

Chapitre 2

Les outils morphologiques

Sommaire

I. Introduction.....	28
II. Morphologie mathématique.....	29
a. Notions élémentaires.	30
1. Les images.	30
2. Les trames.....	32
3. La notion de connexité.	32
4. Morphologies binaire et numérique.	34
5. Propriétés de base des transformations morphologiques.....	35
6. Les éléments structurants.	36
b. Transformations morphologiques élémentaires.....	37
1. Erosion et dilatation.	37
2. Les filtres morphologiques.	39
3. Transformation chapeau haut de forme.....	43
4. Les squelettes.	43
5. Segmentation par la ligne de partage des eaux (LPE).....	45
III. Conclusion.	52

Résumé

Ce chapitre est dédié à une brève description des outils morphologiques utilisés dans ce mémoire. Dans la première partie, des notions de base sont présentées. Dans la deuxième partie, les opérateurs morphologiques utilisés dans ce mémoire sont définis et décrits.

I. Introduction.

Ce chapitre décrit brièvement les techniques de traitement d'images et de morphologie mathématique utilisées au cours du processus d'identification des individus à travers leurs images rétinienne. En majeure partie, ces opérateurs interviennent lors de l'amélioration des images acquises et l'extraction des caractéristiques en vue d'établir une signature biométrique. Il se contentera de présenter seulement les outils nécessaires à notre travail.

L'analyse d'images désigne une discipline des mathématiques appliquées qui étudie les images numériques et leurs transformations, dans le but d'améliorer leurs qualités ou d'en extraire de l'information.

Dans le contexte de la vision artificielle, l'analyse d'images se place après les étapes d'acquisition et de numérisation, assurant les transformations d'images et la partie de calcul permettant d'aller vers une interprétation des images traitées. Cette phase d'interprétation est d'ailleurs de plus en plus intégrée dans l'analyse d'images, en faisant appel, notamment, à l'intelligence artificielle pour manipuler des connaissances, principalement sur les informations dont on dispose à propos de ce que représentent les images traitées (connaissance du domaine).

La compréhension de l'analyse d'images commence par la compréhension de ce qu'est une image. Le mode et les conditions d'acquisition et de numérisation des images traitées conditionnent largement les opérations qu'il faudra réaliser pour extraire de l'information. En effet, de nombreux paramètres entrent en compte, les principaux étant :

- La résolution d'acquisition et le mode de codage utilisé lors de la numérisation, qui déterminent le degré de précision des éventuelles mesures de dimensions.
- Les réglages optiques utilisés, (dont la mise au point) qui déterminent par exemple la netteté de l'image.
- Les conditions d'éclairage, qui déterminent une partie de la variabilité des images traitées.
- Le bruit de la chaîne de transmission d'image.

Quelques exemples types d'informations qu'il est possible d'obtenir d'une image numérique:

- La luminance moyenne.
- Le contraste moyen.
- La couleur prédominante.
- Le taux d'acuité moyen (précis ou flou).
- Le taux d'uniformité des couleurs.
- La présence ou l'absence de certains objets.

L'analyse d'image est une science appliquée, développée pour résoudre des problèmes de vision. A l'intérieur des domaines privilégiés de l'analyse d'image, la morphologie

mathématique a pris une part tout à fait originale, grâce à son approche aussi bien pragmatique que théoriquement bien fondée. C'est sans doute grâce à la symbiose entre une rigueur mathématique féconde et une volonté d'appliquer ses principes à des vrais problèmes, que la morphologie mathématique a connu le succès qu'elle mérite, auprès, en particulier, des industriels.

L'analyse d'image a pour objectif la description aussi complète que possible d'une image, mais celle-ci est constituée d'objets. Pour extraire des informations qualitatives, il faut faire appel aux outils de la morphologie mathématique qui permettent de déterminer des paramètres caractéristiques de l'image. Une image est très riche en informations et il faut pouvoir sélectionner les plus judicieuses.

Plusieurs ouvrages de la littérature présentent des définitions détaillées de ces outils. Nous allons nous contenter de reporter quelques brèves définitions des notions de base et des opérateurs morphologiques utilisés dans notre mémoire. Nous avons croisé ces définitions, essentiellement, dans [29], [30], [64], [65] et d'autres travaux que nous citerons au fur et à mesure du développement de ce chapitre.

II. Morphologie mathématique.

La morphologie mathématique (MM) correspond à une technique non linéaire de traitement du signal née dans les années 60 des travaux de G. MATHERON et J. SERRA. Elle correspond initialement à une continuation des travaux de recherche sur la théorie des ensembles de H. HADWIGER [66, 67] et de H. MINKOWSKY [68, 69]. La plus grande partie de cette théorie a été développée au Centre de Morphologie Mathématique (CMM) de l'Ecole des Mines de Paris.

Depuis lors, la morphologie mathématique a pris une importance considérable, si l'on en juge par les conférences, articles, livres qui la présentent, ainsi que par le nombre croissant de matériels spécialisés, de programmes d'application et de réalisations industrielles qui lui font appel et ceci dans tous les domaines où l'analyse d'image est aujourd'hui utilisée.

La morphologie mathématique offre un grand nombre d'outils très puissants de traitement et d'analyse d'images que l'on retrouve sous différentes rubriques dans certains logiciels d'analyse d'images et même de retouches d'images. Le but est d'étudier des objets en fonction de leur forme, de leur taille, des relations avec leur voisinage (en particulier topologique), de leur texture et de leurs niveaux de gris ou de leur couleur. Par les transformations qu'elle propose, elle se situe à différents niveaux du traitement d'image (filtrage, segmentation, mesure, analyse de texture) et définit ainsi des outils pour la reconnaissance de forme.

Cette section n'est qu'une présentation sommaire de certaines notions de la morphologie mathématique qu'il nous paraît utile de rappeler dans ce mémoire. Les lecteurs qui

désireront approfondir certains points pourront, notamment, se reporter aux ouvrages de référence en ce domaine : les deux livres de J. SERRA [70, 71], ceux de G. MATHERON [72, 73] et le livre de COSTER ET CHERMANT [74].

a. Notions élémentaires.

Les transformations de la morphologie mathématique agissent sur des ensembles en morphologie binaire et sur des fonctions en morphologie numérique, le résultat d'une transformation étant de même nature que l'objet sur lequel elle s'applique (un ensemble est transformé en un ensemble, une fonction en une fonction). La morphologie binaire est basée sur les opérations booléennes de base sur les ensembles : l'union \cup et l'intersection \cap . Dans le cas numérique, les opérations de base sont le supremum et l'infimum.

1. Les images.

Dans ce mémoire, nous travaillons sur deux types d'images : Des images binaires et des images à teintes de gris. Nous ne travaillons que sur des images discrètes à deux dimensions, c'est-à-dire des images qui sont définies sur un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 .

Souvent, une image binaire est définie comme un cas spécial d'une image à teintes de gris (en effet, en partant de la Définition II.2 ci-dessous, les images binaires peuvent être définies comme des images à teintes de gris avec $T = \{0,1\}$). En Morphologie Mathématique, nous faisons l'inverse : les images à teintes de gris sont considérées comme des extensions des images binaires. Nous commençons donc par la définition d'une image binaire :

DÉFINITION II.1

Soit E un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 . Tout sous-ensemble $A \subset E$ est appelé image binaire.

Une image à teintes de gris peut être définie de la manière suivante :

DÉFINITION II.2

Soit E un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 et $T = \{t_{min}, \dots, t_{max}\}$ un ensemble de nombres réels, dits valeurs de gris. Une image à teintes de gris f est une application $f : E \rightarrow T$.

L'opérateur qui permet de passer d'une image à teintes de gris à une image binaire est le seuillage :

$$T_{[\alpha_1, \alpha_2]}(f) = \{x \in E \mid \alpha_1 \leq f(x) \leq \alpha_2\} \quad (II.1)$$

$X_t^+(f)$ est appelé la section de f au niveau t (voir la Figure II.1) :

$$X_t^+(f) = T_{[t, t_{max}]}(f) = \{x \in E \mid f(x) \geq t\} \quad (II.2)$$

et $X_t^-(f)$ la section du fond. Souvent, X_t^- est appelé « lac » ; cette appellation s'appuie sur l'interprétation de l'image à teintes de gris comme une surface topographique (voir aussi la Figure II.1).

$$X_t^-(f) = T_{[t_{min},t]}(f) = \{x \in E \mid t < f(x)\} \tag{II.3}$$

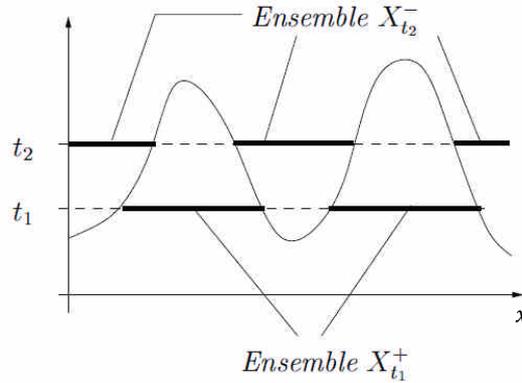


Figure II.1 - La section d'une fonction [30].

La famille d'ensembles $\{X_t^+\}$ est décroissante proportionnellement à t , la famille $\{X_t^-\}$ croissante proportionnellement à t .

Une image à teintes de gris peut être vue comme un empilement d'ensembles décroissants, c'est-à-dire comme un empilement de sections :

$$f(x) = \sup\{t \mid x \in X_t^+(f)\} \tag{II.4}$$

$f(x)$ est le supremum de toutes les valeurs t (Figure II.2), pour lesquelles la section de f au niveau correspondant contient x . Cette interprétation des images à teintes de gris permet le passage d'une famille d'images binaires à une image à teintes de gris. Etant donné un opérateur binaire, on obtient l'opérateur correspondant pour des images à teintes de gris f en l'appliquant à toutes les sections de f et en empilant le résultat. Dans ce mémoire, nous utilisons des lettres majuscules pour désigner des sous-ensembles de \mathbb{Z}^2 (images binaires) et des minuscules pour des fonctions numériques (images à teintes de gris).

