

## CHAPITRE 3

### RÉDUCTION ET REGROUPEMENT NODAL

*"L'homme ne peut pas faire des principes, il peut seulement les découvrir",  
Thomas Paine.*

#### 3.1 Introduction

Le présent chapitre est consacré à la présentation de la deuxième étape de la procédure de modélisation des équivalents dynamiques. Il s'agit de la réduction et du regroupement nodal. Une fois que les zones cohérentes sont identifiées, l'étape suivante consiste à remplacer les zones cohérentes du réseau externe par des équivalents dynamiques. Ce processus nécessite la transformation du réseau original de grande taille vers un réseau de taille réduite par le regroupement nodal de tous les nœuds des machines cohérentes mais également par l'élimination des tous les nœuds de charge appartenant à la même zone. Dans cette étape de transformation du réseau, seules les parties statiques du réseau sont considérées étant donné que le regroupement concerne seulement les nœuds auxquelles les machines sont connectées et non pas les machines elles-mêmes. Le générateur équivalent avec tous les systèmes de commande qui lui sont associés fera l'objet du quatrième chapitre.

#### 3.2 Regroupement et élimination des nœuds

Cette étape est divisée en deux parties successives, la première consiste à regrouper les nœuds terminaux des machines considérées cohérentes et la deuxième concerne l'élimination de tous les nœuds de la zone cohérente sauf le nœud équivalent résultant du regroupement ainsi que les nœuds frontières qui jouent de rôle d'interface entre l'équivalent dynamique et le reste du réseau.

### 3.2.1 Regroupement nodal

Ce regroupement est construit sur la base de l'invariance de la puissance apparente au nœud équivalent. Cette méthode appelée «Ward Equivalent» [34] consiste à remplacer une série de nœuds appartenant à une zone cohérente identifiée au préalable par un seul nœud équivalent. Dans ce processus de regroupement, on distingue également les nœuds à retenir appelés nœuds périphériques (ou frontières) qui interconnectent les différentes zones à travers les lignes d'interconnexion. Ainsi, les nœuds terminaux cohérents sont remplacés par un seul nœud équivalent, de telle sorte à satisfaire les conditions d'invariance suivantes :

- Les courants et les tensions aux nœuds périphériques resteraient inchangés;
- Les puissances active et réactive injectées au nœud équivalent doivent être égales à la somme des puissances injectées aux différents nœuds cohérents, soit :  $S_e = \sum_i S_i$ .

Pour illustrer ce processus de regroupement, la figure 6 montre la transformation de la topologie du réseau original, notamment, la zone cohérente qui est l'objet de la réduction. Dans ce processus, la matrice admittance de la zone cohérente  $Y_{orig}$  est transformée en  $Y_{red}$  représentant le réseau équivalent réduit.

Trois types de nœuds sont considérés, les nœuds générateurs d'indice « c » pour nœuds cohérents, les nœuds périphériques d'indice « r » pour nœuds retenus et le nœud équivalent « e ». Évidemment, on a omis les nœuds de charges, ces derniers sont éliminées directement en remplaçant les charges par leurs admittances constantes respectives.

Les matrices admittances des réseaux original et réduit ont respectivement les formes suivantes :

$$\mathbf{Y}_{orig} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{rr} & \mathbf{Y}_{rc} \\ \mathbf{Y}_{cr} & \mathbf{Y}_{cc} \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{Y}_{red} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{rr} & \mathbf{Y}_{re} \\ \mathbf{Y}_{er} & Y_{ee} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Ainsi, le réseau original peut être décrit par l'équation nodale suivante :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r \\ \mathbf{I}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{rr} & \mathbf{Y}_{rc} \\ \mathbf{Y}_{cr} & \mathbf{Y}_{cc} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_r \\ \mathbf{V}_c \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Et le réseau réduit est décrit par les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r \\ I_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{rr} & \mathbf{Y}_{re} \\ \mathbf{Y}_{er} & Y_{ee} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_r \\ V_e \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Du fait qu'il y a un seul nœud équivalent, on déduit que l'élément  $\mathbf{Y}_{re}$  est un vecteur colonne représentant les branches qui relient les nœuds frontières au nœud équivalent. Son transposé est le vecteur ligne  $\mathbf{Y}_{er}$ . Évidemment,  $Y_{ee}$  est un scalaire qui représente la somme des admittances des branches reliées au nœud équivalent y compris l'admittance shunt.

