

CHAPITRE 3

APPLICATION 1 : SYSTÈME ROBOTIQUE AVEC CONTACT SOUS FROTTEMENT - MODÉLISATION ET COMPENSATION

« L'observation recueille les faits; la réflexion les combine; l'expérience vérifie le résultat de la combinaison. »

Denis Diderot (1713 – 1784)

3.1 Introduction

L'usage des robots en contact avec toute sorte de surface (table, mur, objet, *etc.*) est dédié à plusieurs types d'applications industrielles; de traitement de surface, de nettoyage, de traçage et de manipulation d'objet [12, 233, 234]. Et, dans la plupart de ces activités, le facteur précision de mouvement et aussi de force est déterminant. Or, cet objectif est souvent biaisé par la manifestation de frottement entre l'effecteur du robot et la surface de contact. Ainsi, l'énoncé de la réalisation d'un système robotique de mouvement et de force efficace se présente d'une manière analogue à celui du chapitre 2. En fait, il s'agit de la commande de système mécanique composé d'un ensemble de corps rigides (*i.e.* robot) assujettis à des contraintes de contact sous frottement (voir figures 19 et 20). La conception de la loi de commande est basée sur le modèle dynamique du robot, l'ensemble des équations des contraintes et le modèle dynamique de frottement (de *LuGre*). Nous allons proposer une stratégie de commande hybride qui utilise un ensemble de transformations non linéaires pour décomposer le système dynamique total en un sous-système dynamique de position sous frottement dans l'espace libre de mouvement et un autre de force dans l'espace de contrainte (voir figure 20). En particulier, dans la première transformation (de dynamique de position), nous proposons une nouvelle expression (comparativement à l'expression classique connue dans la littérature); qui utilise un changement de variable inspiré de celui introduit dans la commande adaptative indirecte des robots par Li et Slotine [29] pour tenir compte du modèle dynamique de *LuGre* dans la compensation de frottement. Dans ce premier sous-système, nous allons, en effet, développer un schéma

de contrôle de position de l'effecteur sur la surface de contact avec une compensation de frottement; selon le principe introduit dans le chapitre 2. Cette commande, conçue ainsi autour de la notion de passivité de la dynamique en boucle fermée, est basée sur un retour de sortie (l'ensemble des états mesurables du système) dynamique linéaire. La notion de stabilité de la dynamique de position en boucle fermée sera, ensuite, discutée et formulée dans un contexte de multi-objectifs par des LMIs; grâce auxquelles, nous allons pouvoir réaliser la synthèse de la commande linéaire par *feed-back* de sortie. Notons, quand-même, que pour compléter la commande hybride, nous allons établir le schéma de commande de la force normale appliquée sur la surface de contact pendant le mouvement. Finalement, des résultats expérimentaux vont permettre de valider notre approche.

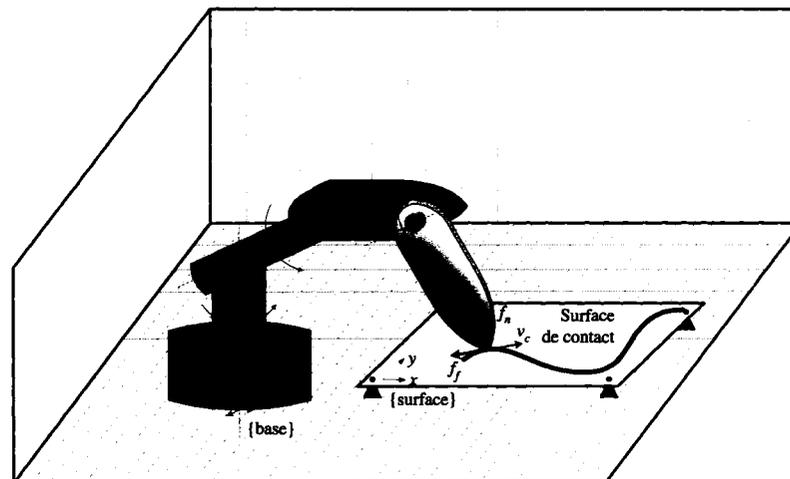


Figure 19 Robot en mouvement sur une surface avec frottement

3.2 Modélisation d'un système robotique sous frottement de contact

Dans cette section, nous introduisons le modèle dynamique du robot, l'ensemble des équations algébriques de contraintes et le modèle dynamique de frottement dans l'espace libre de mouvement (voir figure 20). En plus, nous considérons que le robot est équipé par un ensemble d'actionneurs électriques dont les dynamiques sont suffisamment rapides par

rapport à celles des articulations du robot; autrement le couple au niveau de chaque arbre moteur est supposé équivalent à celui au niveau de l'articulation (voir figure 20).

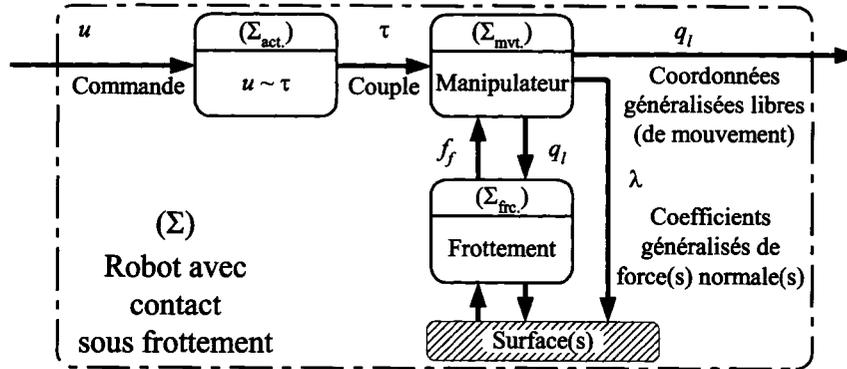


Figure 20 Schéma de base de système robotique avec contrainte sous frottement

3.2.1 Modélisation du robot sous contrainte de contact

Considérons un robot non redondant, de n articulations rigides, soumis aux contraintes de contact au niveau de l'effecteur avec un milieu rigide (voir figure 19). Le modèle dynamique de mouvement peut être décrit par l'équation de *Lagrange*, dans l'espace articulaire [125, 235] :

$$\tau = B\Gamma = M(q)\ddot{q} + H(\dot{q}, q) + J_e(q)^T(f_n + f_t) \quad (3.1)$$

où $q \in \mathbb{R}^n$ est le vecteur des coordonnées généralisées, $M(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice d'inertie, $H(\dot{q}, q) \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des couples centrifuges, de *Coriolis* et de gravité, $J_e(q) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice *Jacobienne* non singulière du système, $f_n \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de force normale de contact exprimée dans l'espace cartésien, $f_t \in \mathbb{R}^n$ le vecteur de force tangentielle de contact exprimée dans l'espace cartésien, $\tau \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des couples articulaires appliqués, $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ le vecteur des couples appliqués au niveau des actionneurs et $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice d'entrée non singulière modélisant les réducteurs de vitesse et les modules de couplage. En outre, pour simplifier la modélisation, nous admettons que nous disposons d'un actionneur pour chaque articulation.