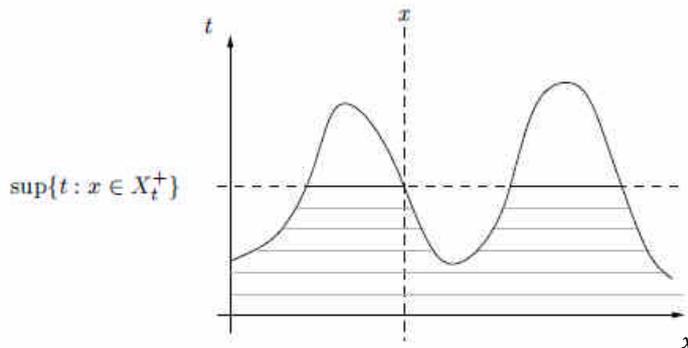


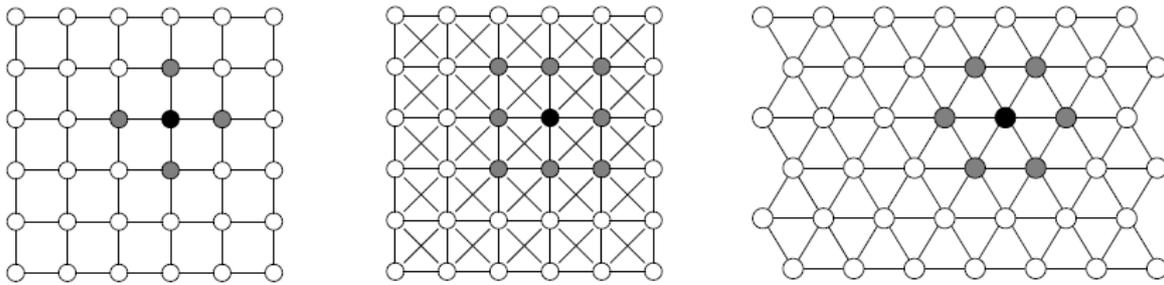
Figure II.2 - Une fonction numérique comme empilement d'ensembles [30].

2. Les trames

Beaucoup d'opérations en traitement d'images prennent en considération non-seulement un pixel isolé, mais le « voisinage » du pixel. Le voisinage peut être représenté par un graphe $\mathcal{G} \subset E \times E$ qui est l'ensemble de tous les couples de voisins :

$$\forall x, y \in E, x \text{ voisin de } y \Leftrightarrow (x, y) \in \mathcal{G} \tag{II.5}$$

Chaque graphe \mathcal{G} engendre une trame, c'est-à-dire un schéma d'organisation des pixels dans E . Dans la Figure II.3, nous montrons les trames les plus fréquemment utilisées en morphologie mathématique : la trame carrée avec 4 voisins, la trame carrée avec 8 voisins et la trame hexagonale avec 6 voisins. Les trames carrées correspondent à la représentation physique d'une image (sur un écran par exemple, la trame est carrée et non hexagonale) ; elles sont les plus utilisées en traitement d'images. Néanmoins, la trame hexagonale a des avantages considérables au niveau de la topologie et de l'isotopie.



(a) Trame en 4-connectivité

(b) Trame en 8-connectivité

(c) Trame en 6-connectivité

Figure II.3 - Les trames fréquemment utilisées [30].

L'ensemble de voisins d'un point x est dit voisinage $N_{\mathcal{G}}$ d'un point x selon le graphe \mathcal{G} . Un point n'est pas son propre voisin : $x \notin N_{\mathcal{G}}(x)$

3. La notion de connexité.

La notion de connexité a été formalisée pour l'analyse d'image par G. MATHERON et J. SERRA [70, 71]. Elle permet notamment d'introduire la notion d'ouverture connexe ponctuelle (C_x):

DÉFINITION II.3 (OUVERTURE CONNEXE PONCTUELLE)

Une ouverture C_x est appelée ouverture connexe ponctuelle si elle vérifie les trois axiomes suivants:

$$\forall x \in E, C_x(\{x\}) = \{x\} \tag{II.6}$$

$$\forall A \in E, \forall x \in E, C_x(A) \cap C_y(A) \neq \emptyset \Rightarrow C_x(A) = C_y(A) \tag{II.7}$$

$$\forall A \in E, \forall x \in E, C_x(A) \neq \emptyset \Rightarrow x \in A \tag{II.8}$$

Autrement dit, l'ensemble $C_x(A)$ est soit la composante connexe A si x appartient à A , soit l'ensemble vide si x n'appartient pas à A .

En discret, on travaille sur une grille ou trame permettant de définir des relations de voisinage entre les pixels (points de la trame) d'une image. Ce graphe (noté G) n'est qu'un ensemble de couples de pixels (soit un sous-ensemble de $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$), c'est-à-dire :

$$\forall p, q \in \mathbb{Z}^2, p \text{ est voisin de } q \Leftrightarrow (p, q) \in G \quad (\text{II.9})$$

On suppose toujours qu'un pixel n'est pas son propre voisin et que la relation « est voisin de » est transitive et symétrique. Le voisinage d'un pixel p au sens de la trame est :

$$\forall p \in \mathbb{Z}^2, N_G(p) \Leftrightarrow \{q \in \mathbb{Z}^2, (p, q) \in G\} \quad (\text{II.10})$$

DÉFINITION II.4 (CHEMIN)

Un chemin C de longueur $l(C) = n$ et d'extrémités p et q dans la trame G est un $(n+1)$ -uplet $(p_0, p_1, p_2, \dots, p_n)$ de pixels tels que :

$$p_0 = p \quad (\text{II.11})$$

$$p_n = q \quad (\text{II.12})$$

$$\forall i \in [1, n], p_i \in N_G(p_{i-1}) \quad (\text{II.13})$$

La notion de connexité est introduite à partir de la notion de chemin géodésique :

DÉFINITION II.5 (CONNEXITÉ)

Soit A un ensemble de pixels inclus dans \mathbb{Z}^2 et x un pixel de A . La composante connexe de A qui contient x ($C_x(A)$) est l'union des chemins d'origine x inclus dans A .

Nous verrons que le terme chemin géodésique vient du fait que le chemin est astreint à être entièrement inclus dans A .

DÉFINITION II.6 (DISTANCE GÉODÉSIQUE)

La distance géodésique $d_X(y, x)$ d'un point x à un point y à l'intérieur d'un ensemble X est la longueur du plus court chemin de x à y restant à l'intérieur de X :

$$d_X(y, x) = \inf \{l(C_{x,y}), C_{x,y} \in X\} \quad (\text{II.14})$$

Cette distance vaut, par définition, $+\infty$ s'il n'existe aucun chemin entre x et y à l'intérieur de X , c'est-à-dire si $x \notin X$ ou si $y \notin X$.

La distance géodésique d'un point x à un ensemble X notée $D(x, X)$ vaut alors :

$$D(x, X) = \inf \{ d_X(x, y), y \in X \} = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in X \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad (II.15)$$

La notion de distance permet d'introduire celle de *fonction distance*, qui à chaque point x d'un ensemble X fait correspondre la distance de ce point au plus proche point du complémentaire de X :

$$f_d(X)(x) = \inf \{ d_X(y, x), y \in X^c \} \quad (II.16)$$

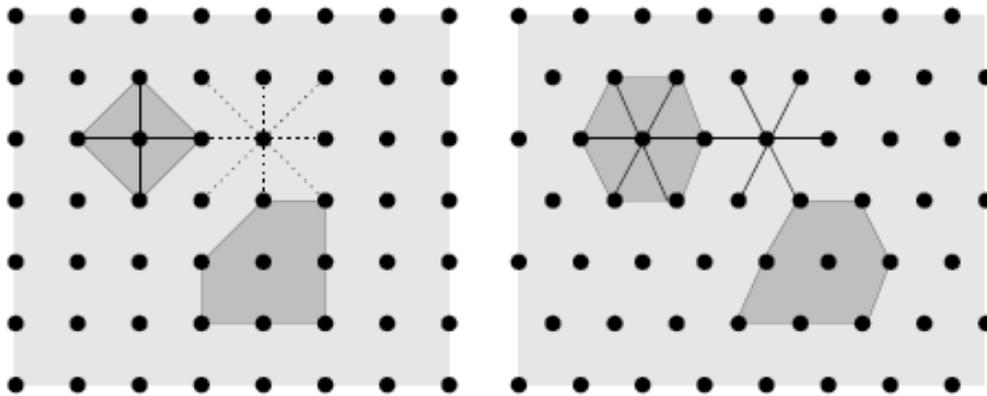
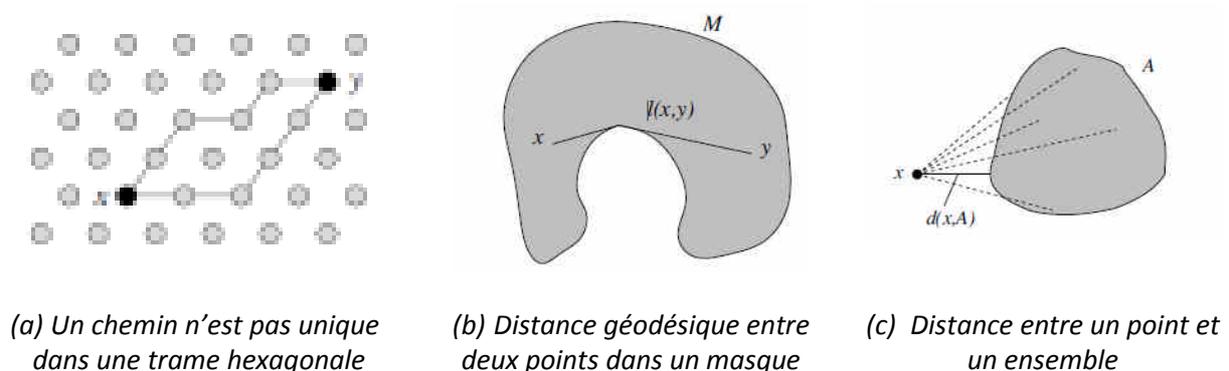


Figure II.4 - Trames carrée et hexagonale [64].