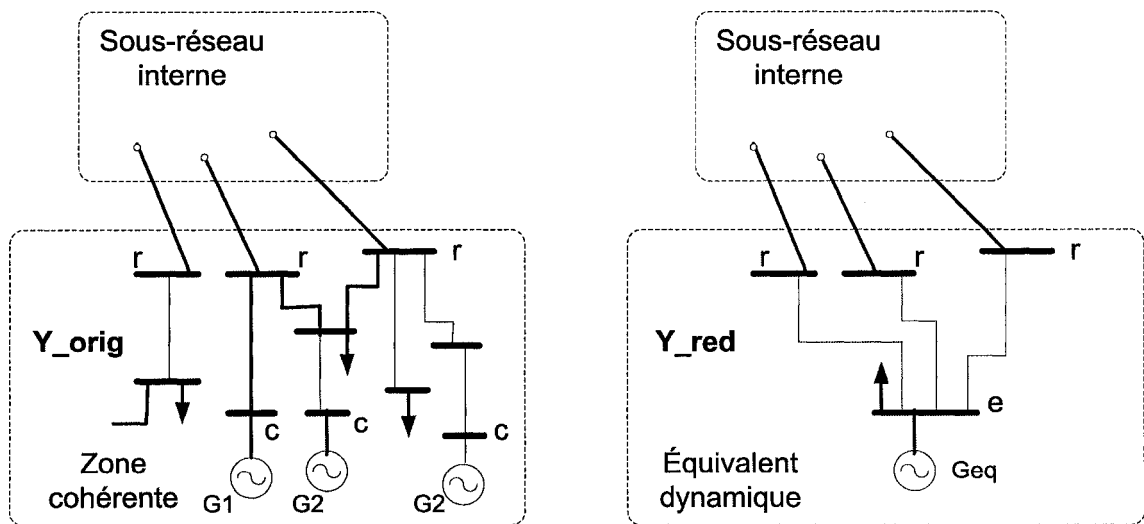


Figure 6 Regroupement et élimination nodaux

La transformation des équations (3.3) en (3.4) permet de déterminer la matrice d'admittance du réseau réduit  $Y_{red}$  en fonction des admittances du réseau original en tenant compte des conditions d'invariance des puissances avant et après la réduction.

C'est ainsi que la condition relative à l'invariance des courants et des tensions aux nœuds périphériques se traduit par l'équation :

$$Y_{rr} \cdot V_r + Y_{rc} \cdot V_c = Y_{rr} \cdot V_r + Y_{re} \cdot V_e \quad (3.5)$$

Alors pour tout vecteur  $V_c$ , on a :

$$Y_{re} \cdot V_e = Y_{rc} \cdot V_c \quad (3.6)$$

L'interprétation physique de l'équation (3.6) est telle que les nœuds cohérents sont tous transformés en un nœud équivalent à travers des transformateurs réglés de charge avec des rapports de transformation complexes comme l'illustre la figure 7.

