

CHAPITRE 5

APPLICATION 2 : SYSTÈME D’ACTIONNEUR PNEUMATIQUE SOUS FROTTEMENT - MODÉLISATION ET COMPENSATION (DEUXIÈME PARTIE : CONTRÔLE DE POSITION)

« On peut sur les vérités de fait, se passer de la démonstration si l’on sait se servir de l’expérience. »

Roger Bacon (1214 – 1294)
Opus Majus

5.1 Introduction

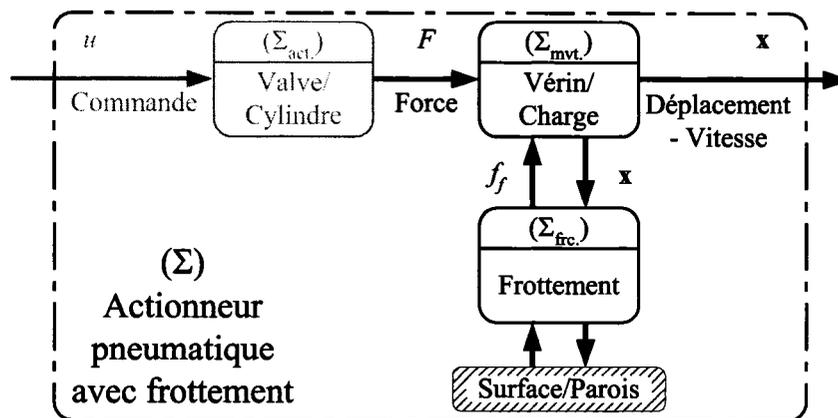


Figure 49 Servo-système de mouvement : Actionneur pneumatique sous frottement

Dans ce chapitre, nous développons la stratégie de contrôle de position de l’actionneur pneumatique (voir figure 49), tout en supposant que la dynamique de force (*i.e.* de pression) est bien entretenue comme nous avons pu le réaliser dans le chapitre précédent (*Cf.* chapitre 4). La performance minimale escomptée de la boucle interne de contrôle de force est la limitation de l’erreur de force dans un intervalle fini (*i.e.* erreur de force bornée). Bien évidemment, plus l’amplitude de cette erreur est petite, plus la réponse de la dynamique de position en boucle fermée est meilleure. Un autre facteur, qui sera nouveau dans la démarche développée dans ce chapitre, est l’effet de variation des paramètres de frottement.

En tout, nous allons présenter un schéma de contrôle de position et de compensation de frottement analogue à celui utilisé dans les chapitres 2 et 3 qui tient compte de ces aspects supplémentaires mentionnées ci-haut (effet de dynamique de force et effet de variation des paramètres de frottement). Nous verrons que ce schéma complexe renferme ceux de cas d'une masse simple ou d'un robot de contact. En effet, le schéma descriptif de la solution du problème, comme nous le verrons, sera conforme au schéma-bloc général détaillé de commande de système de mouvement et de compensation de frottement introduit dans la figure 9 dans le chapitre 2. Notre contribution dans ce chapitre est ainsi liée à la formulation du problème de contrôle de position de l'actionneur pneumatique et de compensation de frottement sous forme d'un problème de passivité de systèmes inter-connectés en utilisant un contrôleur linéaire ayant une structure dynamique flexible. Ce dernier est choisi pour résoudre simultanément le problème de stabilité, de placement de pôles et de robustesse vis-à-vis des perturbations et des incertitudes (dues essentiellement aux variations des paramètres de frottement) qui caractérisent ce genre de système en général. En outre, cette synthèse de commande des systèmes pneumatiques est élaborée principalement par l'entremise du formalisme LMI.

5.2 Modélisation de la partie mécanique d'un actionneur pneumatique

Le système que nous considérons (voir figures 49 et 50) consiste en un cylindre pneumatique alimenté en air comprimé par l'intermédiaire d'une servo-valve. Si nous notons par x , \dot{x} et \ddot{x} respectivement la position, la vitesse et l'accélération du piston, alors nous décrivons la dynamique de déplacement de l'assemblage {piston + tige + charge} sous l'influence du frottement dynamique f_f par [159, 257] :

$$m_a \ddot{x} = F - f_f \quad (5.1)$$

où m_a désigne la masse de l'assemblage {piston + tige + charge}, F la force produite par l'actionneur pneumatique, *i.e.* $F = P_l S_l - P_r S_r$ (voir figure 50). F est obtenue par l'équation d'état, non linéaire et non stationnaire, à contrôle affine et incertitudes structurées,

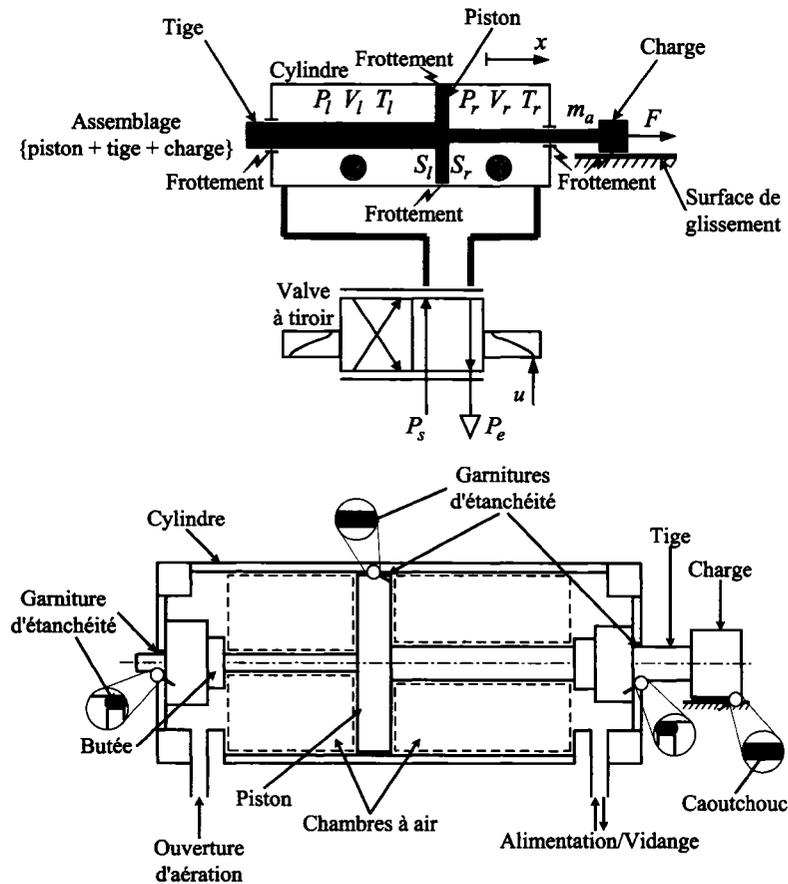


Figure 50 Description schématique d'un système pneumatique

donnée par (4.1) – (4.8) (Cf. chapitre 4) [32, 33, 247, 248]. En respectant le schéma de contrôle de force présenté dans le chapitre 4, nous représentons les variations de la force de frottement, citée dans l'équation (5.1), par le modèle de frottement de *LuGre*¹, selon [20, 257] :

$$\dot{z} = -\frac{\sigma_0 |\dot{x}|}{g(\dot{x})} z + \dot{x} \quad (5.2)$$

et

$$f_f = \sigma_0 z + \sigma_1 \dot{z} + \sigma_v \dot{x} \quad (5.3)$$

où la variable d'état interne de frottement z décrit la déformation relative des aspérités des surfaces de contact piston-garniture d'étanchéité-cylindre, tige-garniture d'étanchéité-

¹ Voir sous-section §2.2.3.2 dans le chapitre 2.

cyindre et charge-surface de glissement (voir figure 50). Le paramètre σ_0 décrit la rigidité interne, σ_1 le coefficient d'amortissement interne et σ_v le coefficient de frottement visqueux. Le terme $g(\dot{x})$ représente la fonction finie de *Stribeck*, donnée par [20] :

$$g(\dot{x}) = f_c + (f_s - f_c) \cdot e^{-\frac{\dot{x}}{\dot{x}_s}} \quad (5.4)$$

Les termes f_c et f_s correspondent respectivement aux forces de frottement de *Coulomb* et de frottement statique, \dot{x}_s la vitesse relative de *Stribeck*. Dans la suite, nous assumons l'hypothèse suivante :

H5.1 Tous les paramètres dynamiques et statiques de ce modèle de frottement sont assujettis à des incertitudes et des variations; en raison de la variation de la vitesse relative, des états thermodynamiques (température, pression, *etc.*), de l'état de surface du matériau, des conditions de lubrification et d'étanchéité, et des forces normales entre les surfaces de contact [34, 106]. Par hypothèse, chaque paramètre est déterminé dans un intervalle fini, *i.e.*

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}_0 \leq \sigma_0 \leq \bar{\sigma}_0, \underline{\sigma}_1 \leq \sigma_1 \leq \bar{\sigma}_1, \underline{\sigma}_v \leq \sigma_v \leq \bar{\sigma}_v, \\ \underline{f}_c \leq f_c \leq \bar{f}_c, \underline{f}_s \leq f_s \leq \bar{f}_s \text{ et } \underline{\dot{x}_s} \leq \dot{x}_s \leq \bar{\dot{x}_s} \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.3 Commande de position d'un système d'actionneur pneumatique

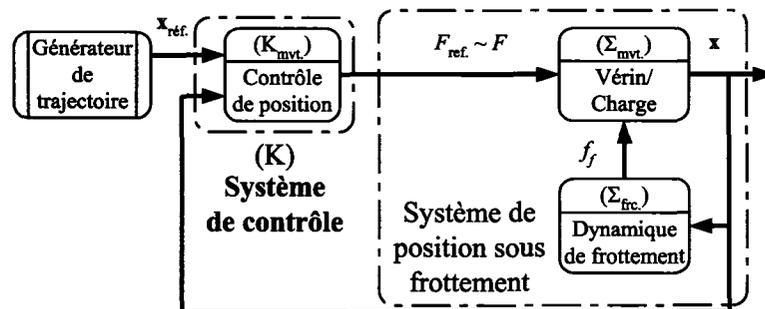


Figure 51 Schéma de base de contrôle de position

Dans cette section, nous introduisons le schéma de contrôle de position de l'actionneur pneumatique opérant sous frottement (voir figure 51). La technique de compensation de

frottement, développée ici, tient compte des variations (*i.e.* incertitudes) des paramètres de frottement. Nous établissons dans ce cas le dispositif de stabilisation et ses conditions qui représentent le maillon principal de la conception à multi-objectifs du contrôleur. Nous allons déduire le schéma de synthèse d'un retour de sortie dynamique et linéaire par le formalisme LMI, comme dans les chapitres 2 et 3. La démarche proposée repose sur les résultats de la commande de force présentés dans le chapitre précédent (voir figure 52) [32, 247, 250, 256]². Pour ce faire, nous considérons l'hypothèse suivante :

H5.2 La trajectoire désirée de position, noté x_d , est suffisamment lisse³ et bornée.

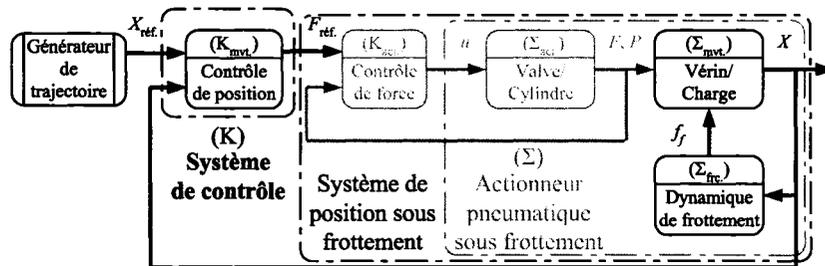


Figure 52 Schéma de base contrôle de position, utilisant une boucle interne de contrôle de force

5.3.1 Compensation de frottement

L'objectif de la commande est de concevoir un contrôleur de suivi de trajectoire de mouvement sous frottement (voir figures 52 et 53), qui permet d'assurer un meilleur compromis entre les conditions de stabilité et les performances transitoires et de rejet des perturbations. Admettons que les paramètres du modèle de frottement varient⁴ dans des intervalles finis, *i.e.* (5.5), dont les limites sont connues *a priori*.

