

## CHAPITRE 2

### COMMANDE ROBUSTE : OUTILS D'ANALYSE ET DE SYNTHÈSE DE LOIS DE COMMANDE

Ce chapitre est consacré à un rappel des outils et concepts de la commande robuste, lesquels seront utilisés au cours de cette thèse. Nous montrerons tout d'abord que la modélisation des incertitudes intervenant sur le modèle, peut être traduite par un formalisme standard de représentation des systèmes : les Transformations Linéaires Fractionnelles (*LFT*) [16]. Ce formalisme permet d'exprimer les problèmes d'analyse et de commande qui feront l'objet des chapitres suivants. Nous présentons ensuite la première méthode de synthèse : l'approche  $\mathcal{H}_\infty$ . Nous rappelons d'abord le théorème du petit gain, qui donne un résultat fondamental, concernant la stabilité du système bouclé face à des incertitudes non structurées. La synthèse d'une loi de commande robuste vis-à-vis de telles incertitudes est ensuite fournie, par l'algorithme de Glover-Doyle [27, 15].

La  $\mu$ -synthèse, que nous présentons au paragraphe 2.4.5, permet la réalisation de correcteurs assurant la robustesse en stabilité et en performance du système bouclé face à des incertitudes structurées. Cette méthode allie les concepts de valeur singulière structurée  $\mu$  et de commande  $\mathcal{H}_\infty$ . Nous nous intéresserons, dans un premier temps (section 2.4), à l'analyse de la robustesse face à des incertitudes structurées, qui fait appel aux outils de  $\mu$ -analyse.

Nous terminons ce chapitre, par la présentation d'une technique de réduction de modèles, basée sur la méthode de réduction par *troncature équilibrée*. Cette dernière sera utilisée pour la réduction des correcteurs obtenus. Pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à d'autres références sur le sujet, par exemple [14], [15], [59] et [6].

## 2.1 Transformation linéaire fractionnelle (*LFT*)

La Transformation Linéaire Fractionnelle (*LFT*) est un formalisme commun de représentation des systèmes, largement utilisé dans la théorie de la commande moderne. Elle généralise les notions classiques de fonction de transfert et de représentation d'état, en permettant la prise en compte simultanée de différents types d'incertitudes qui peuvent intervenir sur le modèle.

Soit  $P$  une matrice complexe quelconque, partitionnée de la manière suivante :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(p_1+p_2) \times (q_1+q_2)}$$

Supposons maintenant, qu'il existe deux bloc-structures  $\Delta_l \in \mathbb{C}^{q_2 \times p_2}$  et  $\Delta_u \in \mathbb{C}^{q_1 \times p_1}$ , reliés respectivement à  $P$  comme le montre le schéma de la figure 2.1. Les transformation linéaires fractionnelles  $\mathcal{F}_l(P, \Delta_l)$  et  $\mathcal{F}_u(P, \Delta_u)$  sont alors définies par :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_l(P, \Delta_l) &= P_{11} + P_{12}\Delta_l(I - P_{22}\Delta_l)^{-1}P_{21} \\ \mathcal{F}_u(P, \Delta_u) &= P_{22} + P_{21}\Delta_u(I - P_{11}\Delta_u)^{-1}P_{12} \end{aligned} \quad (2.1)$$

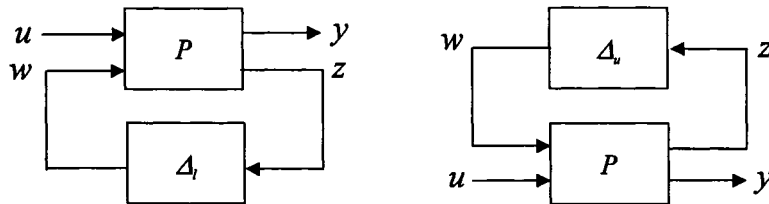


Figure 2.1 Schéma bloc pour *LFT* inférieure et *LFT* supérieure

Les indices  $l$  et  $u$  des applications  $\mathcal{F}_l(P, \Delta_l)$  et  $\mathcal{F}_u(P, \Delta_u)$  proviennent respectivement des initiales des mots anglais *lower* et *upper*, signifiant que  $\Delta_l$  (ou  $\Delta_u$ ) est appliquée à la partie inférieure (ou supérieure) de  $P$ . A noter que ces deux représentations sont dites

bien posées si et seulement si, l'inverse des deux matrices existent, i.e.  $\det(I - P_{22}\Delta_l) \neq 0$  et  $\det(I - P_{11}\Delta_u) \neq 0$ .

Les LFTs offrent un formalisme d'autant plus général pour la description des systèmes dynamiques, que le cas matriciel, présenté ci-dessus. Un exemple courant dans l'analyse de stabilité est la représentation d'état d'un système de commande.

Considérons le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

dont la fonction de transfert est donnée par  $G(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$ .

La représentation d'état est aussi une LFT en la variable  $\Delta = s^{-1}I$ , (figure 2.2).

En effet :

$$\begin{aligned}G(s) &= D + C(sI - A)^{-1}B \\ &= D + C\Delta(I - A\Delta)^{-1}B \\ &= \mathcal{F}_u \left( \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \Delta \right)\end{aligned}$$

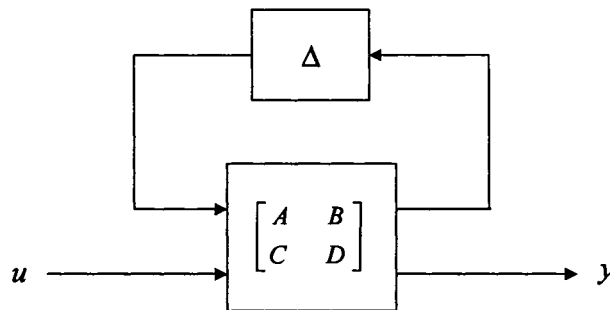


Figure 2.2 Représentation d'état par une LFT

D'autre part, la représentation LFT s'avère une technique très utile pour analyser des systèmes complexes avec autant de boucles de rétroaction et de blocs d'opérateurs en série

ou parallèle. Une propriété fondamentale des LFTs est qu'une interconnection linéaire de plusieurs LFTs peut être toujours représentée par une seule *LFT* équivalente. Pour illustrer cette propriété, considérons le système complexe avec plusieurs LFTs, représenté sur la figure 2.3.

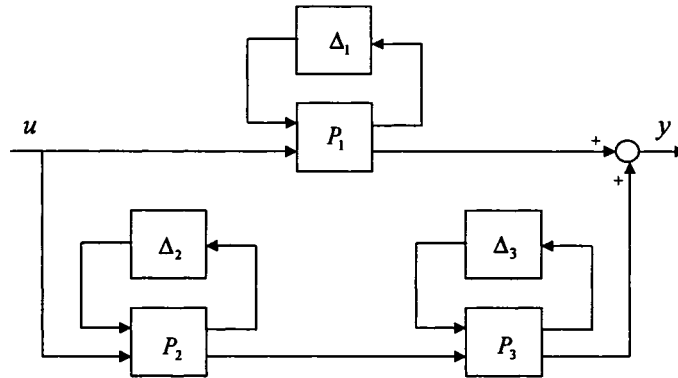


Figure 2.3 Interconnection de plusieurs LFTs

En regroupant ensemble les systèmes  $\{P_1, P_2, P_3\}$  et en isolant toutes les incertitudes  $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$  en un seul bloc, le système initial peut être représenté par une seule *LFT* équivalente, comme le montre le schéma de la figure 2.4, avec  $\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$  et

$$P = \begin{bmatrix} P_{11}^1 & 0 & 0 & P_{12}^1 \\ 0 & P_{11}^2 & 0 & P_{12}^2 \\ 0 & P_{12}^3 P_{21}^2 & P_{11}^3 & P_{12}^3 P_{22}^2 \\ P_{21}^1 & P_{22}^3 P_{21}^2 & P_{21}^3 & P_{22}^1 + P_{22}^3 P_{22}^2 \end{bmatrix}.$$