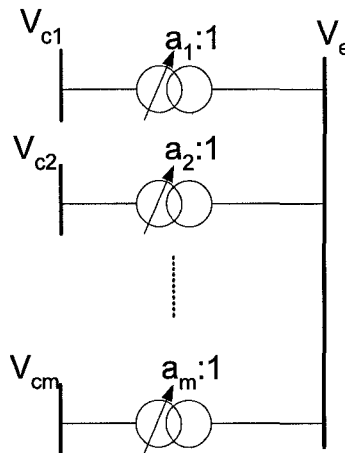


Figure 7 Transformation des nœuds terminaux du groupe cohérent

le vecteur des rapports de transformation  $\mathbf{a}$  est donnée selon l'équation (3.6) comme suit :

$$\mathbf{a} = V_e^{-1} \cdot \mathbf{V}_c \quad (3.7)$$

La deuxième condition relative à l'invariance de la puissance apparente avant et après réduction se traduit par l'équation suivante :

$$V_e \cdot I_e^* = \mathbf{V}_c^t \cdot \mathbf{I}_c^* \quad (3.8)$$

Le membre de gauche de cette équation exprime la puissance totale injectée au nœud équivalent et le membre de droite indique la somme des puissances injectées dans tous les nœuds cohérents. En substituant dans (3.8) les expressions des courants  $\mathbf{I}_c$  et  $I_e$  données respectivement dans les équations (3.3) et (3.4), on obtient :

$$V_e \cdot (\mathbf{Y}_{er}^* \cdot \mathbf{V}_r^* + Y_{ee}^* \cdot V_e^*) = \mathbf{V}_c^t \cdot (\mathbf{Y}_{cr}^* \cdot \mathbf{V}_r^* + \mathbf{Y}_{cc}^* \cdot \mathbf{V}_c^*) \quad (3.9)$$

À partir de cette équation , on déduit que pour tout vecteur  $\mathbf{V}_r$  et  $\mathbf{V}_c$ , on peut écrire :

$$V_e \cdot \mathbf{Y}_{er}^* \cdot \mathbf{V}_r^* = \mathbf{V}_c^t \cdot \mathbf{Y}_{cr}^* \cdot \mathbf{V}_r^* \quad (3.10)$$

Et

$$V_e \cdot Y_{ee}^* \cdot V_e^* = \mathbf{V}_c^t \cdot \mathbf{Y}_{cc}^* \cdot \mathbf{V}_c^* \quad (3.11)$$

En tenant compte de (3.7), l'équation (3.10) permet de déterminer la matrice admittance des branches reliant le nœud équivalent aux nœuds frontières, soit :

$$\mathbf{Y}_{er} = \left( V_e^{-1} \cdot \mathbf{V}_c^t \cdot \mathbf{Y}_{cr}^* \right)^* = \mathbf{a}^{t*} \cdot \mathbf{Y}_{cr} \quad (3.12)$$

De même, l'équation (3.11) permet de déterminer l'admittance équivalente au nœud équivalent :

$$Y_{ee} = \left( V_e^{-1} \cdot \mathbf{V}_c^t \cdot \mathbf{Y}_{cc}^* \cdot \mathbf{V}_c^* V_e^{-1*} \right)^* = \mathbf{a}^{t*} \cdot \mathbf{Y}_{cc} \cdot \mathbf{a} \quad (3.13)$$

Par ailleurs, l'équation (3.6) permet de calculer la matrice admittance des branches reliant les nœuds frontières au nœud équivalent dans la direction indiquée, soit :

$$\mathbf{Y}_{re} = \mathbf{Y}_{rc} \cdot \mathbf{V}_c V_e^{-1} = \mathbf{Y}_{rc} \cdot \mathbf{a} \quad (3.14)$$

À partir des équations (3.2), (3.12), (3.13) et (3.14), l'admittance du réseau réduit (ou réseau équivalent) est alors donnée par :

$$\mathbf{Y}_{red} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{rr} & \mathbf{Y}_{re} \cdot \mathbf{a} \\ \mathbf{a}'^* \cdot \mathbf{Y}_{cr} & \mathbf{a}'^* \cdot \mathbf{Y}_{cc} \cdot \mathbf{a} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

On voit bien que les admittances des branches équivalentes reliant le noeud équivalent aux noeuds périphériques dépendent toutes des rapports de transformation  $\mathbf{a}$ .

