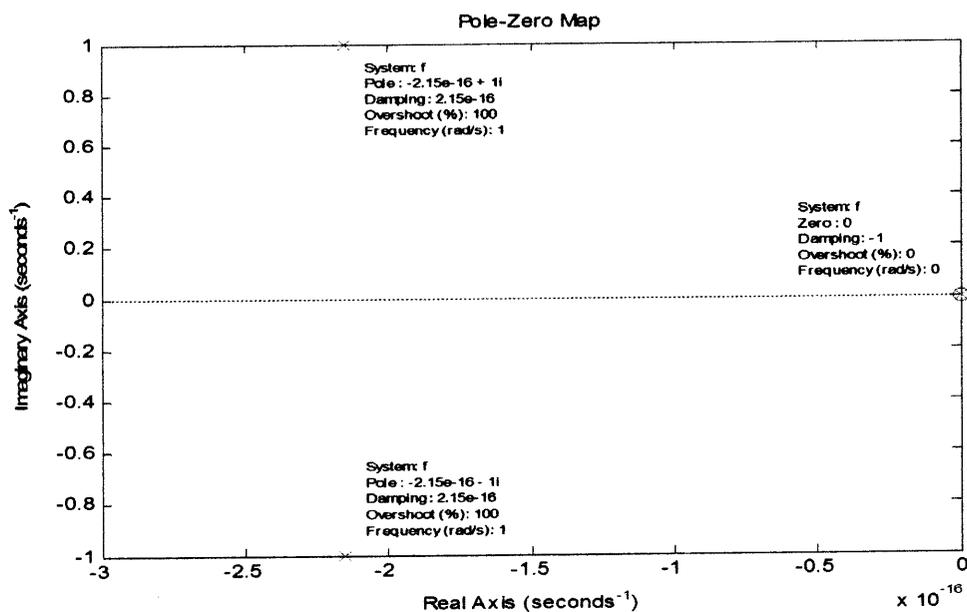


Figure III.9 la position des pôles et les zéro

**Système 2** : La sortie de la vitesse angulaire  $\dot{\gamma}_\theta$  est stable si et seulement si les pôles de sa fonction de transfert sont à parties réelles strictement négatives.

Les zéro du système 2 sont (1.7321 ; -1.7321). Les pôles sont (+0.0 + 0.0i; -0.0 + 0.0i; -2.15\*10<sup>-16</sup>+ 1.0i; -2.15\*10<sup>-16</sup>- 1.0i). Donc le système est instable.

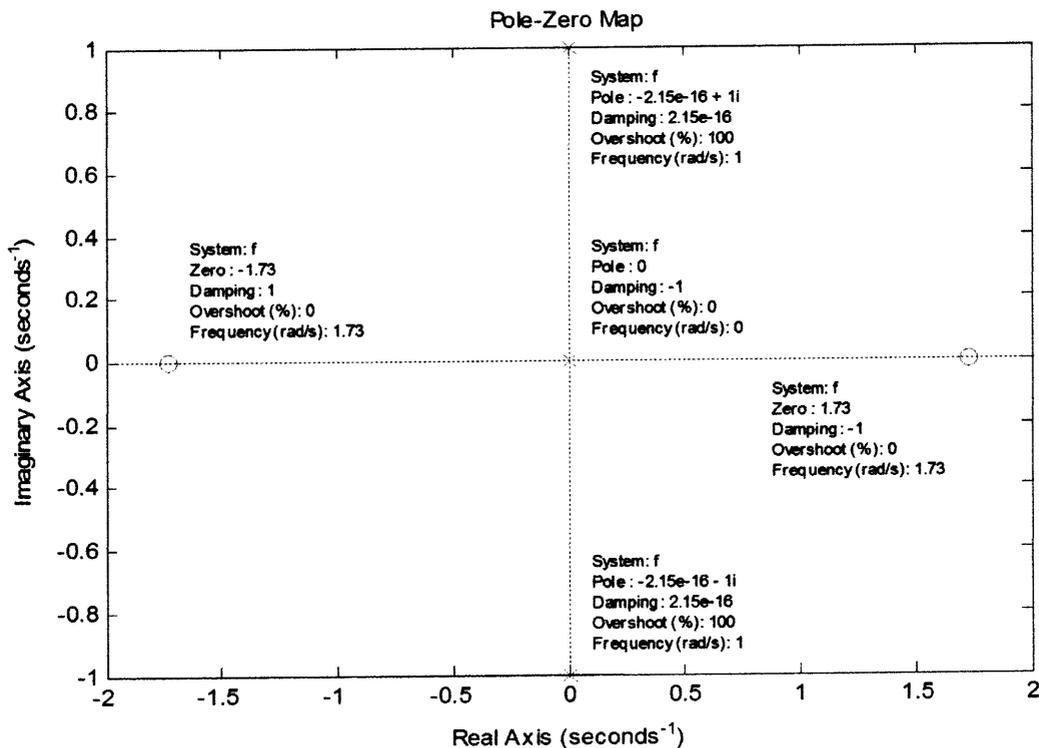


Figure III.10 : les pôles et les zéro de téta

### I.2.2.2 Résultat de simulation

Les figures suivantes schématisent clairement le comportement du système, selon les paramètres suivants :

- Un horizon de prédiction  $N_p=10$
- Un horizon de contrôle  $N_c=2$ .
- Les conditions initiales du variable d'état  $x(0)=[0 \ 0 \ 0]^T$