² Ces contributions sont soit publiées soit soumises pour la révision et la publication au moment de la rédaction de cette thèse.

³ Cf. hypothèse H2.1 dans le chapitre 2.

⁴ Cf. caractéristique C2.4 dans la sous-section §2.2.3.2 dans le chapitre 2.

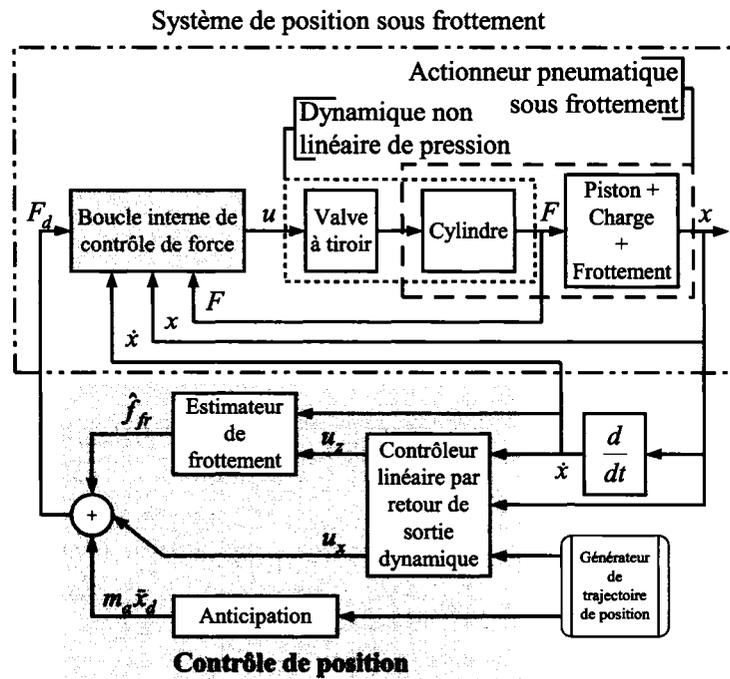


Figure 53 Schéma-bloc de la stratégie proposée de contrôle de position d'un actionneur pneumatique

Pour compenser l'effet de frottement, nous utilisons un observateur dynamique de frottement par *feed-back* basé sur le modèle nominal et approximatif de *LuGre*, selon :

$$\dot{\hat{z}} = -\frac{\sigma_{0n}|\dot{x}|}{g_n(\dot{x})}\hat{z} + \dot{x} - u_z \quad (5.6)$$

et

$$\hat{f}_{fr} = \sigma_{0n}\hat{z} + \sigma_{1n}\dot{\hat{z}} + \sigma_{vn}\dot{x} \quad (5.7)$$

avec

$$g_n(\dot{x}) = f_{cn} + (f_{sn} - f_{cn}) \cdot e^{-\frac{\dot{x}^2}{\dot{x}_{sn}^2}} \quad (5.8)$$

Le choix des valeurs nominales des paramètres de LuGre sera discuté plus loin dans cette section. u_z est le terme de *feed-back* introduit dans l'observateur dynamique de frottement et calculé en fonction des états mesurables du système. Par la suite, nous introduisons respectivement les erreurs de suivi de trajectoire $\tilde{x} = x - x_d$, où x_d la trajectoire désirée

du piston, et d'estimation de frottement $\tilde{z} = z - \hat{z}$ et $\tilde{f}_f = f_f - \hat{f}_f$. D'après (5.2) et (5.6), il convient

$$\dot{\tilde{z}} = -\frac{\sigma_{0n}|\dot{x}|}{g_n(\dot{x})}\tilde{z} + \tilde{y} + \tilde{y}_o \quad (5.9)$$

où \tilde{y} et \tilde{y}_o sont définies, par convention, pour établir le schéma de contrôle de position qui sera formulé dans la section suivante, selon :

$$\tilde{y} = u_z + \delta_1 \dot{\tilde{x}} \quad (5.10)$$

et

$$\tilde{y}_o = \delta_1 \dot{x}_d \quad (5.11)$$

où

$$\delta_1 = -\left(\frac{\sigma_0}{g(\dot{x})} - \frac{\sigma_{0n}}{g_n(\dot{x})}\right) \cdot \text{sgn}(\dot{x})z \quad (5.12)$$

est une incertitude bornée, puisque la fonction de *Stribeck* et l'état interne z du modèle de *LuGre* sont bornés⁵ [20]. Dans l'équation (5.9), nous représentons la dynamique d'erreur d'estimation en fonction de l'erreur de suivi. En fait, l'entrée \tilde{y} dans (5.9), définie dans (5.10), est issue du système linéaire qui décrit essentiellement la dynamique d'erreur de position; comme nous le verrons dans la section suivante. En outre, le terme \tilde{y}_o sera considéré comme une entrée exogène bornée d'après l'hypothèse H5.2. Cette formulation est judicieusement choisie pour assurer la propriété de dissipativité de la loi de transfert entre $\tilde{y} + \tilde{y}_o$ et \tilde{z} , donné par (5.9), en respectant la fonction de stockage $V(t) = \tilde{z}^2$ [257]. Cette propriété sera fondamentale pour établir la condition de stabilité du système asservi plus tard.

Notons par s l'opérateur de différentiation (*i.e.* de *Laplace*). Ainsi, nous décrivons l'erreur d'estimation de la force de frottement avec la différence entre (5.3) et (5.7) :

$$\tilde{f}_f = -(\sigma_{0n} + \sigma_{1n}s)[\tilde{z}_o - \tilde{z}] + \delta_2 \dot{\tilde{x}} \quad (5.13)$$

⁵ Cf. propriétés 2.1 et 2.2 dans le chapitre 2.

où $\delta_2 = \tilde{\sigma}_v$ est une incertitude bornée, et

$$\tilde{z}_o = -\frac{1}{\sigma_{0n} + \sigma_{1n}s} [\tilde{\sigma}_0 z + \tilde{\sigma}_v \dot{x}_d] - \frac{1}{\sigma_{0n} + \sigma_{1n}s} [\tilde{\sigma}_1 \dot{z}] \quad (5.14)$$

est un terme exogène, avec

$$\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 - \sigma_{0n}, \tilde{\sigma}_1 = \sigma_1 - \sigma_{1n} \text{ et } \tilde{\sigma}_v = \sigma_v - \sigma_{vn} \quad (5.15)$$

Par convention, les termes entre les crochets $[\cdot]$ représentent l'entrée du filtre qui est noté devant les crochets (donné ici par $\frac{1}{\sigma_{0n} + \sigma_{1n}s}$).

H5.3 En particulier, nous supposons que l'accroissement du paramètre $\tilde{\sigma}_1$ (i.e. $\dot{\tilde{\sigma}}_1$) est borné.

Comme z et \dot{x}_d sont supposées bornées, le premier terme de \tilde{z}_o dans (5.14) est bornée. En outre, en dépit du fait que \dot{z} n'est pas nécessairement bornée *a priori*, le second terme de \tilde{z}_o peut être présenté comme une résultante bornée de termes filtrés, puisque :

$$\frac{1}{\sigma_{0n} + \sigma_{1n}s} [\tilde{\sigma}_1 \dot{z}] = \frac{s}{\sigma_{0n} + \sigma_{1n}s} [\tilde{\sigma}_1 z] - \frac{1}{\sigma_{0n} + \sigma_{1n}s} [\dot{\tilde{\sigma}}_1 z] \quad (5.16)$$

en utilisant H5.3. La caractérisation des erreurs d'estimation de frottement proposée selon (5.9) – (5.14) nous permettra, dans la suite, d'établir la condition de stabilité de la dynamique complète de position en utilisant la passivité des systèmes linéaire et non linéaire inter-connectés. En fait, dans un premier temps, les signaux exogènes bornés \tilde{y}_o et \tilde{z}_o de ces systèmes seront considérés nuls, en particulier aux valeurs nominales des paramètres incertains $\sigma_0, \sigma_1, \sigma_v, f_c, f_s$ et \dot{x}_s ; i.e., d'après (5.12) et (5.14), $\tilde{y}_o = 0$ et $\tilde{z}_o = 0$ si $\tilde{\sigma}_0 = 0, \tilde{\sigma}_1 = 0, \tilde{\sigma}_v = 0, f_c = f_{cn}, f_s = f_{sn}$ et $\dot{x}_s = \dot{x}_{sn}$. Ensuite, nous allons investir une optimisation de type H_∞ pour atténuer les effets de ces signaux exogènes sur la performance de suivi.

Paramétrisation des valeurs limites et nominales des incertitudes Dans cette partie, nous justifions le choix des paramètres nominaux du modèle de *LuGre* que nous utilisons dans le schéma de compensation de frottement, pour ainsi définir les limites des variations

des incertitudes associées à ces paramètres. Ce choix est basé essentiellement sur l'optimisation des variations des incertitudes suivant leur utilisation dans les modèles dynamiques en boucle fermée tout en respectant les conditions physiques que doit respecter le modèle de frottement (par exemple, l'amplitude de la force statique doit être naturellement plus grande que celle de la force de *Coulomb*).

P5.1 Supposons que $|z(0)| \leq \frac{f_s}{\sigma_0} \leq \frac{\bar{f}_s}{\underline{\sigma}_0}$, alors $|z(t)| \leq \frac{\bar{f}_s}{\underline{\sigma}_0}$ [20]. En utilisant la propriété⁶ 2.1 et la relation (5.12), nous avons

$$\underline{\delta}_1 = \left(\frac{\underline{\sigma}_0}{\bar{f}_s} - \frac{\sigma_{0n}}{f_{cn}} \right) \frac{\bar{f}_s}{\underline{\sigma}_0} \leq \delta_1 \leq \bar{\delta}_1 = \left(\frac{\sigma_{0n}}{f_{cn}} - \frac{\underline{\sigma}_0}{\bar{f}_s} \right) \frac{\bar{f}_s}{\underline{\sigma}_0} \quad (5.17)$$

ou

$$\underline{\delta}_1 = \left(\frac{\sigma_{0n}}{f_{sn}} - \frac{\bar{\sigma}_0}{\underline{f}_c} \right) \frac{\bar{f}_s}{\underline{\sigma}_0} \leq \delta_1 \leq \bar{\delta}_1 = \left(\frac{\bar{\sigma}_0}{\underline{f}_c} - \frac{\sigma_{0n}}{f_{sn}} \right) \frac{\bar{f}_s}{\underline{\sigma}_0} \quad (5.18)$$

Notons que $\underline{\delta}_1 = -\bar{\delta}_1$.

P5.2 Pour réduire l'amplitude de la variation symétrique de l'incertitude δ_1 , nous considérons le problème de minimisation suivant, en fonction des valeurs nominales σ_{0n} , f_{cn} et f_{sn} :

Problème 5.1 : Minimiser $\bar{\delta}_1$; sujet aux expressions de $\bar{\delta}_1$ dans (5.17), (5.18),

$$\underline{f}_c \leq f_{cn} \leq f_{sn} \leq \bar{f}_s \quad (5.19)$$

et

$$0 < \underline{\sigma}_0 \leq \sigma_{0n} \leq \bar{\sigma}_0 \quad (5.20)$$

P5.3 Nous choisissons $\sigma_{vn} = \frac{\underline{\sigma}_v + \bar{\sigma}_v}{2}$. Alors, nous avons

$$\underline{\delta}_2 = -\bar{\delta}_2 \leq \delta_2 \leq \bar{\delta}_2 = \bar{\sigma}_v - \sigma_{vn} \quad (5.21)$$

P5.4 Nous choisissons librement $\sigma_{1n} \neq 0$.

