

## CHAPITRE 4

### APPLICATION 2 : SYSTÈME D'ACTIONNEUR PNEUMATIQUE SOUS FROTTEMENT - MODÉLISATION ET COMPENSATION (PREMIÈRE PARTIE : CONTRÔLE DE FORCE)

« C'est par l'expérience que la science et l'art font leur progrès chez les hommes. »

Aristote (384 av. J-C. – 322 av. J-C.)  
La Métaphysique

#### 4.1 Introduction

Dans la deuxième application 'industrielle' (ou 'de laboratoire') proposée dans le cadre de cette thèse, nous élaborons l'étude complète de contrôle des systèmes d'actionneurs pneumatiques; qui sont caractérisés souvent par un facteur de frottement très élevé (ayant pour cause l'air qui est considéré comme un 'très mauvais' lubrifiant). La complexité du couplage de force/position de tel système rend l'étape de contrôle de force cruciale et non négligeable. Ayant pour but de résoudre le problème de contrôle de position et de compensation de frottement de ces dispositifs, nous avons scindé les différentes parties du problème en deux volets; dont

- la procédure de contrôle de force est discutée dans ce chapitre,
- et la technique de contrôle de position sera présentée dans le chapitre suivant (*Cf.* chapitre 5).

Dans le présent chapitre, nous allons développer respectivement deux techniques (complémentaires) de commande de force; en considérant d'abord la dynamique d'erreur du système en boucle fermée affectée par des signaux exogènes de perturbations bornées, puis en considérant le cas où les limites (ou les bornes) des perturbations sont inconnues. Dans les deux cas, nous appliquons une approche de commande linéarisante pour annuler toutes les non-linéarités connues. Nous procédons ensuite par la synthèse d'un retour d'état linéaire pour réaliser un schéma de contrôle de force dans l'espace linéaire réduit

de dynamique d'erreur de force. Dans cette étape, nous proposons une nouvelle contribution qui s'identifie à l'application de la formulation LMI pour la synthèse de la commande linéaire des systèmes pneumatiques. Finalement, une expression originale *ad hoc*<sup>1</sup> de compensation atténuante non linéaire est développée dans la deuxième stratégie pour réduire l'effet des termes non linéaires d'amplitudes non bornées *a priori*. L'ensemble permet de garantir une solution bornée de la dynamique de force. Des résultats expérimentaux vont permettre d'illustrer ces démarches de contrôle de force.

## 4.2 Modélisation des systèmes pneumatiques

### 4.2.1 Généralités

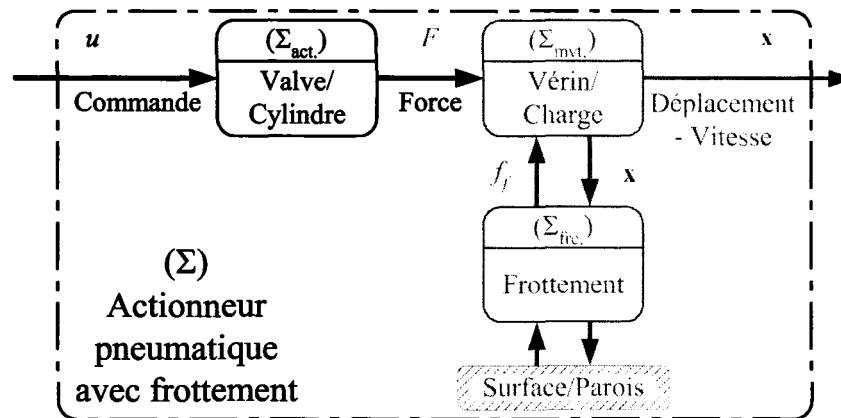


Figure 31 Servo-système de mouvement : Actionneur pneumatique sous frottement

La construction du système de contrôle d'un procédé physique basé sur le principe de *rétroaction* nécessite, en général, une analyse préalable et une modélisation 'fidèle' de son comportement [246]. Cette dualité de modélisation/commande est très importante; d'autant plus qu'un processus simple pourrait être représenté par un modèle aussi simple (par exemple, un système linéaire) et, ainsi, asservi avec une loi de commande linéaire. Par contre, pour un système complexe, l'utilisation d'un modèle de connaissance simplifié ou

<sup>1</sup> Expression d'origine latine, elle signifie 'propre à' ou 'créé pour la circonstance'.

approximé qui permettrait d'établir un asservissement simple et facile à implanter s'avère, en général, peu efficace et aux performances *mi-figue-mi-raisin*<sup>2</sup>. Les systèmes pneumatiques ne dérogent pas à cette règle. En effet, leur utilisation dans les processus industriels de haute précision a été longtemps limitée à cause de leur structure de modèle complexe :

- Dynamique fortement non linéaire caractérisée par [33, 163] :
  - des variations thermodynamiques du gaz (compressibilité de l'air);
  - des frottements mécaniques variables.
- Absence de modèle due aux [187] :
  - structures (géométrique, mécanique et thermodynamique) très perplexes des vannes;
  - incertitudes (variations thermodynamiques) des modèles non linéaires de ces systèmes.

*Grosso modo*, l'actionneur pneumatique est caractérisé par deux dynamiques associées (voir figure 31); à savoir la dynamique de pression (ou de force) et la structure mécanique (de déplacement) du système. Une représentation schématique de l'actionneur pneumatique est donnée dans la figure 32. Nous distinguons le cylindre à volume variable dont la pression permet de manipuler le piston amovible en force et/ou position. Une valve à tiroir proportionnelle est utilisée pour contrôler l'écoulement d'air et, par conséquent, la pression dans les chambres du cylindre. Dans [31, 32, 33], nous avons déjà élaboré une étude exhaustive (caractéristiques, propriétés, conditions et modélisations) de ces dispositifs.

#### 4.2.2 Modélisation mathématique d'un système d'actionneur pneumatique

Dans cette section, nous introduisons les équations mathématiques; qui modélisent la dynamique de force d'un actionneur pneumatique; obtenues par la procédure développée dans [32, 33].

---

<sup>2</sup> Une expression qui daterait du XIV<sup>ème</sup> siècle, qui signifie "mêlé de bon et de mauvais".

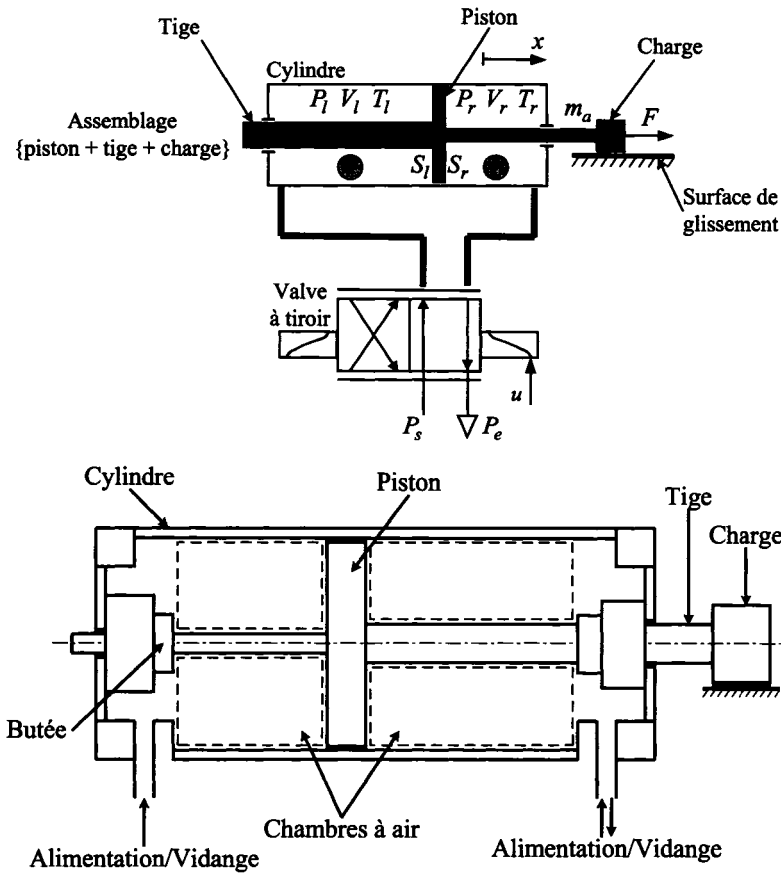


Figure 32 Description schématique d'un système pneumatique

Le système que nous considérons (voir figure 32) consiste en un cylindre pneumatique alimenté en air comprimé par l'intermédiaire d'une servo-valve. La force motrice appliquée sur l'assemblage {piston + tige + charge}, sous l'effet des pressions d'air que subit le piston de chaque côté, est exprimée par le modèle dynamique suivant [32, 33, 247, 248] :

$$\dot{F} = -\beta_1(t)h_1(P_l, P_r, x, \dot{x}) + \beta_2(t)h_2(t, P_l, P_r, x)u \quad (4.1)$$

$u$  est le signal d'entrée, qui correspond à la position du tiroir (*i.e.* la proportion d'ouverture de l'orifice). Elle est proportionnelle à la tension d'excitation de la servo-valve.  $P_l$  et  $P_r$  sont les pressions absolues dans les chambres gauche et droite du vérin,  $x$  et  $\dot{x}$ , respectivement, la position et la vitesse du piston, et  $t$  la variable temporelle.  $\beta_1(t)$  désigne le coefficient de chaleur; qui dépend du type de transfert thermique durant le processus

[33, 249].  $\beta_1(t)$  varie selon :

$$\underline{\beta}_1 = 1 \leq \beta_1 \leq \bar{\beta}_1 = \zeta \quad (4.2)$$

où  $\zeta$  désigne le rapport de chaleur spécifique.  $\beta_2(t)$  est un paramètre défini pour caractériser la combinaison des incertitudes du coefficient de chaleur  $\beta_1(t)$ , du coefficient de décharge  $C_d(t)$  de la valve et de la variation de température  $\tau(t)$  [33, 248].  $\beta_2(t)$  est génériquement exprimé par la relation suivante [33, 248] :

$$\beta_2(t) = \beta_1(t)C_d(t)\sqrt{\tau(t)} \quad (4.3)$$

et varie selon :

$$0 < \underline{\beta}_2 \leq \beta_2 \leq \bar{\beta}_2 \quad (4.4)$$

Les fonctions non linéaires et variant dans le temps  $h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})$  et  $h_2(t, P_l, P_r, x)$  sont connues et données respectivement par [247, 250] :

$$h_1(P_l, P_r, x, \dot{x}) = \frac{P_l \dot{V}_l(\dot{x})}{V_l(x)} S_l - \frac{P_r \dot{V}_r(\dot{x})}{V_r(x)} S_r \quad (4.5)$$

et

$$h_2(t, P_l, P_r, x) = W \sqrt{RT_a} \operatorname{sgn}(u) \left( \frac{f(P_l)}{V_l(x)} S_l - \frac{f(P_r)}{V_r(x)} S_r \right) \quad (4.6)$$

avec

$$f(P) = \begin{cases} -P \bar{f}\left(\frac{P_o}{P}\right) & | P > P_o \\ P_o \bar{f}\left(\frac{P}{P_o}\right) & | P \leq P_o \end{cases} ; o = e, s \quad (4.7)$$

où  $P_e$  et  $P_s$  représentent respectivement la pression extérieure ambiante et la pression d'alimentation (voir figure 32),  $S_l$  et  $S_r$  les aires de sections de piston en contact avec l'air dans les chambres gauche et droite du cylindre,  $T_a$  la température ambiante absolue du milieu,  $V_l$  et  $V_r$  les volumes actifs dans les chambres gauche et droite,  $R$  la constante universelle des gaz parfaits,  $W$  la constante (de proportionnalité) d'ouverture de la valve à tiroir. Pour tenir compte des différentes phases de débit<sup>3</sup> régulier (ou variant) et critique (ou