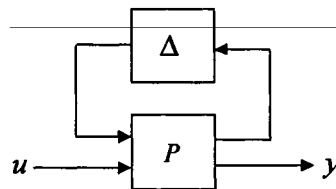


Figure 2.4 Système *LFT* équivalent

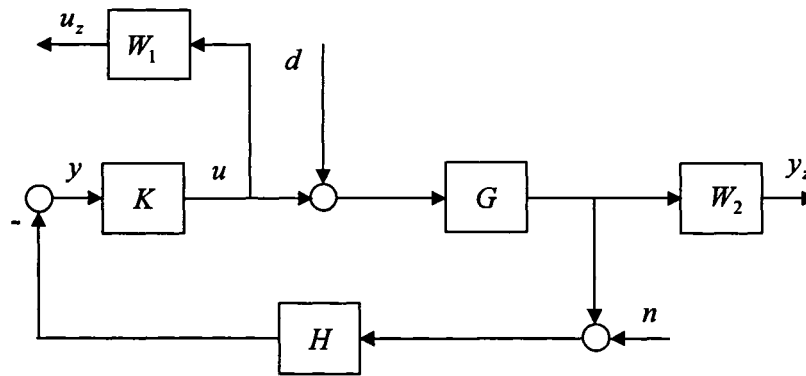


Figure 2.5 Système de commande en boucle fermée

Ce formalisme permet aussi d'exprimer le problème de la commande. Illustrons cela par un exemple. Considérons le système de commande de la figure 2.5. Ce dernier peut se mettre sous la forme standard comme le montre le schéma de la figure 2.6, avec

$$w = \begin{pmatrix} d \\ n \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} y_z \\ u_z \end{pmatrix}$$

et

$$P = \left[ \begin{array}{cc|c} W_2G & 0 & W_2G \\ 0 & 0 & W_1 \\ \hline -HG & -H & -HG \end{array} \right]$$

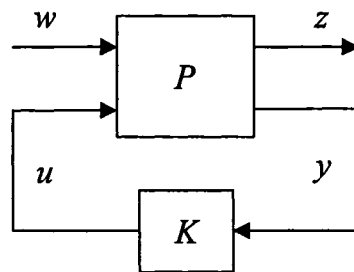


Figure 2.6 Système équivalent: forme standard

Nous aborderons plus tard dans ce chapitre, le problème de la commande, et notamment celui de l'analyse de la stabilité et de la performance des systèmes bouclés.

## 2.2 Modélisation des systèmes incertains

Le modèle d'un système utilisé pour la commande de celui-ci, quelle que soit la façon dont il a été obtenu, n'est toujours qu'une approximation. Il subsiste en effet toujours un certain nombre d'incertitudes qui sont essentiellement de deux types : les *incertitudes paramétriques* et les *incertitudes fréquentielles*.

### 2.2.1 Modélisation des incertitudes paramétriques

Ce dernier type d'incertitudes concerne les incertitudes sur la valeur des paramètres physiques du processus. Elles sont dues à des paramètres qui n'ont pas pu être modélisés ou mesurés avec précision.

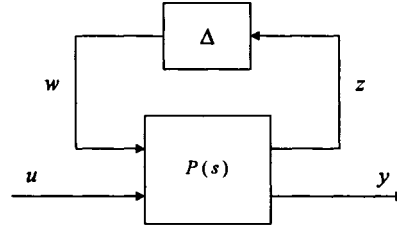
#### 2.2.1.1 Principe

L'idée consiste là encore à mettre le système incertain sous la forme d'une *LFT*, comme sur la figure 2.7 :

$$y = \mathcal{F}_u(P(s), \Delta)u \quad \text{avec} \quad \Delta = \text{diag} \{ \delta_i I \}$$

La matrice de transfert  $P(s)$  est fixée, et toutes les incertitudes paramétriques sont rassemblées dans  $\Delta$ .  $u$  et  $y$  représentent les entrées et sorties physiques du système, tandis que les scalaires réels  $\delta_i$  représentent des incertitudes paramétriques normalisées (c'est-à-dire que l'on fait l'hypothèse que  $\delta_i \in [-1, 1]$ ).

Illustrons cela sur un exemple. Considérons le modèle d'avion représenté par la dynamique *short-period*. On supposera de plus que certains coefficients sont mal connus. On va montrer par cet exemple qu'on peut exprimer ce système incertain sous forme d'une *LFT* supérieure.

Figure 2.7 Formulation d'un système incertain par une *LFT*

La dynamique rapide étant décrite par la représentation d'état habituelle :

$$\text{équation d'état : } \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{\alpha} & 1 \\ M_{\alpha} & M_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e \quad (2.2)$$

$$\text{équation de sortie : } \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix}$$

où les états  $\alpha$  et  $q$  correspondent respectivement à l'incidence, et à la vitesse de tangage, tandis que  $\delta_e$  représente la gouverne de profondeur. Le vecteur de sortie coïncide avec le vecteur d'état lui même  $[\alpha \ q]'$ . Les paramètres aérodynamiques  $Z_{\alpha}$ ,  $M_{\alpha}$ ,  $M_q$ ,  $Z_{\delta_e}$  and  $M_{\delta_e}$  sont les dérivées de stabilité. Supposons que les trois paramètres suivants sont connus avec une certaine erreur autour de leurs valeurs nominales respectives.

$$\begin{aligned} M_{\alpha} &= M_{\alpha 0} + W_a \delta_a \\ M_q &= M_{q 0} + W_b \delta_b \\ M_{\delta_e} &= M_{\delta_e 0} + W_c \delta_c \end{aligned} \quad (2.3)$$

où  $W_a \in \mathbb{R}$ ,  $W_b \in \mathbb{R}$  et  $W_c \in \mathbb{R}$  sont trois fonctions de pondération adéquates et  $\delta_a$ ,  $\delta_b$  et  $\delta_c$  sont des perturbations telles que  $|\delta_a| \leq 1$ ,  $|\delta_b| \leq 1$  et  $|\delta_c| \leq 1$ .

L'idée est alors d'introduire des entrées et sorties fictives  $w$  et  $z$ , afin de représenter les incertitudes par un rebouclage interne  $w = \Delta z$ . Définissons  $[z_1 \ z_2 \ z_3]'$  comme vecteur

de sortie :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_a & 0 \\ 0 & W_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W_c \end{bmatrix} \delta_e$$

et  $[w_1 \ w_2 \ w_3]'$  comme vecteur d'entrée :

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_a & 0 & 0 \\ 0 & \delta_b & 0 \\ 0 & 0 & \delta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Le modèle perturbé s'écrit alors sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \\ z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \alpha \\ q \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|ccc|c} Z_\alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & Z_{\delta_e} \\ M_{\alpha 0} & M_{q0} & 1 & 1 & 1 & M_{\delta_{e0}} \\ \hline W_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & W_c \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \alpha \\ q \\ w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \delta_e \end{bmatrix}$$

Il est strictement équivalent au système décrit par les équations 2.2 et 2.3. L'expression de la *LFT* est alors donnée par :

$$\mathcal{F}_u = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{F}_u^{11} & \mathcal{F}_u^{12} \\ \hline I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 1} \end{array} \right]$$

avec

$$\mathcal{F}_u^{11} = \begin{bmatrix} Z_\alpha & 1 \\ M_{\alpha 0} & M_{q0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a & 0 & 0 \\ 0 & \delta_b & 0 \\ 0 & 0 & \delta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_a & 0 \\ 0 & W_b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$



et

$$\mathcal{F}_u^{12} = \begin{bmatrix} Z_{\delta_e} \\ M_{\delta_{e0}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_a & 0 & 0 \\ 0 & \delta_b & 0 \\ 0 & 0 & \delta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W_c \end{bmatrix}$$

### 2.2.1.2 Modélisation des incertitudes modales

Considérons à présent le cas où des incertitudes paramétriques sont rattachées aux paramètres physiques d'une équation du mouvement d'un système dynamique. C'est le cas généralement des modèles à structures flexibles, où des variations sont observées à travers les propriétés modales du système. Ces variations sont alors décrites par des incertitudes sur la fréquence et sur l'amortissement des modes flexibles.