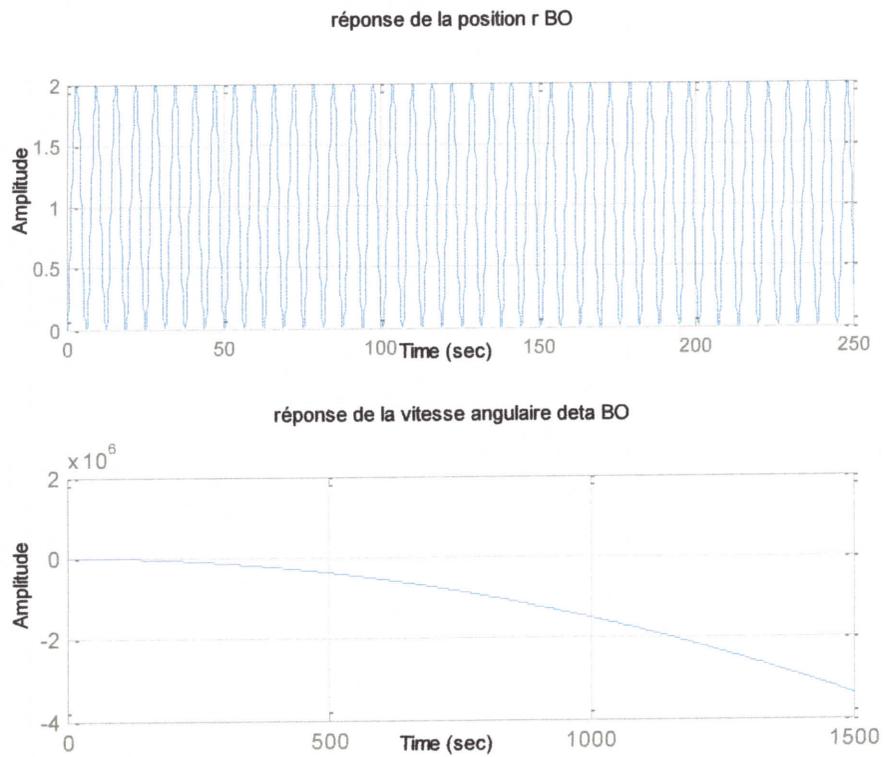


Figure (III.11) : Signaux de réponse en boucle ouvert.