P5.5 Pour normaliser les bornes des incertitudes δ_k ; $k = 1, 2$; nous considérons $\tilde{\delta}_k = \frac{\delta_k}{\bar{\delta}_k}$, i.e. $-1 \leq \tilde{\delta}_k \leq 1$. Notons par $\tilde{\Delta} = \text{diag}(\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2)$ la matrice diagonale des paramètres incertains normalisés.

⁶ Voir dans sous-section §2.2.3.2 dans le chapitre 2.

5.3.2 Commande de position

Étant donné (5.1) le système dynamique de position d'un actionneur pneumatique avec frottement, conformément à la conception de la boucle interne de contrôle de force ⁷ [250, 256], nous supposons ici qu'il existe une commande robuste (de force) telle que la force appliquée soit exprimée par

$$F = m_a \ddot{x}_d + \hat{f}_f + u_x + \tilde{F} \quad (5.22)$$

où m_a désigne la masse totale de l'assemblage {piston + tige + charge}, \ddot{x}_d la dérivée seconde de la trajectoire désirée, \hat{f}_f l'estimée de la force de frottement, exprimée par (5.6) – (5.8), u_x le terme de contrôle dynamique par *feed-back* des états mesurables du système de position, et \tilde{F} l'erreur de force qui est bornée, selon le résultat de la proposition 4.4 dans le chapitre précédent.

En substituant (5.22) dans (5.1), nous obtenons

$$m_a \ddot{\tilde{x}} = -\tilde{f}_f + u_x + \tilde{F} \quad (5.23)$$

Soit $\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} & \dot{\tilde{x}} \end{pmatrix}^T$ le vecteur d'état des erreurs mesurables et $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x & u_z \end{pmatrix}^T$ le vecteur d'entrée. Si nous substituons (5.13) dans (5.23), en utilisant (5.10) et P5.5 et en incluant la dynamique d'erreur d'observation (5.9), alors le système total peut être exprimé, dans ce cas, par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_p \mathbf{p} + (\mathbf{B}_0 + \mathbf{D}_z s)[\tilde{z}_o - \tilde{z}] + \mathbf{B}_F \tilde{F} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \dot{\tilde{z}} = -\frac{\sigma_{0n} |\dot{\tilde{x}}|}{g_n(\tilde{x})} \tilde{z} + \tilde{y} + \tilde{y}_o \\ \tilde{y} = \mathbf{D}_{yp} \mathbf{p} + \mathbf{D}_y \mathbf{u} \\ \mathbf{q} = \mathbf{C}_q \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{p} = \tilde{\mathbf{\Delta}} \mathbf{q}; \tilde{\mathbf{\Delta}} \text{ diagonale et } \|\tilde{\mathbf{\Delta}}\| \leq 1 \end{cases} \quad (5.24)$$

⁷ Cf. stratégie 2 détaillée dans le chapitre 4.

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_a} & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m_a} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma_{0n}}{m_a} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_p &= \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{B}_{p2} \end{pmatrix}, \mathbf{C}_q = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{q1} \\ \mathbf{C}_{q2} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}_y &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{D}_{yp} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{yp} & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{D}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sigma_{1n}}{m_a} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.25)$$

et

$$\mathbf{B}_{p2} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\bar{\delta}_2}{m_a} \end{pmatrix}, \mathbf{C}_{qk} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}, k = 1, 2 \text{ et } \mathbf{d}_{yp} = \bar{\delta}_1 \quad (5.26)$$

Déjà, le système complet (5.24) est formulé comme un ensemble de sous-systèmes interconnectés; dont un est linéaire et l'autre est non linéaire et passif. Ainsi, le lien direct entre l'entrée et la sortie de la partition linéaire sera traité par la propriété de passivité. Cette dernière sera investie pour établir la synthèse d'un contrôleur linéaire par retour de sortie dynamique par le biais du formalisme LMI. En effet, en se basant sur la propriété intrinsèque de passivité du modèle de *LuGre*, nous proposons de partitionner le système dynamique en boucle fermée en un sous-système linéaire et un autre non linéaire, selon l'idée établie à l'origine par Canudas *et al.* dans [20]. Cette idée a été limitée justement au cas d'un système, de masse simple, contrôlé par un *feed-back* statique PD et dont les paramètres de frottement sont fixes (sans oublier aussi l'extension du contrôleur au cas d'un retour de sortie dynamique [203] discutée dans le chapitre 2).

Notons que l'état interne de l'erreur d'estimation \tilde{z} est non mesurable⁸. Nous considérons le vecteur de commande \mathbf{u} comme étant la sortie d'un système de compensation dynamique par retour de sortie d'ordre plein (voir figure 53), représenté dans l'espace d'état comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= \mathbf{A}_K \xi + \mathbf{B}_K \tilde{\mathbf{x}} \\ \mathbf{u} &= \mathbf{C}_K \xi + \mathbf{D}_K \tilde{\mathbf{x}} \end{cases} \quad (5.27)$$

⁸ Cf. hypothèse H2.3 dans la section §2.4.1 dans le chapitre 2.

où ξ représente un vecteur d'état bidimensionnel du contrôleur dynamique et \tilde{x} le vecteur d'état mesurable de (5.24). \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K sont des matrices de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$

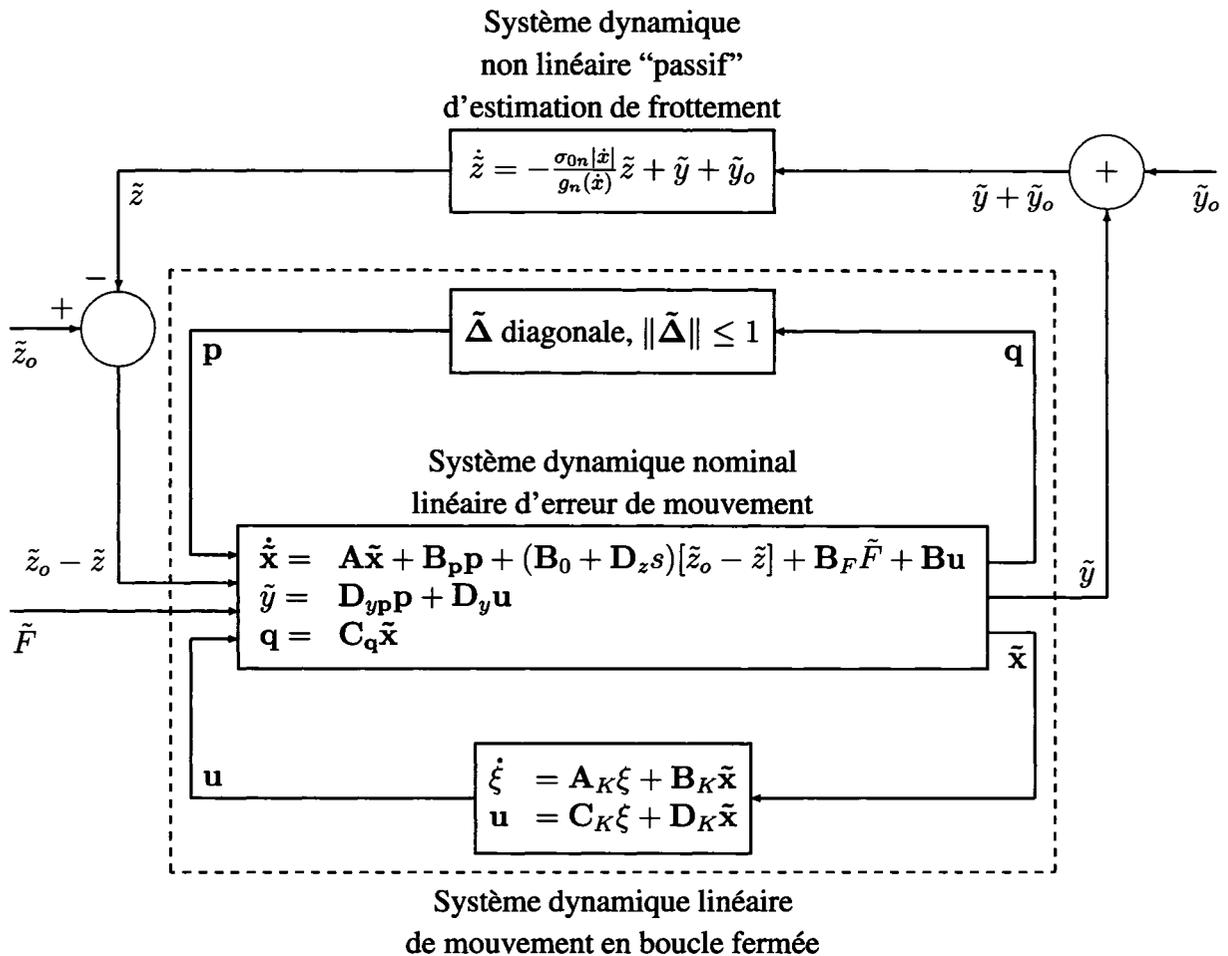


Figure 54 Systèmes inter-connectés des dynamiques d’erreurs de position et d’estimation de frottement

La structure de *feed-back* de la dynamique d’erreur de mouvement avec la dynamique non linéaire d’estimation de frottement est donnée par la figure 54. Dans la proposition suivante, nous proposons la représentation d’état de la partie dynamique linéaire. L’objectif de cette représentation (voir figure 54 et Cf. proposition 5.1) est d’établir la condition de stabilité de l’ensemble du système en boucle fermée en se basant sur les principes d’in-

terconnexion (entre la partie linéaire que nous représentons dans cette proposition et le sous-système non linéaire donné par (5.9)) et de passivité [257] :

Proposition 5.1 : La partition linéaire du système en boucle fermée (5.24) – (5.27) (voir figure 54) peut être représentée par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{X}}} &= \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}_p\tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{B}}_z(\tilde{z}_o - \tilde{z}) + \tilde{\mathbf{B}}_F\tilde{F} \\ \tilde{\mathbf{q}} &= \tilde{\mathbf{C}}_q\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz}(\tilde{z}_o - \tilde{z}) \\ \tilde{y} &= \tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{d}}_{yz}(\tilde{z}_o - \tilde{z}) + \tilde{\mathbf{D}}_{yp}\tilde{\mathbf{p}} \end{cases} \quad (5.28)$$

avec

$$|\tilde{p}_k| \leq |\tilde{q}_k|; k = 1, 2 \quad (5.29)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{D}_K & \mathbf{B}\mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_z = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_z + \mathbf{B}\mathbf{D}_K\mathbf{D}_z \\ \mathbf{B}_K\mathbf{D}_z \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{B}}_p &= \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}}_{p_2} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{B}}_F = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_F \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_y\mathbf{D}_K & \mathbf{D}_y\mathbf{C}_K \end{pmatrix}, \\ \tilde{\mathbf{C}}_q &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}_{q_1} \\ \tilde{\mathbf{C}}_{q_2} \end{pmatrix}, \tilde{\mathbf{d}}_{yz} = \mathbf{D}_y\mathbf{D}_K\mathbf{D}_z \text{ et } \tilde{\mathbf{D}}_{qz} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_{q_1z} \\ \tilde{\mathbf{d}}_{q_2z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.30)$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}_{p_2} &= \begin{pmatrix} \mathbf{B}_{p_2} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{B}_z = \mathbf{B}_0 + \mathbf{A}\mathbf{D}_z, \tilde{\mathbf{C}}_{q_k} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_{q_k} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \text{ et} \\ &\tilde{\mathbf{d}}_{q_kz} = \mathbf{C}_{q_k}\mathbf{D}_z \end{aligned} \quad (5.31)$$