(a) Un chemin n'est pas unique dans une trame hexagonale

(b) Distance géodésique entre deux points dans un masque

(c) Distance entre un point et un ensemble

Figure II.5 - Notion du chemin et de la fonction distance [30].

Définir une distance et une connexité sur la trame revient donc à définir des relations de voisinage entre les pixels de cette trame. Ainsi, on distingue plusieurs types de connexités : hexagonale (6 voisins sur la trame), carrée (4 ou 8 voisins sur la trame). La trame hexagonale est certainement la plus utilisée par les morphologues car elle possède de bonnes propriétés de symétrie (voir Figure II.4): même connexité définie pour la forme et pour le fond (ce qui n'est pas le cas des trames carrées).

4. Morphologies binaire et numérique.

Dans tout ce qui suit ψ désignera une transformation alternativement binaire ou numérique sans qu'il soit fait de distinction. Le contexte permettra alors de déterminer si

l'on est dans le cas binaire ou dans le cas numérique (au cas où une ambiguïté subsisterait, nous préciserons de quel type de transformation il s'agit).

Morphologie binaire : Dans le cas binaire (images binaires), ψ agit sur des éléments de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$, c'est-à-dire des ensembles de \mathbb{R}^2 ($\psi: \mathcal{P}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$). Dans ce cas, la relation d'ordre est l'inclusion.

Morphologie numérique : Dans le cas numérique (images à teintes de gris), ψ agit sur des fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} . \mathcal{F} désignera l'ensemble de ces fonctions ($\mathcal{F} = \{f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}\}$). $\psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Dans ce cas, la relation d'ordre est la suivante :

$$\forall f, g \in \mathcal{F}, f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^2, f(x) \leq g(x) \quad (\text{II.17})$$

En pratique, les transformations s'appliquent dans un domaine fini du plan discret \mathbb{Z}^2 , le domaine le plus généralement rectangulaire : les images correspondent alors à des tableaux de données. Une image numérique sera à valeurs dans \mathbb{Z} . Une image binaire peut alors être considérée comme une image numérique à valeurs binaires (prenant exclusivement les valeurs 0 ou 1 par exemple : 0 pour le fond et 1 pour la forme).

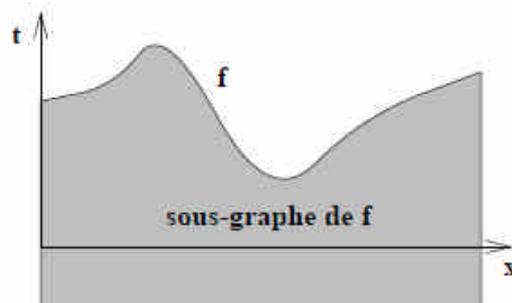


Figure II.6 - Sous-graphe d'une image numérique [64].

On définit le sous-graphe SG d'une image à niveaux de gris comme la partie de l'espace à trois dimensions située en dessous du graphe de l'image (voir Figure II.6). Plus précisément :

$$SG(f) = \{(x, t) \in \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}, t \leq f(x)\} \quad (\text{II.18})$$

5. Propriétés de base des transformations morphologiques.

Les transformations morphologiques sont dotées de propriétés importantes dont nous rappelons, dès à présent, les définitions. Ces propriétés de base des opérateurs morphologiques sont celles relatives aux opérations sur les ensembles.

Extensivité : ψ sera dite extensive si et seulement si son résultat est plus grand que l'ensemble ou la fonction de départ :

$$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), X \subseteq \psi(X) \quad \text{ou} \quad \forall f \in \mathcal{F}, f \leq \psi(f) \quad (\text{II.19})$$

Dans le cas contraire ($X \supseteq \psi(X)$ ou bien $f \geq \psi(f)$), ψ sera dite *anti-extensive*.

Un opérateur anti-extensif agit de manière privilégiée sur les grains des images binaires (les structures claires des images numériques). Au contraire, un opérateur extensif traite les pores des images binaires (les structures sombres des images numériques).

Croissance: ψ sera dite croissante si et seulement si elle préserve l'ordre :

$$\forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), X \subseteq Y \Rightarrow \psi(X) \subseteq \psi(Y) \text{ ou } \forall f, g \in \mathcal{F}, f \leq g \Rightarrow \psi(f) \leq \psi(g) \quad (\text{II.20})$$

Dans le cas contraire ($X \subseteq Y \Rightarrow \psi(X) \supseteq \psi(Y)$ ou bien $f \leq g \Rightarrow \psi(f) \geq \psi(g)$), ψ sera dite *décroissante*.

Idempotence : Une transformation est dite idempotente si, appliquer plusieurs fois ψ revient à appliquer ψ une seule fois :

$$\psi \circ \psi = \psi \quad (\text{II.21})$$

Dualité : Enfin, deux transformations ψ_1 et ψ_2 sont duales si et seulement si appliquer l'une revient à appliquer l'autre sur le complémentaire de l'ensemble puis à compléter le résultat final :

$$\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \psi_1(X) = (\psi_2(X^c))^c \text{ ou } \forall f \in \mathcal{F}, \psi_1(f) = -(\psi_2(-f)) \quad (\text{II.22})$$

Homotopie : Une dernière propriété dont il est utile de parler est la conservation (ou la non conservation) de l'homotopie. D'une manière simple, on peut dire que deux ensembles (ou fonctions) sont homotopes si on peut passer de l'un(e) à l'autre par une transformation continue. Une transformation qui préserve l'homotopie ne crée ni détruit de particule.

6. Les éléments structurants.

En morphologie mathématique, et comme définie dans [30], la démarche habituelle est d'extraire les structures essentielles d'une image en faisant des comparaisons ensemblistes avec les translations d'un petit ensemble donné ayant un centre défini. Ce petit ensemble est appelé élément structurant (ES). La forme et la taille de cet élément structurant sont choisies en fonction des éléments d'intérêt dans l'image. Pour des images binaires, l'élément structurant est soit un sous-ensemble de E (ES plan), soit une petite image à teintes de gris (ES non-plan). Dans ce mémoire, seuls les éléments structurants plats sont utilisés.

La forme des éléments structurants peut être choisie librement mais quelques propriétés mathématiques des transformations morphologiques dépendent du choix de l'élément structurant (par exemple si l'élément structurant contient le centre ou pas). Dans la Figure II.7 les éléments structurants élémentaires pour les différentes trames sont montrés.

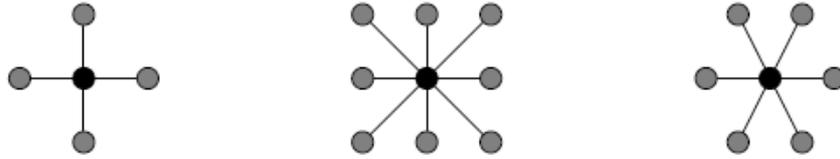


Figure II.7 - Des éléments structurants de base (Les centres sont marqués en noir) [30].

b. Transformations morphologiques élémentaires.

1. Erosion et dilatation.

L'érosion et la dilatation sont les opérateurs de base de la morphologie mathématique. Elles sont à l'origine d'un très grand nombre de transformations plus élaborées (fonction distance, squelettisation...). Dans tout ce qui suit, nous nous contenterons d'évoquer ces opérateurs, leurs définitions et propriétés. Les lecteurs désireux de plus amples informations pourront se reporter aux ouvrages de référence en ce domaine [70, 71]. L'ensemble des notations utilisées ici (notations "standard") seront conservées par la suite.

DÉFINITION II.7

Considérons un ensemble X et un élément structurant B (ensemble donné dont on définit le centre, c'est-à-dire dont on repère un point particulier quelconque).

La **dilatation** de X par B (notée $\delta_B(X)$, ou dans quelques ouvrages $X \ominus B$) est l'union des points x de \mathbb{R}^2 tels que B_x (B translaté en x) intersecte X :

$$\delta_B(X) = \{x \in \mathbb{R}^2, B_x \cap X \neq \emptyset\} \tag{II.23}$$

L'**érosion** de X par B (notée $\epsilon_B(X)$, ou dans quelques ouvrages $X \oplus B$) est l'ensemble des points x de \mathbb{R}^2 tels que B soit entièrement inclus dans X lorsque B est centré en x .

$$\epsilon_B(X) = \{x \in \mathbb{R}^2, B_x \subset X\} \tag{II.24}$$

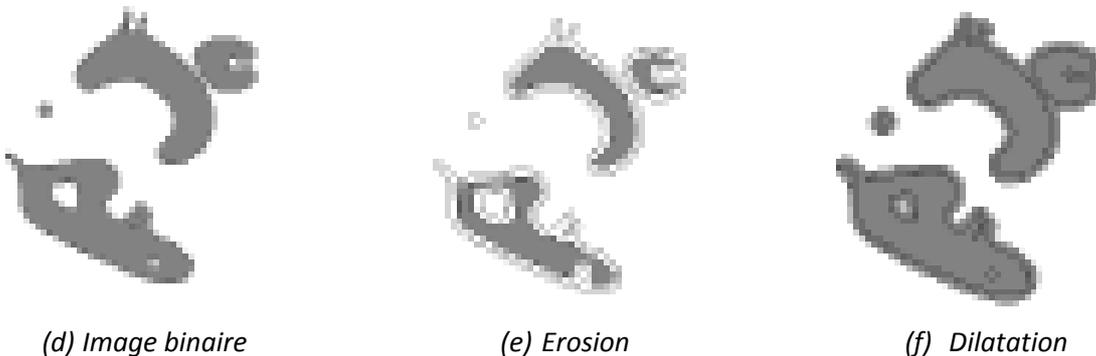


Figure II.8 - La dilatation et l'érosion de l'image binaire [30].