En considérant la rigidité du contact avec le milieu, les contraintes holonomiques¹ du robot peuvent être exprimées par le système d'équations algébriques d'ordre m décrit dans l'espace des vitesses [141] :

$$D(q) \cdot \dot{X} = D(q)J_e(q) \cdot \dot{q} = 0 \quad (3.2)$$

où X et \dot{X} , des vecteurs de \mathbb{R}^n , représentent respectivement le vecteur position/orientation et le vecteur vitesse de l'élément final exprimés dans l'espace cartésien et $D(q) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice de rang plein. En général, la matrice D^T spécifie la direction normale (*i.e.* orthogonale) de la (ou les) surface(s) de contrainte(s); *i.e.* la force normale de contact f_n peut être exprimée par [236, 237] :

$$f_n = D(q)^T \cdot \lambda \quad (3.3)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}^m$ désigne le vecteur des multiplicateurs de *Lagrange* [124, 126]. Si les colonnes de D^T sont unitaires, alors λ représente le vecteur des amplitudes des forces normales appliquées sur les surfaces de contact [124, 138].

La force tangentielle de contact f_t représente l'ensemble des forces de frottement et est définie par [124, 126] :

$$f_t = G(q)^T \cdot f_f \quad (3.4)$$

où $f_f \in \mathbb{R}^l$, $l = n - m$, représente la décomposition de la force de frottement dans le sous-espace (ou surface(s)) de mouvement au niveau du point de contact.

En plus, nous avons

$$v_c = G(q) \cdot \dot{X} = G(q)J_e(q) \cdot \dot{q} \quad (3.5)$$

$v_c \in \mathbb{R}^l$ définit le vecteur vitesse de déplacement de l'effecteur sur la surface de contact.

¹ Une contrainte holonomique est une contrainte de position/orientation qui induit la présence de contrainte de vitesse (contrainte intégrable) obtenue par dérivation de la contrainte de position. Par contre, une contrainte non holonomique est une contrainte de vitesse non intégrable indépendante de la présence d'une contrainte holonome (de position/orientation).

Alors, $G \in \mathbb{R}^{l \times n}$ satisfait :

$$D(q) \cdot G(q)^T = 0 \quad (3.6)$$

i.e. les colonnes de G^T engendrent l'espace nul de D qui constitue le sous-espace tangent à la surface de contrainte au niveau du point de contact [141]. Sans perte de généralité et en utilisant des permutations appropriées des colonnes, nous partitionnons la matrice $D_e = D \cdot J_e$ comme suit :

$$D_e(q) = D(q) \cdot J_e(q) = \left(\underbrace{d_{e_1} \mid d_{e_2} \mid \dots \mid d_{e_l}}_{D_{ml}} \mid \underbrace{d_{e_{l+1}} \mid \dots \mid d_{e_{l+m}}}_{D_m} \right) \quad (3.7)$$

avec $D_m \in \mathbb{R}^{m \times m}$ une matrice non singulière et $D_{ml} \in \mathbb{R}^{m \times l}$.

À partir de (3.2) et (3.7), nous proposons la partition du vecteur des coordonnées généralisées q comme suit :

$$q = \begin{pmatrix} q_l \\ q_m \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

avec $q_l \in \mathbb{R}^l$ et $q_m \in \mathbb{R}^m$. Alors, nous avons :

$$D_{ml}\dot{q}_l + D_m\dot{q}_m = 0 \quad (3.9)$$

Pendant le déplacement sous contrainte, l'espace articulaire du robot possède seulement l variables indépendantes [141]. Dans ce cas, nous écrivons

$$\dot{q} = J_l(q)\dot{q}_l \quad (3.10)$$

et

$$\ddot{q} = \dot{J}_l\dot{q}_l + J_l\ddot{q}_l \quad (3.11)$$

où la matrice $J_l \in \mathbb{R}^{n \times l}$ est donnée par :

$$J_l = \begin{pmatrix} I_l \\ -D_m^{-1}D_{ml} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

I_l est la matrice identité d'ordre l . D'après la relation (3.10), les colonnes de la matrice J_l engendrent le sous-espace articulaire des vitesses du manipulateur compatible avec les contraintes de contact (3.2) [141]. À partir de (3.7) et (3.12), il suit :

$$J_l^T \cdot D_e^T = 0 \quad (3.13)$$

Ensuite, d'après (3.6), (3.7) et (3.13), la matrice G peut être choisie comme suit :

$$G = (J_e J_l)^T \quad (3.14)$$

3.2.2 Modélisation de frottement

La force (ou la résultante des forces) de frottement f_f (voir figure 19); qui existe(nt) entre l'élément final du manipulateur et la surface (ou l'ensemble des surfaces) de contact; introduite dans la relation (3.4) sera exprimée en fonction de la force normale f_n , donnée par la relation (3.3). En effet, nous supposons que la force de frottement est directement proportionnelle à la force normale de contact pendant le glissement [235]. En plus, les différentes amplitudes de cette force de frottement sont intégrées à partir du modèle de *LuGre*. Dans le cas d'une seule surface de contact (*i.e.* $m = 1$), et sans perte de généralité, nous décrivons le modèle dynamique de frottement associé au mouvement de l'effecteur sur une surface² de dimension 2 par [235] :

$$f_f = \lambda \mu \quad (3.15)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ désigne l'amplitude de la force normale de contact telle qu'introduite dans (3.3) sous sa forme générale, et $\mu = \begin{pmatrix} \mu_x & \mu_y \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^2$ désigne le vecteur coefficient normalisé de la force de frottement dans les directions perpendiculaires³ x et y qui engendrent le sous-espace de mouvement [217].

Dans la même perspective de l'approche introduite par Kankaanranta et Koivo [154], nous exprimons la force de frottement de l'effecteur sur la surface de contact à partir de la

² Cf. paragraphe 2.2.3.2 dans le chapitre 2.

³ Cf. paragraphe 2.2.3.2 dans le chapitre 2.

relation (3.4) comme suit :

$$f_t = G_\mu^T \cdot \lambda = G^T \cdot \mu \lambda \quad (3.16)$$

où $G_\mu \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice coefficient de frottement (en particulier, ici, G_μ est une matrice-ligne de \mathbb{R}^2).