Démonstration : Soit $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} - \frac{\sigma_{1n}}{m_a}(\tilde{z}_o - \tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{D}_z(\tilde{z}_o - \tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix}$ le vecteur

d'état du système en boucle fermée (5.24) – (5.27). Nous avons

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{X}}} &= (\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{B}}_p\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{C}}_q)\tilde{\mathbf{X}} + (\tilde{\mathbf{B}}_z + \tilde{\mathbf{B}}_p\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{D}}_{qz})(\tilde{z}_o - \tilde{z}) + \tilde{\mathbf{B}}_F\tilde{F} \\ \tilde{y} &= (\tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}_{yp}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{C}}_q)\tilde{\mathbf{X}} + (\tilde{\mathbf{d}}_{yz} + \tilde{\mathbf{D}}_{yp}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{D}}_{qz})(\tilde{z}_o - \tilde{z}) \end{cases}$$

Soit

$$\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{C}}_q\tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz}(\tilde{z}_o - \tilde{z}) \text{ et } \tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{q}}$$

avec $\|\tilde{\Delta}\| \leq 1$, $\tilde{\Delta}$ diagonale. ■

Ici (pour accommoder les notations), nous remplaçons simplement D_{yp} par \tilde{D}_{yp} et d_{yp} par \tilde{d}_{yp} . Et par abus de notation aussi, nous remplaçons, dans la suite, B_{p_2} par B_p , \tilde{B}_{p_2} par \tilde{B}_p , C_{q_k} par C_q , \tilde{C}_{q_k} par \tilde{C}_q et $\tilde{d}_{q_k z}$ par \tilde{d}_{qz} .

Remarque 5.1 : Le système (5.28) et (5.29) est couramment appelé système différentiel linéaire à inclusion diagonale de norme bornée [231], si la traduction⁹ le permet.

Dans la section suivante, nous allons mettre en place la condition de stabilité du système complet en boucle fermée et discuter sa preuve d'existence. Cette condition est essentiellement basée sur la passivité de la dynamique non linéaire (5.9), le théorème de passivité [216] et, aussi, l'examen de la structure quadratique de la contrainte paramétrique des incertitudes bornées (5.29) [231]. Le résultat sera, en effet, élaboré par une formulation LMI.

5.3.3 Condition de stabilité

Considérons le système en boucle fermée (5.9) et (5.28) et la contrainte quadratique (5.29). Soit \tilde{F} l'erreur de force introduite dans (5.22), \tilde{y}_o et \tilde{z}_o , données respectivement par (5.11) et (5.14), des signaux exogènes bornés appliqués sur la structure des systèmes inter-connectés (voir figure 54). Dans la suite, nous discutons la condition de stabilité du système en boucle fermée en supposant respectivement $\tilde{F} = 0$, $\tilde{y}_o = 0$ et $\tilde{z}_o = 0$.

Proposition 5.2 : Les erreurs de suivi de position et d'observation de frottement (en particulier, \tilde{x} et \tilde{z}) sont quadratiquement stables et \tilde{f} converge vers zéro s'il existe une matrice

⁹ En anglais, *diagonal norm-bound linear differential inclusion* (DNLDI).

$\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$ dans \mathbb{R}^4 et des scalaires $\lambda > \nu > 0$, telles que [257]

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s & \star & \star & \star & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}_z^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{2}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yz} & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yp} & -(\lambda - \nu) & \star & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}_p^T \tilde{\mathbf{P}}_s & 0 & 0 & -\nu & \star \\ \tilde{\mathbf{C}}_q \lambda & \tilde{\mathbf{d}}_{qz} \lambda & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} < 0 \quad (5.32)$$

où ϵ désigne une constante positive de conditionnement. \star remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Considérons le système (5.9) et (5.28). Soit $V(t) = \frac{\tilde{z}^2}{\epsilon} + \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{X}}$ une fonction candidate de *Lyapunov* pour une matrice symétrique $\tilde{\mathbf{P}}_s > 0$ donnée et une matrice $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0$. Nous avons

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) - \tilde{\mathbf{p}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{q}} &= \frac{2}{\epsilon} \tilde{z} \left(-\frac{\sigma_{0n} |\dot{\tilde{x}}|}{g_n(\tilde{x})} \tilde{z} + \tilde{y} \right) + 2 \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}_z (-\tilde{z}) + \tilde{\mathbf{B}}_p \tilde{\mathbf{p}}) - \\ &\quad \tilde{\mathbf{p}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{p}} + (\tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz} (-\tilde{z}))^T \Lambda (\tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz} (-\tilde{z})) \\ &\leq \frac{2}{\epsilon} \tilde{z} \tilde{y} + 2 \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}_z (-\tilde{z}) + \tilde{\mathbf{B}}_p \tilde{\mathbf{p}}) - \tilde{\mathbf{p}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{p}} + \\ &\quad (\tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz} (-\tilde{z}))^T \Lambda (\tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz} (-\tilde{z})) \\ &\leq \frac{2}{\epsilon} \tilde{z} (\tilde{\mathbf{C}} \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{d}}_{yz} (-\tilde{z}) + \tilde{\mathbf{D}}_{yp} \tilde{\mathbf{p}}) + 2 \tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s (\tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}_z (-\tilde{z}) + \\ &\quad \tilde{\mathbf{B}}_p \tilde{\mathbf{p}}) - \tilde{\mathbf{p}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{p}} + (\tilde{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{C}}_q^T + (-\tilde{z}) \tilde{\mathbf{D}}_{qz}^T) \Lambda (\tilde{\mathbf{C}}_q \tilde{\mathbf{X}} + \\ &\quad \tilde{\mathbf{D}}_{qz} (-\tilde{z})) \end{aligned}$$

Le membre de droite de cette inégalité est défini négatif pour une matrice $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T$ donnée si et seulement si,

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ -\tilde{z} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{C}}_q^T \Lambda \tilde{\mathbf{C}}_q & \star & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}_z^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz}^T \Lambda \tilde{\mathbf{C}}_q & -\frac{2}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yz} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz}^T \Lambda \tilde{\mathbf{D}}_{qz} & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}_p^T \tilde{\mathbf{P}}_s & -\frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{D}}_{yp}^T & -\Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ -\tilde{z} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix} < 0$$

pour tout vecteur $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ -\tilde{z} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{pmatrix}$ non nul. D'où

$$\dot{V}(t) - \tilde{\mathbf{p}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{q}} < 0$$

À partir de (5.29), il suit

$$\tilde{\mathbf{p}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{p}} < \tilde{\mathbf{q}}^T \Lambda \tilde{\mathbf{q}}$$

pour toute matrice diagonale $\Lambda \geq 0$. Donc, $\dot{V}(t) < 0$. Par conséquent, toutes les variables

d'état internes $\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{X}} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$ et aussi \tilde{x} sont quadratiquement stables et \tilde{f}_f converge vers zéro,

car $\tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \dot{\tilde{x}} - \frac{\sigma_{1n}}{m_a}(\tilde{z}_o - \tilde{z}) \\ \xi \end{pmatrix}$ (Cf. définition de $\tilde{\mathbf{X}}$ dans la démonstration de la proposition 5.1) et \tilde{f}_f est donnée par (5.13) avec \tilde{F} , \tilde{y}_o et \tilde{z}_o nulles par hypothèse.

Donc, le système est stable s'il existe $\tilde{\mathbf{P}}_s > 0$ et $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \geq 0$ telle que

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + \tilde{\mathbf{C}}_q^T \Lambda \tilde{\mathbf{C}}_q & * & * \\ \tilde{\mathbf{B}}_z^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{C}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz}^T \Lambda \tilde{\mathbf{C}}_q & -\frac{2}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yz} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz}^T \Lambda \tilde{\mathbf{D}}_{qz} & * \\ \tilde{\mathbf{B}}_p^T \tilde{\mathbf{P}}_s & -\frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{D}}_{yp}^T & -\Lambda \end{pmatrix} < 0$$

Notons, à partir de cette dernière inégalité, que $\Lambda > 0$. Ensuite, nous remplaçons $\tilde{\mathbf{B}}_p$, $\tilde{\mathbf{C}}_q$, $\tilde{\mathbf{D}}_{qz}$ et $\tilde{\mathbf{D}}_{yp}$ par leurs expressions respectives données par (5.30) :

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + (\lambda_1 + \lambda_2) \tilde{\mathbf{C}}_q^T \tilde{\mathbf{C}}_q & * & * & * \\ \tilde{\mathbf{B}}_z^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{C}} + (\lambda_1 + \lambda_2) \tilde{\mathbf{d}}_{qz} \tilde{\mathbf{C}}_q & -\frac{2}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yz} + (\lambda_1 + \lambda_2) \tilde{\mathbf{d}}_{qz}^2 & * & * \\ 0 & -\frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yp} & -\lambda_1 & * \\ \tilde{\mathbf{B}}_p^T \tilde{\mathbf{P}}_s & 0 & 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix} < 0$$

Posons $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\nu = \lambda_2$, et utilisons deux fois le *complément de Schur*¹⁰ pour avoir

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s & * & * & * & * \\ \tilde{\mathbf{B}}_z^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{2}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yz} & * & * & * \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yp} & -(\lambda - \nu) & * & * \\ \tilde{\mathbf{B}}_p^T \tilde{\mathbf{P}}_s & 0 & 0 & -\nu & * \\ \tilde{\mathbf{C}}_q & \tilde{\mathbf{d}}_{qz} & 0 & 0 & -\lambda^{-1} \end{pmatrix} < 0$$

Enfin, en multipliant cette inégalité à gauche et à droite par $\text{diag}(\mathbf{I}, 1, 1, 1, \lambda)$, nous obtenons (5.32). ■

Remarque 5.2 : Nous imposons le coefficient générique ϵ (Cf. remarque 2.2 notée dans le chapitre 2) pour ajuster le conditionnement de la matrice dans (5.32).

Dans la section suivante, nous allons développer une conception à multi-objectifs pour la synthèse du retour de sortie dynamique (5.27) en utilisant le formalisme LMI.

5.3.4 Conception à multi-objectifs

D'abord, nous notons que la condition de stabilité (5.32) reste limitée au point de vue vitesse de convergence, vers zéro, des états des erreurs. Pour fixer cette spécification, nous proposons de remplacer cette condition par une structure modifiée de stabilité exponentielle. D'autre part, pour minimiser l'effet des perturbations liées aux signaux d'entrées exogènes (voir figure 54) sur le comportement de suivi de trajectoire, nous proposons un compromis entre les différentes conditions de stabilité et de robustesse en établissant la synthèse du retour de sortie par une minimisation de multi-objectifs de type H_∞ .

¹⁰ *Complément de Schur* est défini comme suit [26, 231] :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q}(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{S}(\boldsymbol{\Theta}) \\ \mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Theta}) & \mathbf{R}(\boldsymbol{\Theta}) \end{pmatrix} > 0 \iff \mathbf{R}(\boldsymbol{\Theta}) > 0 \text{ et } \mathbf{Q}(\boldsymbol{\Theta}) - \mathbf{S}(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{R}^{-1}(\boldsymbol{\Theta})\mathbf{S}^T(\boldsymbol{\Theta}) > 0$$

où $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{Q}^T(\boldsymbol{\Theta})$, $\mathbf{R}(\boldsymbol{\Theta}) = \mathbf{R}^T(\boldsymbol{\Theta})$ et $\mathbf{S}(\boldsymbol{\Theta})$ des matrices affines en $\boldsymbol{\Theta}$.