Soit par exemple, le système suivant dont l'équation dynamique est donnée par :

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = u(t)$$

et supposons que la fréquence  $\omega$  et l'amortissement  $\zeta$  sont mal connus et qu'ils évoluent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \omega_0 - \Delta_\omega &\leq \omega \leq \omega_0 + \Delta_\omega \\ \zeta_0 - \Delta_\zeta &\leq \zeta \leq \zeta_0 + \Delta_\zeta \end{aligned}$$

En posant  $x_1 = y$  et  $x_2 = \dot{y}$  comme variables d'état, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ y \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ -\omega^2 & -2\zeta\omega & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix}$$

Introduisons maintenant deux opérateurs d'incertitudes  $\delta_\omega$ ,  $\delta_\zeta$  tels que  $|\delta_\omega| \leq 1$  et  $|\delta_\zeta| \leq 1$ , on peut alors réécrire les deux paramètres précédents comme suit :

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \Delta_\omega \delta_\omega \\ \zeta &= \zeta_0 + \Delta_\zeta \delta_\zeta \end{aligned}$$

L'équation d'état  $\dot{x}_2$ , devient alors :

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -\omega_0^2 x_1 - 2\zeta_0 \omega_0 x_2 + u - \delta_\omega (2\Delta_\omega \omega_0 x_1 + 2\Delta_\omega \zeta_0 x_2) - \delta_\zeta (2\Delta_\zeta \omega_0 x_2) \\ & - \delta_\zeta \delta_\omega (2\Delta_\zeta \Delta_\omega x_2) - \delta_\omega^2 (\Delta_\omega^2 x_1) \end{aligned}$$

En supposant que les variations modales sont petites ( $\delta_\omega \ll 1$  et  $\delta_\zeta \ll 1$ ), on peut négliger les termes suivant  $\delta_\zeta \delta_\omega$  et  $\delta_\omega^2$ . Soit le nouveau vecteur de sortie :

$$\begin{bmatrix} z_\omega \\ z_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\Delta_\omega \omega_0 & -2\Delta_\omega \zeta_0 \\ 0 & -2\Delta_\zeta \omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

et soit le nouveau vecteur d'entrée :

$$\begin{bmatrix} w_\omega \\ w_\zeta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_\omega & 0 \\ 0 & \delta_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_\omega \\ z_\zeta \end{bmatrix}$$

Le système dynamique incertain peut être représenté par une *LFT* supérieure associée aux perturbations  $\delta_\omega$  et  $\delta_\zeta$ , comme sur la figure 2.8. La représentation d'état du système  $P$  est alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ z_\omega \\ z_\zeta \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta_0 \omega_0 & 1 & 1 & 1 \\ -2\Delta_\omega \omega_0 & -2\Delta_\omega \zeta_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\Delta_\zeta \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ w_\omega \\ w_\zeta \\ u \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} w_\omega \\ w_\zeta \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} z_\omega \\ z_\zeta \end{bmatrix}$$

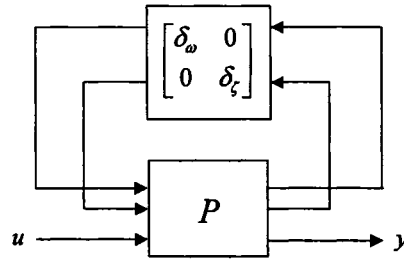


Figure 2.8 Représentation d'un système dynamique incertain par une *LFT*

L'expression de la *LFT* est alors donnée par :

$$\mathcal{F}_u = \left[ \begin{array}{c|c} \mathcal{F}_u^{11} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} & 0 \end{array} \right]$$

avec

$$\mathcal{F}_u^{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2\zeta_0\omega_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_\omega & 0 \\ 0 & \delta_\zeta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\Delta_\omega\omega_0 & -2\Delta_\omega\zeta_0 \\ 0 & -2\Delta_\zeta\omega_0 \end{bmatrix}$$

### 2.2.2 Modélisation des incertitudes fréquentielles

Ce deuxième type d'incertitudes correspond de manière générale aux dynamiques non modélisées ou négligées, typiquement des dynamiques haute fréquence. La seule information dont on dispose pour caractériser ce type d'incertitude est une borne sur la norme de sa réponse fréquentielle, telle que :

$$\|\Delta(j\omega)\| \leq \delta(\omega) \quad \text{pour tout } \omega$$

La représentation de ces incertitudes peut se faire de différentes manières selon la façon dont elles interviennent dans le système. Elles peuvent être modélisées sous forme :

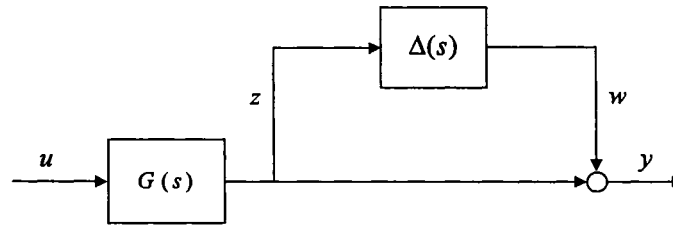


Figure 2.9 Perturbation multiplicative directe en sortie

- additive :  $G_p(s) = G(s) + \Delta_a(s)$ ,
- multiplicative :  $G_p(s) = G(s)(I + \Delta_m(s))$ ,
- multiplicative inverse:  $G_p(s) = G(s)(I + \Delta_m^i(s))^{-1}$ .

La représentation sous forme additive est bien adaptée à la prise en compte des erreurs liées aux faibles non-linéarités négligées, ou à la troncature du modèle linéaire (modes haute fréquence éliminés ou non identifiés). Par contre, les représentations sous forme multiplicative ou multiplicative inverse sont bien adaptées à la représentation d'erreurs de modélisation des capteurs ou actionneurs. Illustrons cela sur l'exemple de la représentation d'une dynamique capteur négligée. L'incertitude  $\Delta(s)$ , dans ce cas, est représentée sous forme multiplicative directe en sortie du système nominal  $G(s)$ . Le système incertain de la figure 2.9 peut facilement être représenté par une *LFT* semblable à celle de la figure 2.7 :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & G(s) \\ I & G(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix}$$

$$w = \Delta(s)z$$

### 2.3 L'approche $\mathcal{H}_\infty$

Nous commençons par donner les outils mathématiques indispensables qui permettront ultérieurement d'apprécier la robustesse d'un système de commande et de définir la synthèse

d'un correcteur.

### 2.3.1 Espace de matrices de fractions rationnelles, norme associée

#### 2.3.1.1 Réponse fréquentielle

L'évaluation de  $G(s)$  pour  $s = j\omega$ , avec  $\omega \geq 0$ , définit la *réponse fréquentielle* du système. Pour un système monovarié, la réponse fréquentielle est une fonction scalaire. Pour un système multivarié, la réponse fréquentielle est une fonction matricielle. On définit la plus grande *valeur singulière* de  $G(s)$  comme :

$$\bar{\sigma}[G(j\omega)] = \sqrt{\lambda_{\max}(G(j\omega)G^*(j\omega))} \quad (2.4)$$

où  $\lambda_{\max}$  est la plus grande valeur propre de  $G(j\omega)G^*(j\omega)$ , ( $G^*(j\omega)$  désigne le transposé complexe conjugué de  $G(j\omega)$ ).

#### 2.3.1.2 Espace $\mathcal{RH}_\infty$

Rappelons qu'un système décrit par une fonction de transfert  $G(s)$  telle que  $G(\infty)$  est finie, est appelé système *propre*. Si  $G(\infty) = 0$ , le système est dit *strictement propre*.