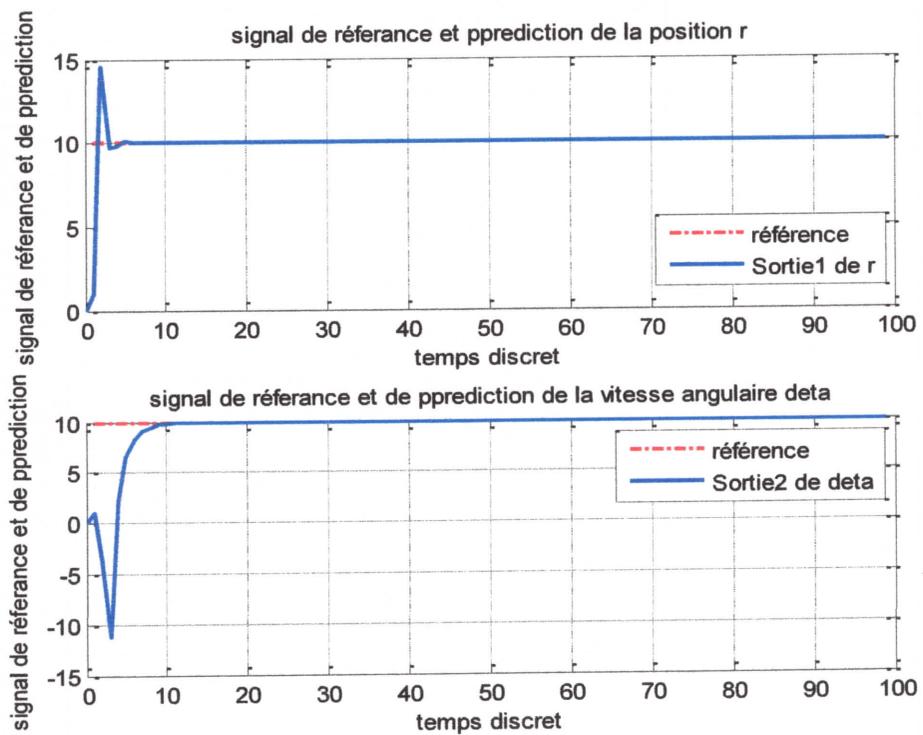


Figure (III.12) : Signaux de consigne et de prédiction

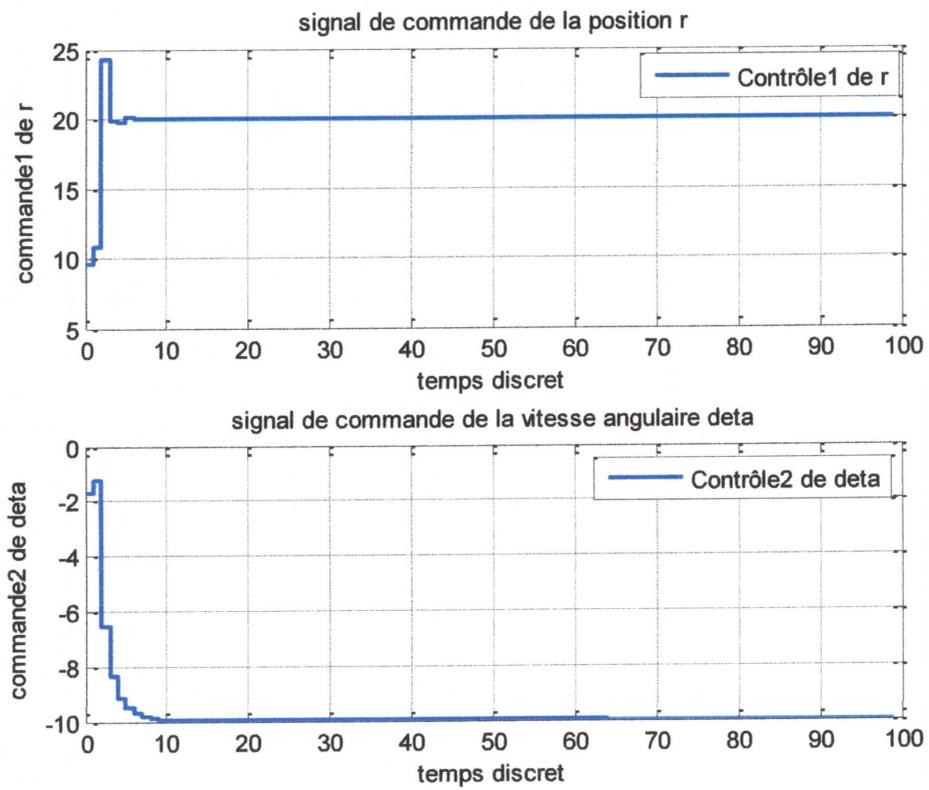


Figure (III.13) : Signaux des commandes appliquées

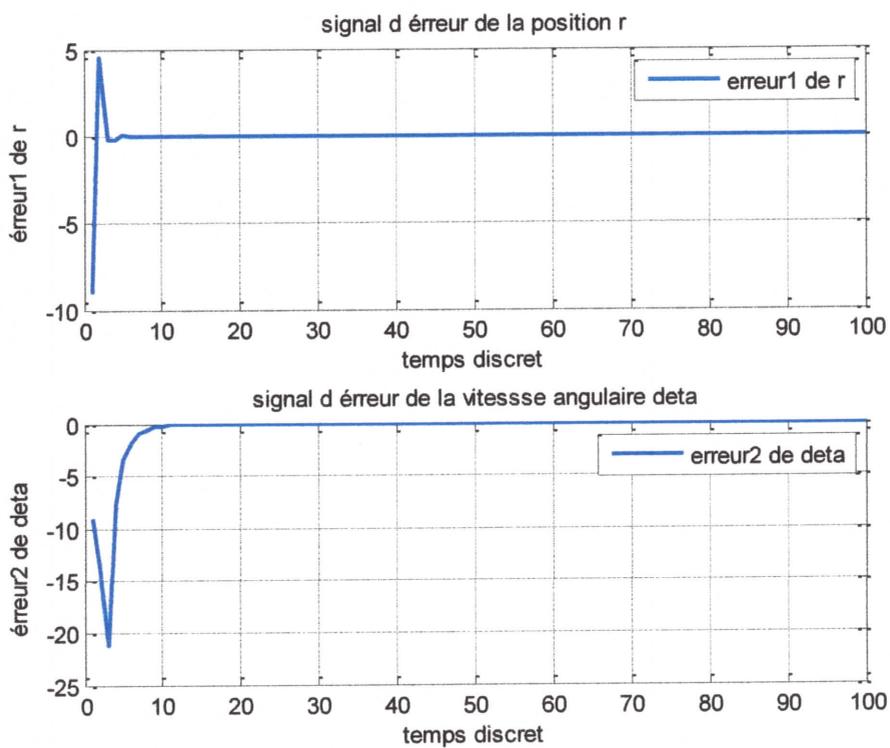


Figure (III.14) : Les signaux des erreurs

**Remarque :** l'erreur schématiser dans les figures ce dessus représente la déférence entre les signaux de référence et de prédiction comme suite :

$$e(t) = R_s - y_p \quad (\text{III.24})$$

### 12.3 Interprétation des résultats de simulation

Les figures au-dessus montrent les résultats de simulation qui illustrent les réponses des sorties des systèmes qui nous avons étudié (hélicoptère instable et mouvement d'un satellite) en boucle ouvert et fermé, les commande appliqué à chaque système, et les erreurs entre les signaux de référence et de prédiction.

On remarque que MPC (modèle prédictive contrôle) est donnée une commande minimale afin de le système suivre la trajectoire de référence et vérifie la stabilisation (la convergence vers les positions d'équilibre) dans un temps de réponse minimal. Ces résultats montrent bien la convergence des variables d'états vers les références désirées quelques soient la réponse du système en boucle ouvert.

De ce qui précède, nous pouvons conclure que La commande prédictive est une technique de commande avancée afin d'anticiper le futur comportement du procédé. Mais pour des systèmes plus complexes, une optimisation s'impose pour l'obtention d'un régulateur optimal.

## II. Commande prédictive floue sur un système chaotique

### II.1 Phase de conception

Dans cette section, nous présentons la conception basée sur un modèle prédictive floue pour stabiliser les systèmes chaotiques. Le point clé est de choisir des gains de commande prédictive floue qui garantissent que la trajectoire chaotique converge vers une cible souhaitée. Cette stratégie garantit que le système chaotique entre dans le domaine attrayant rapidement, réduire le temps de convergence et de conduire à une entrée de commande pratique.