5.3.4.1 Marge de stabilité exponentielle et placement de pôles

Le but de la conception du contrôleur dynamique linéaire (5.27) est de garantir, d'abord, la condition donnée par (5.32). En plus, pour assigner les pôles du sous-système linéaire en boucle fermée (5.28) dans une région LMI réduite du demi-plan complexe gauche (*i.e.* de stabilité), nous introduisons des contraintes supplémentaires; en rapport avec la marge de stabilité exponentielle du système total en boucle fermée (*i.e.* (5.9), (5.28) et (5.29)), le dépassement et les modes oscillatoires en fréquences de la partition linéaire.

5.3.4.2 Stabilité exponentielle

Pour fixer la borne supérieure de la marge de stabilité de la boucle fermée, nous proposons la condition de stabilité exponentielle, qui remplace la condition (5.32), selon [257] :

Proposition 5.3 : Les erreurs de suivi de position et d'observation de frottement convergent exponentiellement vers zéro avec une vitesse α , si, pour tout $\alpha > 0$, il existe une matrice $\tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_s^T > 0$ de \mathbb{R}^4 et des scalaires $\lambda > \nu > 0$, telles que

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_s \tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s + 2\alpha \tilde{\mathbf{P}}_s & \star & \star & \star & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}_z^T \tilde{\mathbf{P}}_s - \frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{C}} & -\frac{2}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yz} + \frac{2\alpha}{\epsilon} & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{\epsilon} \tilde{\mathbf{d}}_{yp} & -(\lambda - \nu) & \star & \star \\ \tilde{\mathbf{B}}_p^T \tilde{\mathbf{P}}_s & 0 & 0 & -\nu & \star \\ \tilde{\mathbf{C}}_q \lambda & \tilde{\mathbf{d}}_{qz} \lambda & 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} < 0 \quad (5.33)$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Considérons les changements de variables suivants $\bar{\mathbf{p}} = e^{\alpha t} \tilde{\mathbf{p}}$, $\bar{\mathbf{q}} = e^{\alpha t} \tilde{\mathbf{q}}$, $\bar{\mathbf{X}} = e^{\alpha t} \tilde{\mathbf{X}}$, $\bar{y} = e^{\alpha t} \tilde{y}$, $\bar{z} = e^{\alpha t} \tilde{z}$, $\bar{z}_o = e^{\alpha t} \tilde{z}_o$ et $\bar{F} = e^{\alpha t} \tilde{F}$. Nous avons

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{X}}} &= (\tilde{\mathbf{A}} + \alpha \mathbf{I}) \bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{B}}_p \bar{\mathbf{p}} + \tilde{\mathbf{B}}_z (\bar{z}_o - \bar{z}) + \tilde{\mathbf{B}}_F \bar{F} \\ \dot{\bar{z}} &= -\frac{\sigma_{0n} |\dot{\bar{x}}|}{g_n(\bar{x})} \bar{z} + \alpha \bar{z} + \bar{y} \\ \bar{\mathbf{q}} &= \tilde{\mathbf{C}}_q \bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{D}}_{qz} (\bar{z}_o - \bar{z}) \\ \bar{y} &= \tilde{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{X}} + \tilde{\mathbf{d}}_{yz} (\bar{z}_o - \bar{z}) + \tilde{\mathbf{D}}_{yp} \bar{\mathbf{p}} \end{cases}$$

avec la contrainte

$$|\bar{p}_k| \leq |\bar{q}_k|, k = 1, 2$$

I est la matrice identité d'ordre 4. Considérons $V = \bar{\mathbf{X}}^T \tilde{\mathbf{P}}_s \bar{\mathbf{X}} + \frac{\bar{z}^2}{\epsilon^2}$ une fonction candidate *Lyapunov*. Nous appliquons le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition 5.2 et en utilisant (5.33), nous prouvons que le système contraint en boucle fermée ci-haut, exprimé en fonction du nouveau vecteur d'état $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{X}} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$, est quadratiquement stable. Donc, $\begin{pmatrix} \bar{\mathbf{X}} \\ \bar{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\alpha t} \bar{\mathbf{X}} \\ e^{-\alpha t} \bar{z} \end{pmatrix}$ converge exponentiellement vers zéro, au moins, avec une vitesse α . ■

5.3.4.3 Contrainte sur la région de stabilité

Pour prévenir contre les dynamiques rapides (*i.e.* gains et fréquences élevés) du contrôleur, entraînant des modes oscillatoires [218], nous proposons de limiter le placement des pôles de la partie linéaire de la boucle fermée à l'intérieur d'un disque de rayon r centré à l'origine¹¹. La caractérisation LMI de cette région de stabilité est exprimée comme suit :

Problème 5.2 : Trouver $\tilde{\mathbf{P}}_r = \tilde{\mathbf{P}}_r^T > 0$ dans \mathbb{R}^4 , telle que [219]

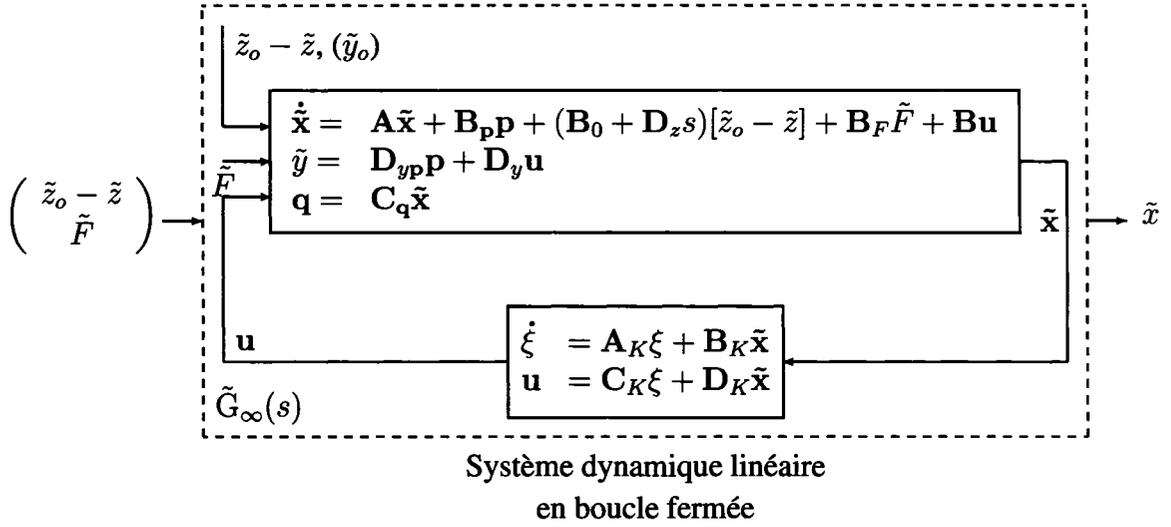
$$\begin{pmatrix} -r\tilde{\mathbf{P}}_r & \star \\ \tilde{\mathbf{P}}_r \tilde{\mathbf{A}}^T & -r\tilde{\mathbf{P}}_r \end{pmatrix} < 0 \quad (5.34)$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

5.3.4.4 Rejet de perturbation et optimisation H_∞

Considérons la partie linéaire du système dynamique en boucle fermée (5.28). Notons par $\tilde{\mathbf{G}}_\infty(s)$ la matrice-ligne de transfert, du vecteur d'entrée des signaux de perturba-

¹¹ Cf. figure 15 dans la sous-section §2.4.3.2 dans le chapitre 2.

Figure 55 Schéma-bloc de système linéaire $\tilde{G}_\infty(s)$

tion $\begin{pmatrix} \tilde{z}_o - \tilde{z} \\ \tilde{F} \end{pmatrix}$ vers la sortie \tilde{x} se référant à l'erreur de déplacement du piston (voir figure 55). Nous proposons la condition $\|\tilde{G}_\infty(s)\|_\infty < \gamma$ pour établir la stabilité robuste du système dynamique en boucle fermée (5.28) en minimisant l'effet des perturbations $\begin{pmatrix} \tilde{z}_o - \tilde{z} \\ \tilde{F} \end{pmatrix}$ sur l'énergie de l'erreur de position [219]. En particulier, l'illustration de la performance d'entrée/sortie entre $-\tilde{z}$ et \tilde{x} permet de réduire l'effet de la dynamique non linéaire sur la partie linéaire.

Proposition 5.4 : La norme H_∞ de $\tilde{G}_\infty(s)$ est plus petite que γ si et seulement si, il existe une matrice symétrique $\tilde{P}_\infty > 0$, telle que [219, 257]

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}_\infty \tilde{A} + \tilde{A}^T \tilde{P}_\infty & * & * \\ \tilde{B}_\infty^T \tilde{P}_\infty & -\gamma \mathbf{I} & * \\ \tilde{C}_\infty & 0 & -\gamma \end{pmatrix} < 0 \quad (5.35)$$

avec

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B} \mathbf{D}_K & \mathbf{B} \mathbf{C}_K \\ \mathbf{B}_K & \mathbf{A}_K \end{pmatrix}, \tilde{B}_\infty = \begin{pmatrix} \tilde{B}_z & \tilde{B}_F \end{pmatrix} \text{ et} \quad (5.36)$$

$$\tilde{C}_\infty = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_\infty & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

où $C_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Démonstration : Nous trouvons la formulation LMI d'optimisation H_∞ dans plusieurs références, par exemple [26, 218, 231]. ■

5.3.4.5 Optimisation de multi-objectifs

Nous rassemblons l'ensemble des conditions de stabilité exponentielle, de placement de pôles et de robustesse H_∞ dans le problème suivant [257] :

Problème 5.3 : Minimiser $\gamma > 0$, sujet à

$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}^T > 0$ une matrice de $\mathbb{R}^{4 \times 4}$, \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K des matrices de $\mathbb{R}^{2 \times 2}$, telles que les systèmes en boucle fermée (5.28) et (5.36) satisfont les conditions (5.33) – (5.35) avec, en plus,

$$\tilde{\mathbf{P}} = \tilde{\mathbf{P}}_s = \tilde{\mathbf{P}}_r = \tilde{\mathbf{P}}_\infty \quad (5.37)$$

Remarque 5.3 : Notons que le problème d'optimisation 5.3 est rendu plus conservateur¹² avec la contrainte supplémentaire (5.37). Comme dans les problèmes de synthèse 2.4 et 3.2, énoncés respectivement dans les chapitres 2 et 3, cette contrainte est ajoutée pour retrouver la propriété de convexité dans le problème de minimisation de multi-objectifs 5.3 [218, 219]. Le critère H_∞ calculé dans ce cas représente une solution sous-optimale du problème.

Dans la section suivante, nous allons développer la synthèse du contrôleur linéaire par retour de sortie dynamique en utilisant le formalisme LMI.