<sup>3</sup> Connues, en anglais, par *sonic and subsonic flux*.

constant), nous décrivons la fonction continue de débit réduit  $\bar{f}(p)$  comme suit [33, 157] :

$$\bar{f}(p) = \begin{cases} C_1 & \text{si } p \leq p_{cr} \\ C_2 p^{\frac{1}{\zeta}} \sqrt{1 - p^{\frac{\zeta-1}{\zeta}}} & \text{si } p > p_{cr} \end{cases} \quad (4.8)$$

avec

$$C_1 = \sqrt{\frac{\zeta}{R} \left(\frac{2}{\zeta+1}\right)^{\frac{\zeta+1}{\zeta-1}}}, C_2 = \sqrt{\frac{2\zeta}{R(\zeta-1)}} \text{ et } p_{cr} = \left(\frac{2}{\zeta+1}\right)^{\frac{\zeta}{\zeta-1}} \quad (4.9)$$

respectivement des constantes de débit réduit et le rapport critique de pression.

### 4.3 Commande des systèmes pneumatiques

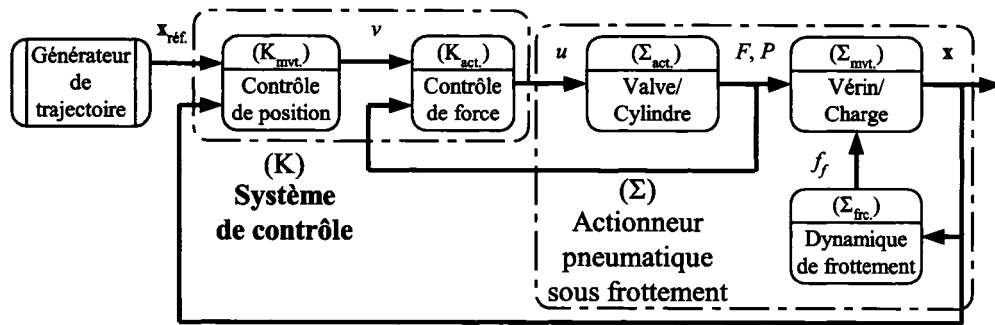


Figure 33 Schéma de base de boucle contrôle de système d'actionneur pneumatique sous frottement

Les actionneurs pneumatiques sont considérés comme des convertisseurs d'énergie pneumatique en effet cinétique (position et vitesse) et en travail mécanique (de force). Ils sont souvent abandonnés lorsqu'ils sont soumis à des commandes rapides et précises; contrairement aux actionneurs électriques et hydrauliques. Nous constatons, en général, un *imbroglio* de facteurs qui affectent la performance des servo-systèmes pneumatiques; en terme de précision (erreur de poursuite) et de rapidité (temps de réponse, cycle limite, etc.). En effet, la dynamique de force et les grandeurs cinétiques (comme la vitesse) de ces dispositifs sont affectées par la charge externe et aussi sont sensibles à la compressibilité de l'air et aux forces de frottement non linéaires dans les parties mécaniques. Une manière

rudimentaire pour réduire l'influence de la compressibilité du gaz est d'augmenter la pression [21, 251]. Cette solution reste très onéreuse. Elle entraîne une augmentation des coûts d'installation et de maintenance. En effet, il faudrait re-dimensionner toute l'installation (ajout de compresseur, extension dans les conduites de transmission, *etc.*).

Dans le cadre de la présente thèse, nous proposons une démarche complète de contrôle des systèmes pneumatiques, selon le schéma de la figure 33. L'objectif principal de ce système de contrôle demeure l'asservissement de la position de ces dispositifs. Pourtant, nous allons commencer, dans ce chapitre, par le développement de la stratégie de commande de force. Faut-il mentionner, une fois de plus, qu'il s'agit d'une étape indispensable; à cause de la complexité du couplage<sup>4</sup> qui se trouve entre la dynamique de force et celle de position dans ce cas ?

## 4.4 Commande de force d'un actionneur pneumatique

### 4.4.1 Préliminaire

La position du tiroir de la valve  $u$  (grandeur mécanique de la valve) est supposée proportionnelle à la tension d'excitation (grandeur électrique). Nous supposons, *a priori*, que la dynamique de la structure mécanique de la valve est négligeable devant la constante de temps de l'ensemble du système [32, 247]. Nous rappelons que, dans la littérature, la structure mécanique de la valve est approximée parfois par des systèmes de premier ordre et de second ordre suffisamment amorti [162, 193].

En fait, nous avons préalablement étudié le comportement du système en tenant compte d'un modèle dynamique de la valve. Dans [30], nous avons développé une loi de commande par *feed-back* linéarisant combiné avec une action de commande linéaire du courant d'enroulement dans l'électro-valve; pour faire un contrôle de pression dans un réservoir à volume constant. En analysant les résultats de simulation obtenus, nous avons constaté

<sup>4</sup> Cf. respectivement sections §2.2.1 et §2.3.1.2.

[31] qu'il soit plus judicieux de négliger effectivement cette dynamique pour le type de valve que nous utilisons caractérisé généralement par des fréquences relativement élevées ( $\gtrsim 100\text{Hz}$ ). Autrement, ceci est vrai si l'on suppose que le temps de réponse de la servo-valve est faible devant le temps de remplissage ou de vidange de la chambre et devant le temps de réponse du vérin. Cette étape préliminaire de contrôle de pression de tel système représentait un préambule pour discuter de l'efficacité de l'actionneur pneumatique en positionnement et/ou force d'action [31, 30].

Dans la suite, nous abordons d'abord la question de contrôle de force d'un actionneur pneumatique, selon le schéma de la figure 34, dans un contexte particulier dont l'évolution des grandeurs cinétiques (position et vitesse) est considérée simplement bornée. Puis, nous modifions cette loi de commande pour tenir compte d'une situation plus générale qui comprend des grandeurs physiques non forcément bornées. Nous verrons plus tard que cette deuxième technique de commande de force basée aussi sur la première stratégie sera, en effet, accommodée pour le développement de la commande de position et de la compensation de frottement du système d'actionneur pneumatique (voir figure 42 plus loin).

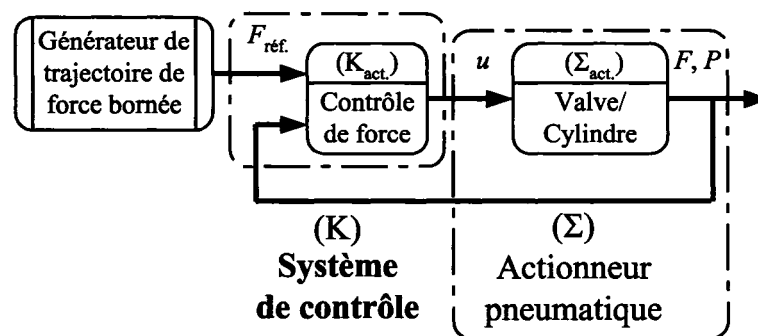


Figure 34 Schéma de base de contrôle de force-stratégie 1



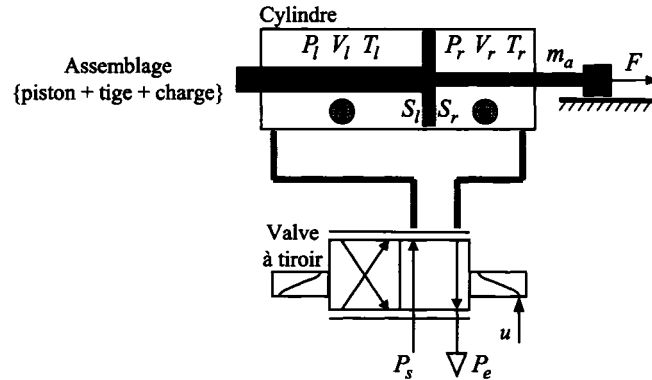


Figure 35 Schéma de système d'actionneur pneumatique

#### 4.4.2 Commande robuste de force - stratégie 1

Étant donné le système (de force) pneumatique représenté par la figure 35. Dans cette section, nous considérons les hypothèses suivantes [32, 247] :

**H4.1** Le volume dans le cylindre; qui est une grandeur mesurable, est considéré variant dans un intervalle fini. Physiquement, le déplacement du piston est délimité par les butées de début et fin de course (voir figure 32).

**H4.2** Les termes  $\beta_1(t)$  et  $\beta_2(t)$ , donnés par (4.2) – (4.4), sont deux fonctions paramétriques réelles; qui satisfont respectivement :

$$\beta_1(t) \triangleq \beta_{1n} + \tilde{\beta}_1 \text{ et } \beta_2(t) \triangleq \beta_{2n} \tilde{\beta}_2 \quad (4.10)$$

pour des valeurs nominales  $\beta_{1n}$  et  $\beta_{2n}$  connues et des perturbations  $\tilde{\beta}_1$  et  $\tilde{\beta}_2$  bornées, *i.e.*

$$\underline{\tilde{\beta}}_1 \leq \tilde{\beta}_1 \leq \overline{\tilde{\beta}}_1 \text{ et } \underline{\tilde{\beta}}_2 \leq \tilde{\beta}_2 \leq \overline{\tilde{\beta}}_2 \quad (4.11)$$

Nous notons que la formulation du système de force, donnée par (4.1), (4.5) – (4.7), (4.10) et (4.11), englobe une classe assez large de modèles d'actionneurs pneumatiques. Autrement, toutes les variations possibles des caractéristiques des-dits systèmes sont dédiées aux fonctions paramétriques  $\beta_1$  et  $\beta_2$ .