#### II.1.1 Modélisation floue

Considérons le système chaotique donné par l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$\dot{X}(t) = f(X(t)) \quad (\text{III.25})$$

Pour ce système chaotique (III.25), la modélisation optimale de modèle flou T-S se compose d'un ensemble de règles SI-ALORS. La planète du modèle flou est donnée par :

$$\begin{aligned} R^i : \text{SI} \quad & z_1(t) \text{ est } M_{i1} \text{ et } \dots \text{ et } z_p(t) \text{ est } M_{ip} \\ \text{ALORS} \quad & \dot{X}(t) = A_i X(t) + b_i, \quad i = 1, \dots, r \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

Où  $R^i (i = 1, \dots, r)$  désigne la  $i^{\text{ème}}$  règle floue,  $r$  est le nombre de règles floues,  $z_1(t), \dots, z_p(t)$  sont les variables de prémisse qui se composent des états du système,  $M_{ij} (j = 1, \dots, p)$  sont des ensembles flous,  $A_i$  et  $b_i$  matrices de système avec des dimensions appropriées.

En utilisant la logique floue, la sortie finale du vecteur d'état par le modèle flou T-S du système chaotique est déduite de la manière suivante :

$$\dot{X}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i X(t) + b_i\} \quad (\text{III.27})$$

Où

$$z(t) = [z_1(t), \dots, z_p(t)],$$

et

$$h_i(z(t)) = \frac{w_i(z(t))}{\sum_{l=1}^r w_l(z(t))} \quad (\text{III.28})$$

avec

$$w_i(z(t)) = \prod_{j=1}^p M_{ij}(z_j(t)) \quad (\text{III.29})$$

Pour tout  $t$  dans laquelle  $M_{ij}(z_j(t))$  désigne degré d'appartenance de  $z_j(t)$  dans  $M_{ij}$ .  $h_i(z(t))$  sont considérés comme le poids normalisé des règles SI-ALORS, qui satisfait

$$\sum_{i=1}^r h_i(z(t)) = 1 \text{ et } 0 \leq h_i(z(t)) \leq 1 \text{ pour tout } t \in \mathfrak{R}^+.$$

### II.1.2 Introduction de la commande prédictive

L'objectif du contrôle prédictif est de stabiliser le modèle flou chaotique sur les différents points d'équilibre instable. Après l'introduction de la commande  $u(k_i)$  (III.13) sur Le modèle flou Chaotique on obtient la forme suivante : [21]

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \sum_{i=1}^r h_i(z(t)) \{A_i X(t) + b_i + Bu(k_i)\} \\ Y(t) &= CX(t) \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

### II.2 Phase de simulation

Dans cette section, nous allons donner des résultats de simulations pour le contrôle des systèmes chaotiques à base de modèle prédictive flou. Les mêmes procédures sont appliquées aux systèmes de Lorenz.

Le système de Lorenz est donné par les équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 &= (r - x_3)x_1 - x_2 \\ \dot{x}_3 &= x_1x_2 - bx_3 \end{aligned} \quad (\text{III.30})$$

Où les paramètres  $a, b$  et  $r$  ont les valeurs  $a = 10, b = 8/3, r = 28, d = 30$ , qui correspondent à un comportement chaotique.

Le système de Lorenz est représenté exactement par modèle flou TS avec les deux règles floues SI-ALORS suivantes

$$\begin{aligned} R^1: \text{ SI } x_1(t) \text{ est } M_1 \text{ ALORS } \dot{X}(t) &= A_1 X(t) + b_1 \\ R^2: \text{ SI } x_2(t) \text{ est } M_2 \text{ ALORS } \dot{X}(t) &= A_2 X(t) + b_2 \end{aligned} \quad (\text{III.31})$$

Où  $x_1$  est la variable de principe avec  $x_1 \in [-d, d]$  et  $d > 0$ .

$$A_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & -d \\ 0 & d & -b \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ r & -1 & d \\ 0 & -d & -b \end{bmatrix}, \quad b_1 = b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_1 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{x_1}{d} \right), \quad M_2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{x_1}{d} \right), \quad d = 30.$$