5.3.5 Synthèse du retour de sortie

En regardant les détails des conditions de conception du contrôleur, données par (5.33) – (5.35) et (5.37) et utilisant (5.30) et (5.36), nous constatons qu'elles sont bilinéaires par

¹² Cette restriction supplémentaire reste relativement peu sévère dans la résolution de ce type de problème [219]; comme cela a été souligné dans dans le chapitre 2 (Cf. remarque 2.4).

rapport aux variables $\tilde{\mathbf{P}}$, \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K . Alors, comme dans les parties analogues dans les chapitres 2 et 3, nous utilisons le changement de variable linéarisant introduit dans [219], pour convertir ces BMIs¹³ en LMIs. Partitionnons $\tilde{\mathbf{P}}$ et $\tilde{\mathbf{P}}^{-1}$ selon :

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M}^T & \mathbf{R} \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{\mathbf{P}}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{N} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{S} \end{pmatrix} \quad (5.38)$$

avec $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$, $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^T$ et telles que les matrices inversibles \mathbf{M} et \mathbf{N} satisfont [219]

$$\mathbf{M}\mathbf{N}^T = \mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{Q} \quad (5.39)$$

Soit les nouvelles variables d'états matricielles $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ et $\hat{\mathbf{D}}$ données par [219] :

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{A}} = \mathbf{M}\mathbf{A}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{M}\mathbf{B}_K\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}_K\mathbf{C}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{P}\mathbf{A}_K\mathbf{Q} + \mathbf{P}\mathbf{B}_K\mathbf{D}_K\mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{M}\mathbf{B}_K + \mathbf{P}\mathbf{B}_K\mathbf{D}_K \\ \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{C}_K\mathbf{N}^T + \mathbf{D}_K\mathbf{Q} \\ \hat{\mathbf{D}} = \mathbf{D}_K \end{cases} \quad (5.40)$$

Nous proposons le résultat suivant [257] :

Proposition 5.5 : Il existe un contrôleur linéaire par retour de sortie dynamique (5.27), une matrice symétrique $\tilde{\mathbf{P}} > 0$ partitionnée comme dans (5.38) et des scalaires $\kappa > 0$, $\nu > 0$ et $\gamma > 0$ qui satisfont (5.33) – (5.35) et (5.37) si et seulement si, les matrices \mathbf{P} , \mathbf{Q} , $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$ et $\hat{\mathbf{D}}$ existent et satisfont les LMIs suivantes :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \star \\ \mathbf{I} & \mathbf{P} \end{pmatrix} > 0 \quad (5.41)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2\alpha\mathbf{Q} & \star & \star & \star & \star & \star \\ a_{21} + 2\alpha\mathbf{I} & a_{22} + 2\alpha\mathbf{P} & \star & \star & \star & \star \\ a_{31} - \frac{1}{\epsilon}\mathbf{D}_y\hat{\mathbf{C}} & a_{32} - \frac{1}{\epsilon}\mathbf{D}_y\hat{\mathbf{D}} & a_{33} & \star & \star & \star \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{\epsilon}\mathbf{d}_{yp}\kappa & f(\kappa, \nu) & \star & \star \\ \mathbf{B}_p^T & \mathbf{B}_p^T\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\nu & \star \\ \mathbf{C}_q\mathbf{Q} & \mathbf{C}_q & \mathbf{C}_q\mathbf{D}_z & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\kappa \end{pmatrix} < 0 \quad (5.42)$$

¹³ Cf. sous-section §2.4.3.3 dans le chapitre 2.

$$\begin{pmatrix} -r\mathbf{Q} & * & * & * \\ -r\mathbf{I} & -r\mathbf{P} & * & * \\ \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} & \mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}} & -r\mathbf{Q} & * \\ \hat{\mathbf{A}} & \mathbf{P}\mathbf{A} + \hat{\mathbf{B}} & -r\mathbf{I} & -r\mathbf{P} \end{pmatrix} < 0 \quad (5.43)$$

et

$$\begin{pmatrix} a_{11} & * & * & * & * \\ a_{21} & a_{22} & * & * & * \\ a_{31} & a_{32} & -\gamma & * & * \\ \mathbf{B}_F^T & \mathbf{B}_F^T \mathbf{P} & 0 & -\gamma & * \\ \mathbf{C}_\infty \mathbf{Q} & \mathbf{C}_\infty & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix} < 0 \quad (5.44)$$

avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathbf{A}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\hat{\mathbf{C}} + (\mathbf{B}\hat{\mathbf{C}})^T \\ a_{21} &= \hat{\mathbf{A}} + (\mathbf{A} + \mathbf{B}\hat{\mathbf{D}})^T \\ a_{22} &= \mathbf{P}\mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}}^T \\ a_{31} &= \mathbf{B}_z^T + \mathbf{D}_z^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{B}^T \\ a_{32} &= \mathbf{B}_z^T \mathbf{P} + \mathbf{D}_z^T \hat{\mathbf{B}}^T \\ a_{33} &= -\frac{1}{\epsilon} \mathbf{D}_y \hat{\mathbf{D}} \mathbf{D}_z - \frac{1}{\epsilon} \mathbf{D}_z^T \hat{\mathbf{D}}^T \mathbf{D}_y^T + \frac{2\alpha}{\epsilon} \end{aligned} \quad (5.45)$$

et

$$f(\kappa, \nu) = -(\kappa - \kappa^2 \nu) \quad (5.46)$$

* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Démonstration : Nous considérons la matrice de rang plein $\tilde{\Pi}$ selon [219] :

$$\tilde{\Pi} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{I} \\ \mathbf{N}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

D'abord, en multipliant la matrice $\tilde{\mathbf{P}}$ à gauche et à droite respectivement par $\tilde{\Pi}^T$ et $\tilde{\Pi}$ et en utilisant (5.39), la contrainte $\tilde{\mathbf{P}} > 0$ devient (5.41). Puis, multiplions (5.33) à gauche et à droite respectivement par les matrices diagonales par bloc $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, 1, 1, 1, 1)$ et

$\text{diag}(\tilde{\Pi}, 1, 1, 1, 1)$. En utilisant les changements des variables (5.40), nous obtenons

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2\alpha\mathbf{Q} & * & * & * & * & * \\ a_{21} + 2\alpha\mathbf{I} & a_{22} + 2\alpha\mathbf{P} & * & * & * & * \\ a_{31} - \frac{1}{\epsilon}\mathbf{D}_y\hat{\mathbf{C}} & a_{32} - \frac{1}{\epsilon}\mathbf{D}_y\hat{\mathbf{D}} & a_{33} & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\frac{1}{\epsilon}\mathbf{d}_{yp} & -(\lambda - \nu) & * & * \\ \mathbf{B}_p^T & \mathbf{B}_p^T\mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\nu & * \\ \mathbf{C}_q\mathbf{Q}\lambda & \mathbf{C}_q\lambda & \mathbf{C}_q\mathbf{D}_z\lambda & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\lambda \end{pmatrix} < 0$$

Cette contrainte n'est pas convexe, à cause du produit $\mathbf{Q}\lambda$ qui se trouve dans cette inégalité. Posons $\kappa = \frac{1}{\lambda}$. En multipliant cette inégalité à gauche et à droite par $\text{diag}(\mathbf{I}, \mathbf{I}, 1, \kappa, 1, \kappa)$, nous obtenons (5.42). Ensuite, la condition LMI (5.43) est dérivée à partir de (5.34) en multipliant celle-ci à gauche et à droite respectivement par les matrices diagonales par blocs $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, \tilde{\Pi}^T)$ et $\text{diag}(\tilde{\Pi}, \tilde{\Pi})$. Finalement, la relation LMI (5.44) peut être déduite à partir de (5.35) en multipliant celle-ci à gauche et à droite respectivement par $\text{diag}(\tilde{\Pi}^T, \mathbf{I}, 1)$ et $\text{diag}(\tilde{\Pi}, \mathbf{I}, 1)$, en utilisant à chaque fois les changements des variables (5.40). ■

Les matrices \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , \mathbf{C}_K et \mathbf{D}_K sont obtenues à partir de (5.40) en calculant les matrices inversibles \mathbf{M} et \mathbf{N} satisfaisant (5.39). Notons que la variable auxiliaire κ implique encore un terme non linéaire, *i.e.* $f(\kappa, \nu)$ dans (5.42) et exprimé par (5.46). Ce type de problème est similaire à la synthèse de la borne supérieure de la norme crête-à-crête dans le cas d'un retour de sortie dynamique [219, 254].

Malgré la contrainte (5.37) et le changement de variable de la proposition 5.5, le problème de faisabilité (minimisation) sujet aux contraintes (5.41) – (5.44) (énoncé dans la proposition 5.5) n'est toujours pas convexe. En effet, l'inégalité (5.42) renferme un élément non linéaire et aussi non convexe (*Cf.* terme $f(\kappa, \nu)$ exprimé dans (5.46)). Par contre, pour une valeur de κ fixe, le problème d'optimisation ainsi formulé devient parfaitement convexe.

Donc, notre objectif est de trouver le compensateur linéaire par retour de sortie dynamique (5.27) pour assurer la stabilité exponentielle globale du système DNLDI (5.28) et (5.29),

placer les pôles de la partie linéaire de la boucle fermée dans un disque prescrit et maintenir la norme H_∞ de $\tilde{G}_\infty(s)$ sous une certaine valeur optimale γ (en minimisant $\|\tilde{G}_\infty(s)\|_\infty$). En outre, en se basant sur une étude préliminaire liée à la synthèse de ce contrôleur, nous proposons un critère additionnel, pour réduire plus efficacement les gains du compensateur dynamique (5.27), selon [257] :

Problème 5.4 : Si nous notons par $\Theta \triangleq \{\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}, \hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}, \nu, \gamma\}$ l'ensemble des variables de décision pour une valeur de κ choisie, alors nous définissons le problème convexe suivant :

$$\Theta^*(\kappa) = \arg \min_{\Theta} \text{Tr}(\mathbf{P}) + \text{Tr}(\mathbf{Q}) \quad (5.47)$$

sujet aux contraintes (5.41) – (5.44). $\text{Tr}(\cdot)$ désigne la trace d'une matrice carrée.

Nous proposons d'établir le problème 5.4 afin de contourner des problèmes concrets de conditionnement des LMIs dus aux intervalles relativement grands des paramètres du modèle de *LuGre* de frottement. Le problème d'optimisation linéaire (5.47), sujet aux LMIs (5.41) – (5.44), peut être résolu en Θ en utilisant un algorithme d'optimisation convexe implémenté dans le logiciel MATLAB[®] et qui utilise *LMI control toolbox* [232]. Ensuite, nous appliquons la minimisation unidimensionnel (*i.e.* mono-variable) de $\gamma^*(\kappa)$; qui est un élément de la solution convexe optimale $\Theta^*(\kappa)$; pour $\kappa > 0$, *i.e.*

$$\min_{\kappa} \gamma^* \quad (5.48)$$

Pour récapituler ainsi, l'algorithme que nous proposons pour résoudre le problème de synthèse du contrôleur linéaire dynamique (5.27) est composé de deux étapes en cascade; dont la première correspond à la minimisation convexe du critère (5.47) puis dans la deuxième étape nous appliquons le critère (5.48) pour trouver une solution H_∞ sous-optimale du problème. Ce dernier problème d'optimisation (*Cf.* (5.48)) est résolu en utilisant une technique d'optimisation mono-variable locale.

5.4 Étude expérimentale

5.4.1 Autres méthodes de contrôle de position utilisant des modèles statiques d'estimation de frottement

Pour montrer l'efficacité de notre approche, nous proposons dans le cadre de l'étude expérimentale une comparaison avec des lois de contrôle et de compensation de frottement très connues dans la littérature. Ces techniques sont basées sur l'usage de contrôleur statique PD de position avec un compensateur de frottement statique aussi. Deux types de modèles de frottement sont choisis ici :

- Un observateur adaptatif non linéaire de frottement, basé sur l'hypothèse d'un frottement d'amplitude *a priori* constante, mais qui peut suivre l'évolution du frottement. En effet, Cette amplitude peut dépendre de la vitesse [108].
- Et, un modèle de frottement statique fixe et complet, caractérisé par une application mathématique simple [151, 245].

L'inconvénient majeur de ces modèles de frottement (théoriquement) est qu'il ne présente pas parfaitement le comportement de stiction à vitesse nulle ni encore le comportement dynamique du frottement, tels que le mouvement de broutement et le pré-glissement (totalement absents dans ce genre de modèles¹⁴).

Dans la suite, pour simplifier la notation, nous référons les différents modes de commande comme suit : Mode 1 pour le *feed-back* de sortie avec un estimateur de *LuGre* (*i.e.* notre approche), Mode 2 pour le contrôleur PD avec un estimateur adaptatif de *Coulomb* et, finalement, Mode 3 pour le contrôleur PD avec un estimateur de frottement statique fixe.