Dans la suite, nous rappelons le modèle bidimensionnel de *LuGre* [217] introduit dans le chapitre 2. Soit $z = \begin{pmatrix} z_x & z_y \end{pmatrix}^T$ le vecteur déformation interne des lames au point de contact décomposé dans les directions respectives x et y et $v_c = \begin{pmatrix} v_{cx} & v_{cy} \end{pmatrix}^T$ le vecteur vitesse tangentielle de l'effecteur sur la surface de contact, tel que présenté dans (3.5). Le modèle bidimensionnel de frottement de *LuGre* s'écrit comme suit [217] :

$$\dot{z} = -\frac{\|M_c^2 v_c\|}{g(v_c)} M_c^{-2} \Sigma_0 z + v_c \quad (3.17)$$

et

$$\mu = \Sigma_0 z + \Sigma_1 \dot{z} + \Sigma_v v_c \quad (3.18)$$

avec

$$g(v_c) = \frac{\|M_c^2 v_c\|}{\|M_c v_c\|} + \left(\frac{\|M_s^2 v_c\|}{\|M_s v_c\|} - \frac{\|M_c^2 v_c\|}{\|M_c v_c\|} \right) e^{-\frac{\|v_c\|^2}{v_s^2}} \quad (3.19)$$

où $\Sigma_0 = \mathbf{diag}(\sigma_{0x}, \sigma_{0y})$, $\Sigma_1 = \mathbf{diag}(\sigma_{1x}, \sigma_{1y})$, $\Sigma_v = \mathbf{diag}(\sigma_{vx}, \sigma_{vy})$, $M_c = \mathbf{diag}(\mu_{cx}, \mu_{cy})$, $M_s = \mathbf{diag}(\mu_{sx}, \mu_{sy})$ et v_s sont les paramètres de frottement de *LuGre* dans les directions x et y . Et, nous considérons les hypothèses suivantes [20, 76, 238] :

H3.1 Le vecteur déformation interne des lames z est non mesurable.

H3.2 Les paramètres du modèle de *LuGre* sont supposés fixes et connus *a priori*.

3.3 Stratégie de commande hybride d'un système robotique sous frottement de contact

En considérant la référence de position et vitesse exprimée dans l'espace cartésien opérationnel, nous procédons au préalable à une transformation de ces trajectoires dans l'espace

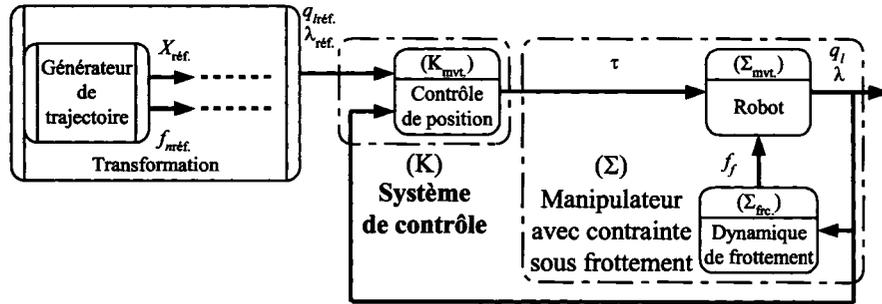


Figure 21 Schéma de base de contrôle hybride de position/force de robot avec contrainte sous frottement

articulaire par l'intermédiaire des modèles, géométrique et cinématique, inverses (voir figure 21). L'approche de contrôle que nous allons développer est basée sur le principe général de dualité de commande de position et de force et celui d'orthogonalité des sous-espaces respectifs de déplacement et de force de réaction du robot en contact avec le milieu de contrainte [238].

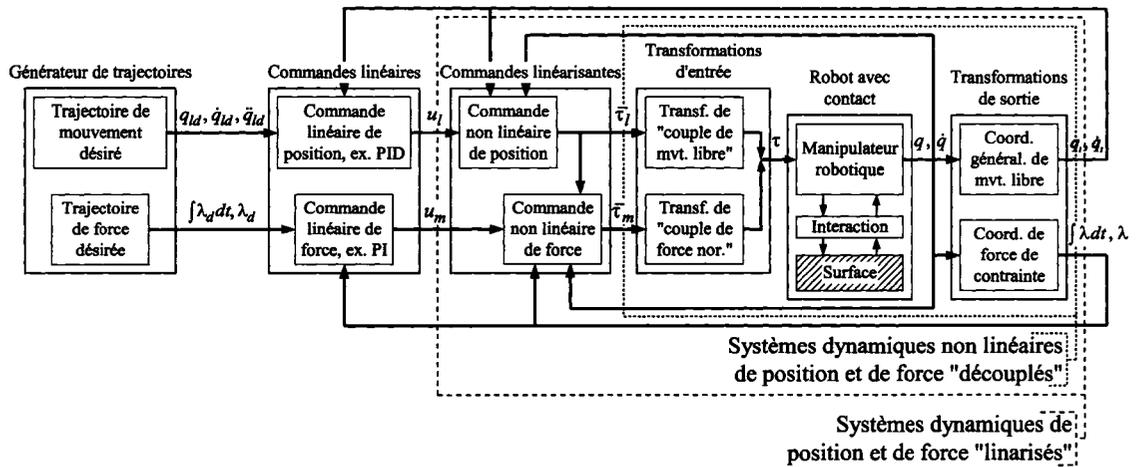


Figure 22 Schéma-bloc de la commande hybride classique de position/force d'un robot avec contact

Considérons un système de n coordonnées généralisées soumis à m contraintes holonomiques. Il y a $(n - m)$ coordonnées généralisées linéairement indépendantes (voir figure 22); qui sont utilisées pour projeter la dynamique du système dans le sous-espace arti-

culaire réduit de mouvement [141]. La technique de couple pré-calculé (linéarisation par *feed-back*) peut être ainsi établie pour linéariser le sous-système de mouvement. Ensuite, un contrôle de force vient compléter la stratégie.

Dans le cas de contact sans frottement entre le manipulateur et le milieu de contact, la stratégie de contrôle hybride, basée essentiellement sur la technique de couple pré-calculé classique (voir figure 22) permet d'atteindre la convergence globale de suivi [138, 141]. Par contre, pour tenir compte des aspects de frottement impliqués dans le contact effecteur/surface, il est indispensable de modifier la technique de contrôle (voir figure 23) pour trouver la solution et garantir la convergence de l'erreur de suivi (*i.e.* la stabilité du système); en particulier si le frottement est régi par le modèle dynamique de *LuGre*. Nous proposons une nouvelle forme de linéarisation judicieusement choisie pour transformer les dynamiques respectives de position et de force (voir figure 23) en tenant compte du modèle dynamique de frottement de *LuGre* [238]. Dans le présent travail, nous supposons que le modèle dynamique est parfaitement connu (ou exact) et nous ne traitons pas le cas des perturbations éventuelles des termes dynamiques (d'inertie, de *Coriolis*, de gravité ou encore de la matrice *Jacobienne*). Par la suite, nous procédons selon le schéma général introduit dans le chapitre 2 pour développer un contrôle de mouvement dans l'espace réduit de contact et une compensation dynamique de frottement par *feed-back*. L'ensemble est basé sur une loi de commande dynamique par retour de sortie linéaire. La synthèse de ce contrôleur sera effectuée par l'entremise d'une formulation LMI. Finalement, une action intégrale linéaire classique est proposée pour réguler la dynamique de force (voir figure 23).