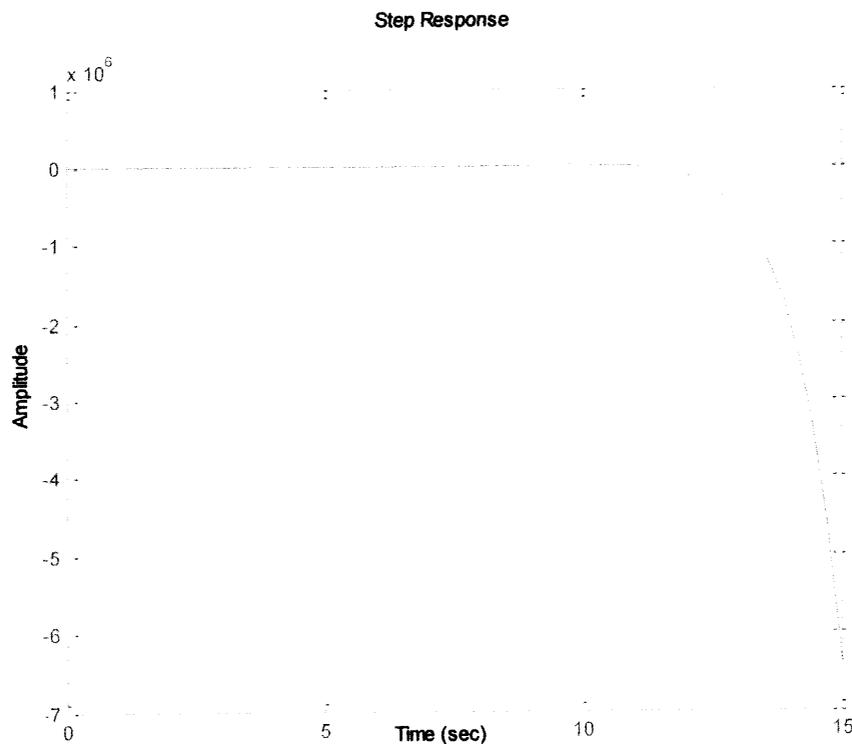
La sortie finale du modèle flou TS Lorenz est déduite comme suit :

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= \sum_{i=1}^2 M_i(x_1) \{A_i X(t) + Bu(k_i)\} \\ Y(t) &= CX(t) \end{aligned} \tag{III.32}$$

Avec  $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $C = [1 \ 1 \ 1]$ .

### II.2.1. Résultat de simulation

La figure suivant représente la réponse indicielle du système en boucle ouvert (son optimisation et son commande).



**Figure (III.15).**Signal de réponse indicielle du système en boucle ouvert

Les figures (III.16) et (III.17) représentent l'évolution temporelle et l'espace de phase des variables d'état respectivement de modèle flou TS du système de Lorenz.

La figure (III.18) illustre le signal de la sortie sans l'application de la commande.

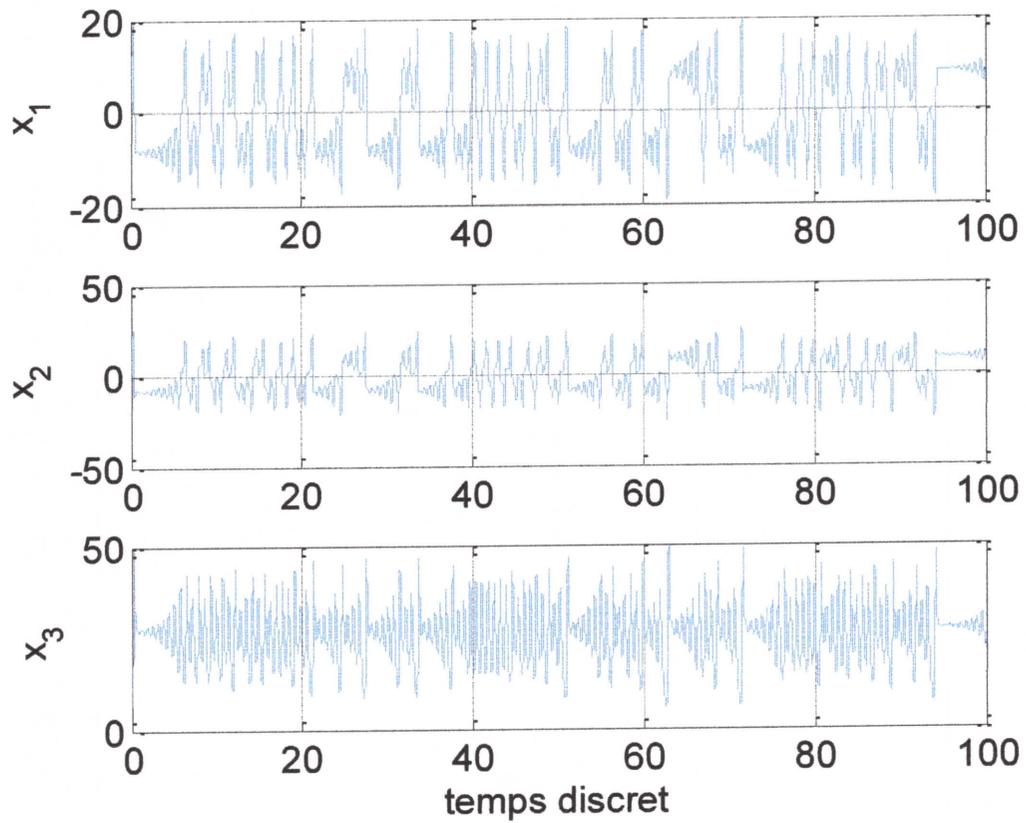


Figure (III.16). L'évolution temporelle des variables d'état.