Si on examine l'équation qui donne le vecteur de transformation (3.7), on constate que ce vecteur est complexe, il dépend à la fois des amplitudes et des angles des tensions aux noeuds terminaux des machines cohérentes et au noeud équivalent. Par conséquent la matrice admittance du réseau réduit  $\mathbf{Y}_{red}$  devient non symétrique (i.e,  $\mathbf{Y}_{re} \neq \mathbf{Y}_{er}'$ ). D'un point de vue de calcul, l'asymétrie de la matrice admittance est un inconvénient. Ce problème d'asymétrie est contourné en injectant un courant de correction  $I_0$  au noeud équivalent  $e$  [22]. L'équation nodale du système déduit (3.4) peut s'écrire avec cette correction comme suit :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_r \\ I_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{rr} & \mathbf{Y}_{re} \\ \mathbf{Y}_{re}' & Y_{ee} + I_0 / V_e \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_r \\ V_e \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Où :

$$I_0 = [(\mathbf{a}^* - \mathbf{a})' \mathbf{Y}_{er}]. \mathbf{V}_r \quad (3.17)$$

Ce courant  $I_0$  n'est pas constant car il dépend des tensions dans les noeuds frontières. Par contre, selon son expression, sa valeur est faible et négligeable par rapport au courant injecté au noeud équivalent  $I_e$  puisque la différence  $(\mathbf{a}^* - \mathbf{a})$  est très faible lorsque les parties imaginaires des rapports de transformation sont faibles. Cette condition est généralement satisfaite du fait que l'angle de la tension équivalente  $V_e$  peut être

considéré, dans une première approximation, comme la moyenne des angles des tensions aux nœuds terminaux des groupes cohérents. Par conséquent la variation du courant de correction est vraiment négligeable, alors  $I_0$  est considéré constant et le rapport  $I_0/V_e$  peut être remplacé par une admittance constante :

$$y_0 = \frac{I_0}{V_e} \quad (3.18)$$

Celle-ci est alors ajoutée à l'admittance shunt au nœud équivalent [22].

### 3.2.2 Élimination nodale

Après le regroupement, trois types de nœuds demeurent dans la zone réduite, les nœuds frontières, le nœud équivalent et les nœuds de charge. Dans le processus d'élimination des nœuds, on définit l'ensemble  $\{R\}$  comme étant l'ensemble des nœuds frontières en plus du nœud équivalent et l'ensemble  $\{L\}$  comme celui regroupant le reste des nœuds qui sont, en général, des nœuds de charge qu'il faudrait éliminer.

Avant que les nœuds soient éliminés, les équations nodales décrivant la zone sont :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I}_R \\ \mathbf{I}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_{RR} & \mathbf{Y}_{RL} \\ \mathbf{Y}_{LR} & \mathbf{Y}_{LL} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{V}_R \\ \mathbf{V}_L \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Tous les nœuds de l'ensemble  $\{L\}$  sont éliminés du réseau de sorte que les courants et tensions des nœuds de l'ensemble  $\{R\}$  soient inchangés. Les puissances injectées aux nœuds de charge sont remplacées par des admittances shunt comme suit :

$$Y_{L_i} = S_i^* / V_i^2 = (P_i - jQ_i)^* / V_i^2 \quad (3.20)$$

Ces admittances sont ajoutées avec un signe approprié aux éléments diagonaux de la sous matrice  $\mathbf{Y}_{LL}$ . Ainsi, les courants injectés aux nœuds à éliminer deviennent alors nuls, soit :

$$\mathbf{I}_L = \mathbf{0} \quad (3.21)$$

L'élimination des nœuds de charge permet de déterminer le courant d'injection nodal dans l'ensemble des barres frontières et la barre équivalente comme suit :

$$\mathbf{I}_R = \mathbf{Y}_R \mathbf{V}_R \quad (3.22)$$

Avec :

$$\mathbf{Y}_R = \mathbf{Y}_{RR} - \mathbf{Y}_{RL} \mathbf{Y}_{LL}^{-1} \mathbf{Y}_{LR} \quad (3.23)$$

$\mathbf{Y}_R$  est la matrice admittance du réseau équivalent après l'élimination des nœuds.