Dans le cas numérique, si B est un élément structurant plan, alors dilater une image f par B revient à donner à tout pixel x du domaine E (compact de \mathbb{R}^2) la valeur maximale de l'image f dans la fenêtre d'observation définie par B , lorsque B est centré en x :

$$\delta_B(f)(x) = \max \{x_k, k \in B\} \quad (\text{II.25})$$

Et de la même manière pour l'érosion, on a :

$$\epsilon_B(f)(x) = \min \{x_k, k \in B\} \quad (\text{II.26})$$

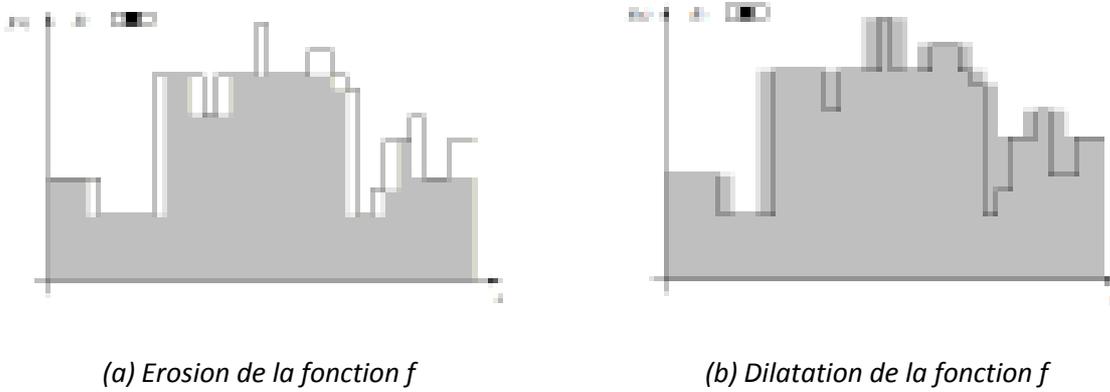


Figure II.9 - La dilatation et l'érosion d'une fonction [30].

Si B est non plan, alors l'érosion et la dilatation numériques doivent être définies par l'addition de MINKOWSKY [68, 69].

Il y a beaucoup à dire sur les propriétés de l'érosion et de la dilatation. Nous ne retenons ici que les principales :

- Erosion et dilatation sont des transformations croissantes
- Erosion et dilatation sont deux transformations duales
- Erosion et dilatation ne sont pas idempotentes
- Ces transformations sont irréversibles

i. Les gradients morphologiques.

A partir de la dilatation et de l'érosion morphologique, on définit les gradients morphologiques comme des résidus de ces transformations. Le gradient morphologique (symétrique) est défini comme le résidu de la dilatation et de l'érosion :

$$\text{grad}(f) = \delta_B(f) - \epsilon_B(f) \quad (\text{II.27})$$

Il est possible de définir le gradient morphologique à partir d'un couple d'éléments structurants quelconque. On définit ainsi le gradient par dilatation et le gradient par érosion en considérant une des deux transformations de taille nulle (c'est-à-dire égale à l'identité) :

$$\begin{aligned} \text{grad}^+(f) &= \delta_B(f) - f \\ \text{grad}^-(f) &= f - \epsilon_B(f) \\ \text{grad}(f) &= \text{grad}^+(f) + \text{grad}^-(f) \end{aligned} \quad (\text{II.28})$$

Ces gradients non symétriques sont également appelés gradients internes et externes.

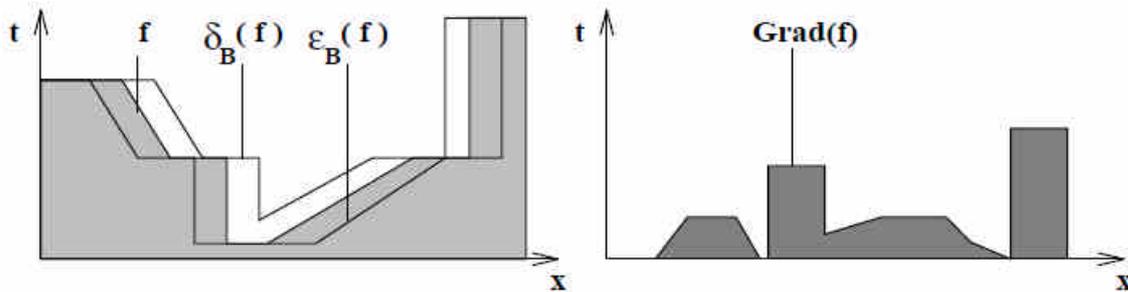


Figure II.10 - Gradient morphologique (symétrique) : dilaté-érodé [64].

Les gradients permettent d'extraire les zones de variation d'intensité. Les valeurs de crêtes correspondent à des zones de forte transition et coïncident généralement avec les contours des objets. Cette information est très utile pour les problèmes de segmentation d'image.

2. Les filtres morphologiques.

Une tâche très importante dans le traitement d'images est le filtrage. Filtrer une image est une opération irréversible : il s'agit d'enlever des éléments de l'image qui ne représentent pas d'intérêt dans un contexte particulier, tout en gardant idéalement l'information essentielle.

Les deux caractéristiques principales qui définissent un filtre morphologique sont :

- L'idempotence : filtrer une image peut être vu comme « passer au tamis » ; des éléments qui ne remplissent pas certains critères sont enlevés, les autres sont conservés. En appliquant cette opération une deuxième fois, le résultat ne doit pas changer.
- La croissance : la propriété de croissance est également liée au concept de « tamis » ; si des éléments avec une certaine taille ne passent pas le tamis, des éléments avec des tailles plus grandes ne le passent pas non plus.

i. Les ouvertures et les fermetures morphologiques.

Les filtres morphologiques les plus répandus sont les ouvertures et les fermetures morphologiques.

L'ouverture morphologique d'un ensemble A (notée $\gamma^B(A)$ ou $X \circ B$ dans quelques ouvrages) est l'ensemble de tous les éléments structurants traduits B_x qui rentrent entièrement dans A (et non pas l'ensemble des translations comme c'était le cas pour l'érosion).

$$\gamma^B(A) = \bigcup \{B_x \mid B_x \subseteq A\} \quad (\text{II.29})$$

Elle peut être écrite de la manière suivante :

$$\gamma^B(A) = \delta^{\check{B}} \varepsilon^B(A) \quad (II.30)$$

avec $B = \{b\}$ l'élément structurant et $\check{B} = \{-b\}$ sa transposée.

La fermeture morphologique (notée $\phi^B(A)$ ou $X \bullet B$ dans quelques ouvrages) se laisse définir en utilisant le principe de dualité (c'est-à-dire, l'ouverture est appliquée à l'image inversée et le résultat est inversé de nouveau) :

$$\phi^B(A) = \left[\bigcup \{B_x \mid B_x \subseteq A^c\} \right]^c \quad (II.31)$$

avec l'érosion et la dilatation :

$$\phi^B(A) = \varepsilon^{\check{B}} \delta^B(A) \quad (II.32)$$

Un exemple est montré dans la Figure II.11: Nous voyons que l'ouverture est un filtre anti-extensif, la fermeture un filtre extensif.

L'ouverture enlève les petites structures, dans lesquelles l'élément structurant ne passe pas. L'ensemble ouvert $\gamma^B(A)$ est le plus petit ensemble A' dont l'érosion est $\varepsilon^B(A') = \varepsilon^B(A)$. La fermeture enlève toutes les structures du fond de l'image dans lesquelles l'élément structurant ne passe pas ; un ensemble fermé $\phi^B(A)$ est le plus grand ensemble A' dont la dilatation est $\delta^B(A') = \delta^B(A)$.

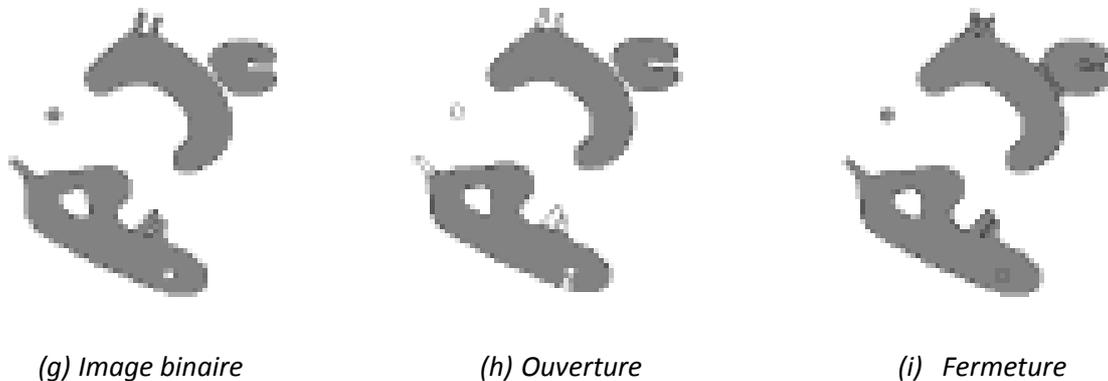


Figure II.11 - Ouverture et fermeture d'une image binaire [30]

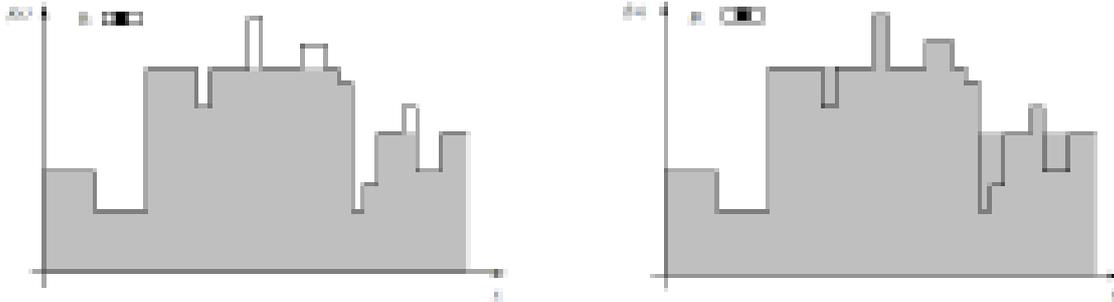
Comme la fermeture et l'ouverture sont croissantes, elles s'appliquent également à des images à teintes de gris en les appliquant à toutes les sections $X_t^+(f)$ de f et en compilant les résultats. Encore une fois, cette méthode est plutôt de la nature théorique, en pratique les ouvertures et fermetures sont calculées par les équations (II.30) et (II.32).

ii. Les ouvertures et les fermetures algébriques.