5.4.1.1 Mode 2 : {contrôleur PD + estimateur non linéaire adaptatif de *Coulomb*}

Nous considérons un contrôleur PD de position avec une compensation de frottement utilisant un observateur non linéaire adaptatif d'ordre réduit. En fait, nous modélisons les

¹⁴ Cf. sous-section §1.2.1.3 dans la chapitre 1

variations de la force de frottement en utilisant la représentation de *Coulomb*, comme suit [22] :

$$\hat{f}_f(\dot{x}, \hat{f}_c) = \hat{f}_c \cdot \text{sgn}(\dot{x})$$

où \hat{f}_c représente l'amplitude de frottement. Pour estimer le paramètre \hat{f}_c dans le modèle de frottement, nous considérons l'observateur non linéaire d'ordre réduit suivant [160, 184] :

$$\dot{z} = -\rho(|\dot{x}|)z$$

et

$$\dot{z} = \rho'(|\dot{x}|) \left(\frac{F - \hat{f}_f(\dot{x}, \hat{f}_c)}{m} \right) \cdot \text{sgn}(\dot{x})$$

où $\rho'(|\dot{x}|)$ dénote la dérivée de $\rho(|\dot{x}|)$ par rapport à $|\dot{x}|$ et F la force appliquée sur le piston de l'actionneur. Une fonction possible de $\rho(|\dot{x}|)$, qui a été utilisée dans littérature, est donnée par :

$$\rho(|\dot{x}|) = K \cdot \ln\left(\frac{1}{1 + \exp(-\eta \cdot |\dot{x}|)}\right)$$

où K et η , les paramètres de modèle, sont choisis pour fixer les performances de la réponse transitoire (voir tableau VIII). Dans [160], les auteurs ont utilisé cette forme d'estimation pour compenser le frottement dans le système pneumatique. Finalement, un contrôle PD de position est utilisé comme dans [160].

5.4.1.2 Mode 3 : {contrôleur PD + estimateur de frottement statique à paramètres fixes}

Nous modélisons les variations de force de frottement utilisant le modèle de frottement statique complet [22, 244] :

$$\hat{f}_f = \begin{cases} (f_{sn}^0 + f_{sn}^1 |\dot{x}|) \text{sgn}(\dot{x}) & \text{si } |\dot{x}| \leq \dot{x}_0 \\ (f_{cn} + \sigma_{vn} |\dot{x}|) \text{sgn}(\dot{x}) & \text{si } |\dot{x}| > \dot{x}_0 \end{cases}$$

avec

$$f_{sn}^0 = f_{sn} \text{ et } f_{sn}^1 = \frac{f_{cn} - f_{sn}}{\dot{x}_0}$$

où σ_{vn} représente le coefficient de frottement visqueux nominal, f_{cn} est le coefficient de frottement de *Coulomb* nominal et f_{sn} est le coefficient de frottement statique nominal. La vitesse absolue \dot{x}_0 est choisie telle que la pente de \hat{f}_f soit négative pour $|\dot{x}| < \dot{x}_0$, ce qui implique $\dot{x}_0 \leq \dot{x}_m$ avec \dot{x}_m la vitesse à laquelle \hat{f}_f atteint sa valeur minimale [151]. Les paramètres f_{cn} , f_{sn}^0 et f_{sn}^1 sont telle que \hat{f}_f soit une fonction continue. Cette modélisation de frottement est très utilisée en pratique car elle tient compte des trois composantes principales : *stiction*, frottement de *Coulomb* et frottement visqueux, et supporte une fonction linéaire de la vitesse dans la région de *stiction* avec une pente négative [244]. Tous les paramètres sont supposés fixes. Cet estimateur de frottement est combiné avec un contrôleur linéaire PD.

5.4.2 Description du dispositif expérimental

L'*experimentum*, que nous proposons, est réalisé sur le dispositif pneumatique (voir figure 56) pour illustrer notre approche et la comparer par rapport au deux autres techniques de compensation de frottement à usage commun dans la littérature et qui sont introduites dans la sous-section précédente. Il s'agit d'un actionneur pneumatique sans tige, ayant un taux de frottement élevé (*FESTO*, DGP-25-500) actionné par une électro-valve à 5 voies (*FESTO*, MPYE-5-1/8LF-010B). L'alimentation en air comprimé est véhiculée dans le conduit via un régulateur (*FESTO*, LFR-M2-G1/4-C10RG). Les capteurs de pression (*FESTO*, SDE-10) sont utilisés pour mesurer la différence de pression, équivalente à la force pneumatique appliquée sur le piston, à travers des ports non restrictifs. Le déplacement du piston est mesuré avec un capteur de position (*FESTO*, MLD-POT-500-TLF). La vitesse est obtenue par une dérivation numérique des mesures de position. Le signal d'entrée (*i.e.* le déplacement du tiroir de la valve qui est proportionnel à la tension d'excitation de la valve) et les différentes mesures (les signaux de sortie) sont respectivement envoyés et acquis par un ordinateur via une carte d'acquisition (*National Instruments*, PCI-6052E). L'algorithme de contrôle est implémenté en utilisant les logiciels *Simulink*, *XPC-Target* et

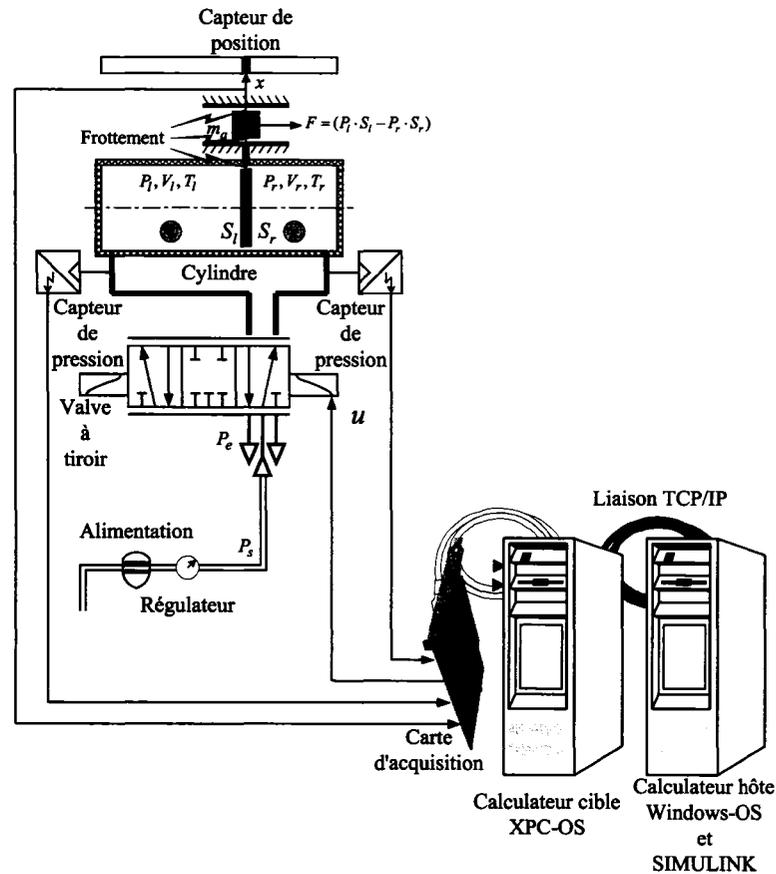


Figure 56 Banc expérimental

Real-Time-Workshop dans MATLAB[®]. Le schéma-bloc implémenté dans *Simulink* est transformé en code C, sur un ordinateur hôte équipé avec *Windows-OS* et *Simulink*. Un dispositif exécutable est ensuite construit, et un noyau de type *real-time kernel* est utilisé pour exécuter le code sur un ordinateur cible équipé de *XPC-OS* (voir figure 56). Les deux ordinateurs hôte et cible utilisent une communication *TCP/IP*. La période d'échantillonnage est fixée à 100 μ s. Les valeurs numériques des paramètres du système pneumatique sont données dans le tableau VIII.

Tableau VIII

Paramètres du système expérimental

Paramètre	Valeur minimale	Valeur maximale	Valeur nominale
m_a (kg)	-	-	0.326
\dot{x}_0 (m/s)	-	-	0.005
u_{max} (m)	-	-	0.002
K	-	-	50
P_e (kPa)	-	-	101.0
P_s (kPa)	-	-	608.0
R (Nm/kgK)	-	-	287.0
$S_l = S_r$ (m ²)	-	-	$4.9 \cdot 10^{-4}$
T_a (K)	-	-	295.0
$V_{l_{max}} = V_{r_{max}}$ (m ³)	-	-	$2.45 \cdot 10^{-4}$
W (m)	-	-	0.005
ζ	-	-	1.3997
η	-	-	1.5
f_c (N)	30.0	38.0	34.0
f_s (N)	50.0	55.0	52.5
σ_0 (N/m)	$1.0159 \cdot 10^5$	$1.6506 \cdot 10^5$	$1.3780 \cdot 10^5$
σ_1 (Ns/m)	0.0	140.6	70.3
σ_v (Ns/m)	119.9	220.1	170.0
\dot{x}_s (m/s)	0.001	0.1	0.05

5.4.3 Résultats et discussion

Il faut noter, d'abord, que les intervalles des paramètres incertains de frottement sont estimés en utilisant une approche d'estimation à erreur bornée qui repose sur l'analyse des intervalles et la théorie d'inversion des ensembles, présentée dans [106]. En dépit de l'efficacité de cette approche dans l'estimation des paramètres incertains dans un modèle non linéaire, cette méthode d'identification reste biaisée à cause du temps consommé pendant l'implémentation de l'algorithme d'estimation. Pour réduire ce temps d'implémentation, la précision admissible de cet algorithme a été relaxée. Ainsi, les intervalles de certains paramètres ont souffert d'amplitudes excessives, en particulier le paramètre de frottement visqueux. Alors, nous avons ré-estimé ce coefficient séparément (voir tableau VIII). Notons que le niveau de frottement dans cette installation est très élevé.

Nous avons calculé un contrôleur dynamique linéaire qui assure une marge de stabilité exponentielle de $\alpha = 30$, et qui place les pôles de la partie linéaire du système en boucle fermée dans un disque de rayon $r = 500$ centré à l'origine, pour prévenir contre les modes oscillatoires de la réponse et limiter les amplitudes de commande. Le paramètre de conditionnement ϵ étant fixé à $2 \cdot 10^{-4}$, les matrices gains du contrôleur sont calculées numériquement en utilisant *LMI Control Toolbox* de MATLAB[®] [232] et sont données par :

$$\mathbf{A}_K = \begin{pmatrix} 386.49 & -70.28 \\ 14627.60 & -1515.56 \end{pmatrix}, \mathbf{B}_K = \begin{pmatrix} -11.06 \cdot 10^5 & -3150.36 \\ -13.31 \cdot 10^6 & 33415.68 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}_K = \begin{pmatrix} 9.33 & -0.43 \\ 0.04 & -3.22 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{D}_K = \begin{pmatrix} 0. & 0. \\ 0. & 0.49 \end{pmatrix}$$

Les différentes composantes des PD utilisés dans les méthodes alternatives sont données dans le tableau IX. Ces gains sont convenablement choisis pour minimiser les erreurs de suivi de trajectoire, et aussi pour éviter les oscillations importantes le plus possible durant les expériences.