#### 4.4.2.1 Conception du contrôleur

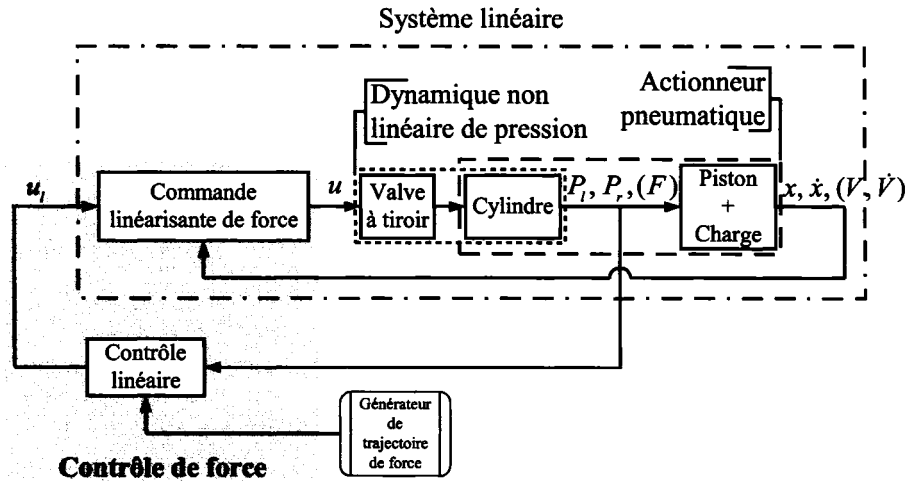


Figure 36 Schéma-bloc de la stratégie 1 de contrôle de force d'un actionneur pneumatique

Il existe des méthodes de *feed-back* linéarisant pour les systèmes avec des perturbations paramétriques. Mais ces méthodes supposent que les paramètres ne varient pas pour des fins d'adaptation; ce qui n'est pas le cas ici. Dans le but d'appliquer adéquatement une loi de commande linéaire sur la dynamique de force pneumatique  $F$ , nous proposons d'abord le compensateur par *feed-back* linéarisant suivant [247] :

$$u = \frac{u_l + \beta_{1n} h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})}{\beta_{2n} h_2(t, P_l, P_r, x)} \quad (4.12)$$

Ce changement de variable est basé sur le modèle nominal du système. Le problème de commande est d'assurer un suivi de force de pression  $F$  par rapport à une force variable et, *a priori*, bornée  $F_d$ . Nous notons

$$\tilde{F} = F - F_d \quad (4.13)$$

l'erreur de suivi de force. Ensuite, nous choisissons la loi de commande linéaire Proportionnelle Intégrale selon :

$$u_l = \dot{F}_d - K_P \tilde{F} - K_I \int \tilde{F} dt \quad (4.14)$$

Nous considérons le vecteur paramètre d'incertitude  $\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}^T$  un élément de l'hyper-cube

$$\Pi = \left\{ \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}^T \triangleq \begin{pmatrix} -\beta_1 + \beta_{1n}\tilde{\beta}_2 & \tilde{\beta}_2 - 1 \end{pmatrix}^T \mid \beta_1, \beta_{1n} \text{ et } \tilde{\beta}_2 \text{ vérifiant (4.2), (4.10) et (4.11)} \right\} \quad (4.15)$$

La substitution de (4.12) et par la suite (4.14) dans (4.1) implique l'équation d'état dynamique de l'erreur de suivi (voir figure 36) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K})\mathbf{X} + \mathbf{B}_w(\pi)\mathbf{w} \\ \tilde{F} = \mathbf{C}\mathbf{X} \end{cases} \quad (4.16)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B}_w(\pi) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\beta_1 + \beta_{1n}\tilde{\beta}_2 & \tilde{\beta}_2 - 1 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_I & K_P \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.17)$$

avec

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \int \tilde{F} dt \\ \tilde{F} \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{w} = \begin{pmatrix} h_1(P_l, P_r, x, \dot{x}) \\ \dot{F}_d \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Le modèle donné par (4.16) représente un système à *paramètres dépendants affines*<sup>5</sup> par rapport au vecteur paramètre d'incertitude  $\pi$ .

#### 4.4.2.2 Synthèse LMI

Soit  $T(s)$  la matrice (vecteur-ligne de dimension 2) de transfert en boucle fermée de (4.16), entre  $\mathbf{w}$  et  $\tilde{F}$ , soumis au retour d'état par *feed-back*  $-\mathbf{K}\mathbf{X}$  (voir figure 37). La synthèse de cette loi de commande répond aux spécifications désirées et aux performances de robustesse du système en boucle fermée suivantes :

<sup>5</sup> En anglais, *parameter-dependent system* (PDS).

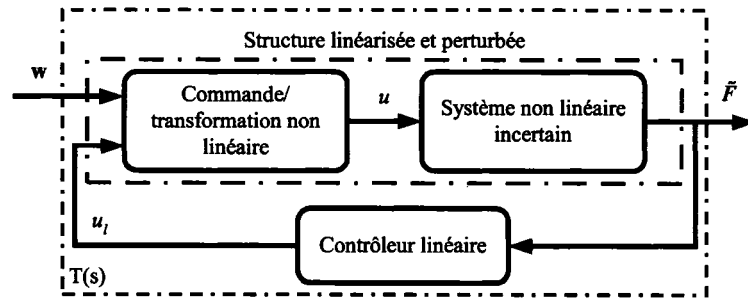


Figure 37 Schéma-bloc du système de force en boucle fermée

**S4.1** Assurer un placement de pôle dans une région de stabilité qui correspond à certaines conditions spécifiques et appropriées en terme de temps de réponse, d'amortissement et de mode (ou réponse) en fréquence, sur le système PDS (4.16) [220].

**S4.2** Minimiser la performance de type  $H_\infty$  du transfert  $T(s)$ , noté  $\|T(s)\|_\infty$ , sujet aux contraintes S4.1; autrement pour minimiser l'effet de perturbation  $w$  sur l'énergie de l'erreur de force  $\tilde{F}$  [252].

**S4.3** Minimiser la performance de type gain de *crête-à-crête*<sup>6</sup> du transfert  $T(s)$ , noté  $\|T(s)\|_1$ , sujet aux contraintes S4.1; autrement pour minimiser l'effet de perturbation  $w$  sur la valeur maximale de l'erreur de force  $\tilde{F}$  [254].

L'originalité dans le travail qui suit est attribuée à la méthode de conception du contrôleur. Cette dernière sera présentée comme un problème d'optimisation de multi-objectifs mettant en œuvre des LMIs. D'abord, nous allons présenter la synthèse du contrôleur li-

<sup>6</sup> Appelé aussi norme d'amplitude, performance  $L_1$  ou encore norme  $H_\infty$ -induite et, en anglais, *peak-to-peak gain* et noté  $\|H\|_1$  (ou  $\|H\|_{i\infty}$ ). Ce critère est défini par [253] :

$$\|H(s)\|_1 \triangleq \sup_{\|w\|_\infty \leq 1} \|Hw\|$$

*i.e.* mesure le maximum de la norme de la sortie associée aux signaux d'entrée  $w(t)$  dont l'amplitude est inférieure à 1. Cette norme représente une mesure naturelle du signal physique utile (par exemple, pour exprimer des spécifications strictes requises sur l'amplitude d'erreur de suivi de trajectoire). Dans le cas scalaire, cette grandeur représente le rapport d'amplitude maximale (crête) du signal de sortie sur celle du signal d'entrée. Par contre, il n'existe pas de méthodes explicites pour déterminer la valeur optimale exacte de cette norme. Et, les méthodes d'estimation connues (exploitables) restent particulièrement conservatives, surtout lorsque le système possède des modes lents ou légèrement amortis [26, 253].

néaire répondant au critère  $H_\infty$ , donné par S4.2, et en respectant la condition de placement de pôle dans une région de stabilité  $\mathcal{D}$  (voir figure 38), selon S4.1. L'objectif  $H_\infty$  a pour but de minimiser la pire valeur de l'erreur moyenne quadratique ou RMS de l'erreur  $\tilde{F}$  (ou simplement erreur RMS); autrement, il affecte sensiblement l'énergie de l'erreur et probablement l'amplitude de cette erreur (d'une manière indirecte). Par contre, cette dernière peut être directement affectée par le biais du critère de gain crête-à-crête. Pour ce faire, nous allons proposer dans un autre registre (*i.e.* en parallèle) le critère de minimisation donné par S4.3, pour développer le contrôleur de rejet de perturbation qui minimise éventuellement l'amplitude de l'erreur, toujours en concurrence avec la spécification S4.1. Une comparaison entre ces deux critères de performance sera discutée plus tard dans cette partie de ce chapitre. Le résultat de cette étape constitue une nouvelle contribution liée à la formulation LMI pour la détermination de la commande linéaire de force des systèmes pneumatiques.

### Cas d'optimisation $H_\infty$ sous contrainte de placement de pôle

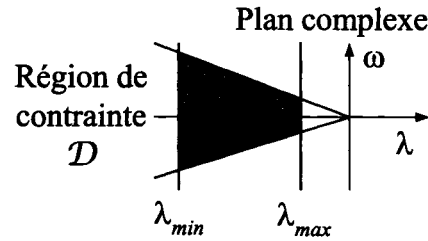
D'abord, nous assignons les deux pôles de la dynamique linéaire d'erreur en boucle fermée (4.16) dans  $\mathcal{D}$ , une sous-région du demi-plan complexe (voir figure 38), selon [222, 32, 247] :

$$\mathcal{D}(\lambda_{min}, \lambda_{max}, \theta) = \{\lambda + j\omega \in \mathbb{C} \mid \lambda_{min} \leq \lambda \leq \lambda_{max} \text{ et } \tan \theta \cdot \lambda < -|\omega|\} \quad (4.19)$$

pour  $\lambda_{min}$ ,  $\lambda_{max}$  et  $\theta$  des scalaires donnés. En fait, la fixation des pôles du système asservi dans cette région de stabilité réduite permet de limiter respectivement le temps de réponse, la fréquence des modes oscillatoires (en considérant les limites verticales) et le dépassement maximum (en considérant le secteur conique).

Étant donné les opérateurs matriciels  $\mathcal{L}^+$  et  $\mathcal{L}^-$  définis comme suit :

$$\mathcal{L}^+(X_1, Y_1, X_2, Y_2) = (X_1 Y_1 + Y_1^T X_1^T) - (X_2 Y_2 + Y_2^T X_2^T) \quad (4.20)$$

Figure 38 Région de stabilité  $\mathcal{D}$ 

et

$$\mathcal{L}^-(X_1, Y_1, X_2, Y_2) = (X_1 Y_1 - Y_1^T X_1^T) - (X_2 Y_2 - Y_2^T X_2^T) \quad (4.21)$$

En utilisant la notion des régions LMI présentée dans [218], le problème de synthèse à multi-objectifs  $H_\infty$  peut être réduit aux inégalités matricielles selon :

**Problème 4.1 :** Trouver une matrice  $\mathbf{P}_p \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , symétrique et définie positive telles que :  
 $\forall \pi \in \Pi$ ,

$$\mathbf{P}_p > 0 \quad (4.22)$$

$$\mathcal{L}_\pi^+(\mathbf{P}_p) - 2\lambda_{min}\mathbf{P}_p > 0 \quad (4.23)$$

$$\mathcal{L}_\pi^+(\mathbf{P}_p) - 2\lambda_{max}\mathbf{P}_p < 0 \quad (4.24)$$

et

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cdot \mathcal{L}_\pi^+(\mathbf{P}_p) & \star \\ -\cos \theta \cdot \mathcal{L}_\pi^-(\mathbf{P}_p) & \sin \theta \cdot \mathcal{L}_\pi^+(\mathbf{P}_p) \end{pmatrix} < 0 \quad (4.25)$$

avec  $\mathcal{L}_\pi^+(\mathbf{P}_p) = \mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}_p, \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K}, \mathbf{P}_p)$ ,  $\mathcal{L}_\pi^-(\mathbf{P}_p) = \mathcal{L}^-(\mathbf{A}, \mathbf{P}_p, \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K}, \mathbf{P}_p)$  et  $\star$  remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Il y a plusieurs références qui élaborent la formulation LMI de ce problème de région de stabilité (voir par exemple dans [222, 223, 224]).