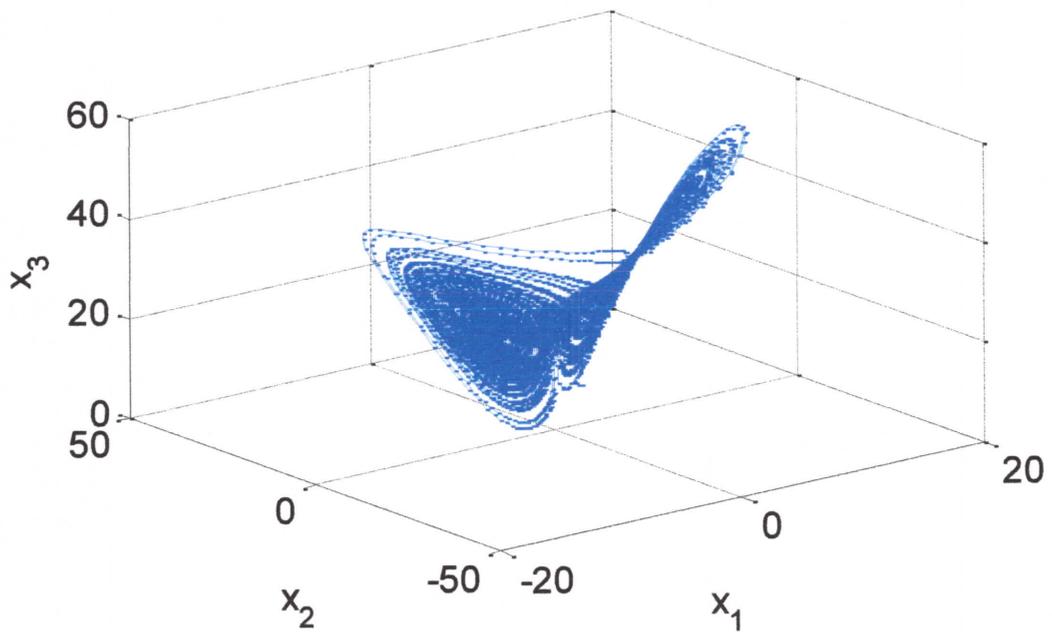


Figure (III.17). L'espace de phase.

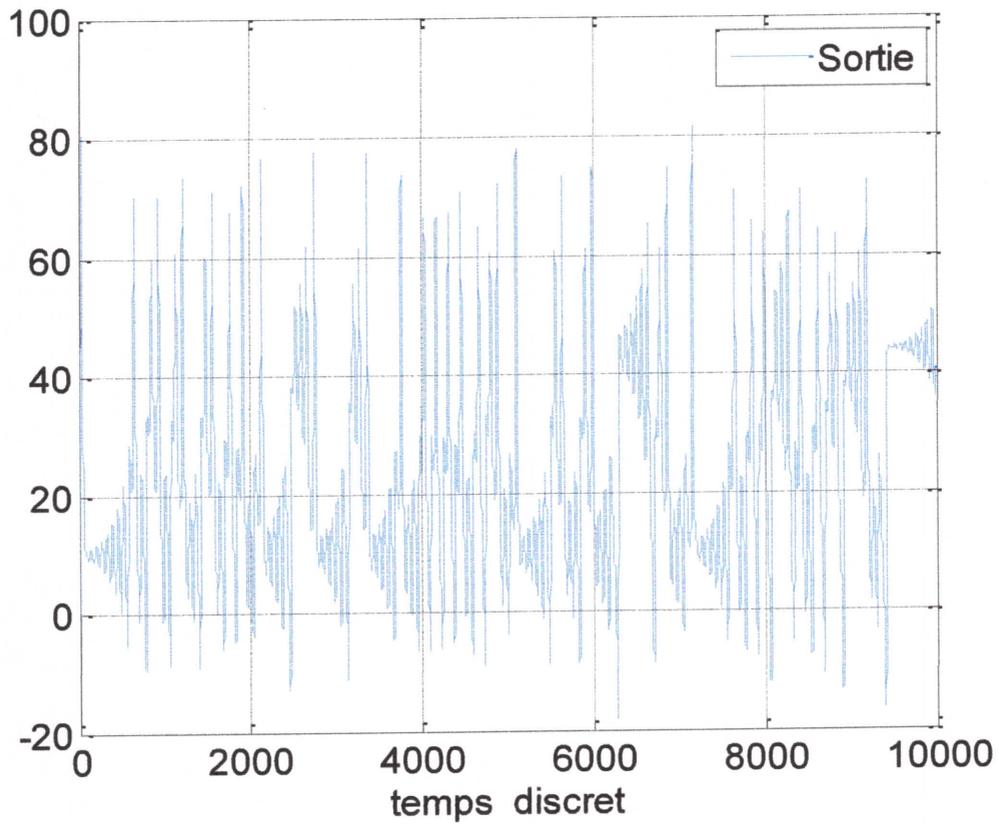


Figure (III.18). Signal de la sortie finale.

Les figures suivantes schématisent clairement le comportement du système chaotique Lorenz, après l'application de la commande prédictive sur le modèle flou TS, pour les conditions initiales  $X(0) = (3, 2, 7)^T$ , l'horizon de prédiction  $N_P=5$ , et l'horizon de commande  $N_C=1$ .