**Définition 2.3.1.** *On appelle  $\mathcal{RH}_\infty$ , le sous-espace des matrices de transfert propres et strictement stables (pas de pôles sur l'axe des imaginaires).*

#### 2.3.1.3 Norme $\mathcal{H}_\infty$

La norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'un système  $G(s)$  continu, asymptotiquement stable est :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega} \bar{\sigma}[G(j\omega)] \quad (2.5)$$

avec  $\bar{\sigma}[G(j\omega)]$  définie en 2.4. La norme  $\mathcal{H}_\infty$  représente donc une mesure du gain maximal de la réponse fréquentielle de la valeur singulière de  $G(j\omega)$  sur tout le domaine de

fréquence. Dans le cas monovariante, c'est la valeur maximale du gain  $|G(j\omega)|$ . Pour les systèmes linéaires, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  s'interprète comme étant l'énergie maximale du signal de sortie  $y(t)$  suite à un signal d'entrée  $u(t)$ , d'énergie bornée.

En utilisant la norme  $\mathcal{H}_\infty$ , l'espace  $\mathcal{RH}_\infty$  est tel que :

$$\mathcal{RH}_\infty = \{G(s) : G(s) \text{ propre, strictement stable et } \|G(s)\|_\infty < \infty\}$$

#### 2.3.1.4 Calcul de la norme $\mathcal{H}_\infty$

Il n'existe pas de méthode explicite pour calculer la norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'une matrice de transfert. Une première possibilité consiste à appliquer la définition, ce qui conduit à une recherche de maximum sur  $\omega$ . Une autre possibilité plus précise est basée sur les valeurs propres de la matrice hamiltonienne associée à une représentation de  $G(s)$  dans l'espace d'état. On a la propriété suivante :

**Lemme 2.3.1.** *Soit  $\gamma > 0$ , et*

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \in \mathcal{RH}_\infty.$$

*Alors  $\|G(s)\|_\infty < \gamma$  si et seulement si  $\bar{\sigma}(D) < \gamma$  et la matrice hamiltonienne associée*

$$H_\gamma := \begin{bmatrix} A + BR^{-1}D^TC & BR^{-1}B^T \\ -C^T(I + DR^{-1}D^T)C & -(A + BR^{-1}D^TC)^T \end{bmatrix}$$

*n'a pas de valeur propre sur l'axe imaginaire, avec  $R := \gamma^2 I - D^T D$ .*

Ce dernier résultat donne une méthode itérative pour le calcul de norme  $\mathcal{H}_\infty$  d'une matrice de transfert  $G(s)$ .

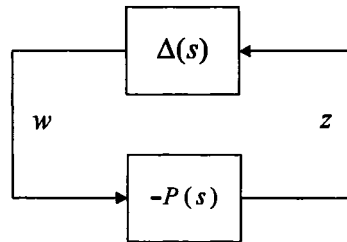


Figure 2.10 Schéma général d'étude de la robustesse en stabilité

### 2.3.2 Analyse en robustesse d'un système bouclé

#### 2.3.2.1 Théorème du petit gain

Un des résultats importants dans l'analyse de la robustesse des systèmes linéaires, est le *théorème du petit gain* qui donne une condition suffisante, permettant de caractériser la stabilité robuste d'un système bouclé [59].

**Théorème 2.3.1.** (Théorème du petit gain) *Soit  $P(s)$  une matrice de transfert stable et  $\Delta(s)$  une perturbation stable, connectée de la sortie à l'entrée de  $P(s)$  comme décrit sur la figure 2.10; alors le système en boucle fermée est stable, de manière interne, si :*

$$\|P(j\omega)\Delta(j\omega)\|_{\infty} < 1, \quad \text{pour tout } \omega. \quad (2.6)$$

Une autre manière de reformuler la condition 2.6 consiste à la remplacer par la condition suffisante :

$$\|P(j\omega)\| \|\Delta(j\omega)\|_{\infty} < 1, \quad \text{pour tout } \omega. \quad (2.7)$$

Ce résultat, basé uniquement sur la norme  $\mathcal{H}_{\infty}$  du bloc d'incertitudes  $\Delta(s)$ , conduit à envisager une classe d'incertitudes de modélisation pouvant être beaucoup plus large que celle qui caractérise réellement le système. D'où le corollaire suivant :

**Corollaire 2.3.1.** *Si  $P(s)$  et  $\Delta(s)$  ont leurs pôles à partie réelle strictement négative,*

alors le système bouclé de la figure 2.10 est stable, de manière interne, si :

$$\|P(j\omega)\| \|\Delta(j\omega)\|_\infty < 1, \quad \text{pour tout } \omega. \quad (2.8)$$

### 2.3.3 Stabilité robuste

La robustesse en stabilité consiste en la capacité d'un système de commande à préserver sa stabilité en présence d'erreurs de modélisation inéluctables. Pour étudier cette propriété, il faut au préalable définir la classe des erreurs de modélisation vis-à-vis de laquelle la propriété de stabilité doit être satisfaite. Considérons pour l'instant, la classe des erreurs de modélisation dites non structurées. Ce type d'incertitudes correspond de manière générale aux dynamiques non modélisées ou négligées. La seule information dont on dispose est une majoration de sa norme. La représentation de ces incertitudes peut se faire de différentes manières selon la façon dont elles interviennent dans le système.

Par ailleurs, la condition 2.8 est aussi nécessaire, si les erreurs de modèle  $\Delta(s)$  sont mises à l'échelle de manière à satisfaire  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ . On obtient alors, une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité robuste du système bouclé de la figure 2.10.

On notera  $\Delta$ , l'ensemble d'incertitudes dites non structurées, satisfaisant l'inégalité  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ , tel que :

$$\Delta = \{\Delta : \|\Delta(j\omega)\|_\infty \leq 1 \quad \text{pour tout } \omega\}$$

**Théorème 2.3.2.** (Stabilité robuste) *Si  $P(s)$  et  $\Delta(s)$  ont leurs pôles à partie réelle strictement négative, alors le système de la figure 2.10 est stable de manière interne, pour toute matrice  $\Delta(s) \in \Delta$  telle que  $\|\Delta(s)\|_\infty \leq 1$  si et seulement si :*

$$\|P(j\omega)\|_\infty < 1, \quad \text{pour tout } \omega. \quad (2.9)$$

Nous utilisons le théorème 2.3.2 pour analyser la robustesse du système de la figure 2.11, face aux incertitudes de modélisation en entrée, pouvant représenter par exemple une



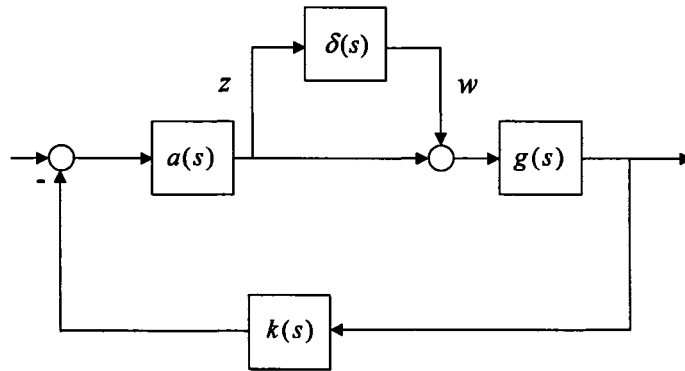


Figure 2.11 Robustesse en stabilité : cas d'une dynamique négligée

dynamique négligée de l'actionneur. Rappelons que la seule information dont on dispose est que la norme de  $\delta(s)$  est bornée. Le système bouclé de la figure 2.11 peut se mettre sous la forme  $(p(s), \delta(s))$  de la figure 2.12, en calculant :

$$z = - [(1 + a(s)k(s)g(s))^{-1}a(s)k(s)g(s)] w$$

où  $p(s) = [(1 + a(s)k(s)g(s))^{-1}a(s)k(s)g(s)]$ , représente simplement la fonction de transfert vue par la perturbation de modèle  $\delta(s)$ .