Toute transformation idempotente, croissante et anti-extensive est appelée ouverture (algébrique), et toute transformation idempotente, croissante et extensive est appelée

fermeture (algébrique). Les ouvertures/fermetures morphologiques sont des cas particuliers des ouvertures et fermetures algébriques.

Dans la présentation suivante de quelques ouvertures/fermetures algébriques très répandues, nous n'explicitons pas la définition de la fermeture à chaque fois, sachant qu'il s'agit là d'une transformation duale à l'ouverture qui s'écrit $\phi = [\gamma(\cdot^c)]^c$.

(a) Ouverture de la fonction f (b) Fermeture de la fonction f **Figure II.12 - Ouverture et fermeture d'une fonction [30].**

Les filtres géodésiques : Les filtres géodésiques sont parmi les plus puissants en morphologie mathématique. Ils permettent un filtrage d'une image qui enlève certains objets sans altérer les contours de ceux qui sont préservés. Un opérateur géodésique travaille sur deux images : l'une qui sert de « masque » et l'autre qui sert de « marqueur ».

La dilatation géodésique de taille 1 d'un ensemble X sous le masque Y est l'intersection de la dilatation de taille 1 de X avec le masque Y . La dilatation de taille n se définit par itération :

$$\delta_Y^{(n)}(X) = \delta_Y^{(1)} \delta_Y^{(n-1)}(X) \text{ avec } \delta_Y^{(1)}(X) = \delta^{(B)}(X) \cap Y \quad (\text{II.33})$$

L'érosion géodésique d'un ensemble X sur un masque Y se définit de manière analogue :

$$\varepsilon_Y^{(n)}(X) = \varepsilon_Y^{(1)} \varepsilon_Y^{(n-1)}(X) \text{ avec } \varepsilon_Y^{(1)}(X) = \varepsilon^{(B)}(X) \cup Y \quad (\text{II.34})$$

Pour les opérateurs appliqués à une fonction marqueur f respectivement sur/sous un masque g , il suffit de remplacer le \cup par un \vee et le \cap par un \wedge :

$$\begin{aligned} \delta_g^{(n)}(f) &= \delta_g^{(1)} \delta_g^{(n-1)}(f) \text{ avec } \delta_g^{(1)}(f) = \delta^{(B)}(f) \wedge g \\ \varepsilon_g^{(n)}(f) &= \varepsilon_g^{(1)} \varepsilon_g^{(n-1)}(f) \text{ avec } \varepsilon_g^{(1)}(f) = \varepsilon^{(B)}(f) \vee g \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

Erosion et dilatation géodésiques sont montrées dans la Figure II.13.

La reconstruction morphologique : par dilatation $R_g(f)$ (ou par érosion $R_g^*(f)$) est l'itération de la dilatation (érosion) géodésique jusqu'à l'idempotence (pour les ensembles c'est analogue) :

$$\begin{aligned}
 R_g(f) &= \delta_g^{(i)}(f) \text{ avec } \delta_g^{(i)}(f) = \delta_g^{(i+1)}(f) \\
 R_g^*(f) &= \varepsilon_g^{(i)}(f) \text{ avec } \varepsilon_g^{(i)}(f) = \varepsilon_g^{(i+1)}(f)
 \end{aligned}
 \tag{II.36}$$

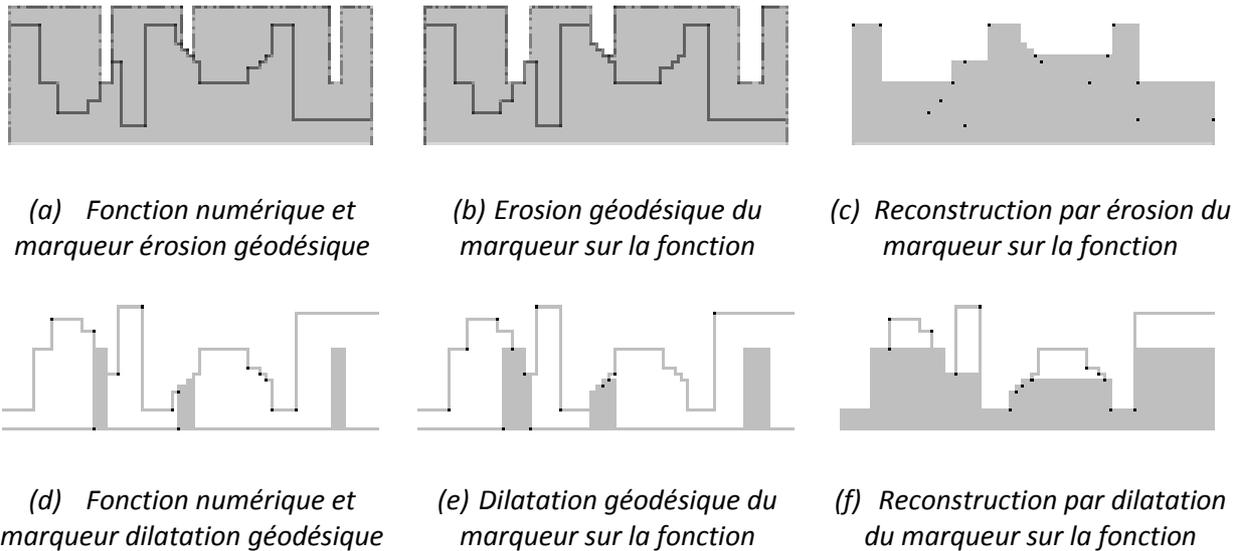


Figure II.13 - Les dilatations/érosions géodésiques et les reconstructions respectives [30].

Par rapport au masque, la reconstruction par dilatation est une ouverture et la reconstruction par érosion une fermeture.

iii. Les filtres alternés séquentiels.

Nous avons vu que les ouvertures enlèvent des éléments clairs et les fermetures les petits éléments sombres dans une image à teintes de gris. Souvent, il est préférable de traiter à la fois les éléments clairs et les éléments sombres (dans le cas où par exemple, une image est corrompue par du bruit clair et sombre), par exemple par l'application d'une ouverture suivie par une fermeture (ou bien l'inverse ce qui change le résultat). L'idée des filtres alternés séquentiels est d'itérer cette procédure :

$$ASF(\cdot) = \phi^{nB} \left(\gamma^{nB} \dots \left(\phi^{2B} \left(\gamma^{2B} \left(\phi^B \left(\gamma^B(\cdot) \right) \right) \right) \right) \dots \right)
 \tag{II.37}$$

ou bien :

$$ASF(\cdot) = \gamma^{nB} \left(\phi^{nB} \dots \left(\gamma^{2B} \left(\phi^{2B} \left(\gamma^B \left(\phi^B(\cdot) \right) \right) \right) \right) \dots \right)
 \tag{II.38}$$

Avec (\cdot) l'image à teintes de gris ou binaire. Cette méthode est très efficace pour enlever du bruit sombre et clair de tailles variées.

3. Transformation chapeau haut de forme.

En analogie avec le gradient morphologique, nous pouvons calculer également la différence entre l'image et sa version ouverte ou fermée. Le résultat est la transformation chapeau haut de forme. Cette transformation extrait tous les détails d'une image qui ont été effacés par le filtrage correspondant :

$$\begin{aligned} \vartheta_{\gamma}(A) &= A \setminus \gamma(A) \quad \text{ou} \quad \vartheta_{\gamma}(f) = f - \gamma(f) \\ \vartheta_{\phi}(A) &= \phi(A) \setminus A \quad \text{ou} \quad \vartheta_{\phi}(f) = \phi(f) - f \end{aligned} \quad (\text{II.39})$$

ϑ_{γ} est appelé aussi la transformation chapeau haut de forme blanc (extraction des détails clairs) et ϑ_{ϕ} la transformation chapeau haut de forme noire (extraction des détails sombres). Contrairement au gradient morphologique, ce ne sont pas les bords des objets qui sont détectés, mais les détails qui ont été enlevés par l'ouverture/la fermeture correspondante.

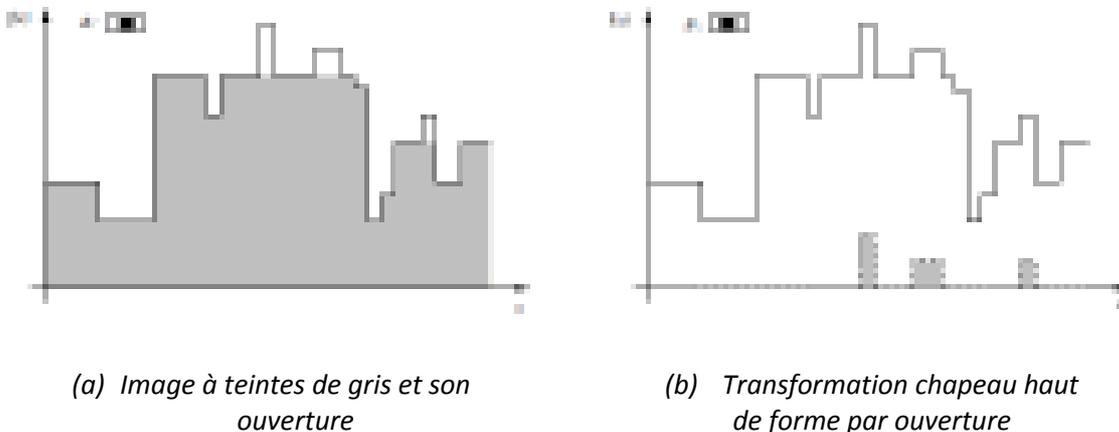


Figure II.14 - La transformation chapeau haut de forme [30].

Les chapeaux hauts de forme sont très utilisés pour l'extraction des détails qui ne dépassent pas une certaine taille. Très souvent, des ouvertures/fermetures morphologiques sont utilisées, mais en fait, une transformation chapeau haut de forme peut être associée à chaque ouverture/fermeture algébrique. Un exemple pour le chapeau haut de forme est montré dans la Figure II.14.