3.3.1 Estimation de frottement

Admettons les hypothèses H3.1 et H3.2 citées dans la section précédente. Nous proposons l'estimateur de frottement suivant, basé sur le modèle bidimensionnel de *LuGre* [238]

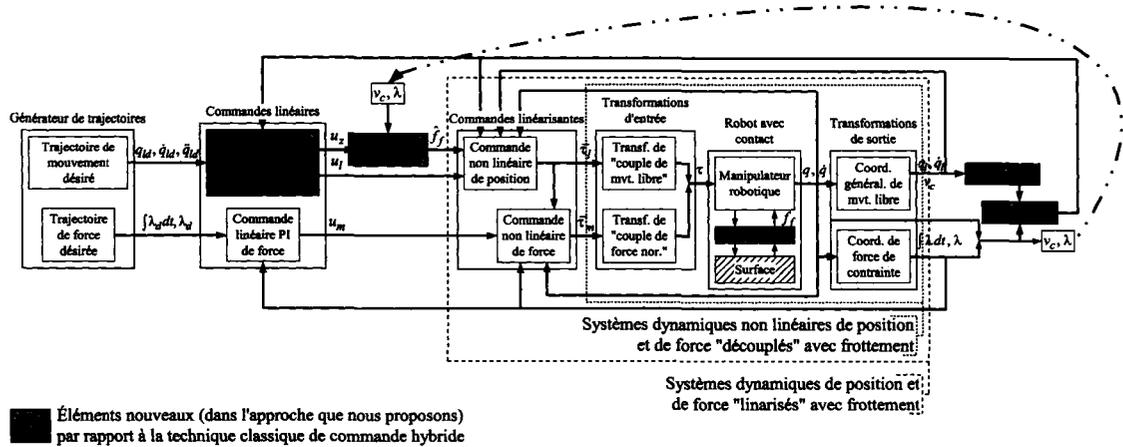


Figure 23 Schéma-bloc de la commande hybride modifiée de mouvement/force d'un robot avec contrainte sous frottement

introduit dans la section §3.2.2 :

$$\dot{\hat{z}} = -\frac{\|M_c^2 v_c\|}{g(v_c)} M_c^{-2} \Sigma_0 \hat{z} + v_c - u_z \quad (3.20)$$

et

$$\hat{f}_f = \lambda \hat{\mu} = \lambda (\Sigma_0 \hat{z} + \Sigma_1 \dot{\hat{z}} + \Sigma_v v_c) \quad (3.21)$$

où $g(v_c)$ est donnée par (3.19). $\hat{z} = \begin{pmatrix} \hat{z}_x & \hat{z}_y \end{pmatrix}^T$ désigne le vecteur d'état interne estimé, $\hat{\mu} = \begin{pmatrix} \hat{\mu}_x & \hat{\mu}_y \end{pmatrix}^T$ le vecteur coefficient de frottement estimé, $\hat{f}_f = \begin{pmatrix} \hat{f}_{fx} & \hat{f}_{fy} \end{pmatrix}^T$ le vecteur force de frottement estimé et $u_z = \begin{pmatrix} u_{zx} & u_{zy} \end{pmatrix}^T$ le vecteur correction de la déformation des lames. Cette correction représente un retour de sortie dynamique sur l'observateur à partir de l'ensemble des états mesurables du système de mouvement. La structure de cet observateur est basée, dans l'ensemble, sur le principe présenté dans [203, 217]; qui définit un *feed-back* direct sur l'observateur pour maintenir une évolution dynamique robuste de ce dernier vis-à-vis de la dynamique de mouvement. D'une part, cette structure d'observation en boucle fermée permet de mieux exploiter la propriété de passivité du modèle de frottement [203]. D'autre part, un observateur en boucle fermée reste plus robuste que celui de la même forme mais qui est introduit en boucle ouverte [239]. En principe, il permet d'agir d'une meilleure façon vis-à-vis des performances en régime transitoire.

Notons $\tilde{z} = z - \hat{z}$, $\tilde{\mu} = \mu - \hat{\mu}$ et $\tilde{f}_f = f_f - \hat{f}_f$ les erreurs d'estimations respectives du modèle de frottement. En utilisant (3.15), (3.17), (3.18), (3.20) et (3.21), il convient d'écrire les équations d'erreurs d'estimation comme suit :

$$\dot{\tilde{z}} = -\frac{\|M_c^2 v_c\|}{g(v_c)} M_c^{-2} \Sigma_0 \tilde{z} + u_z \quad (3.22)$$

et

$$\tilde{f}_f = \lambda \tilde{\mu} = \lambda(\Sigma_0 \tilde{z} + \Sigma_1 \dot{\tilde{z}}) \quad (3.23)$$

Remarque 3.1 : L'application définie de u_z dans \tilde{z} , selon la relation (3.22), est dissipative en considérant la fonction de stockage $V(t) = \tilde{z}^T \tilde{z}$ [20, 238] (Cf. propriété 2.3 énoncé dans le chapitre 2 dans le cas de frottement unidimensionnel).

Nous verrons dans la suite l'utilité de cette propriété dans la réalisation de la stratégie de commande stabilisante.

3.3.2 Commande de position sous contrainte

3.3.2.1 Réduction du sous-espace de mouvement sous frottement

Dans cette section, nous appliquons un changement de variable [238] dans l'équation dynamique du robot sous contrainte pour : (a) scinder la dynamique de mouvement dans le sous-espace libre de celle de force normale appliquée sur la surface de contact; (b) linéariser les nouvelles structures réduites. Nous pré-multiplions⁴ la relation (3.1) par J_l^T , donnée par (3.12). En utilisant (3.3), (3.4), (3.10), (3.11) et (3.13) – (3.15), nous transformons la dynamique complète du robot libre en une autre réduite sous contrainte selon [141] :

$$\bar{\tau}_l = \bar{B}_l(q)\Gamma = \bar{M}_l(q)\ddot{q}_l + \bar{H}_l(\dot{q}_l, q) + \bar{G}_l(q)\lambda\mu \quad (3.24)$$

⁴ Il s'agit d'une multiplication matricielle à gauche.

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\tau}_l = J_l^T \tau \\ \bar{B}_l(q) = J_l^T B \\ \bar{M}_l(q) = J_l^T M(q) J_l \\ \bar{H}_l(\dot{q}_l, q) = J_l^T (M(q) \dot{J}_l \dot{q}_l + H(\dot{q}_l, q)) \\ \bar{G}_l(q) = G J_e J_l = G G^T \end{array} \right. \quad (3.25)$$

$\bar{G}_l(q)$ est une matrice symétrique et définie positive, si J_e est non singulière.