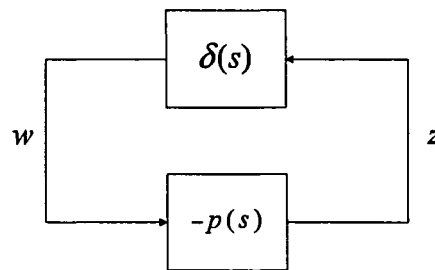


Figure 2.12 Robustesse en stabilité : schéma bloc équivalent

Supposons maintenant que tous les pôles de  $p(s)$  et  $\delta(s)$  soient à partie réelle strictement négative. Alors le système bouclé de la figure 2.12 est stable de manière interne, si et seulement si le lieu de Nyquist de  $p(s)\delta(s)$  n'encercle pas le point  $(-1, 0)$ . Cette condition

est équivalente à celle donnée par la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de la boucle  $(p(s), \delta(s))$ .

$$\sup_{\omega} |p(j\omega)\delta(j\omega)| \leq 1$$

On peut dire que le critère de Nyquist utilise une condition basée sur la norme  $\mathcal{H}_\infty$ , équivalente à la condition suffisante de stabilité robuste donnée par le *théorème du petit gain* :

$$\text{stabilité robuste de } (p(s), \delta(s)) \Leftrightarrow \|p(s)\delta(s)\|_\infty \leq 1$$

De plus, supposons que les erreurs de modélisation sont mises à l'échelle, en utilisant une fonction de pondération, de sorte que  $|\delta(s)| \leq 1$ . Une condition nécessaire et suffisante de stabilité robuste du système bouclé  $(p(s), \delta(s))$  sera alors :

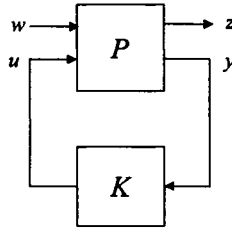
$$\text{stabilité robuste de } (p(s), \delta(s)) \Leftrightarrow \|p(s)\|_\infty < 1$$

### 2.3.4 Optimisation $\mathcal{H}_\infty$

La structure de commande que nous considérons pour la synthèse des lois est représentée par le schéma bloc de la figure 2.13. Le processus  $P$  est un système comportant deux ensembles d'entrée et deux ensembles de sortie. Le vecteur  $w$  représente toutes les entrées exogènes, telles que signaux de référence, perturbations et bruits. Le vecteur  $u$  représente les commandes. Les sorties  $z$  représentent les erreurs de régulation, qu'on souhaite maintenir à zéro. Enfin  $y$  représente les mesures disponibles pour élaborer la commande. Exprimé sous cette forme, le problème de synthèse est alors la recherche d'un correcteur  $K$  qui minimise la norme du transfert des entrées exogènes  $w$  vers les erreurs  $z$ .

Si l'on décompose la matrice  $P$  selon :

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Figure 2.13 Problème  $\mathcal{H}_\infty$  standard

alors on a :

$$\begin{aligned} z &= P_{11}w + P_{12}u \\ y &= P_{21}w + P_{22}u \end{aligned} \quad (2.11)$$

avec  $u = Ky$ , on peut écrire :

$$z = [P_{11} + P_{12}K(I - P_{22}K)^{-1}P_{21}] w \quad (2.12)$$

que l'on note généralement :

$$z = \mathcal{F}_l(P, K)w \quad (2.13)$$

Le problème de synthèse est donc le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{K \text{ stabilisant}} \|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty \quad (2.14)$$

La résolution du problème  $\mathcal{H}_\infty$  standard à partir d'une représentation d'état de la matrice  $P$  est apparue en 1988 [15] : elle a apporté une simplification et une clarification considérable par rapport aux méthodes proposées précédemment qui souvent ne représentaient pas un caractère aussi général.

Considérons le problème standard de la figure 2.13, et supposons connue une représen-

tation d'état correspondant au processus  $P$ , soit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{11}w + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w + D_{22}u \end{aligned} \tag{2.15}$$

avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^{m_2}$ ,  $y \in \mathbb{R}^{p_2}$ ,  $w \in \mathbb{R}^{m_1}$  et  $z \in \mathbb{R}^{p_1}$ .

Rappelons que l'objectif du problème est de trouver un correcteur  $K$  qui :

- stabilise de manière interne le système bouclé de la figure 2.13.
- minimise  $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty$

Pour résoudre ce problème, les hypothèses suivantes doivent être satisfaites :

(H1)  $(A, B_2)$  est stabilisable et  $(C_2, A)$  est détectable;

(H2)  $D_{12}^T \begin{bmatrix} C_1 & D_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{m_2} \end{bmatrix}$ ;

(H3)  $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I_{p_2} \end{bmatrix}$ ;

(H4)  $\text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{pmatrix} = n + m_2, \forall \omega \in \mathbb{R}$ ;

(H5)  $\text{rang} \begin{pmatrix} A - j\omega I_n & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{pmatrix} = n + p_2, \forall \omega \in \mathbb{R}$ .

L'hypothèse (H1) est la condition nécessaire pour qu'il existe un correcteur stabilisant. L'hypothèse (H2) signifie que  $C_1x$  et  $D_{12}u$  sont orthogonaux, de sorte qu'il n'y a pas de pondération sur les termes croisés en  $x$  et  $u$ , et que de plus la pondération sur  $u$  est normalisée. L'hypothèse (H3) est duale de (H2). L'hypothèse (H4) signifie que le

sous-système  $P_{12}$  ne doit pas avoir de zéros sur l'axe imaginaire, si  $(C_1, A, B_2)$  est une réalisation minimale. De même pour  $(H5)$  et  $P_{21}$ .

La solution  $\mathcal{H}_\infty$  fait intervenir deux équations algébriques de Ricatti:

$$A^T X + X A + X(\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 = 0 \quad (2.16)$$

$$A Y + Y A^T + Y(\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y + B_1 B_1^T = 0 \quad (2.17)$$

où  $\gamma$  est un scalaire positif. Ces deux équations sont associées aux deux matrices hamiltoniennes :

$$H_\infty := \begin{bmatrix} A & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T \\ -C_1^T C_1 & -A^T \end{bmatrix} \quad J_\infty := \begin{bmatrix} A^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2 \\ -B_1 B_1^T & -A \end{bmatrix}$$

Le système décrit par 2.15 et vérifiant les hypothèses  $(H1)$  à  $(H5)$ , peut être stabilisé de manière interne par un correcteur  $K$  assurant  $\|\mathcal{F}_1(P, K)\|_\infty < \gamma$ , si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

(i)  $H_\infty$  n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et il existe une unique solution

$$X_\infty := Ric(H_\infty) \geq 0.$$

(ii)  $J_\infty$  n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire et il existe une unique solution

$$Y_\infty := Ric(J_\infty) \geq 0.$$

(iii)  $\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$ .

où  $\rho()$  désigne le module de la plus grande valeur propre.

De plus, sous les conditions (i) à (iii), un tel correcteur est donné par :

$$K_0 := \begin{bmatrix} \hat{A}_\infty & -Z_\infty L_\infty \\ F_\infty & 0 \end{bmatrix}$$

où

$$\hat{A}_\infty := A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 + C_1^T C_1$$

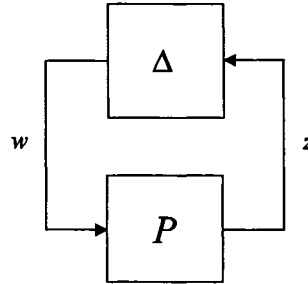


Figure 2.14 Incertitudes non structurées

avec

$$F_\infty := -B_2^T X_\infty, \quad L_\infty := -Y_\infty C_2^T, \quad Z_\infty := (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}.$$

Ce correcteur a une structure qui rappelle celle obtenue en commande *LQG* par application du théorème de séparation. L'équation d'état correspondant au correcteur  $K_0$  ci-dessus peut en effet s'écrire :

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_1\hat{w} + B_2u - Z_\infty L_\infty (y - C_2\hat{x}) \quad (2.18)$$

avec

$$\begin{aligned} u &= F_\infty \hat{x} \\ \hat{w} &= \gamma^{-2} B_1^T X_\infty \hat{x} \end{aligned}$$

La différence par rapport à la structure *LQG* provient de la présence du terme  $\hat{w}$ , qu'on peut interpréter comme la perturbation la plus défavorable pouvant agir sur le système.