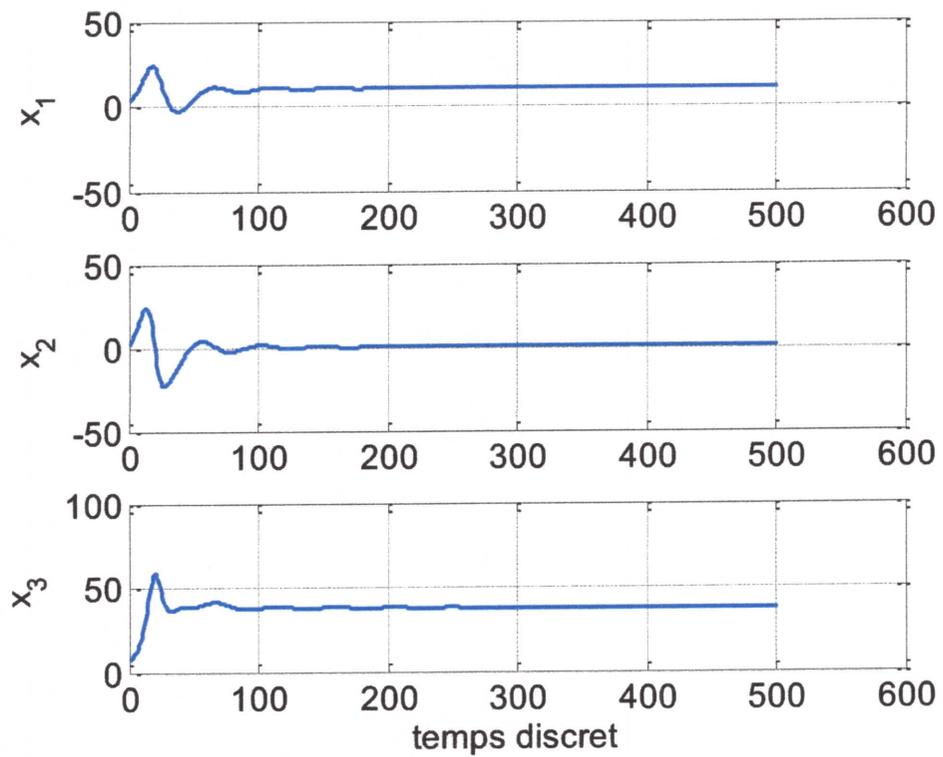


Figure (III.19). L'évolution temporelle des variables d'état.

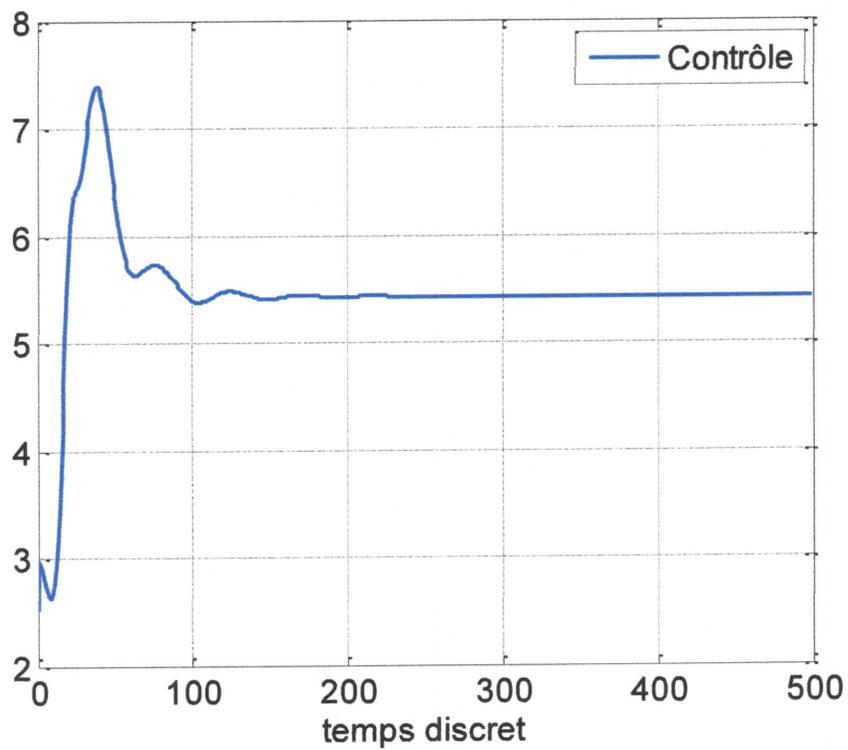


Figure (III.20). Signal de commande

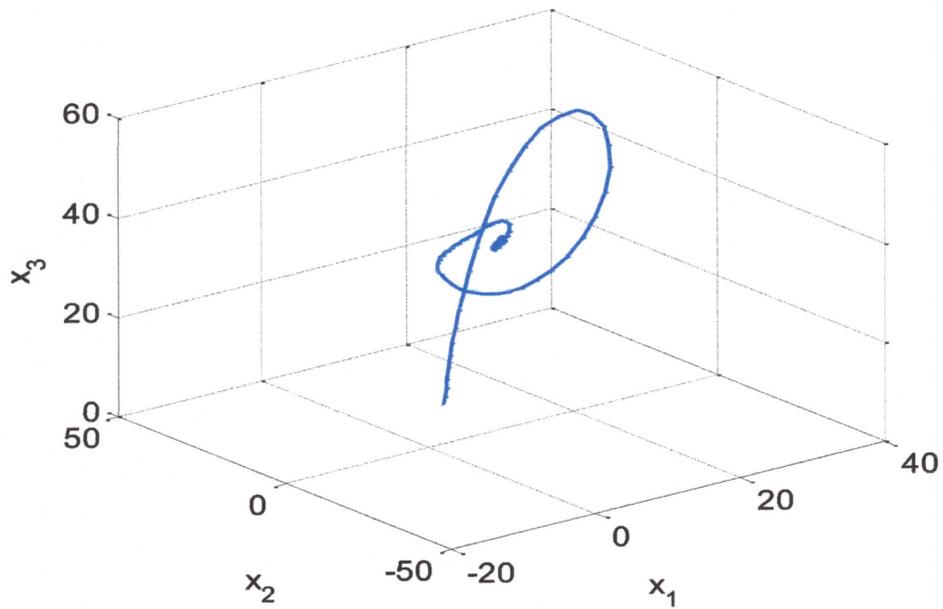


Figure (III.21). L'espace de phase.