Dans la suite, étant donné $q_{ld}(t)$, $\dot{q}_{ld}(t)$ et $\ddot{q}_{ld}(t)$ respectivement la trajectoire désirée et ses dérivées première et deuxième exprimées dans l'espace articulaire réduit de mouvement. Notons $\tilde{q}_l = q_l - q_{ld}$ l'erreur de suivi. Nous supposons que la force de contact est non nulle (*i.e.* $\lambda \neq 0$). Soit $\nu > 0$. Et, nous posons le terme non stationnaire $\beta(t, q)$ et la variable dynamique χ selon :

$$\beta(t, q) = \frac{1}{\lambda(t)} \bar{G}_l^{-1}(q) \bar{M}_l(q) \text{ et } \chi = \dot{\tilde{q}}_l + \nu \tilde{q}_l \quad (3.26)$$

Nous proposons l'expression de couple pré-calculé suivante :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_l = & \bar{M}_l(q) (\ddot{q}_{ld} - \nu \dot{\tilde{q}}_l + \beta^{-1}(t, q) (u_l - \dot{\beta}(t, q) \chi + \nu \beta(t, q) \chi)) + \\ & \bar{H}_l(\dot{q}_l, q) + \bar{G}_l(q) \lambda(t) \hat{\mu} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Le terme u_l désigne l'action directe du contrôleur dynamique de mouvement obtenu par retour de sortie (appliqué sur les états mesurables du système de mouvement). L'expression (3.27) représente (voir figure 23) une version modifiée de celle de couple pré-calculé classique (voir figure 22) présentée dans la littérature [138, 141, 237]. Cette transformation est inspirée, intuitivement, de l'idée *célébrissime* de commande adaptative indirecte des robots introduite par Li et Slotine [29]. Dans cette nouvelle expression, nous tenons compte, en effet, de l'aspect d'estimation qui pourrait modifier le contexte de stabilisation de l'erreur de suivi de trajectoire. La différence majeure entre la loi de commande (3.27) et l'expression originale d'une commande de couple pré-calculé [138] réside dans le premier terme du membre de droite (*i.e.* celui qui multiplie $\bar{M}_l(q)$). Ce terme est introduit pour anéantir la plupart des termes non linéaires et non stationnaires du système

réduit de mouvement sous contrainte. En plus, il permet de compenser éventuellement les imprécisions dans l'estimation de la force de frottement.

Ensuite, nous proposons

$$\bar{q} = \beta(t, q)\chi \quad (3.28)$$

le nouveau vecteur d'état pour exprimer la dynamique d'erreur de position. Si nous substituons (3.27) dans (3.24), puis, nous dérivons l'expression (3.28), alors nous obtenons :

$$\dot{\bar{q}} = -\nu\bar{q} + u_l - \tilde{\mu} \quad (3.29)$$

où $\tilde{\mu}$ est l'erreur d'estimation du coefficient de frottement introduite dans (3.23).

Le changement de variable donné par (3.26) et (3.28) et la nouvelle expression du couple pré-calculé donnée par (3.27) permettent de formuler le problème par un ensemble de deux sous-systèmes inter-connectés passifs, respectivement linéaire et non linéaire (voir figure 24), grâce aux équations d'états (3.22), (3.23) et (3.29). Ainsi, par l'entremise de la propriété de passivité de la partie dynamique non linéaire, la stabilité de la partition linéaire est assurée par la propriété SPR en utilisant le théorème de passivité. Cette propriété sera par la suite étendue et traitée pour établir la synthèse des différents termes du contrôleur linéaire par retour de sortie dynamique proposé; en utilisant les outils des LMIs.

3.3.2.2 Commande linéaire de position

Considérons l'ensemble des dynamiques d'erreurs d'estimation de frottement (3.22) et (3.23) et de suivi de trajectoire de déplacement (3.29). Nous supposons le nouveau vecteur d'état dynamique \bar{q} mesurable, défini par les relations (3.26) et (3.28). Notons $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_l^T & u_z^T \end{pmatrix}^T$ le vecteur de commande où u_l et u_z sont respectivement introduits dans (3.27) et (3.20). La partition linéaire du système total; qui correspond à la dynamique d'erreur de mouvement; peut être exprimée par la représentation d'état suivante [238] :

$$\dot{\bar{q}} = \mathbf{A}\bar{q} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{B}_\mu(-\tilde{\mu}) \quad (3.30)$$

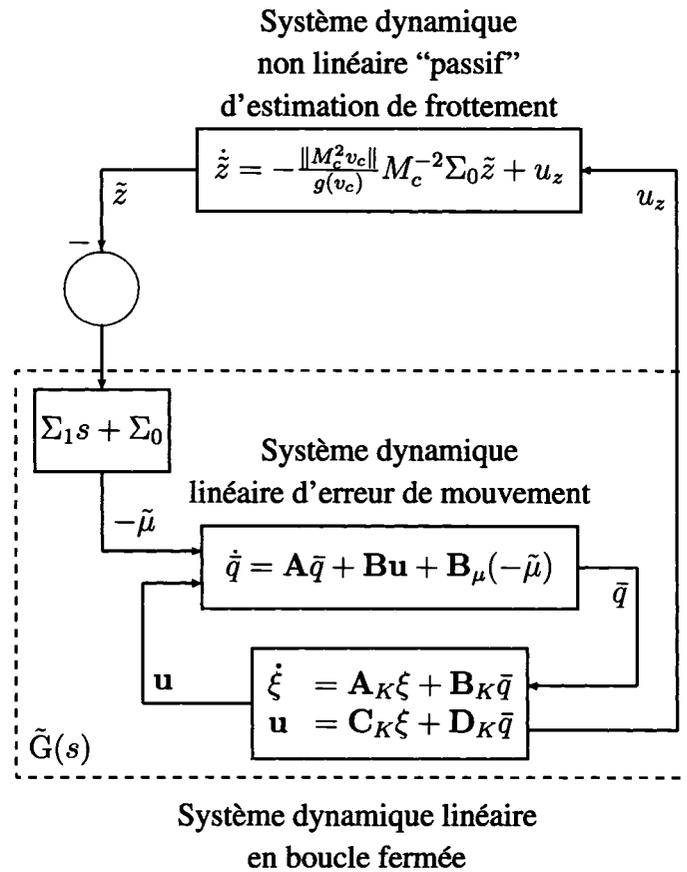


Figure 24 Schéma-bloc des dynamiques d'erreurs d'estimation et de suivi de trajectoire

avec

$$\mathbf{A} = -\nu \mathbf{I}_l, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_l & \mathbf{0}_l \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B}_\mu = \mathbf{I}_l \quad (3.31)$$

ν est le gain introduit (3.26). \mathbf{I}_l et $\mathbf{0}_l$ représentent respectivement la matrice identité et la matrice carrée nulle d'ordre l . Le vecteur de commande \mathbf{u} représente la sortie d'un contrôleur dynamique linéaire de rang plein (voir figure 24) représenté par les équations d'état et de sortie suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \mathbf{A}_K \xi + \mathbf{B}_K \bar{q} \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_K \xi + \mathbf{D}_K \bar{q} \end{cases} \quad (3.32)$$

où ξ désigne le vecteur d'état interne du contrôleur dynamique de dimension l et \bar{q} le vecteur d'état d'erreur mesurable donné par (3.26) et (3.28). \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K des matrices de $\mathbb{R}^{l \times l}$, \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K des matrices de $\mathbb{R}^{2l \times l}$.