#### 2.4 La valeur singulière structurée : $\mu$

Dans l'analyse de la robustesse menée au paragraphe 2.3.2, nous avons supposé que les incertitudes de modèle étaient de type dynamique, et qu'elles étaient décrites par un seul bloc  $\Delta \in \mathcal{RH}_\infty$ , comme le montre le schéma de la figure 2.14.

On dispose alors de résultats, qui reposent en grande partie sur le théorème du petit gain, et qui permettent de garantir la stabilité du système bouclé en fonction uniquement de la norme de ce bloc, dont la structure physique n'est pas prise en compte. On envisage ainsi une classe d'incertitudes de modèle beaucoup plus large et les résultats déduits de cette analyse présentent un caractère conservatif, et conduisent à une appréciation pessimiste de la robustesse en stabilité.

Dans cette section, nous présentons une technique permettant de tenir compte de la structure des incertitudes de modèle, qui peuvent intervenir en différents points du système: variation d'un ou plusieurs paramètres, dynamiques mal connues ou négligées des actionneurs et des capteurs. Dans la modélisation que nous allons utiliser, certaines de ces incertitudes peuvent conserver une forme non structurée, sauf qu'on ne les ramène pas toutes dans un seul bloc.

Le schéma général d'étude de la robustesse en stabilité est alors celui de la figure 2.15. Il représente un cas particulier du schéma précédent, figure 2.14, dans lequel la matrice traduisant les incertitudes de modèle a une structure bloc-diagonale :

$$\Delta = \text{diag}(\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_q) \quad (2.19)$$

L'étude de la stabilité d'un système de ce type nécessite l'introduction d'un nouvel outil, la valeur singulière structurée, notée  $\mu$ , développée par Doyle depuis 1982 [13], [14].

#### 2.4.1 Définition

Considérons le schéma 2.15, correspondant à la matrice  $\Delta$  dont la structure est définie par (2.19), où les blocs  $\Delta_i$  peuvent être des scalaires ou des matrices.

Soit  $\underline{\Delta}$  l'ensemble de toutes les matrices  $\Delta$  carrées, de dimension  $n$  et diagonales par blocs, de la forme :

$$\underline{\Delta} = \{\Delta = \text{diag}(\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_S I_{r_S}, \Delta_1, \dots, \Delta_F)\} \quad (2.20)$$

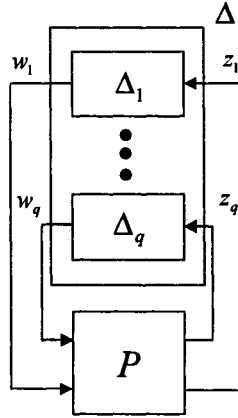


Figure 2.15 Incertitudes structurées

où les  $\delta_i$  sont des complexes, et les  $\Delta_j$  sont des matrices carrées à coefficients complexes, de dimension  $m_j$ . De plus, on notera  $\mathbf{B}_{\underline{\Delta}}$  l'ensemble des matrices  $\Delta$  appartenant à  $\underline{\Delta}$  et satisfaisant l'inégalité  $\bar{\sigma}(\Delta) \leq 1$ .

**Définition 2.4.1.** Soit la matrice complexe  $P \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , la valeur singulière structurée associée à la structure  $\underline{\Delta}$ , notée  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)$ , est définie par :

$$\mu_{\underline{\Delta}}(P) = \frac{1}{\{\bar{\sigma}(\Delta) : \Delta \in \underline{\Delta}, \det(I_n - P\Delta) = 0\}} \quad (2.21)$$

si aucune matrice  $\Delta \in \underline{\Delta}$  ne rend  $(I_n - P\Delta)$  singulière, alors  $\mu_{\underline{\Delta}}(P) := 0$ .

D'après cette définition,  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)^{-1}$  est donc la valeur minimale de la norme de la matrice  $\Delta \in \underline{\Delta}$  qui rend  $(I_n - P\Delta)$  singulière. Il est important de remarquer que la valeur singulière structurée dépend à la fois de la matrice  $P$  et de la structure  $\underline{\Delta}$  envisagée.

## 2.4.2 Propriétés et calcul de la valeur singulière structurée

La définition 2.4.1 n'est pas utilisable pour le calcul de la valeur singulière structurée, car elle conduit à un problème d'optimisation difficile à résoudre. C'est pourquoi les recherches ont été orientées vers le calcul des bornes inférieure et supérieure de  $\mu$ .



**Propriété 1** Si  $\underline{\Delta} = \{\delta I_n, \delta \in \mathbb{C}\}$ , alors  $\mu_{\underline{\Delta}}(P) = \rho(P)$  où  $\rho(P)$  est le rayon spectral de  $P$ . On obtient donc une borne inférieure de  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)$ .

**Propriété 2** Si  $\underline{\Delta} = \{\Delta \in \mathbb{C}^{n \times n}\}$ , alors  $\mu_{\underline{\Delta}}(P) = \bar{\sigma}(P)$ , ce qui donne une borne supérieure de  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)$

On a finalement :

$$\rho(P) \leq \mu_{\underline{\Delta}}(P) \leq \bar{\sigma}(P). \quad (2.22)$$

Toutefois, cet encadrement est parfois extrêmement large, et conduit notamment à être assez pessimiste sur la stabilité du système perturbé lorsque la borne supérieure est éloignée de la valeur réelle du  $\mu$ . Il peut cependant être sensiblement amélioré.

Soit  $\underline{\mathcal{D}}$  l'ensemble des matrices carrées inversibles de dimension  $n$ , commutant avec les matrices  $\Delta$  de  $\underline{\Delta}$ , c'est-à-dire de la forme :

$$\underline{\mathcal{D}} = \{\text{diag}(D_1, \dots, D_S, d_1 I_{m_1}, \dots, d_1 I_{m_F}) : D_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i}, D_i = D_i^* > 0, d_j \in \mathbb{R}, d_j > 0\}$$

**Théorème 2.4.1.** *Pour toute matrice  $\mathcal{D} \in \underline{\mathcal{D}}$ , appelée matrice de **scalings**, et toute perturbation  $\Delta \in \underline{\Delta}$ , où  $\mathcal{D}\Delta = \Delta\mathcal{D}$ , on a :*

$$\mu_{\underline{\Delta}}(P) = \mu_{\underline{\Delta}}(\mathcal{D}P\mathcal{D}^{-1})$$

En combinant le résultat du théorème 2.4.1 et l'équation 2.22, on a donc finalement

$$\mu_{\underline{\Delta}}(P) \leq \mu_{\underline{\Delta}}^*(P) = \inf_{\mathcal{D} \in \underline{\mathcal{D}}} \bar{\sigma}(\mathcal{D}P\mathcal{D}^{-1}) \quad (2.23)$$

Ce majorant est évidemment moins conservatif que  $\bar{\sigma}(P)$ , toutefois, l'expérience montre qu'il est souvent une bonne approximation de  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)$  et que l'écart entre  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)$  et  $\mu_{\underline{\Delta}}^*(P)$  est en général faible (il est nul dans le cas de certaines structures, voir [59]). L'intérêt du majorant  $\mu_{\underline{\Delta}}^*(P)$  réside dans le fait qu'il est beaucoup plus facile à calculer que  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)$ .