Tableau IX

Gains des contrôleurs PD

Controller gain	P	D
Contrôle de position PD (avec Mode 2)	3257.1	206.0
Contrôle de position PD (avec Mode 3)	5089.3	257.5

Plusieurs expériences ont été développées pour illustrer l'efficacité de l'approche proposée et la comparer avec les deux autres alternatives initialement introduites dans cette section. Nous avons utilisé des trajectoires suffisamment lisses à portions quadratiques et d'autres sinusoïdales, avec différentes distances à parcourir et des fréquences de variation du si-

gnal désiré aussi différentes, pour montrer les performances dans différentes situations, en particulier à vitesses réduites et élevées de mouvement.

La figure 57 montre les performances de suivi et les tensions d'excitation de la valve avec les trois modes de contrôles discutés ci-haut, pour un signal de référence lisse à portions quadratiques, parcourant une distance totale de 2 cm. Des résultats plus complets, qui donnent les erreurs maxima (ou crêtes des erreurs) et les RMS des erreurs, avec la même forme de trajectoire désirée sont résumés dans le tableau X.

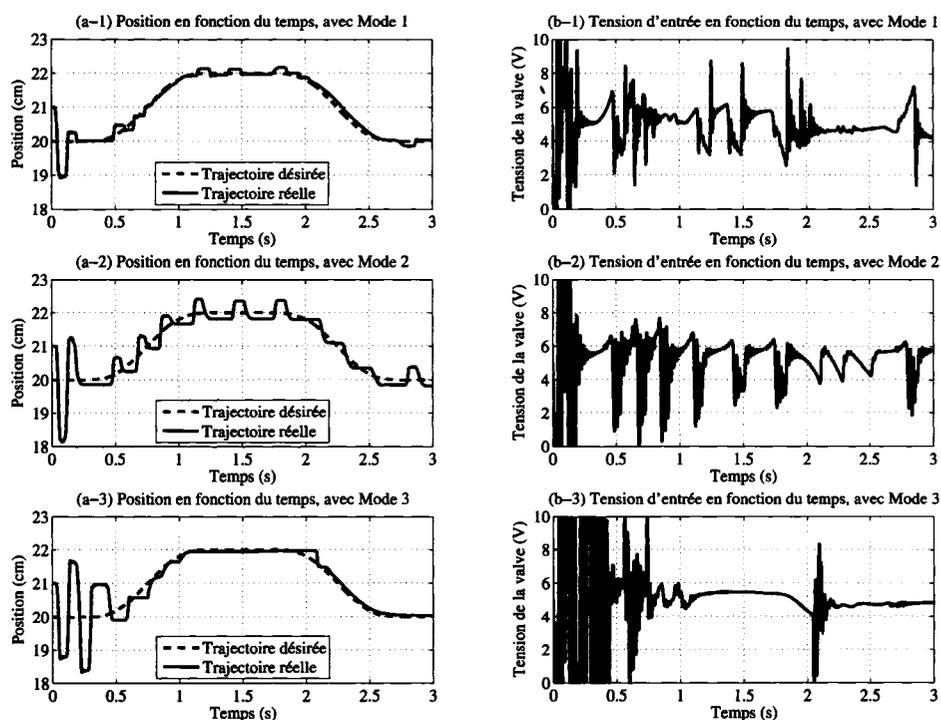


Figure 57 Position et tension d'excitation de la valve; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = $\{feed-back$ de sortie + estimateur de *LuGre*}, Mode 2 = $\{PD$ + estimateur adaptatif de *Coulomb*} et Mode 3 = $\{PD$ + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas d'une référence d'entrée linéaire à portions quadratiques pour parcourir une distance totale de 2 cm

La figure 58 montre les performances de suivi et les tensions d'excitation de la valve avec les trois modes de contrôles discutés ci-haut, pour un signal de référence sinusoïdal,

Tableau X

Amplitudes et RMS des erreurs de position; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = {*feed-back* de sortie + estimateur de *LuGre*}, Mode 2 = {PD + estimateur adaptatif de *Coulomb*} et Mode 3 = {PD + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas des références d'entrée linéaires à portions quadratiques pour parcourir des distances variées durant un temps de 3 sec

Distance (mm)	Crête de l'erreur (mm)			RMS de l'erreur (mm)		
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 1	Mode 2	Mode 3
20	1.8	6.2	4.6	0.9	2.2	1.0
40	3.4	7.1	41.8	1.5	2.3	22.5
80	4.3	6.1	8.1	1.8	1.6	1.5
120	12.7	9.5	40.2	3.9	1.7	7.2
140	16.4	6.5	34.0	4.2	1.6	3.8

parcourant une distance totale de 4 cm. Des résultats plus complets, qui donnent les erreurs maxima et les erreurs RMS, avec la même forme de trajectoire désirée sont résumés dans les tableaux XI et XII.

En dépit du fait que l'erreur de suivi reste bornée dans presque tous les cas, la performance du Mode 1 {*feed-back* sortie + estimation de frottement de *LuGre*} reste la plus significative parmi les trois modes, en particulier dans le cas de mouvement à vitesses réduites. Par contre, les deux autres modes peuvent rivaliser dans le cas de mouvement à grandes vitesses. Dans tous les cas, le maximum d'amplitude d'erreur, avec le Mode 1, reste sous le seuil de 12 % de la distance parcourue, à quelques exceptions près. Par contre, les maxima d'amplitudes d'erreur, avec les Modes 2 et 3, atteignent des niveaux qui dépassent 20 %, ou encore, à plus de 100 % de la distance parcourue. D'une manière similaire, les RMS des erreurs (indiquant le niveau d'énergie de l'erreur) ne dépassent pas 7 % avec le Mode 1. Par contre, cette RMS de l'erreur est relativement plus élevée avec les deux autres modes atteignant 10 % à 15 % et plus des distances parcourues. Ces résultats démontrent l'efficacité du Mode 1 en général. En fait, avec une meilleure estimation des intervalles des paramètres incertains, ces résultats peuvent être encore plus performants. En effet, ces in-

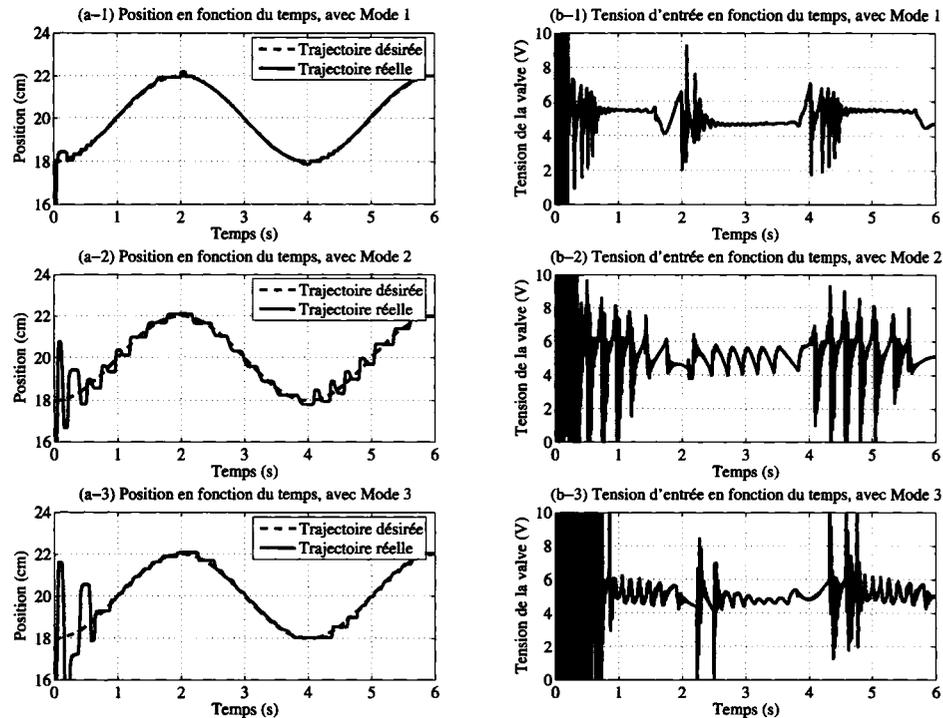


Figure 58 Position et tension d'excitation de la valve; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = $\{feed-back$ de sortie + estimateur de *LuGre*}, Mode 2 = $\{PD$ + estimateur adaptatif de *Coulomb*} et Mode 3 = $\{PD$ + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas d'une référence d'entrée sinusoïdale pour parcourir une distance totale de 4 cm

tervalles ont un effet limitatif sur l'efficacité de notre approche robuste. Il faut signaler aussi que, d'après les tableaux X, XI et XII, les résultats restent aussi disparates; ce qui est dû au comportement chaotique du frottement, qui n'est pas uniforme d'une expérience à une autre. En outre, nous notons que les niveaux des oscillations constatés sont plus importants avec les Modes 2 et 3, en particulier à vitesses réduites. Il est important de noter qu'en pratique, la qualité des mesures est affectée par la résolution et le bruit des capteurs utilisés [151].

Finalement, nous avons montré, une fois de plus, la flexibilité du contrôleur dynamique linéaire pour tenir compte des critères de stabilité, de robustesse et d'optimisation. Cette

Tableau XI

Amplitudes et RMS des erreurs de position; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = {*feed-back* de sortie + estimateur de *LuGre*}, Mode 2 = {PD + estimateur adaptatif de *Coulomb*} et Mode 3 = {PD + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas des références d'entrée sinusoïdales pour parcourir des distances variées (fréquence de 0.25 Hz)

Amplitude (mm)	Crête de l'erreur (mm)			RMS de l'erreur (mm)		
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 1	Mode 2	Mode 3
10	1.7	7.1	2.3	0.6	1.9	0.8
20	2.0	5.5	3.0	0.4	1.8	0.9
30	2.1	6.6	5.8	0.7	1.6	1.2
40	2.4	10.5	8.0	1.2	2.2	1.9
50	4.1	5.1	3.1	1.5	1.3	0.9
60	4.0	2.6	10.9	1.8	1.1	1.5
70	5.4	4.6	4.2	2.0	1.3	1.2
80	5.0	14.9	7.2	2.2	3.1	1.5
90	5.4	7.1	9.4	2.2	1.8	3.0
100	6.2	6.3	46.9	2.7	1.8	8.0

Tableau XII

Amplitudes et RMS des erreurs de position; utilisant les trois modes de compensation (Mode 1 = {*feed-back* de sortie + estimateur de *LuGre*}, Mode 2 = {PD + estimateur adaptatif de *Coulomb*} et Mode 3 = {PD + estimateur de frottement statique fixe}) dans le cas des références d'entrée sinusoïdales pour parcourir une distance fixe de 80 mm avec des fréquences variées

Frequency (Hz)	Crête de l'erreur (mm)			RMS de l'erreur (mm)		
	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 1	Mode 2	Mode 3
1/12	1.9	5.1	2.8	0.8	1.5	0.7
2/12	3.3	3.1	19.1	1.6	1.0	2.5
3/12	5.0	14.9	7.2	2.2	3.1	1.5
4/12	9.0	47.2	85.1	3.8	10.9	14.6
5/12	14.8	33.4	17.8	5.7	11.2	2.9

qualité, combinée avec une structure de commande relativement simple, est résolue en effet avec succès grâce essentiellement au formalisme LMI.

5.5 Conclusion

Par l'entremise de la formulation de passivité introduite dans [20], nous avons proposé un schéma de contrôle pour atteindre des performances raisonnables dans des applications plus complexes des systèmes d'actionneurs pneumatiques avec des niveaux de frottements importants caractérisés par un comportement variant et donc des paramètres variant dans le temps et/ou incertains. Ici, nous avons focalisé notre effort sur le développement du contrôle de position et de la compensation de frottement basée sur le modèle dynamique de *LuGre*. Nous avons offert une synthèse de *feed-back* de sortie à multi-objectifs pour améliorer la robustesse du suivi de trajectoire et de compensation de frottement par rapport aux variations des paramètres incertains et des erreurs résiduelles de la boucle de force.