La structure dynamique en boucle fermée, de l'erreur de position et de l'erreur d'estimation de frottement, est illustrée dans la figure 24. Dans la proposition suivante, nous établissons la représentation de cette structure pour déduire ensuite la condition de stabilité et sa preuve d'existence [238].

Proposition 3.1 : Étant donné $\tilde{G}(s)$ la matrice de transfert de la boucle fermée entre $-\tilde{z}$ et u_z (voir figure 24). $\tilde{G}(s)$ est un système propre qui peut être représenté par la réalisation $(\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D})$ donnée par [238] :

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_K & \mathbf{B}\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}, \tilde{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_z + \mathbf{B}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_z \\ \mathbf{B}_K\mathbf{D}_z \end{pmatrix}, \\ \tilde{C} &= \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{uz}\mathbf{D}_K & \mathbf{D}_{uz}\mathbf{C}_K \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{D} = \mathbf{D}_{uz}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_z \end{aligned} \quad (3.33)$$

avec $\mathbf{B}_z = \mathbf{B}_\mu\Sigma_0 + \mathbf{A}\mathbf{B}_\mu\Sigma_1$, $\mathbf{D}_z = \mathbf{B}_\mu\Sigma_1$ et $\mathbf{D}_{uz} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_l & \mathbf{I}_l \end{pmatrix}$.

Démonstration : Notons $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \bar{q} - \mathbf{D}_z(-\tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix}$ le vecteur d'état en boucle fermée associé à la réalisation (3.33). En utilisant l'expression de $\tilde{\mu}$ dans (3.23), puis (3.30) et (3.32), nous obtenons (3.33) (Cf. démonstration de la proposition 2.1 présentée dans le chapitre 2). ■

Remarque 3.2 : Le lien direct entre $-\tilde{z}$ et u_z (i.e. la matrice directe \tilde{D}) est obtenu grâce au changement de variable (3.28). Ce terme sera très utile pour assurer la stabilité exponentielle du système asservi.

Dans la suite, nous allons utiliser le théorème de passivité et aussi la propriété de passivité du modèle de *LuGre* pour déduire la condition sur le contrôleur qui garantit la stabilité du système en boucle fermée. Cette condition sera donnée par la propriété SPR de la partition linéaire du système asservi et traitée ensuite par une formulation LMI.

3.3.2.3 Condition de stabilité et stabilité exponentielle

Considérons la partition linéaire de la dynamique d'erreur de position, donnée par la réalisation (3.33), et admettons que l'estimation de coefficient de frottement est donnée par

(3.22) et (3.23). Le système total est représenté par la figure 24, dont les conditions de stabilité sont discutées dans la proposition suivante [238] :

Proposition 3.2 : Les erreurs de suivi et d'estimation sont globalement exponentiellement stables s'il existe une matrice $\tilde{\mathbf{P}}_s \in \mathbb{R}^{2l \times 2l}$ symétrique et définie positive (*i.e.* $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$), telle que [219, 238] :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{1}{\epsilon^2} (\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}}^T) \end{pmatrix} < 0 \quad (3.34)$$

où ϵ est une constante positive de conditionnement. \star remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Nous reprenons la définition du vecteur d'état $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \bar{q} - \mathbf{D}_z(-\tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix}$ associé à la réalisation (3.33). Soit $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ -\tilde{z} \end{pmatrix}$ le vecteur d'état du système total en boucle fermée. Et, nous introduisons la fonction candidate de *Lyapunov* (définie positive) :

$$V = \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{X}} + \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{z}^T \tilde{z}$$

En suivant le même raisonnement appliqué dans la démonstration de la proposition 2.2 dans le chapitre 2 et sachant que $g(v_c) > 0$ et $M_c^{-2} \Sigma_0 > 0$ (*i.e.* définie positive), nous constatons que la dérivée totale de V , par rapport au temps t , le long des trajectoires du système est définie négative si la condition (3.34) est vraie. Par conséquent, les variables internes du système bouclé $\tilde{\mathbf{X}}$ et \tilde{z} sont bornées et convergent exponentiellement vers zéro [146]. Or, d'après la définition de $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \bar{q} - \mathbf{D}_z(-\tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix}$, \bar{q} tend vers zéro. Notons que les erreurs dynamiques $\tilde{\mathbf{X}}$ et \tilde{q}_i , données par (3.22), (3.23), (3.26), (3.28), (3.29) et (3.32), peuvent être exprimées comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{X}}} = f_1(\tilde{\mathbf{X}}) \\ \dot{\tilde{q}}_i = f_2(t, \tilde{\mathbf{X}}, \tilde{q}_i) = -\nu \tilde{q}_i + \beta(t, q)^{-1} \bar{q} \end{cases}$$

avec f_1 et f_2 des fonctions continues et différentiables, telles que $f_1(t, 0) = f_2(t, 0, 0) = 0, \forall t \geq 0$. Notons que leurs dérivées par rapport à leurs variables respectives sont bornées. Par conséquent, $\dot{\tilde{q}}_l = f_2(t, 0, \tilde{q}_l) = -\nu\tilde{q}_l$ est exponentiellement stable. Donc, le système total donné par f_1 et f_2 est exponentiellement stable (voir Théorème⁵ 103 dans [146]), *i.e.* \tilde{q}_l tend exponentiellement vers zéro. Finalement, \tilde{f}_f converge vers zéro [146], puisque \tilde{f}_f est donnée par (3.22) et (3.23). ■

Remarque 3.3 : Le coefficient ϵ (Cf. remarque 2.2 notée dans le chapitre 2) est choisi suffisamment petit pour garantir un bon conditionnement de la matrice donnée dans l'inégalité (3.34).

Néanmoins, l'inconvénient de cette condition de stabilité est lié à la vitesse de convergence du vecteur des erreurs vers zéro; qui reste mal posée. Pour garantir, en effet, une stabilité exponentielle de l'ensemble du système en boucle fermée (voir figure 24); *i.e.* (3.22), (3.23) et (3.33); nous remplaçons la condition SPR donnée dans (3.34) par le résultat suivant :

Proposition 3.3 : Soit $\epsilon > 0$ et $0 < \alpha < \nu$ (ν est le gain introduit dans (3.29)). Les erreurs de suivi et d'estimation convergent exponentiellement vers zéro, avec un taux de décroissance α , s'il existe une matrice $\tilde{\mathbf{P}}_s \in \mathbb{R}^{2l \times 2l}$ symétrique et définie positive (*i.e.* $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$), telle que [238] :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + 2\alpha \tilde{\mathbf{P}}_s & * \\ \tilde{\mathbf{B}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon^2} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{1}{\epsilon^2} (\tilde{\mathbf{D}} + \tilde{\mathbf{D}}^T) + 2\frac{\alpha}{\epsilon^2} \mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.35)$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Nous considérons les changements de variables suivants : $\bar{\mathbf{X}} = e^{\alpha t} \tilde{\mathbf{X}}$, $\bar{z} = e^{\alpha t} \tilde{z}$ et $\bar{u}_z = e^{\alpha t} u_z$. Et, nous introduisons la fonction candidate de *Lyapunov* (définie positive) :

$$V = \bar{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \bar{\mathbf{X}} + \frac{1}{\epsilon^2} \bar{z}^T \bar{z}$$

⁵ Cf. théorème de stabilité des systèmes hiérarchiques dans [146].