Ensuite, nous formulons le critère RMS (confondu souvent avec la norme  $H_\infty$ ) de la boucle fermée entre  $w$  et  $\tilde{F}$ , selon :

**Proposition 4.1 :** La norme  $\|T(s)\|_\infty$  ne doit pas excéder  $\gamma > 0$  si et seulement si, il existe une matrice  $\mathbf{P}_\infty \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , symétrique et définie positive telles que [218] :  $\forall \pi \in \Pi$ ,

$$\mathbf{P}_\infty > 0 \quad (4.26)$$

et

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}_\infty, \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K}, \mathbf{P}_\infty) & \star & \star \\ \mathbf{B}_w^T(\pi) & -\gamma\mathbf{I} & \star \\ \mathbf{C}\mathbf{P}_\infty & 0 & -\gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (4.27)$$

\* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

**Démonstration :** Voir la formulation LMI d'optimisation  $H_\infty$  dans [218, 26, 231], par exemple. ■

Les variables respectives du problème 4.1 et de la proposition 4.1 sont les matrices symétriques de *Lyapunov*  $\mathbf{P}_p$  et  $\mathbf{P}_\infty$  et la matrice gain  $\mathbf{K}$ .

En général, pour résoudre simultanément ces problèmes de faisabilité et de multi-objectifs convexes, il est recommandé de trouver une solution satisfaisant la même matrice de *Lyapunov*  $\mathbf{P}$  dans (4.22) – (4.27). Nous nous limitons ainsi à la solution (formulation) sous-optimale de multi-objectifs  $H_\infty$  avec placement de pôle dans la région  $\mathcal{D}$ , suivante :

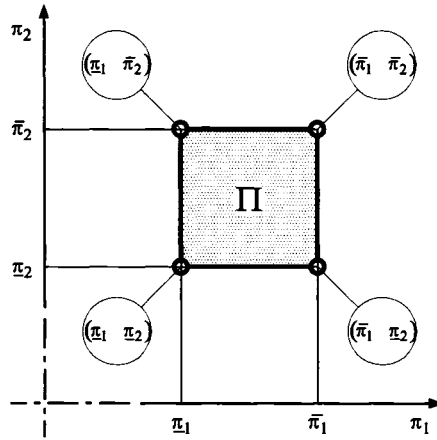
**Problème 4.2 :** Minimiser  $\gamma > 0$ ; sujet à

$\mathbf{P} > 0$  et symétrique et  $\mathbf{K}$  qui satisfont (4.22) – (4.27) avec

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_p = \mathbf{P}_\infty \quad (4.28)$$

Comme les expressions des inégalités (4.22) – (4.27) comprennent des termes non linéaires de la forme  $\mathbf{BKP}$ , le problème de faisabilité résultant est non linéaire. Alors, pour restituer la formulation LMI équivalente à (4.22) – (4.28), nous définissons la nouvelle variable auxiliaire  $\mathbf{Q} = \mathbf{KP}$  [231]. Les LMIs des nouvelles expressions des contraintes sont donc affines par rapport aux variables  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{Q}$ .

En outre, nous notons que le système PDS en boucle fermée (4.16) est affine par rapport à  $\pi$ , inclus dans l'ensemble convexe  $\Pi$  et donné par (4.15). En se basant sur la propriété

Figure 39 Plan de répartition des variations de  $\pi$ 

de convexité du problème dans son intégralité (contraintes convexes, fonction objective convexe et hyper-cube des paramètres convexe aussi), les LMIs seront dupliquées afin de trouver l'ensemble des solutions du problème d'optimisation qui vérifient tous les éléments de l'hyper-cube convexe  $\Pi$ , en considérant uniquement ceux des extrémités dans cet hyper-cube [255], comme suit : pour  $i = 1, 2$  et  $j = 1, 2$ ;

$$\mathbf{P} > 0 \quad (4.29)$$

$$\mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}_i, \mathbf{Q}) - 2\lambda_{\min} \mathbf{P} > 0 \quad (4.30)$$

$$\mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}_i, \mathbf{Q}) - 2\lambda_{\max} \mathbf{P} < 0 \quad (4.31)$$

$$\begin{pmatrix} \sin \theta \cdot \mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}_i, \mathbf{Q}) & \star \\ -\cos \theta \cdot \mathcal{L}^-(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}_i, \mathbf{Q}) & \sin \theta \cdot \mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}_i, \mathbf{Q}) \end{pmatrix} < 0 \quad (4.32)$$

et

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}_i, \mathbf{Q}) & \star & \star \\ \mathbf{B}_{\mathbf{w}_{ij}}^T & -\gamma \mathbf{I} & \star \\ \mathbf{C}\mathbf{P} & 0 & -\gamma \mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (4.33)$$

$\mathbf{B}_i$  et  $\mathbf{B}_{\mathbf{w}_{ij}}$  sont données par (4.17) en considérant les valeurs limites de  $\pi$  dans l'hyper-cube  $\Pi$  (voir figure 39).  $\star$  remplace les blocs qui sont référés par symétrie.



Donc, le problème de synthèse de retour d'état de multi-objectifs  $H_\infty$ , avec contrainte de placement de pôle, est établi comme suit :

**Problème 4.3 :** Minimiser  $\gamma > 0$ ; sujet à

$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , symétrique et définie positive et  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  qui satisfont (4.29) – (4.33).

### Cas d'optimisation du gain crête-à-crête sous contrainte de placement de pôle

Dans le but de limiter directement la 'pire' amplitude de  $\tilde{F}$ , nous considérons le critère de gain crête-à-crête de  $T(s)$  (voir figure 37). Ce critère est utilisé pour mesurer l'amplitude du signal de sortie [254]. Comme dans le paragraphe précédent, nous utilisons l'approche LMI pour formuler le problème de synthèse du retour d'état de multi-objectifs lié à la performance de la norme d'amplitude. En effet,

**Proposition 4.2 :** Le gain crête-à-crête du système (4.16), noté  $\|T(s)\|_1$ , est plus petit que  $\gamma > 0$  s'il existe une matrice  $\mathbf{P}_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , symétrique et définie positive, des scalaires  $\nu > 0$  et  $\mu > 0$  telles que [26] :  $\forall \pi \in \Pi$ ,

$$\mathbf{P}_1 > 0 \quad (4.34)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}_1, \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K}, \mathbf{P}_1) + \nu\mathbf{P}_1 & \star \\ \mathbf{B}_w^T(\pi) & -\mu\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (4.35)$$

et

$$\begin{pmatrix} \nu\mathbf{P}_1 & \star & \star \\ 0 & (\gamma - \mu)\mathbf{I} & \star \\ \mathbf{C}\mathbf{P}_1 & 0 & \gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.36)$$

\* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

**Démonstration :** Voir la formulation LMI d'optimisation de la norme d'amplitude dans [26, 219, 254], par exemple. ■

Notons que les contraintes (4.34) – (4.36) donnent une condition suffisante de la borne supérieure du gain crête-à-crête  $\|T(s)\|_1$  du système (4.16) [219]. D'où, la valeur minimale

de  $\gamma$ , pour laquelle il existe  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mu$  et  $\nu$  qui satisfont (4.34) – (4.36), présente *a priori* une borne supérieure du ‘vrai’ gain crête-à-crête du système. Par conséquent, La synthèse du contrôleur, dans ce cas, est considérée plus *conservative*.

D’après [26], pour évaluer ce *conservatisme*, il convient d’évaluer la longueur de l’intervalle  $[\gamma_\infty, \gamma_1]$ ; où  $\gamma_\infty$  et  $\gamma_1$  désignent respectivement la norme  $H_\infty$  minimale atteinte et la norme d’amplitude. si cette longueur est petite, alors nous jugeons l’estimation du gain crête-à-crête optimal, par l’entremise de la synthèse de commande proposée, ‘bonne’. Inversement, si cet intervalle est large, alors cette estimation est considérée ‘mauvaise’ ou ‘faible’.

Dans la suite, nous fixons la contrainte supplémentaire sur la matrice de *Lyapunov*

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_p = \mathbf{P}_1 \quad (4.37)$$

Alors, en considérant le changement de variable  $\mathbf{Q} = \mathbf{K}\mathbf{P}$ , le problème d’optimisation, associé à la norme d’amplitude  $\|\mathbf{T}(s)\|_1$  avec la contrainte de placement de pôle, est établi comme suit :

**Problème 4.4 :** Minimiser  $\gamma > 0$ , sujet à

$\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , symétrique et définie positive et  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  et des scalaires  $\nu > 0$  et  $\mu > 0$  qui satisfont (4.29) – (4.32) et; pour  $i = 1, 2$  et  $j = 1, 2$

$$\mathbf{P} > 0 \quad (4.38)$$

$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}_i, \mathbf{Q}) + \nu\mathbf{P} & * \\ \mathbf{B}_{w_{ij}}^T & -\mu\mathbf{I} \end{pmatrix} < 0 \quad (4.39)$$

$$\begin{pmatrix} \nu\mathbf{P} & * & * \\ 0 & (\gamma - \mu)\mathbf{I} & * \\ \mathbf{C}\mathbf{P} & 0 & \gamma\mathbf{I} \end{pmatrix} > 0 \quad (4.40)$$

\* remplace les blocs qui sont référés par symétrie.

Les inégalités (4.38) – (4.40) sont encore non linéaires par rapport à  $P$  et  $\nu$ . En pratique, pour trouver la ‘meilleure’ borne supérieure du gain crête-à-crête, nous proposons de minimiser  $\gamma(\nu)$  par rapport à  $\nu$ . Ce dernier problème est présenté comme un sujet de minimisation unidimensionnelle ajouté au problème d’optimisation LMI introduit ci-haut (Cf. problème 4.4).

#### 4.4.2.3 Conclusion

Nous avons appliqué une technique de commande linéarisante et de synthèse de retour d’état linéaire pour réaliser un schéma de contrôle de force d’un actionneur pneumatique. La dynamique d’erreur du système en boucle fermée est affectée dans ce cas, par des signaux exogènes de perturbations bornées (voir figure 37).

En tenant compte des incertitudes des paramètres, nous avons utilisé un placement de pôle robuste dans une région de stabilité  $\mathcal{D}$  spécifique en concurrence avec une performance de rejet de perturbation optimale. Cette optimisation a été discutée en utilisant deux critères distincts de  $H_\infty$  et de gain crête-à-crête. Nous allons comparer, plus tard dans ce chapitre<sup>7</sup>, les deux performances avec des résultats expérimentaux. Finalement, la technique de commande de force que nous avons étudiée, dans cette section, demeure très utile pour la suite de la conception de système pneumatique de force suffisamment précis pour un éventuel contrôle de position de ces actionneurs pneumatiques.