4. Les squelettes.

Des squelettes (ou axes médians) sont très utilisés dans le domaine de la reconnaissance et d'analyse de forme. L'idée est de représenter des objets par des lignes d'épaisseur unitaire qui gardent l'homotopie de l'ensemble original.

La squelettisation est une méthode très connue en analyse d'image, elle a été développée à l'origine dans les années soixante par divers auteurs, dont CALABI et HARTNETT [75], BLUM [76], en vue de créer un nouveau descripteur de formes. Cette méthode a gagné l'intérêt de nombreux chercheurs. En effet, il s'agit de représenter l'axe médian des objets,

en réduire l'épaisseur des composantes connexes jusqu'à une valeur infiniment petite, de telle sorte que l'on ne change ni leur nombre, ni leur genre. La réduction d'épaisseur se fait de la manière la plus isotrope possible (représentation de l'objet par un ensemble de lignes d'épaisseur unitaire).

Alors que la plupart des algorithmes pour la squelettisation sur le plan continu produisent des résultats semblables ou identiques, ceci n'est pas vrai pour les espaces discrets : en effet, il existe une multitude d'algorithmes différents qui donnent des résultats différents. L'une des méthodes fait intervenir la notion de boule maximale d'un ensemble X [29].

Une boule B incluse dans X est dite maximale si et seulement si il n'existe aucune autre boule de X la contenant :

$$\forall B' \text{ boule}, B' \text{ incluse dans } X; B' \subset B \Rightarrow B' = B \quad (\text{II.40})$$

On peut alors montrer que tout ensemble X ouvert peut s'exprimer comme la réunion de ses boules maximales ouvertes.

En fait, on peut encore simplifier la représentation : seuls suffisent les centres des boules maximales et les rayons associés. On appellera squelette de X le lieu des centres des boules maximales [75]:

$$S(X) = \bigcup \{x \in X, \exists r \geq 0 / B(x, r) \text{ est maximale dans } X\} \quad (\text{II.41})$$

Quelques exemples de squelettes obtenus par boules maximales sont montrés dans la Figure II.15

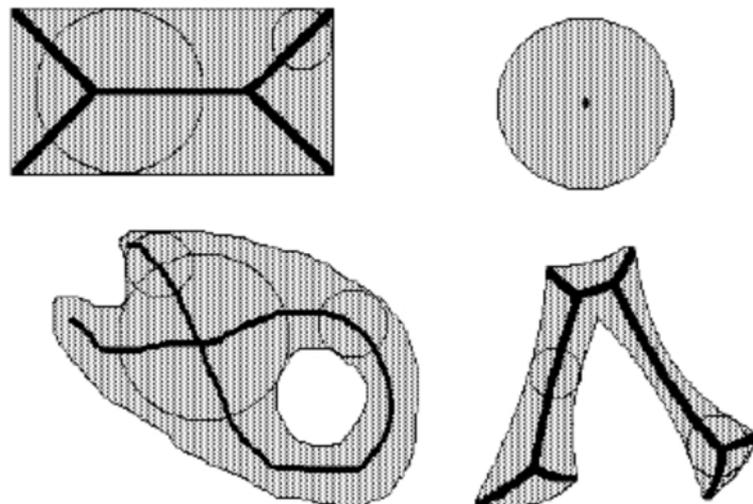


Figure II.15 - Exemples de squelettisation par boules maximales [29].

Dans le paragraphe suivant, nous allons décrire une approche de segmentation très utilisée en traitement d'images, cette approche est la ligne de partage des eaux.

5. Segmentation par la ligne de partage des eaux (LPE).

La segmentation d'images est l'une des tâches les plus importantes dans le traitement d'images : il s'agit de trouver une partition $\mathcal{R} = \{R_i\}$ de E , c'est-à-dire un ensemble de sous-ensembles de E avec les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \forall i : R_i &\neq \emptyset \\ \forall i, j, i \neq j : R_i \cap R_j &= \emptyset \\ E &= \bigcup_i R_i \end{aligned} \quad (II.42)$$

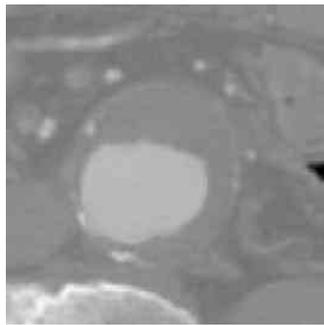
La segmentation assigne à chaque pixel $x \in E$ une et seulement une région R_i à laquelle il appartient et ainsi, elle permet de passer d'une représentation d'image par des valeurs numériques assignées aux pixels à une représentation par des régions (ou objets).

Comme cette tâche est parmi les plus importantes dans le traitement d'images, il existe une grande variété de méthodes. L'outil de segmentation par excellence en Morphologie Mathématique est la ligne de partage des eaux [77], [78], [79]. En effet, elle est plus performante que les autres méthodes (basées sur le seuillage ou bien sur des transformations morphologiques de base, telles que le chapeau haut de forme, les décompositions morphologiques d'images, les squelettes ...) qui ne sont utilisées que dans des cas spécifiques du fait de leur complexité ou bien de leur extrême simplicité et pour lesquels la ligne de partage des eaux ne constitue pas une solution optimale.

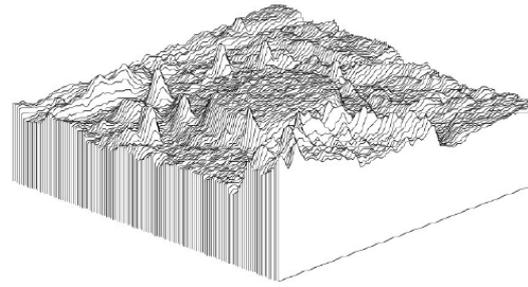
La notion de ligne de partage des eaux n'est pas en elle-même, à proprement parler, une notion purement issue de la morphologie mathématique. Le concept a son origine en topographie et en hydrogéologie. De nombreux auteurs se sont, d'ailleurs, penchés sur cette notion en essayant de définir des algorithmes permettant de la générer à partir des données topographiques (COLLINS [80], PUECKER et DOUGLAS [81], en 1975). Cependant, là où la ligne de partage des eaux devient intéressante, c'est lorsqu'elle apparaît comme le prolongement naturel des transformations morphologiques ensemblistes comme le squelette par zones d'influence, et surtout lorsqu'on utilise le concept sur des images à teintes de gris.

i. Définition de la LPE.

La ligne de partage des eaux utilise la description des images en termes géographiques, une image est représentée par une fonction numérique f , donc elle est perçue comme un relief si l'on associe le niveau de gris de chaque point à une altitude (voir la Figure II.16). La notion de LPE est étroitement liée à celle du minimum local.



(a) Image à teintes de gris



(b) Représentation topologique de l'image

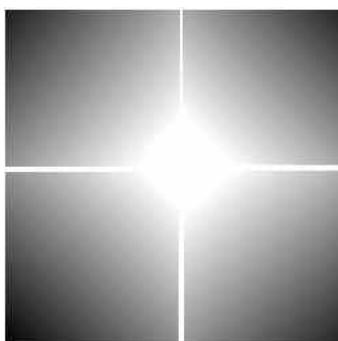
Figure II.16 - Le concept de la représentation topologique [65].

Un minimum local: est un ensemble connexe de pixels d'altitude constante tel qu'il n'est pas possible, partant de cet ensemble, de rejoindre un point de la surface d'altitude inférieure sans avoir à grimper.

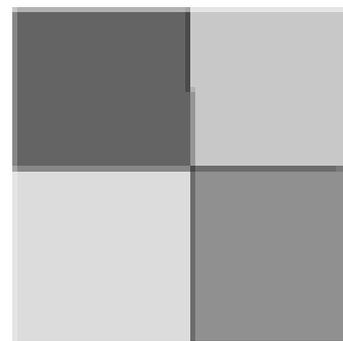
Une manière de déterminer les minima locaux d'une image peut consister en l'expérience suivante : Considérons le relief sous un nuage de pluie. Une goutte d'eau tombant en un point x va couler le long du relief et va finalement rejoindre le fond d'une vallée : un minimum local. Soit M un minimum local de l'image. Si une goutte d'eau tombant en x rejoint finalement M , alors x appartient au bassin versant de M .

Bassin versant : Soit M un minimum local d'une image numérique f . Le bassin versant associé à M (noté $BV(M)$) est l'ensemble des pixels x tels qu'une goutte d'eau tombant en x rejoint finalement M .

La notion de bassin versant permet d'associer à chaque minimum local une portion de l'image: la vallée qui lui correspond. L'ensemble des bassins versants associés à chaque minimum local de l'image définit une partition de l'image (voir Figure II.17).



(a) Image à teintes de gris



(b) Les bassins versants (en différentes teintes gris) et la LPE (en noir)

Figure II.17 - La partition d'une image en NG obtenue par LPE [30].

Ligne de partage des eaux : L'ensemble des points de séparations de deux bassins versants adjacents forme la ligne de partage des eaux (de cette ligne, une goutte d'eau peut s'écouler vers au moins 2 minima locaux distincts) [82].

La Figure II.18 montre la distribution d'une fonction en : vallées, bassins versants, minima locaux et LPE.

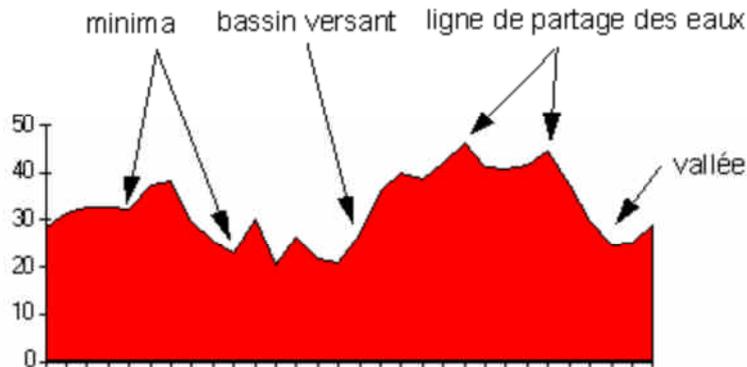


Figure II.18 - Bassins, minima, LPE [29].

ii. Principe de calcul de la LPE.