**Remarque :** l'utilisation des admittances shunt en remplacement des puissances injectées peut induire parfois des problèmes de convergence dans les programmes d'écoulement de puissance en raison des faibles rapports entre les inductances et les résistances des branches du réseau équivalent réduit. En effet, les branches shunt équivalentes obtenues par ce processus d'élimination ont généralement des conductances très grandes correspondant à la totalité des puissances actives injectées.

L'équation (3.23) décrit l'algorithme d'élimination. Pour évaluer la matrice réduite  $\mathbf{Y}_R$  du réseau équivalent, on fait appel, en pratique, aux propriétés des matrices creuses. Ceci permet, d'éliminer les nœuds un à la fois et non tous en même temps ce qui permet de minimiser la mémoire requise au processus d'élimination. Considérons une étape d'élimination telle que l'élimination d'un nœud  $k$  du groupe  $\{L\}$ . La 2<sup>ème</sup> partie du membre de droite de l'équation (3.23) est évaluée comme suit :

$$\mathbf{Y}_{RL} \mathbf{Y}_{LL}^{-1} \mathbf{Y}_{LR} = \frac{1}{Y_{kk}} \begin{pmatrix} Y_{1k} \\ \cdot \\ Y_{ik} \\ \cdot \\ Y_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{k1} & \cdot & Y_{kj} & \cdot & Y_{kn} \end{pmatrix} = \frac{1}{Y_{kk}} \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & Y_{ik} Y_{kj} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (3.24)$$



Supposons que  $Y_{ij}^{old}$  est un élément de  $\mathbf{Y}_{RR}$  tandis que  $Y_{ij}^{new}$  est un élément de la matrice du réseau équivalent  $\mathbf{Y}_R$ .

Les équations (3.23) et (3.24) montrent que l'élimination d'un nœud quelconque  $k$  modifie chaque élément de la nouvelle matrice  $\mathbf{Y}_R$  comme suit :

$$Y_{ij}^{new} = Y_{ij}^{old} - \frac{Y_{ik} Y_{kj}}{Y_{kk}} \quad \text{pour } i \neq k \text{ et } j \neq k \quad (3.25)$$

Si le nœud  $i$  est adjacent au nœud  $k$ , autrement dit, les nœuds  $i$  et  $k$  sont directement reliés à travers une branche dont l'admittance est non nulle, donc  $Y_{ik} \neq 0$ . Par contre, si les nœuds  $i$  et  $k$  ne sont pas adjacents, l'admittance correspondante est nulle,  $Y_{ik} = 0$ .

Si on examine l'équation (3.25), elle révèle des propriétés relatives à l'ordonnement des nœuds du réseau original de la zone cohérente [22] :

- Si les nœuds  $i$  et  $j$  ne sont pas adjacents au nœud  $k$  alors l'élimination du nœud  $k$  ne doit pas modifier l'admittance  $Y_{ij}$  ;
- L'élimination du nœud  $k$  modifie l'admittance entre tous les nœuds qui lui sont adjacents, ceci crée des connexions additionnelles entre les nœuds voisins;
- Les admittances propres de tous les nœuds adjacents au nœud  $k$  sont aussi modifiées, elles sont calculées par l'équation (3.25) pour  $i=j$ .

On voit bien que la disposition des éléments dans la matrice admittance (ou l'ordre des nœuds du réseau) est importante pour la préservation de la propriété creuse de la matrice réduite résultante. Ce qui a pour conséquence de minimiser le nombre d'opérations algébriques requises dans le processus d'élimination des nœuds. Ainsi, à chaque étape d'élimination, on doit éliminer d'une part, le nœud qui a le moins de nœuds adjacents, d'autre part, le nœud qui introduit moins de connexions possibles.