#### 4.4.3 Commande robuste de force - stratégie 2

Étant donné le système de force pneumatique représenté par la figure 40. Dans cette section, nous proposons un contrôle de force qui tient compte de l’aspect non borné des entrées exogènes de la dynamique de force (voir figure 41), en particulier, dans le cas d’un système de positionnement libre (non contrôlé) d’un actionneur pneumatique et sou-

<sup>7</sup> Cf. section §4.5.1 dans ce chapitre.

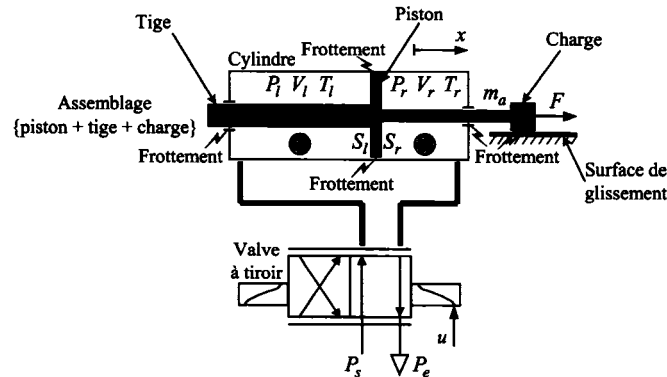


Figure 40 Schéma de système d'actionneur pneumatique sous frottement

mis au frottement (voir figure 40). En effet, la dynamique de contrôle de pression dans les chambres du vérin est considérée indépendante de celle de position du piston et de la charge (voir figure 40). L'ensemble des perturbations causées par le mouvement de la partie mécanique ne peuvent pas être considérées bornées *a priori*.

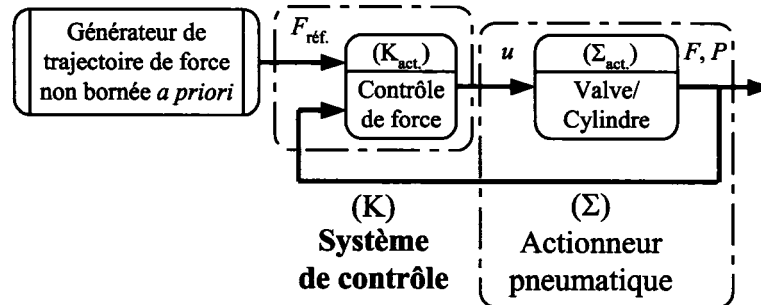


Figure 41 Schéma de base de contrôle de force-stratégie 2

Nous développons la conception de contrôle de force en utilisant l'expression analytique du modèle dynamique non linéaire de force à paramètres incertains (4.1) – (4.9) introduite dans la section §4.2.2 [247]. Nous procédons d'abord par une annulation de la plupart des non linéarités et des termes non bornés connus du système (comme dans la sous-section §4.4.2). Ensuite, nous développons une combinaison d'un contrôleur linéaire de type PI [247] et d'un compensateur non linéaire *atténuant*<sup>8</sup>, selon le schéma présenté dans

<sup>8</sup> En anglais, *nonlinear damping* [216].

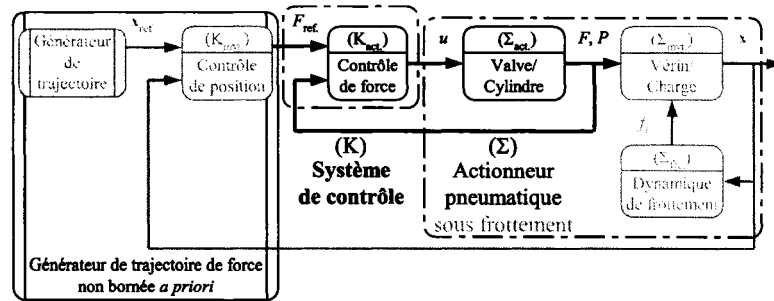


Figure 42 Schéma de base de contrôle de force, vu comme une partie intégrante du contrôle de position d'un actionneur pneumatique

[216], pour stabiliser la dynamique d'erreur de force en boucle fermée et limiter l'effet des perturbations dont les limites des variations sont *a priori* inconnues ou non forcément bornées. Comme dans [32, 247], la synthèse des gains de la commande linéaire est basée sur un placement de pôle approprié, exprimé en termes de LMIs. La combinaison de la technique de commande atténuante avec la formulation LMI du sous-problème linéaire constitue une autre contribution dans le présent travail.

#### 4.4.3.1 Linéarisation partielle

Nous considérons la dynamique de force (4.1). Nous introduisons la même technique de linéarisation par *feed-back* utilisée dans la stratégie de contrôle de force 1 (Cf. sous-section §4.4.2) selon [247, 250, 256] :

$$u = \frac{u_c + \beta_{1n} h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})}{\beta_{2n} h_2(t, P_l, P_r, x)} \quad (4.41)$$

où  $\beta_{1n}$  et  $\beta_{2n} > 0$  (voir relation 4.4) sont les valeurs nominales introduites dans (4.10). D'où, nous débarrassons le système (4.1) de la plupart des dynamiques non linéaires connues en remplaçant (4.41) dans (4.1) :

$$\dot{F}(t) = \pi_1(t) h_1(P_l, P_r, x, \dot{x}) + \tilde{\beta}_2(t) u_c \quad (4.42)$$

où  $\pi_1(t)$  et  $\tilde{\beta}_2(t) = \pi_2(t) + 1$  sont les paramètres incertains de  $\Pi$ , définis dans (4.15). Le terme  $h_1$ , donné par (4.5), est une fonction des variables connues des pressions  $P_l$  et

$P_r$ , qui sont bornées, de la position  $x$  et en particulier de la vitesse  $\dot{x}$ , qui ne sont pas bornées *a priori*. Par conséquent, l'usage d'un critère d'optimisation [247], comme dans la section précédente, n'est pas approprié ici, et la dynamique de force (4.42) ne peut pas être traitée seulement par un compensateur linéaire. Dans la suite, nous développons le terme  $u_c$  nécessaire pour compléter le schéma de contrôle de force.

L'objectif de la commande proposée est d'assurer un suivi de trajectoire de la force pneumatique  $F$ ; qui tient non seulement compte des incertitudes paramétriques, mais également des termes non bornés. Admettons en outre que, dans le contexte de positionnement du vérin pneumatique sous frottement, la force de référence est (par définition) une fonction variable de la vitesse et est une combinaison de la force de frottement estimée<sup>9</sup> [256]. En particulier, si nous notons par  $F_d(t, \dot{x})$  la force de référence, alors en accord avec la modélisation de la force de frottement et son estimation qui seront introduites dans le chapitre 5, nous pouvons écrire la fonction dérivée du signal de référence  $\dot{F}_d(t, \dot{x})$  comme une combinaison de termes continus et discontinus [256], selon :

$$\dot{F}_d(t, \dot{x}) = F'_d(t, \dot{x}) - \pi_3(t)\varphi(t, \dot{x}) \quad (4.43)$$

où  $F'_d(t, \dot{x})$  représente une fonction d'approximation continue de la dérivée du signal de référence, et  $\pi_3(t)\varphi(t, \dot{x})$  son erreur d'approximation.  $\varphi(t, \dot{x})$  est une fonction continue et  $\pi_3(t)$  un paramètre incertain, qui inclut l'aspect de discontinuité de la force de frottement au voisinage de la vitesse nulle (voir dans [256]). En particulier, si nous appliquons une compensation de frottement basée sur le modèle de *LuGre*, nous retrouvons ce type de discontinuité dans l'expression de la dérivée de la force de frottement sous forme de fonction  $\text{sgn}(\cdot)$ . Et, pour éviter cette discontinuité dans le terme d'anticipation de la commande de force (assujettie à une boucle externe de contrôle de position), nous suggérons son remplacement (ou approximation) par la fonction continue  $\text{sat}(\cdot)$  selon la formule générale proposée dans (4.43).

---

<sup>9</sup> Voir section §5.3.2 de contrôle de position d'un actionneur pneumatique, dans le chapitre 5.

Dans la suite, nous notons par  $\tilde{F} = F - F_d$  l'erreur de suivi. Le modèle de suivi de trajectoire de force pneumatique est exprimé, dans ce cas, par la représentation d'état suivante :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}(\pi)u_c + \mathbf{B}_w w(t) \quad (4.44)$$

avec

$$\mathbf{X} = \left( \int \tilde{F} dt \quad \tilde{F} \right)^T \text{ et } w(t) = \pi_1(t)h_1(P_l, P_r, x, \dot{x}) - \dot{F}_d(t, \dot{x}) \quad (4.45)$$

où

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{B}(\pi) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\beta}_2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{B}_w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

Les termes  $h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})$ ,  $\pi_1(t)$  et  $\dot{F}_d(t, \dot{x})$  sont exprimés respectivement dans les relations (4.5), (4.15) et (4.43).

#### 4.4.3.2 Synthèse LMI du retour d'état PI

Le système dynamique d'erreur de force (4.44) est la résultante d'une partie linéaire et d'un terme non linéaire et non forcément borné (*i.e.*  $\mathbf{B}_w w(t)$ ). La commande  $u_c$ , que nous allons proposer, sera, en effet, une combinaison de deux lois de compensation destinées aux dits termes.

D'abord, considérons le sous-système linéaire PDS, par rapport à l'incertitude  $\pi$ , suivant :

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}(\pi)u_c \quad (4.47)$$

Si nous posons  $u_c = -\mathbf{K}\mathbf{X}$ , alors le système linéaire en boucle fermée

$$\dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K})\mathbf{X} \quad (4.48)$$

peut être uniformément asymptotiquement stable pour un vecteur-ligne-gain  $\mathbf{K}$  soigneusement choisi dans  $\mathbb{R}^2$ ; *i.e.* il existe une matrice  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , symétrique et définie positive, telle que :  $\forall \pi \in \Pi$ ,

$$\mathcal{L}^+(\mathbf{A}, \mathbf{P}, \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K}, \mathbf{P}) < 0 \quad (4.49)$$

L'opérateur  $\mathcal{L}^+$  est défini dans (4.20). En plus, nous accordons à ce système de multi-objectifs une synthèse de commande robuste (pour tenir compte de l'incertitude structurée et bornée) semblable à celle développée dans la section précédente. Le retour d'état linéaire  $-KX$  permet de fixer respectivement la marge de stabilité exponentielle (*i.e.* temps de réponse) et l'amortissement (*i.e.* dépassement maximum), et de limiter la dynamique (*i.e.* fréquence du mode oscillatoire) du contrôleur [219, 220]. La synthèse de cette action linéaire peut être, en fait, présentée sous forme d'un problème de faisabilité de placement de pôle robuste dans une région de stabilité  $\mathcal{D}$ . Dans la suite, nous remplaçons la condition de stabilité (4.49) par la région de stabilité  $\mathcal{D}$  donnée par (4.19) et élaborée dans la stratégie 1 de commande de force<sup>10</sup>. La procédure de synthèse LMI associée à ce problème a été longuement discutée dans la sous-section §4.4.2.2. Seulement, nous ne tenons pas compte ici des critères d'optimisation ( $H_\infty$  et norme d'amplitude) pour trouver les matrices  $P$  et  $K$  (*i.e.* la variable auxiliaire  $Q = KP$ ).