On utilise généralement pour décrire cet algorithme les processus d'inondation, une description particulière de l'image vue comme un relief topographique où les structures claires sont les pics du relief et les structures sombres correspondent aux vallées du relief (Figure II.16).

On imagine que cette surface topographique soit trouée aux emplacements des minima. Plongeons alors lentement cette surface dans un lac (étendue d'eau supposée infinie pour la commodité de l'expérience) (Figure II.19). L'eau va passer par les trous, en commençant les minima les plus profonds, et l'on suppose que pour chaque minimum source, l'eau se teinte d'une couleur donnée (le label du minimum). Chaque minimum donne naissance à un lac de plus en plus étendu à mesure que le niveau d'eau augmente et va progressivement inonder les reliefs.

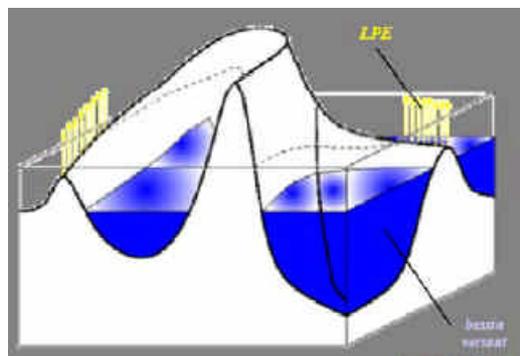


Figure II.19 - Principe d'inondation du relief [65].

A tout moment de l'inondation, les différents lacs délimités sur la topographie seront à la même altitude, supposons de plus que l'on empêche les eaux provenant des lacs différents (donc de minima différents), de se mélanger, en construisant sur la surface topographique un barrage toutes les fois où une telle éventualité pourrait se produire (**Erreur ! Source du renvoi introuvable.**).

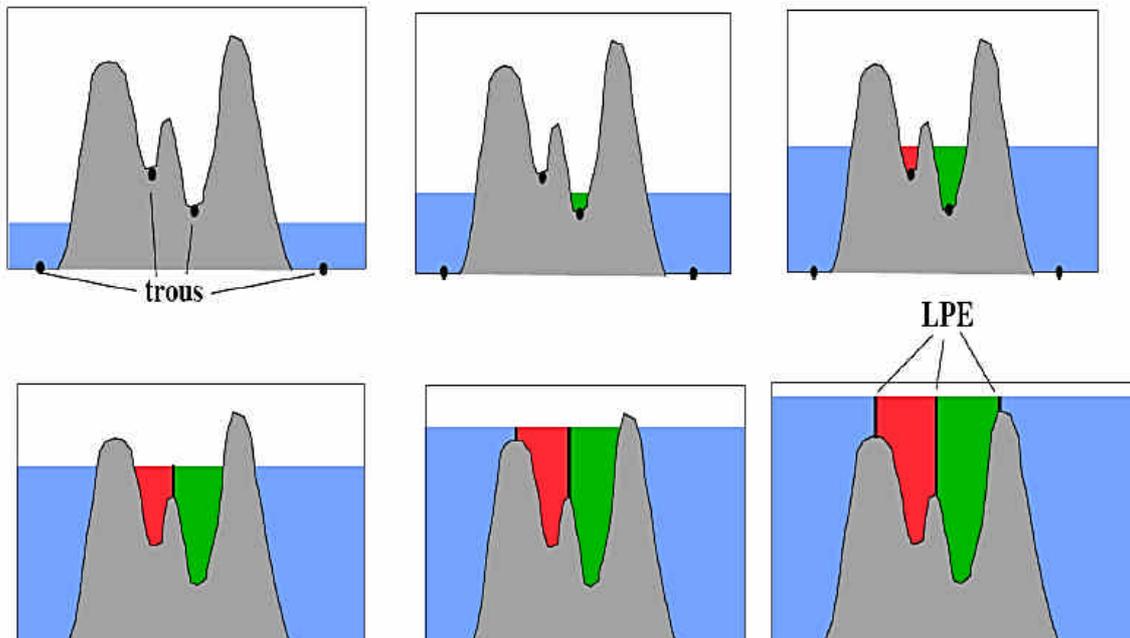


Figure II.20 - Inondation et barrages [65].

Lorsque la totalité de la surface topographique aura été engloutie, seuls les barrages émergeront, délimitant les lacs en nombre égal au nombre de minima de la fonction f . Ces barrages constituent la ligne de partage des eaux.

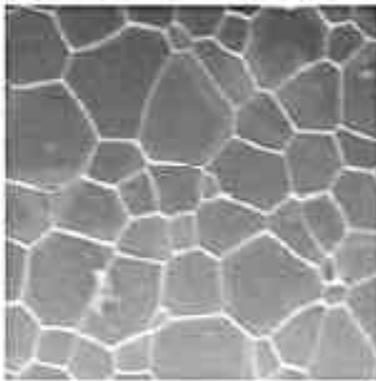
La définition algorithmique de la LPE en termes d'inondation se transpose en une définition mathématique plus rigoureuse impliquant des outils de morphologie mathématique. Il y a plusieurs manières d'implémenter le principe de la LPE. Certains algorithmes ne simulent pas le principe de l'inondation mais trouvent directement les lignes de partage des eaux. Comme exemple d'algorithme d'inondation nous citons celui de VINCENT-SOILE [83]. Cet algorithme est basé sur la reconstruction des seuils successifs d'une fonction f à l'aide du squelette par zone d'influence géodésique. (Pour plus d'informations sur cet algorithme, référez-vous au document de VINCENT et SOILE [83]).

Dans la Figure II.17, nous voyons un exemple pour la partition d'une image à teintes de gris qui est obtenue par la ligne de partage des eaux pour une image synthétique. La LPE suit la ligne de crêtes dans l'image.

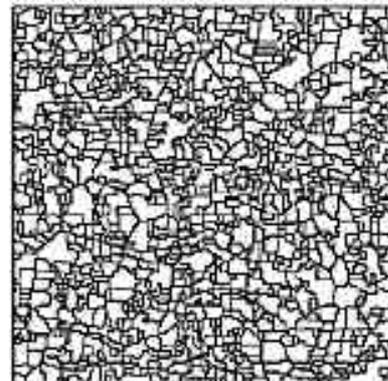
Bien-sûr, dans les images réelles, la segmentation avec la ligne de partage des eaux n'est pas aussi simple que dans cet exemple : les objets dans des images ne correspondent à des

lignes de crête que dans des cas particuliers. C'est pour cela que la LPE s'applique dans la plupart des cas sur le gradient d'une image et non pas sur l'image elle-même.

Un deuxième problème de cette méthode (comme beaucoup d'autres méthodes de segmentation) est la sur-segmentation : comme nous obtenons un bassin versant, par minimum, et comme dans une image réelle, il existe normalement beaucoup de minima parasites, nous obtenons trop de régions (voir **Erreur ! Source du renvoi introuvable.**). Ce problème, peut être résolu en imposant des marqueurs.



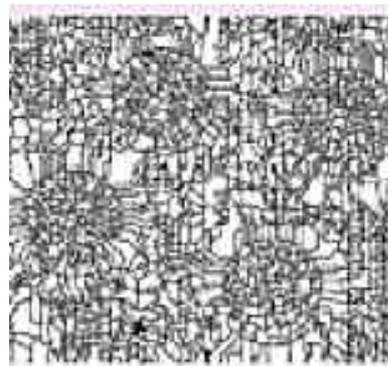
(a) Image originale



(b) Segmentation par LPE



(c) Image originale



(d) Segmentation par LPE

Figure II.21 - Exemples de la sur-segmentation par la LPE.

iii. La LPE contrôlée par marqueurs.

L'idée de l'utilisation de marqueurs est de réduire le nombre de minima à partir desquels l'image est inondée. Supposons que nous disposons d'une image marqueur m qui vaut 0 pour toutes les régions marquées et t_{max} pour tout le reste. La LPE calculée sur la reconstruction par érosion de l'image marqueur sur l'image originale donne un résultat plus pertinent que celui obtenu par la LPE sur l'image originale :

$$LPE_m(f) = LPE(R_f^*(m \vee f)) \quad (II.43)$$

L'image reconstruite $R_f^*(m \vee f)$ ne contient que les minima qui se trouvent dans les régions marquées (voir Figure II.22). Le problème principal dans la segmentation à l'aide de la LPE, est de trouver un marqueur pertinent.

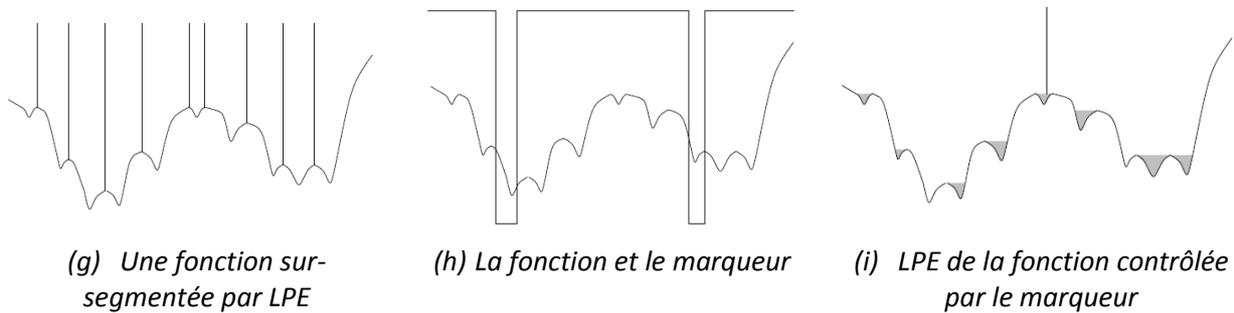


Figure II.22 - Contrôle de la LPE par image marqueur [30].

Comme le gradient morphologique possède de fortes valeurs au niveau du contour des objets, il peut donc être utilisé comme marqueur dans la segmentation par LPE (Figure II.23).