### 2.4.3 Condition nécessaire et suffisante de stabilité robuste: Incertitudes structurées

L'usage de la valeur singulière structurée permet de généraliser le Théorème du petit gain au cas des familles de systèmes avec incertitudes structurées, et fournit le résultat suivant:

**Théorème 2.4.2.** (Théorème du petit gain structuré) *Soit la famille de systèmes bouclés  $(P, \Delta)$ , où  $P$  est une matrice de fonctions de transfert stable et où  $\Delta$  est une fonction de transfert stable telle que  $\Delta \in \underline{\Delta}$ . La famille de systèmes bouclés  $(P, \Delta)$ , de la figure 2.15, est stable pour tout  $\Delta$ , tel que  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$  si et seulement si :*

$$\mu_{\underline{\Delta}}(P(j\omega)) < 1, \quad \text{pour tout } \omega.$$

En effet, d'après le théorème du petit gain structuré, rechercher le plus grand ensemble d'incertitudes  $\Delta$  pour lequel la famille de systèmes  $(P, \Delta)$  reste stable revient à rechercher la taille de la plus petite incertitude  $\Delta \in \underline{\Delta}$  pour laquelle le système  $(P, \Delta)$  est déstabilisé. Cette taille est donnée par  $\mu_{\underline{\Delta}}(P)^{-1}$ . D'autre part, On appelle  $\mu$ -analyse l'analyse de la robustesse d'un système par la mise en œuvre de ce théorème.

### 2.4.4 Théorème de performance robuste

Jusqu'à maintenant on a présenté que le problème de la robustesse en stabilité, c'est-à-dire vérifier que la famille de systèmes interconnectés  $(P, \Delta)$  est stable pour tout  $\Delta$  borné en norme  $\mathcal{H}_\infty$  par 1, et de structure donnée par  $\underline{\Delta}$ , voir figure 2.15. On considère dans cette section le problème plus général de la robustesse en performance, c'est-à-dire que le système non seulement garantit la condition de stabilité robuste mais assure un certain niveau de performance.

Considérons le système bouclé  $(P, \Delta_i)$  de la figure 2.16 où  $P$  est une matrice de transfert rationnelle et stable appartenant à  $\mathcal{RH}_\infty$ , et où  $\Delta_i$  représente une incertitude structurée stable, au sens de  $\underline{\Delta}_i$ , dont la matrice de transfert, supposée rationnelle, et satisfaisant la

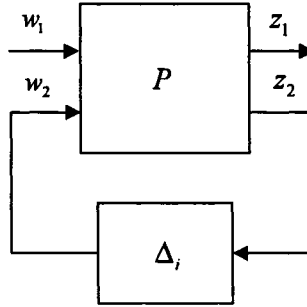


Figure 2.16 Schéma-bloc pour l'étude de la robustesse en performance

condition

$$\|\Delta_i\|_\infty \leq 1 \quad (2.24)$$

En effet, si l'on décompose  $P$  selon :

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

D'après le théorème 2.4.2, une condition nécessaire et suffisante pour que le système bouclé soit stable est :  $P_{22} \in \mathcal{RH}_\infty$  et  $\mu_{\Delta_i}(P_{22}(j\omega)) < 1$ , pour tout  $\omega$ . Supposons maintenant qu'on demande à satisfaire non seulement la stabilité du système bouclé, mais aussi un certain niveau de performances, quelle que soit l'incertitude structurée  $\Delta_i$  vérifiant la condition 2.24. C'est ce qu'on appelle un problème de *performance robuste*. Un tel objectif se mettra sous la forme :  $\|\mathcal{F}_i(P, \Delta_i)(j\omega)\|_\infty < 1$ , pour tout  $\omega$  et pour toute  $\Delta_i \in \underline{\Delta}_i$ ; plus généralement, on pourra remplacer cette inégalité par  $\mu_{\underline{\Delta}_p}(\mathcal{F}_i(P, \Delta_i)(j\omega)) < 1$ , où  $\mu_{\underline{\Delta}_p}$  désigne la valeur singulière structurée correspondant à une autre structure  $\underline{\Delta}_p$ . Soit alors  $\underline{\Delta}$  la *structure augmentée* suivante :

$$\underline{\Delta} = \left\{ \begin{bmatrix} \Delta_p & 0 \\ 0 & \Delta_i \end{bmatrix} : \Delta_p \in \underline{\Delta}_p, \Delta_i \in \underline{\Delta}_i \right\}.$$

On a le résultat suivant (*Main Loop Theorem*) :

**Théorème 2.4.3.** *L'inégalité suivante  $\mu_{\underline{\Delta}}(P) < 1$  équivaut à*

$$(i) \quad \mu_{\underline{\Delta}_i}(P_{22}) < 1 \quad \text{et} \quad (ii) \quad \sup_{\Delta_i \in \underline{\Delta}_i} \mu_{\underline{\Delta}_p}(\mathcal{F}_l(P, \Delta_i)) < 1$$

On en déduit alors, que la condition de robustesse en performance peut être exprimée à l'aide de la valeur singulière structurée grâce au théorème 2.4.2 qui fournit le résultat suivant :

**Théorème 2.4.4.** (Performance Robuste) *Le système de la figure 2.16 satisfait la condition de robustesse en performance,  $\|\mathcal{F}_l(P, \Delta_i)(j\omega)\|_{\infty} < 1$ , pour toute matrice  $\Delta_i \in \underline{\Delta}_i$  telle que  $\|\Delta_i\|_{\infty} \leq 1$  si et seulement si :*

$$\mu_{\underline{\Delta}}(P(j\omega)) < 1 \quad \text{pour tout } \omega. \quad (2.25)$$

avec  $\underline{\Delta} = \{\text{diag}\{\Delta_p, \Delta_i\} : \Delta_p \in \underline{\Delta}_p, \Delta_i \in \underline{\Delta}_i\}$ .

Autrement dit, le *Main Loop Theorem* a permis d'établir l'équivalence entre la condition de robustesse en performance du système de la figure 2.16, et la condition de robustesse en stabilité du même système bouclé par une matrice  $\Delta_p$  fictive vérifiant  $\|\Delta_p\|_{\infty} \leq 1$  (figure 2.17).

En résumé, les conditions suivantes seront utilisées lors de l'analyse de la robustesse et de la performance d'un système de commande mis sous la forme de la figure 2.18.a, où  $\Delta_i$  représente les incertitudes du modèle sous forme structurée ou non, telle que  $\|\Delta_i\|_{\infty} \leq 1$ , alors :

1) La performance nominale est assurée si :

$$\|P_{22}\|_{\infty} < 1$$

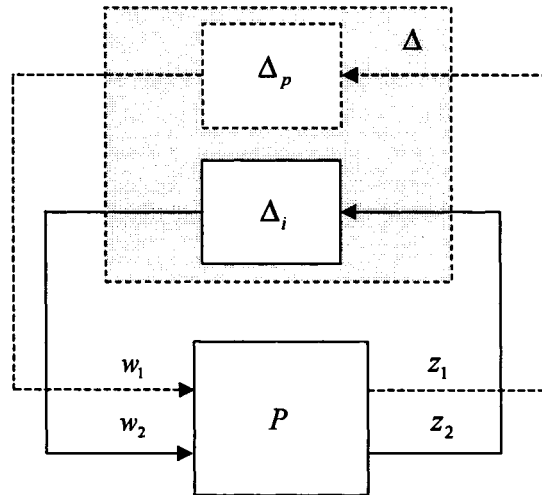


Figure 2.17 Problème de stabilité robuste fictif

2) La stabilité robuste est assurée si :

$$\forall \omega, \quad \mu_{\underline{\Delta}_i}(P_{11}(j\omega)) < 1, \quad \text{ou encore} \quad \|P_{11}\|_{\infty} < 1$$

3) La robustesse en performance est assurée si (figure 2.18.b) :

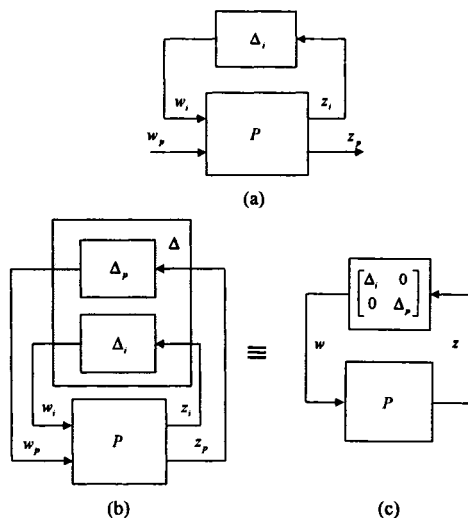
$$\|\mathcal{F}_l(P, \underline{\Delta}_i)\|_{\infty} < 1 \quad \text{ou} \quad \forall \omega, \quad \mu_{\underline{\Delta}}(P(j\omega)) < 1$$

avec  $\underline{\Delta} = \{diag\{\Delta_i, \Delta_p\} : \Delta_i \in \underline{\Delta}_i\}$

Cette dernière condition étant équivalente à une condition de robustesse en stabilité pour le système de la figure figure 2.18.c. Par ailleurs, si la troisième condition est satisfaite, les deux premières le sont aussi.