**Proposition 4.3 :** Le système dynamique linéaire en boucle fermée (4.48) est uniformément asymptotiquement stable et l'ensemble de ses pôles balayent la région stable de  $\mathcal{D}$ , donnée par (4.19) si et seulement si, il existe une matrice  $P \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , symétrique et définie positive et une matrice  $Q \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  qui satisfont (4.29) – (4.32), pour tout  $i = 1, 2$  [250, 256].

**Démonstration :** Voir, par exemple, dans [218, 220, 222]. ■

En utilisant le résultat de la proposition 4.3, la relation (4.49) implique qu'il existe une matrice  $W \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , symétrique et définie positive, telle que :

$$(A - B(\pi)K)P + P(A - B(\pi)K)^T = -W \quad (4.50)$$

#### 4.4.3.3 Commande résultante : PI + compensation non linéaire

Dans la suite, la conception de la loi de commande  $u_c$  est basée sur la synthèse du contrôleur linéaire, discuté dans la proposition 4.3 et l'approche de commande non linéaire at-

<sup>10</sup> Cf. section §4.4.2.



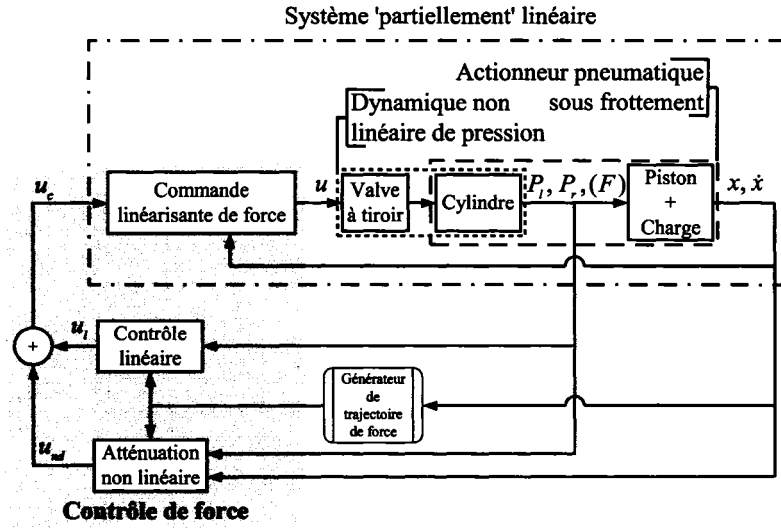


Figure 43 Schéma-bloc de la stratégie 2 de commande de force d'un actionneur pneumatique

ténuante présentée dans [216] dans une version légèrement modifiée pour garantir la robustesse de cette commande par rapport au paramètre multiplicatif incertain  $\tilde{\beta}_2$  (dans la matrice  $\mathbf{B}(\pi)$  de l'équation (4.44)) selon :

**Proposition 4.4 :** Considérons le système (4.42). Si l'action de commande  $u_c$  est définie par la combinaison suivante (voir figure 43) :

$$u_c = u_l + u_{nd} \quad (4.51)$$

où

$$u_l = F'_d(t, \dot{x}) - \mathbf{K}\mathbf{X} \quad (4.52)$$

et

$$u_{nd} = -\frac{K_{nd}}{\underline{\tilde{\beta}}_2} (h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})^2 + F'_d(t, \dot{x})^2 + \varphi(t, \dot{x})^2) \mathbf{B}_w^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X} \quad (4.53)$$

avec  $\underline{\tilde{\beta}}_2$  la borne inférieure du paramètre incertain  $\tilde{\beta}_2(t)$ , décrit par (4.10) et (4.11), et  $K_{nd} > 0$ . Supposons qu'il existe une matrice  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , symétrique et définie positive et une matrice  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$  qui satisfont (4.29) – (4.32). Alors, nous calculons  $\mathbf{K} = \mathbf{Q}\mathbf{P}^{-1}$ , et

la dynamique du système en boucle fermée, donnée par (4.44) – (4.43) et (4.51) – (4.53), est uniformément bornée.

**Démonstration :** La substitution de l'expression de  $w(t)$ , donnée dans (4.45), (4.43) et (4.51), et par la suite (4.52), dans (4.44) conduit à la dynamique d'erreur suivante :

$$\dot{\mathbf{X}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K})\mathbf{X} + \mathbf{B}_w(\tilde{\beta}_2(t)u_{nd} + \pi_1(t)h_1(P_l, P_r, x, \dot{x}) + \pi_2(t)F'_d(t, \dot{x}) + \pi_3(t)\varphi(t, \dot{x}))$$

avec  $\pi_2(t) = \tilde{\beta}_2(t) - 1$ , déjà introduite dans (4.15).

Choisissons la fonction candidate de *Lyapunov*  $V = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$ . Alors, la dérivée totale par rapport au temps de la fonction  $V$ , tout au long de la trajectoire du système, s'écrit :

$$\dot{V} = \frac{1}{2}\mathbf{X}^T(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K}) + (\mathbf{A} - \mathbf{B}(\pi)\mathbf{K})^T\mathbf{P}^{-1})\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_w(\tilde{\beta}_2(t)u_{nd} + \pi_1(t)h_1(P_l, P_r, x, \dot{x}) + \pi_2(t)F'_d(t, \dot{x}) + \pi_3(t)\varphi(t, \dot{x}))$$

En utilisant (4.50), nous avons

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X} + \mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_w\tilde{\beta}_2(t)u_{nd} + \bar{\pi}_1|\mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_wh_1(P_l, P_r, x, \dot{x})| + \bar{\pi}_2|\mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_wF'_d(t, \dot{x})| + \bar{\pi}_3|\mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_w\varphi(t, \dot{x})|$$

avec  $\bar{\pi}_1 = \max(|\pi_1|) > |\pi_1|$ ,  $\bar{\pi}_2 = \max(|\pi_2|) > |\pi_2|$  et  $\bar{\pi}_3 = \max(|\pi_3|) > |\pi_3|$ . Ensuite, si nous posons le terme  $u_{nd}$  suivant

$$u_{nd} = -\frac{1}{\tilde{\beta}_2}(K_1h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})^2 + K_2F'_d(t, \dot{x})^2 + K_3\varphi(t, \dot{x})^2)\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}$$

Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{W}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X} - K_1|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}|^2|h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})|^2 + \bar{\pi}_1|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}| \\ & |h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})| - K_2|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}|^2|F'_d(t, \dot{x})|^2 + \bar{\pi}_2|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}||F'_d(t, \dot{x})| \\ & - K_3|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}|^2|\varphi(t, \dot{x})|^2 + \bar{\pi}_3|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}||\varphi(t, \dot{x})| \end{aligned}$$

Le terme  $-K_1|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}|^2|h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})|^2 + \bar{\pi}_1|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}||h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})|$  a un maximum de  $\frac{\bar{\pi}_1^2}{4K_1}$  à  $|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}||h_1(P_l, P_r, x, \dot{x})| = \frac{\bar{\pi}_1}{2K_1}$ . Le terme  $-K_2|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}|^2|F'_d(t, \dot{x})|^2 + \bar{\pi}_2|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}||F'_d(t, \dot{x})|$  a un maximum de  $\frac{\bar{\pi}_2^2}{4K_2}$  à  $|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}||F'_d(t, \dot{x})| = \frac{\bar{\pi}_2}{2K_2}$ . Et, finalement, le terme  $-K_3|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}|^2|\varphi(t, \dot{x})|^2 + \bar{\pi}_3|\mathbf{B}_w^T\mathbf{P}^{-1}\mathbf{X}||\varphi(t, \dot{x})|$  a un maximum de  $\frac{\bar{\pi}_3^2}{4K_3}$

à  $|\mathbf{B}_w^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X}| |\varphi(t, \dot{x})| = \frac{\bar{\pi}_3}{2K_3}$ . Donc,

$$\dot{V} \leq -\frac{1}{2} \mathbf{X}^T \mathbf{P}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{P}^{-1} \mathbf{X} + \frac{\bar{\pi}_1^2}{4K_1} + \frac{\bar{\pi}_2^2}{4K_2} + \frac{\bar{\pi}_3^2}{4K_3}$$

D'où,  $\dot{V}$  est négative à l'extérieur d'une boule donnée (*i.e.*  $\exists \delta > 0$ , telle que  $\dot{V} < 0$ ,  $\forall \|\mathbf{X}\|$ ) [216]. D'après le théorème 4.18 dans [216], il suit que pour tout vecteur d'état initial  $\mathbf{X}(t_0)$ , la solution du système en boucle fermée est uniformément bornée. Finalement, nous posons  $K_{nd}$  tel que (par exemple)  $\frac{1}{K_{nd}} = \frac{\bar{\pi}_1^2}{4K_1} + \frac{\bar{\pi}_2^2}{4K_2} + \frac{\bar{\pi}_3^2}{4K_3}$ . ■

$u_l$ , donné par 4.52, est le terme linéaire par rapport au vecteur erreur et l'approximation continue de la dérivée de la force désirée  $F'_d(t, \dot{x})$  et  $u_{nd}$ , donné par 4.53, est le terme non linéaire, continu pour atténuer ou compenser l'effet des termes exogènes qui agissent sur la dynamique d'erreur de force en boucle fermée.

#### 4.4.3.4 Conclusion

Dans cette section, nous avons proposé une conception complète d'un contrôleur de force d'un actionneur pneumatique, qui tient compte des incertitudes de paramètres structurées et des aspects (signaux exogènes) non bornées. Le résultat de ce schéma adéquatement choisi servira dans le traitement du problème de contrôle de mouvement de l'actionneur sous frottement. Cette deuxième stratégie de contrôle de force est construite à partir d'une linéarisation par *feed-back* pour annuler la plupart des non linéarités connues. Ensuite, une action de retour d'état linéaire robuste et une autre compensation atténuante non linéaire sont développées pour réduire l'effet des termes non linéaires d'amplitudes non bornées *a priori*. L'ensemble permet de garantir une solution bornée de la dynamique de force. Des résultats expérimentaux vont permettre d'illustrer, en particulier, cette démarche de contrôle de force.