En suivant le même raisonnement appliqué dans la démonstration de la proposition 2.3, nous constatons que la dérivée totale de V , par rapport au temps t , le long des trajectoires du système, est définie négative, si (3.35) est vraie. Par conséquent, $\bar{\mathbf{X}}$ et $\bar{\mathbf{z}}$ sont globalement quadratiquement stables. Ensuite, $\tilde{\mathbf{X}} = e^{-\alpha t} \bar{\mathbf{X}}$ et $\tilde{\mathbf{z}} = e^{-\alpha t} \bar{\mathbf{z}}$ convergent vers zéro, au moins, exponentiellement avec un taux de décroissance α [146, 216]. La suite de la démonstration est similaire à celle de la proposition 3.2. ■

Nous traiterons le problème de synthèse du contrôleur linéaire par les outils LMI.

3.3.3 Formulation LMI du problème

3.3.3.1 Conception à multi-objectifs

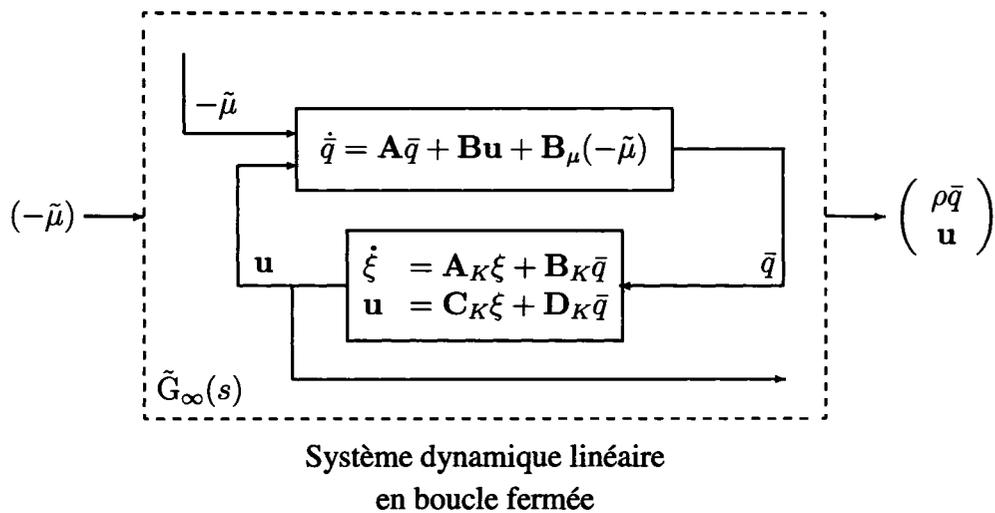


Figure 25 Schéma-bloc de système linéaire $\tilde{G}_\infty(s)$

Considérons la partition linéaire $\tilde{G}(s)$ donné dans la proposition 3.1 (voir figure 24). Nous appliquons la conception du contrôleur dynamique par retour de sortie de rang plein (3.32) qui assure la condition exponentielle (3.35). En plus, nous choisissons d'assigner les pôles du système de transfert en boucle fermée $\tilde{G}(s)$ dans une région de stabilité réduite [219]. Ces contraintes supplémentaires sont introduites pour fixer, en particulier, les

performances de la réponse transitoire comme le temps de réponse, le dépassement et les limites de la réponse en fréquence de $\tilde{G}(s)$. Outre cela, un critère de performance⁶ de type H_∞ est mis à l'épreuve. Il est associé avec les aspects du système dans le domaine fréquentiel et offre une certaine maîtrise du comportement transitoire et de l'énergie d'effort de commande fourni (voir figure 25). Nous allons fixer simultanément le critère de performance H_∞ et les spécifications transitoires de la réponse de la partition linéaire et les combiner avec la condition de stabilité exponentielle du système complet. En particulier, pour prévenir contre les dynamiques rapides (*i.e.* modes de fréquences oscillatoires) du contrôleur [218], nous considérons le placement des pôles de la boucle fermée $\tilde{G}(s)$ dans un disque de rayon r centré à l'origine⁷. Et, nous suggérons de minimiser la norme H_∞ du système de transfert en boucle fermée $\tilde{G}_\infty(s)$ entre $(-\tilde{\mu})$ et $\begin{pmatrix} \rho\bar{q} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}$. Cette optimisation peut être interprétée comme étant un compromis entre la performance de rejet de perturbation et la minimisation de l'effort de commande. La caractérisation complète de l'ensemble de ces critères multi-objectifs peut être exprimée comme suit [238] :

Problème 3.1 : Minimiser γ sujet à $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$, $\tilde{\mathbf{P}}_r = \tilde{\mathbf{P}}_r^T > 0$, $\tilde{\mathbf{P}}_\infty = \tilde{\mathbf{P}}_\infty^T > 0$, \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K qui satisfont respectivement (3.35) et [219, 238]

$$\begin{pmatrix} -r\tilde{\mathbf{P}}_r & \star \\ \tilde{\mathbf{P}}_r\tilde{\mathbf{A}}^T & -r\tilde{\mathbf{P}}_r \end{pmatrix} < 0 \quad (3.36)$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{A}}^T\tilde{\mathbf{P}}_\infty + \tilde{\mathbf{P}}_\infty\tilde{\mathbf{A}} & \star & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}_\infty^T\tilde{\mathbf{P}}_\infty & -\gamma\mathbf{I} & \star \\ \tilde{\mathbf{C}}_\infty & 0 & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.37)$$

⁶ Dans le cas scalaire, la norme H_∞ est la valeur maximale du gain en fréquence, *i.e.*

$\|H(s)\|_\infty \triangleq \sup_\omega |H(j\omega)|$. Concrètement, si la puissance du signal d'entrée est bornée, $\|H\|_\infty$ correspond au pire cas; où toute la puissance du signal d'entrée est concentrée à la fréquence où le gain $|H(j\omega)|$ est maximal, d'où un écart (*i.e.* signal de sortie) d'amplitude maximale. Dans le cas multi-variable, $\|H(s)\|_\infty^2$ correspond à la puissance maximale observable sur le vecteur de sortie, dans le pire des cas, à la fréquence la plus défavorable et la répartition la plus défavorable d'une puissance totale unité sur les différentes composantes du signal d'entrée. Une optimisation H_∞ correspond donc à la recherche du minimum d'un maximum (minimax) [240, 241]; qui correspond à l'optimisation de la moyenne du carré du signal de sortie connue, en anglais, sous le nom de *root-mean-square* (RMS).