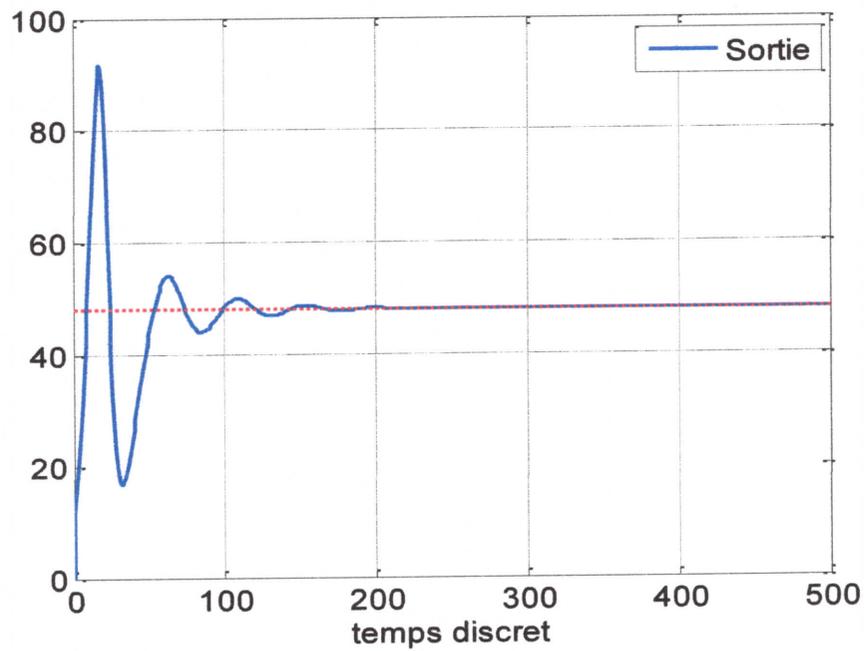


Figure (III.22). Signal de la sortie finale par MPCF.

La sortie du système par l'application de la commande prédictive seulement est donnée par la figure suivante :

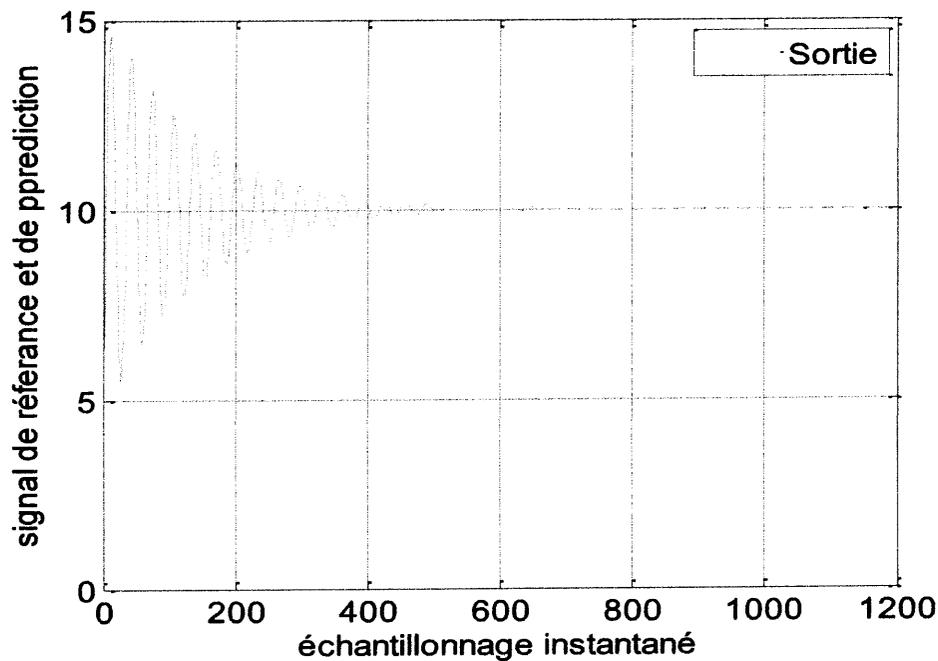


Figure (III.23). Signal de la sortie du système par MPC

## II.2.2 Interprétation des résultats de simulation

Les figures au-dessus montrent les résultats de simulation qui illustrent la stabilisation du modèle flou Lorenz T-S sur les différents points d'équilibre à l'aide de commande prédictive floue. On remarque que le modèle flou T-S de Lorenz est asymptotiquement stabilisé au point d'équilibre souhaité par l'application du signal de commande MPCF qui est représenté sur la figure (III.17). En plus, cette commande donne un meilleur résultat par rapport à la commande MPC seule, comme il est montré sur les figures (III.19) et (III.20).

## Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté en premier lieu les bases théoriques pour la conception de la commande prédictive. Ensuite, on a procédé à leurs applications sur un hélicoptère instable et pour le contrôle d'un satellite. Enfin, l'insertion d'un modèle flou sur un système chaotique et les applications de MPC sont aussi présentées.

Les résultats de simulation obtenus montrent que la commande MPCF donne un meilleur résultat par rapport à la commande MPC seule.