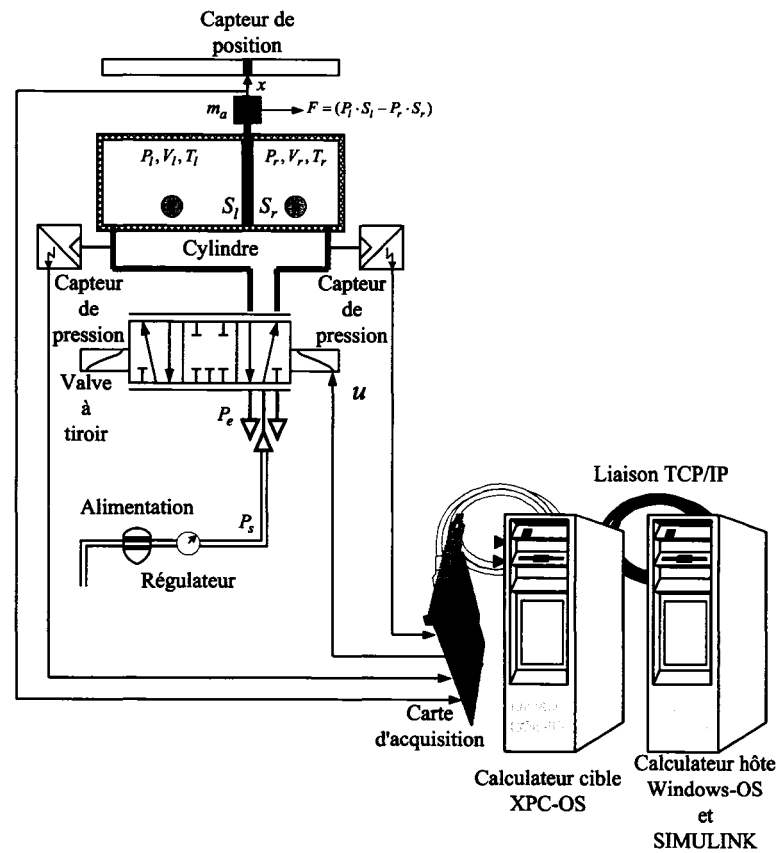


Figure 44 Schéma du dispositif expérimental

#### 4.5 Étude expérimentale

Un *experimentum*<sup>11</sup> est développé pour illustrer séparément l'efficacité de chaque stratégie de contrôle de force étudiée dans ce chapitre. Le système que nous considérons (voir figure 44) consiste en un vérin sans tige (*FESTO*, DGP-25-500) actionné par une électro-valve à 5 voies (*FESTO*, MPYE-5-1/8LF-010B). L'alimentation d'air comprimé est véhiculée via un régulateur (*FESTO*, LFR-M2-G1/4-C10RG). Les capteurs de pression (*FESTO*, SDE-10) sont utilisés pour mesurer la pression différentielle, équivalente à la force pneumatique appliquée sur le piston, à travers des ports non restrictifs. Le déplacement du piston est mesuré avec un capteur de position (*FESTO*, MLD-POT-500-TLF). La vitesse

<sup>11</sup> Du latin, il signifie expérience artificielle (au laboratoire).

est obtenue par une dérivation numérique des mesures de position. Le signal d'entrée, *i.e.* le déplacement du tiroir de la valve qui est proportionnel à la tension d'excitation de la valve, et les différentes mesures (*i.e.* les signaux de sortie) sont respectivement envoyés et acquis par un ordinateur via une carte d'acquisition (*National Instruments*, PCI-6052E). L'algorithme de contrôle est implémenté en utilisant les logiciels *Simulink*, *XPC-Target* et *Real-Time-Workshop* qui se trouvent dans MATLAB<sup>®</sup>. La période d'échantillonnage est fixée à 100  $\mu$ s. Le schéma-bloc implémenté dans *Simulink* est transformé en code C, sur un ordinateur hôte équipé avec *Windows-OS* et *Simulink*. Un dispositif exécutable est ensuite construit, et un noyau de type *real-time kernel* est utilisé pour exécuter le code sur un ordinateur cible équipé de *XPC-OS* (voir figure 44). Les deux ordinateurs hôte et cible utilisent une communication *TCP/IP*. Les valeurs numériques des paramètres du système pneumatique sont données dans le tableau V. La synthèse des différentes LMIs sont résolues dans *LMI Control Toolbox* de MATLAB<sup>®</sup> [232].

Tableau V

## Valeurs numériques des paramètres de l'actionneur pneumatique

Paramètre	Valeur minimale	Valeur maximale	Valeur nominale
$m_a$ (kg)	-	-	0.326
$u_{max}$ (m)	-	-	0.002
$P_e$ (bar)	-	-	1.01
$P_s$ (bar)	-	-	6.08
$R$ (Nm/kgK)	-	-	287.
$S_l = S_r$ (m <sup>2</sup> )	-	-	$4.9 \cdot 10^{-4}$
$T_a$ (K)	-	-	295.
$V_{l_{max}} = V_{r_{max}}$ (m <sup>3</sup> )	-	-	$2.45 \cdot 10^{-4}$
$W$ (m)	-	-	0.005
$\beta_1$	1.0	1.3997	1.1999
$\beta_2$	0.075	1.3297	0.7023
$\zeta$	-	-	1.3997

#### 4.5.1 Contrôle de force - stratégie 1

La trajectoire de la force désirée est donnée par  $F_d(t) = -75 \cos 2\pi ft$  (exprimée en Newton), pour différentes valeurs de la fréquence  $f$ . Le vecteur paramètre d'incertitudes  $\pi$  est inclus dans l'hyper-cube  $\Pi = \left\{ \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix}^T \mid -1.2719 \leq \pi_1 \leq 1.2719 \text{ et } -0.8932 \leq \pi_2 \leq 0.8932 \right\}$ . Ces limites sont calculées par une procédure d'identification préliminaire [33, 248]. Les paramètres limites de la région de stabilité  $\mathcal{D}$  de la partie linéaire incertaine sont choisies comme suit :  $\lambda_{min} = -300$ ,  $\lambda_{max} = -5$  et  $\theta = \arccos 0.7$ . Ces valeurs sont fixées dans le but de réaliser un compromis entre le temps de réponse, les fréquences admissibles des modes oscillatoires, le dépassement maximum et la limitation de l'amplitude de l'effort de commande.

Tableau VI

Performances de multi-objectifs  $H_\infty$  et gain crête-à-crête, et gains du contrôleur linéaire

critère d'entrée/sortie	$\gamma$	$K_P$	$K_I$
$H_\infty$	0.1382	161.1	1089.3
gain crête-à-crête	0.1765	161.1	942.7

Les gains du contrôleur ainsi que l'estimation des bornes supérieures des normes ( $H_\infty$  et crête-à-crête) sont donnés dans le tableau VI. Le tableau VII montre les performances de rejet de perturbation du contrôleur de la stratégie 1. Il illustre respectivement l'amplitude maximale approximée de l'erreur et son RMS obtenues pour différentes fréquences  $f$  de la force sinusoïdale désirée. Ces approximations sont calculées pendant l'intervalle de temps entre 2 et 10 secondes, qui est *a priori* suffisamment loin du régime transitoire. Évidemment, les valeurs maximales de l'erreur de force sont censées d'être meilleures (*i.e.* plus petites) par le critère de gain crête-à-crête comparées à celles obtenues par le critère  $H_\infty$ . Aussi, nous constatons que les meilleures erreurs RMS sont celles obtenues par le biais du critère  $H_\infty$ . Dans l'ensemble, cette erreur reste bornée et faible.

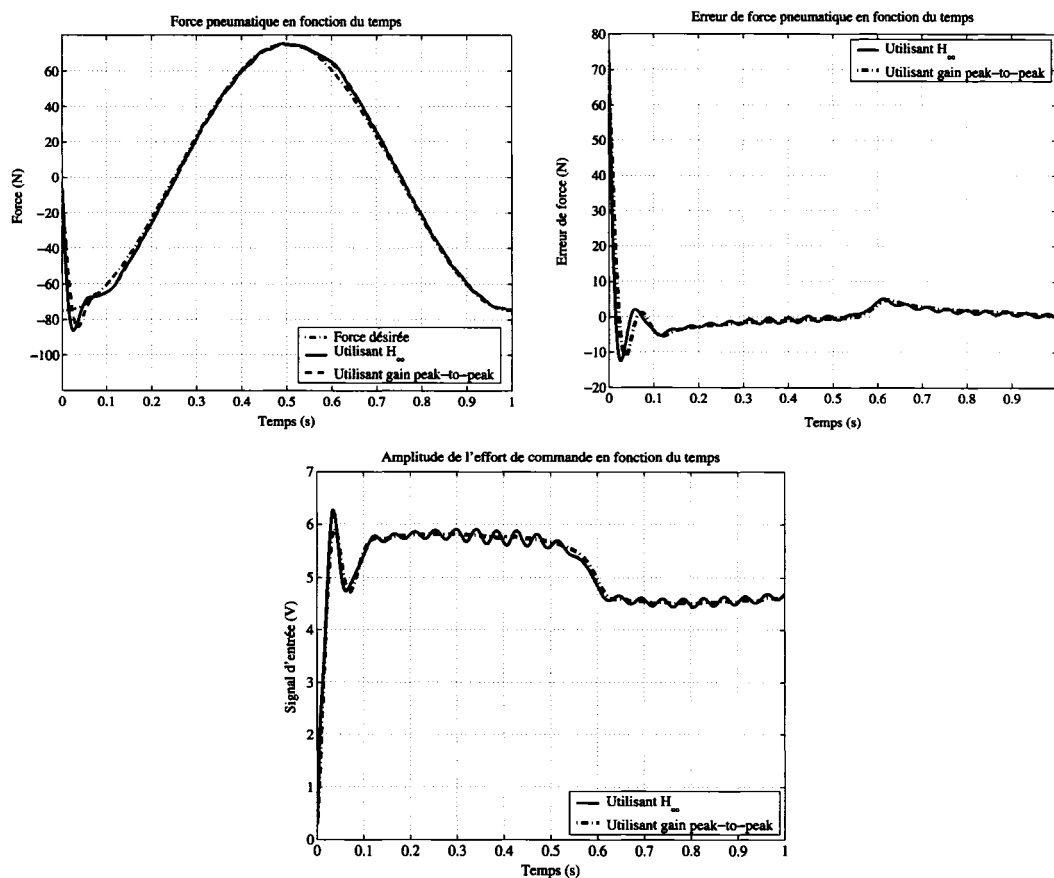


Figure 45 Force appliquée sur le piston, erreur de force et effort de commande, utilisant les performances  $H_\infty$  et gain crête-à-crête, dans le cas d'une force désirée sinusoïdale d'amplitude 75 N et de fréquence  $f = 1$  Hz

La figure 45 montrent respectivement la force réelle appliquée, l'erreur de force et l'effort de commande, pendant une période de 1 s, pour une trajectoire sinusoïdale de force désirée d'amplitude 75 N et de fréquence  $f = 1$  Hz. En effet, la force mesurée tend rapidement vers la force désirée grâce à la contrainte de placement de pôle. L'usage de chacun des deux critères de performance proposées améliore manifestement la qualité de la réponse. L'effort de commande est acceptable même en présence d'incertitude de paramètres parfois variant brutalement. Nous constatons une oscillation relative de la valve dans le cas de la commande obtenue par le critère  $H_\infty$ .