⁷ Cf. figure 15 dans la sous-section §2.4.3.2 dans le chapitre 2.

où

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_K & \mathbf{B}\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_\mu \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ et} \\ \tilde{\mathbf{C}}_\infty &= \begin{pmatrix} \mathbf{C}_\infty + \mathbf{D}_\infty\mathbf{D}_K & \mathbf{D}_\infty\mathbf{D}_K \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.38)$$

désignent les éléments de la réalisation de la boucle de transfert $\tilde{\mathbf{G}}_\infty(s)$; avec $\mathbf{C}_\infty = \begin{pmatrix} \rho\mathbf{I}_l \\ \mathbf{0}_{2l,l} \end{pmatrix}$ et $\mathbf{D}_\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{l,2l} \\ \mathbf{I}_{2l} \end{pmatrix}$. * remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Nous pouvons facilement trouver la formulation LMI d'optimisation H_∞ dans [26, 218, 231], par exemple. En général, dans ce genre de problème d'optimisation convexe de multi-objectifs, il est recommandé de trouver une solution satisfaisant la même matrice de *Lyapunov* $\tilde{\mathbf{P}}$ [218, 219]. Nous nous restreignons donc à la formulation *conservative* suivante [219, 238] :

Problème 3.2 : Minimiser γ sujet à $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T > 0$, \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K , tels que les systèmes en boucle fermée (3.33) et (3.38) satisfont (3.35) – (3.37), avec

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_r = \tilde{\mathbf{P}}_\infty \quad (3.39)$$

Remarque 3.4 : Cette contrainte⁸ est ajoutée pour assurer à nouveau la propriété de convexité du problème de minimisation à multi-objectifs 3.2 [218, 219]. Le critère H_∞ calculé dans ce cas représente une solution sous-optimale du problème (*Cf.* remarque 2.4).

3.3.3.2 Synthèse du retour de sortie

Les conditions de réalisation du contrôleur linéaire de position (3.32), données dans le problème 3.2, sont bilinéaires par rapport aux variables $\tilde{\mathbf{P}}$, \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K . Nous utilisons le changement de variable introduit dans [219] pour transformer ces BMIs⁹ en

⁸ La restriction supplémentaire (3.39) reste relativement peu sévère dans la résolution de ce type de problème [219]; comme cela a été souligné dans dans le chapitre 2 (*Cf.* remarque 2.4).

⁹ *Cf.* sous-section §2.4.3.3 dans le chapitre 2.

LMI. Comme dans le chapitre 2, partitionnons $\tilde{\mathbf{P}}$ et $\tilde{\mathbf{P}}^{-1}$ selon :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{S} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

avec $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ et telles que les matrices inversibles \mathbf{M} et \mathbf{N} satisfont [219]

$$\mathbf{M}\mathbf{N}^T = \mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{Q} \quad (3.41)$$

Soit les nouvelles variables d'états matricielles $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ et $\hat{\mathbf{D}}$ données par [219] :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{M}\mathbf{A}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{M}\mathbf{B}_K\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{C}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{D}_K\mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{M}\mathbf{B}_K + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{D}_K \\ \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{D}_K\mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_K \end{cases} \quad (3.42)$$

À partir de [219], nous déduisons le résultat suivant [238] :

Proposition 3.4 : Il existe un contrôleur dynamique linéaire par retour de sortie (3.32) et une matrice $\tilde{\mathbf{P}} \in \mathbb{R}^{2l \times 2l}$ symétrique et définie positive, (i.e. $\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T > 0$), qui satisfont (3.35) – (3.37) et (3.39) si et seulement si, il existe des matrices $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T > 0$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T > 0$, $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ et $\hat{\mathbf{D}}$ qui satisfont les LMIs suivantes [238] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \star \\ \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} > 0 \quad (3.43)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2\alpha\mathbf{Q} & \star & \star \\ a_{21} + 2\alpha\mathbf{I} & a_{22} + 2\alpha\mathbf{P} & \star \\ \mathbf{B}_z^T + \mathbf{D}_z^T\hat{\mathbf{D}}^T\mathbf{B}^T - \frac{1}{\epsilon^2}\mathbf{D}_{uz}\hat{\mathbf{C}} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.44)$$

$$\begin{pmatrix} -r\mathbf{Q} & \star & \star & \star \\ -r\mathbf{I} & -r\mathbf{P} & \star & \star \\ \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} & \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}} & -r\mathbf{Q} & \star \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{P}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}} & -r\mathbf{I} & -r\mathbf{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.45)$$

et

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * \\ a_{21} & a_{22} & * & * \\ \mathbf{B}_\mu^T & \mathbf{B}_\mu^T \mathbf{P} & -\gamma \mathbf{I} & * \\ \mathbf{C}_\infty \mathbf{Q} + \mathbf{D}_\infty \hat{\mathbf{C}} & \mathbf{C}_\infty + \mathbf{D}_\infty \hat{\mathbf{D}} & 0 & -\gamma \mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (3.46)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} + (\mathbf{B}\hat{\mathbf{C}})^T \\ a_{21} &= \hat{\mathbf{A}} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}})^T \\ a_{22} &= \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}}^T \\ a_{32} &= \mathbf{B}_z^T \mathbf{P} + \mathbf{D}_z^T \hat{\mathbf{B}}^T - \frac{1}{\epsilon^2} \mathbf{D}_{uz} \hat{\mathbf{D}} \\ a_{33} &= -\frac{1}{\epsilon^2} \mathbf{D}_{uz} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{D}_z - \frac{1}{\epsilon^2} \mathbf{D}_z^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{D}_{uz}^T + \frac{2\alpha}{\epsilon^2} \mathbf{I} \end{aligned}$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Comme dans la démonstration de la proposition 2.5 dans le chapitre 2, nous considérons la matrice de rang plein $\tilde{\Pi}$ suivante [219] :

$$\tilde{\Pi} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{I} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

En multipliant la matrice $\tilde{\mathbf{P}}$ à gauche et à droite respectivement par $\tilde{\Pi}^T$ et $\tilde{\Pi}$ et en utilisant (3.41), la condition $\tilde{\mathbf{P}} > 0$ devient (3.43). L'inégalité (3.44) est obtenue en multipliant (3.35) à gauche et à droite respectivement par $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, \mathbf{I})$ et $\text{diag}(\tilde{\Pi}, \mathbf{I})$ et en utilisant les changements des variables (3.42). L'inégalité (3.45) est obtenue en multipliant (3.36) à gauche et à droite respectivement par $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, \tilde{\Pi}^T)$ et $\text{diag}(\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi})$. Et, L'inégalité (3.46) est obtenue en multipliant (3.37) à gauche et à droite respectivement par $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, \mathbf{I}, \mathbf{I})$ et $\text{diag}(\tilde{\Pi}, \mathbf{I}, \mathbf{I})$, en utilisant, à chaque fois, les changements des variables (3.42). ■

Les matrices \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K sont obtenues à partir de (3.42). Les LMIs (3.43) – (3.46) peuvent être résolues en utilisant la méthode d'optimisation du point intérieur [231] implémenté avec l'outil *LMI control toolbox* dans le logiciel MATLAB[®] [232].