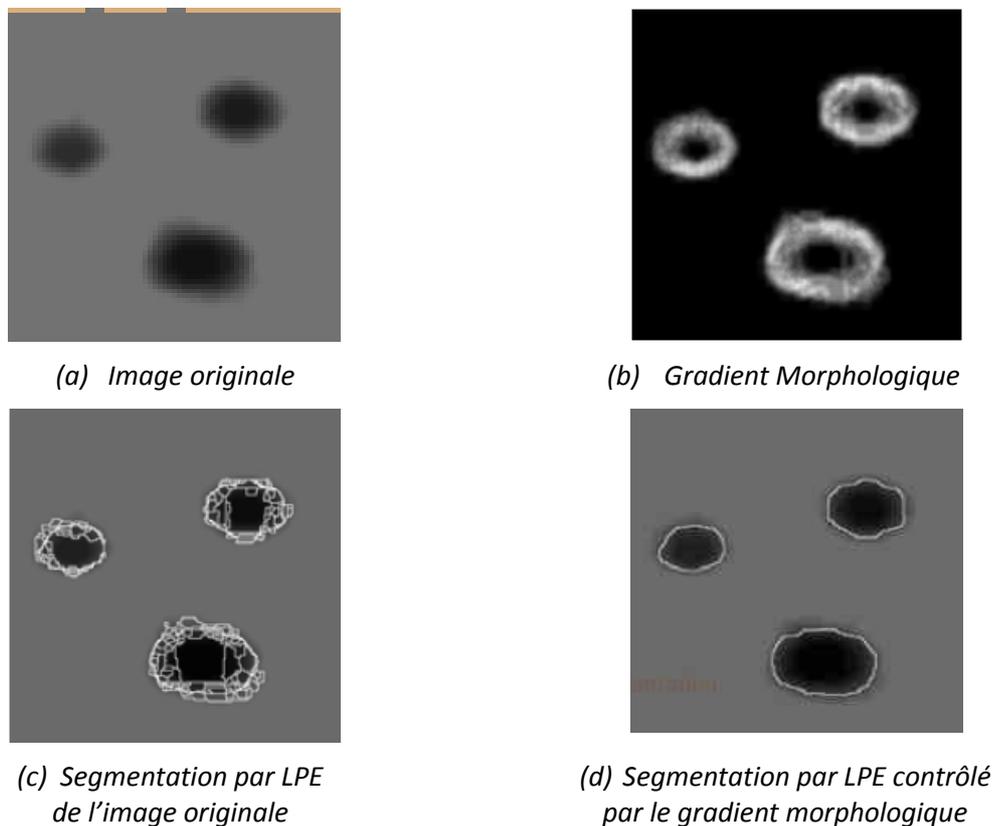


Figure II.23 - Exemple d'utilisation du gradient morphologique comme marqueur pour la LPE [65].

Ou bien, comme dans notre application dans le chapitre 4, nous pouvons utiliser comme marqueur l'image obtenue par l'opérateur morphologique que nous avons défini précédemment dans ce chapitre : la fonction de distance (Figure II.24 (b)).

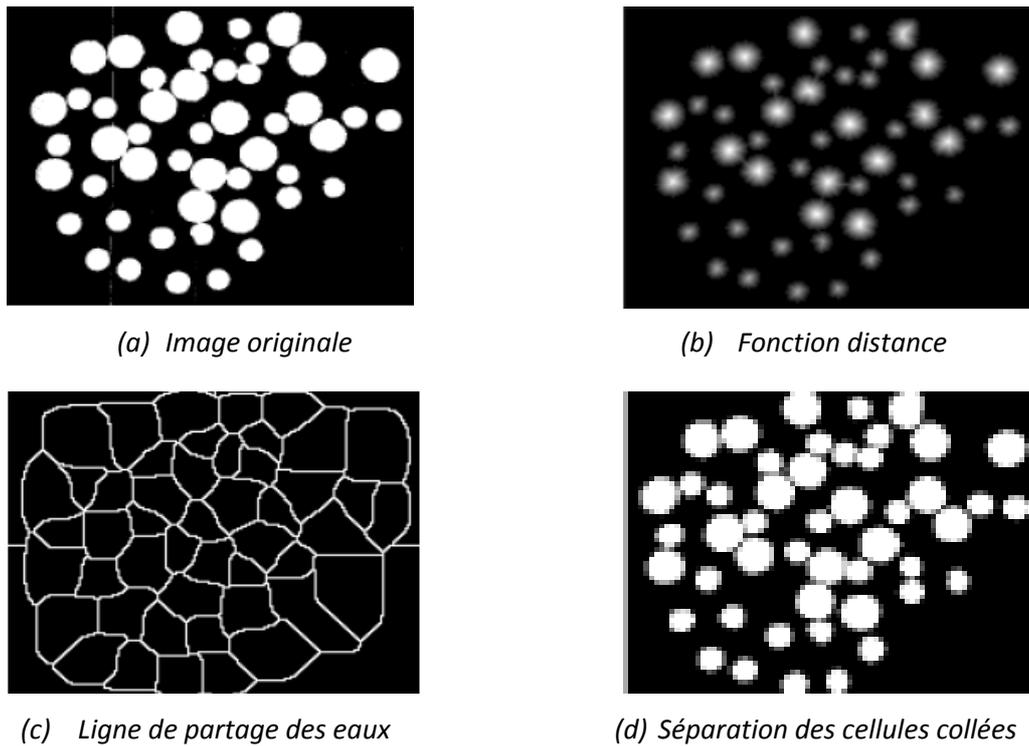


Figure II.24 - Exemple d'utilisation de la fonction distance comme marqueur pour la LPE [65].

Nous pouvons aussi, utiliser une combinaison des deux derniers marqueurs comme marqueurs interne et externe (Figure II.25).

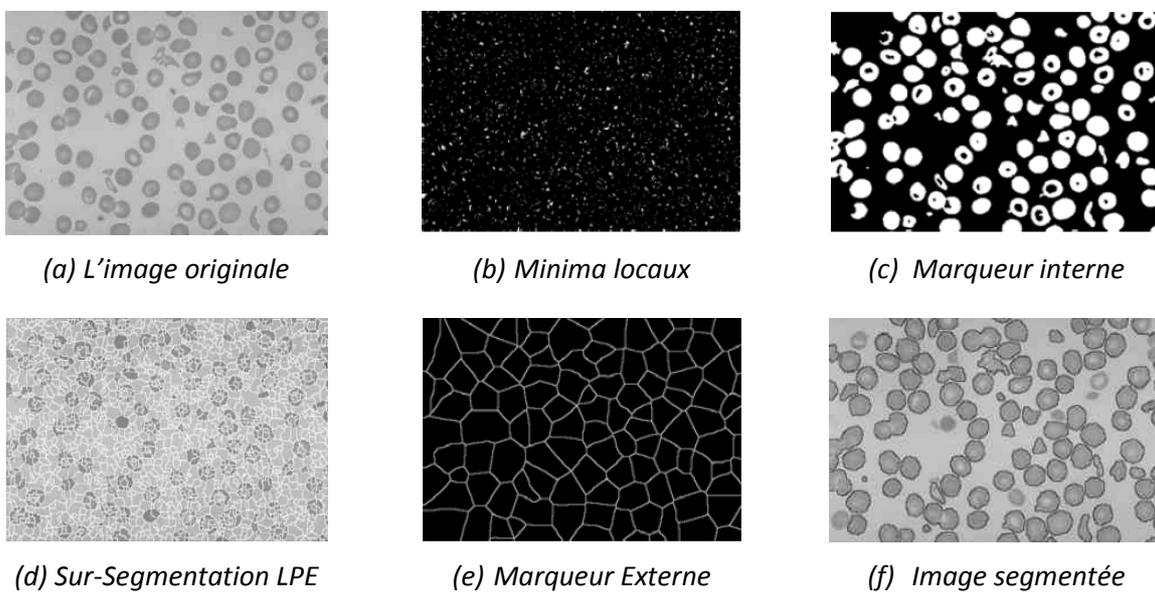


Figure II.25 - Exemple d'utilisation de marqueurs interne et externe pour la LPE [65].

III. Conclusion.

Dans ce deuxième chapitre, nous avons présenté les principes de base de la morphologie mathématique. Cette technique offre un grand nombre d'outils très puissants de traitement et d'analyse d'images, que l'on retrouve sous différentes rubriques dans certains logiciels d'analyse d'images et même de retouches d'images. Son but est l'étude des objets en fonction de leurs formes, de leurs tailles, des relations avec leurs voisinages (en particulier topologique), de leurs textures et de leurs niveaux de gris.

Dans une première section, nous avons introduit, d'une manière générale, la morphologie mathématique par ses notions de base. Après, nous avons défini et étudié les opérateurs morphologiques élémentaires à notre étude : Erosion, Dilatation et les opérateurs morphologiques composés : ouverture et fermeture, qui jouent le rôle d'un filtrage morphologique. Nous avons, ensuite présenté la transformation du chapeau haut forme la plus utilisée en analyse d'image pour localiser des structures dans l'image qui sont plus petites que l'élément structurant puis le gradient morphologique utilisé pour la détection des contours. Par la suite, nous avons décrit la notion du squelette qui permet de réduire l'épaisseur des composantes connexes jusqu'à une valeur infiniment petite.

Dans la dernière section, nous avons présenté le principe de la ligne de partage des eaux, un outil très puissant de segmentation en morphologie mathématique, il nous servira particulièrement dans le chapitre 4, pour l'extraction du réseau vasculaire et pour la détection du contour de la papille.

Il y a, évidemment, beaucoup à dire à propos de la technique de traitement d'images par morphologie mathématique. Mais les quelques pages de ce mémoire ne suffiront pas pour parler de tous les points. Nous avons, néanmoins, abordé la majeure partie des opérateurs utiles à notre travail. Nous avons, aussi, rédigé une section supplémentaire de ces opérateurs dans l'annexe A, à la fin de ce mémoire, pour un complément d'information.

Les outils définis, nous entamerons, à présent, la description des différentes étapes de notre système biométrique rétinien, en abordant la phase préliminaire dans le prochain chapitre, qui focalisera sur l'acquisition et le prétraitement des images rétiniennes.