Tableau VII

Performances de multi-objectifs  $H_\infty$  et gain crête-à-crête en fonction de la fréquence de la force désirée sinusoïdale d'amplitude 75 N

Fréquence $f$ (Hz)	Valeur maximale de l'amplitude d'erreur de force (N)	
	Utilisant $H_\infty$	Utilisant $H_1$
0.1	1.6968	2.7440
0.5	4.7559	5.0703
0.9	5.7608	5.7235
<u>1.0</u>	5.9510	<u>5.4825</u>
1.2	6.0825	6.0290
1.3	6.2133	6.1468
1.5	5.9117	5.9895

Fréquence $f$ (Hz)	Valeur maximale de RMS de l'erreur de force (N)	
	Utilisant $H_\infty$	Utilisant $H_1$
0.1	0.3295	0.4817
0.5	1.5879	1.7048
0.9	2.1953	2.2844
<u>1.0</u>	<u>2.2978</u>	2.3896
1.2	2.4046	2.5191
1.3	2.5626	2.6277
1.5	2.5374	2.6394

Finalement, il a été montré qu'une bonne estimation de la norme  $H_1$  par les outils LMI peut être considérée comme un critère de performance approprié pour limiter l'effet des perturbations sur l'amplitude de l'erreur de suivi, comparativement au critère RMS. Néanmoins, cette performance n'est possible que dans le cas d'une estimation garantie, par l'entremise des outils LMI, de la solution de gain crête-à-crête; ce qui n'est pas toujours le cas, à cause de l'aspect conservateur de la formulation LMI dans ce cas.

Nous pouvons conclure aussi que la synthèse du contrôleur suivant le critère de performance  $H_\infty$  peut être retenue (*i.e.* utilisée exclusivement) pour atténuer l'effet des perturbations, même en amplitude, en dépit de son caractère qui est défini plutôt par rapport à la minimisation de l'énergie de l'erreur.



### 4.5.2 Contrôle de force - stratégie 2

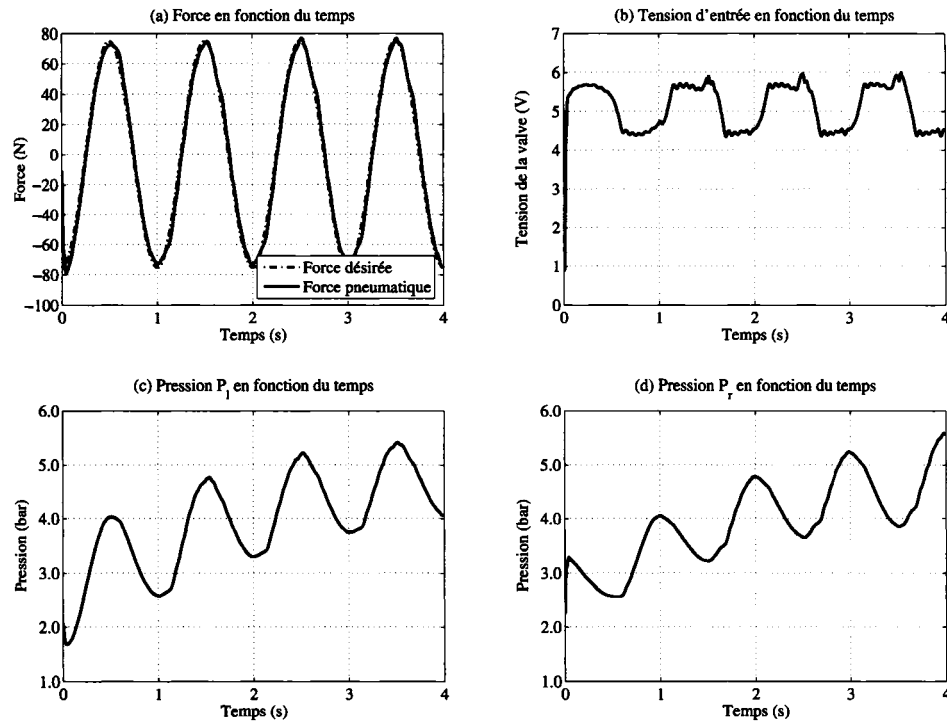


Figure 46 Performance de contrôle de force (stratégie 2), dans le cas d'une force de référence sinusoïdale

Les paramètres limites de la région de stabilité  $\mathcal{D}$  de la partie linéaire incertaine sont choisies, dans ce cas, selon :  $\lambda_{min} = -120$ ,  $\lambda_{max} = -2$  et  $\theta = \arccos 0.7$ . Les gains du contrôleur PI sont donnés par  $\mathbf{K} = (177.8 \ 74.9)$ . Le gain peut être choisi à  $K_{nd} = 0.01$ .

Les figures 46 (a), 47 (a) et 48 (a) montrent la force réelle mesurée et la force désirée pour différentes formes de signal de référence. L'erreur de force reste infiniment bornée. Les efforts de commande associés à ces différentes réponses sont représentés dans les figures 46 (b), 47 (b) et 48 (b). Nous montrons que l'excitation de la valve dans ces cas ne dépasse point la valeur maximale de 10 V (qui est équivalente à l'ouverture maximale du tiroir  $u_{max}$ ). Finalement, les figures 46 (c), 46 (d), 47 (c), 47 (d), 48 (c) et 48 (d) montrent les niveaux des pressions dans les deux chambres du cylindre. Dans [250] (papier, présenté

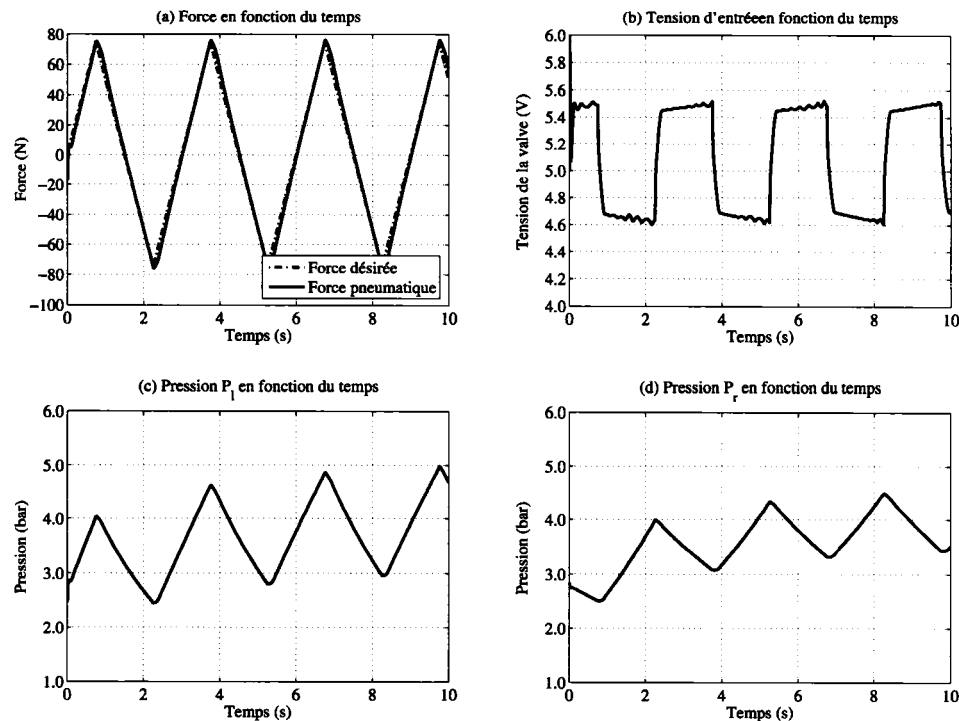


Figure 47 Performance de contrôle de force (stratégie 2), dans le cas d'une force de référence triangulaire

dans un journal, est actuellement en révision), nous présentons plusieurs résultats qui permettent de comparer notre approche avec une autre loi de commande linéaire robuste de type PD.

#### 4.6 Conclusion

Nous avons discuté dans ce chapitre la technique de contrôle de force d'un système d'actionneur pneumatique, par le biais du formalisme LMI en tenant compte de plusieurs aspects d'incertitudes et de perturbations liés à ces installations. En effet, l'application de cette technique (Cf. LMI) dans la synthèse de la commande des systèmes pneumatiques constitue une nouvelle contribution (*i.e.* une originalité qui n'a été présentée nulle part dans la littérature à notre connaissance). En outre, le complément de la commande dis-

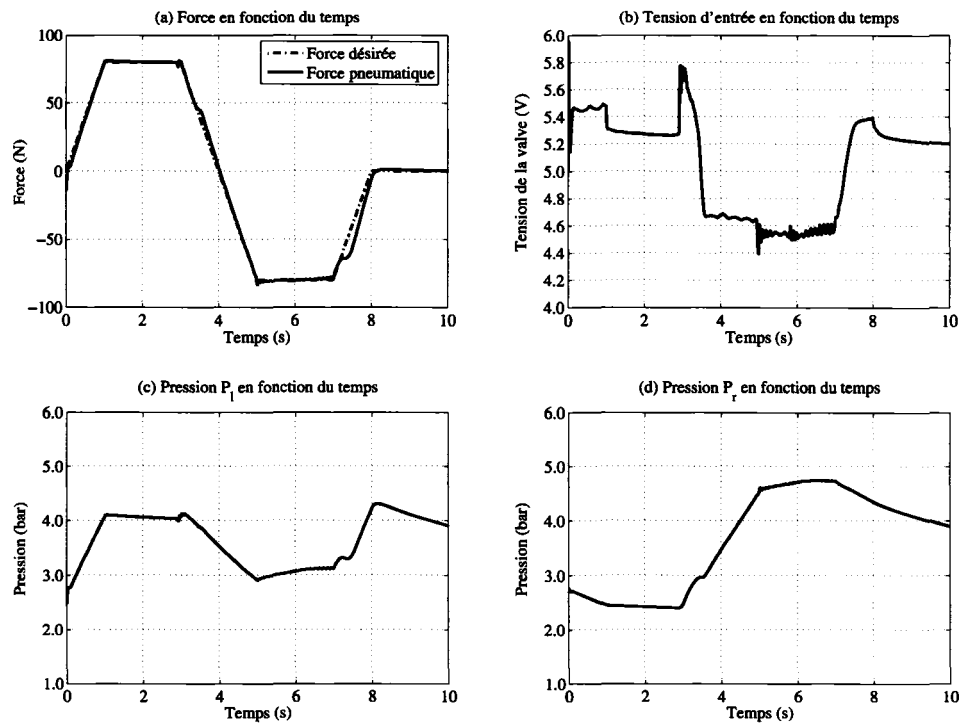


Figure 48 Performance de contrôle de force (stratégie 2), dans le cas d'une force de référence trapézoïdale

cutée dans la stratégie 2 (Cf. commande atténuante) représente une nouvelle proposition dans le traitement de la commande des systèmes pneumatiques; qui est décrite selon une lecture spécifique de ce qui caractérise le type de couplage de position/force (complexe et non négligeable) qui existe dans ces installations.

Le résultat de cette étape est destiné à la mise en place d'un système performant de contrôle de position par l'entremise d'une boucle interne de force. Il s'agit d'un travail intermédiaire dans la stratégie générale de contrôle des systèmes pneumatiques étudiée dans cette deuxième application. Dans le chapitre suivant, nous verrons comment nous allons établir le module de contrôle de position basé sur les performances aménagées et obtenues dans ce chapitre.