### 2.4.5 $\mu$ -Synthèse

Le test de robustesse en performance précédent permet d'aboutir à une méthodologie de calcul de lois de commande connue sous le non de  $\mu$ -synthèse. Supposons à présent qu'on

Figure 2.18  $\mu$ -Analyse pour la robustesse et la performance

recherche à calculer un correcteur  $K$  permettant de satisfaire la condition de robustesse en performance: on obtient le schéma-bloc de la figure 2.19.a, en isolant le correcteur, qui boucle les mesures  $y$  du système sur les commandes  $u$  et en faisant apparaître une matrice  $G$  indépendante de  $K$  comportant trois types d'entrée et trois types de sortie. En transformant ce schéma sous les formes (2.19.b) et (2.19.c), on voit que la condition de robustesse en performance (2.25) s'écrit :

$$\mu_{\underline{\Delta}}(\mathcal{F}_l(G(j\omega), K(j\omega))) < 1 \quad \text{pour tout } \omega. \quad (2.26)$$

avec  $\mathcal{F}_l(G, K) = G_{11} + G_{12}K(I - G_{22}K)^{-1}G_{21}$ . La matrice  $G$  étant partitionnée conformément au schéma 2.19.c.

On appelle  $\mu$ -synthèse toute procédure permettant de calculer un correcteur  $K$  stabilisant le système et telle que la condition (2.26) soit satisfaite. Ce problème est souvent exprimé sous la forme du problème d'optimisation suivant :

**Problème de  $\mu$ -synthèse :**  $G(s)$  et  $\underline{\Delta}$  étant donnés, résoudre :

$$\inf_{K \text{ stabilisant}} \sup_{\omega} \mu_{\underline{\Delta}}(\mathcal{F}_l(G(j\omega), K(j\omega))) \quad (2.27)$$

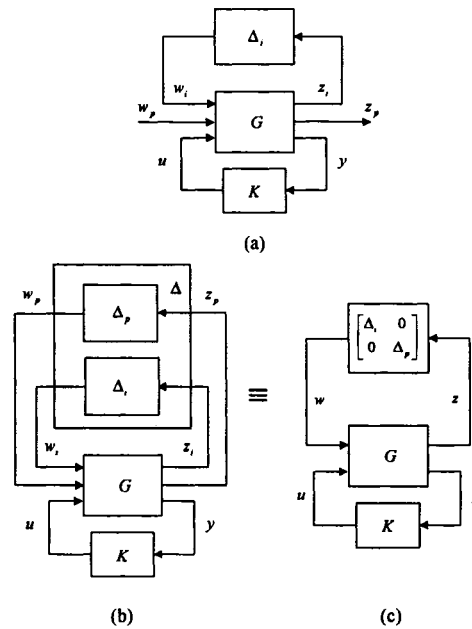


Figure 2.19  $\mu$ -synthèse pour la robustesse et la performance

Malheureusement, on ne connaît pas de méthode directe pour la résolution de ce problème. Il faut en fait avoir recours à une procédure appelée *D-K itération*, qui alterne le calcul des *scalings* optimaux  $\mathcal{D}$ , et la synthèse d'un correcteur  $K$  solution du problème d'optimisation  $\mathcal{H}_\infty$ -standard. Pour obtenir une solution approchée du problème (2.27), on peut utiliser la propriété de la borne supérieure (2.23). Le problème de  $\mu$ -synthèse peut donc être remplacé par le problème suivant :

Pour  $G$  et  $\underline{\Delta}$  donnés, résoudre :

$$\inf_{K \text{ stabilisant}} \sup_{\omega} \inf_{\mathcal{D} \in \underline{\mathcal{D}}} \|\mathcal{D}(j\omega) \mathcal{F}_l(G(j\omega), K(j\omega)) \mathcal{D}^{-1}(j\omega)\|_\infty \quad (2.28)$$

où l'ensemble  $\underline{\mathcal{D}}$  est choisi de façon cohérente avec la structure  $\underline{\Delta}$ .

L'algorithme utilisé est donc le suivant, (figure 2.20) :

1. Initialisation des matrices de *scalings*  $\mathcal{D}$ , (on prend en général  $\mathcal{D} = I$ ).
2. Calcul d'un correcteur résolvant le problème  $\mathcal{H}_\infty$ -standard,  $\|\mathcal{D} \mathcal{F}_l(G, K) \mathcal{D}^{-1}\|_\infty$ , du

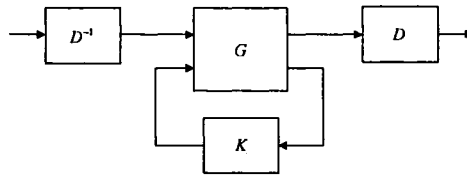


Figure 2.20 Problème  $\mathcal{H}_\infty$ -standard associé à la  $D$ - $K$  itération

système initial augmenté des *scalings*  $\mathcal{D}$ .

3. Pour  $K$  fixé, calcul à différentes fréquences  $\omega$ , les matrices de *scalings*  $\mathcal{D}_\omega$  minimisant la quantité  $\bar{\mu}$  donnée par :

$$\inf_{\mathcal{D}_\omega \in \mathcal{D}} \|\mathcal{D}_\omega \mathcal{F}_l(G, K) \mathcal{D}_\omega^{-1}\|_\infty.$$

4. Interpolation des  $\mathcal{D}_\omega$  sur une plage de fréquence donnée, pour obtenir le nouveau *scaling*  $\mathcal{D}$
5. Répétition des étapes 2 à 4 jusqu'à ce que la quantité  $\bar{\mu}$  ne décroît plus.

On peut ainsi espérer approcher la solution du problème (2.27). Toutefois, la convergence de cet algorithme n'est pas garantie, mais la pratique montre que l'on converge dans la plupart des cas en quelques itérations, et ceci d'autant plus rapidement que le nombre de blocs de perturbation considéré est faible. Les différents outils nécessaires au calcul d'un correcteur  $\mathcal{H}_\infty$ -standard ou le problème de  $\mu$ -synthèse sont disponibles dans le logiciel  *$\mu$ -Analysis and Synthesis Toolbox* de *MATLAB* [6].

Il est important de remarquer qu'à chaque étape 2), on incorpore les matrices  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}^{-1}$  à la matrice  $\mathcal{D}\mathcal{F}_l(G, K)\mathcal{D}^{-1}$  du problème standard. Or, le correcteur  $K$  solution de ce problème standard est du même ordre que la matrice  $\mathcal{D}\mathcal{F}_l(G, K)\mathcal{D}^{-1}$ . La  $D$ - $K$  itération augmente donc à chaque étape l'ordre du correcteur, qui peut rapidement atteindre des valeurs beaucoup plus élevées que l'ordre du processus à réguler. Il est donc impératif de les simplifier proprement car ils ne contribuent pas de façon significative à la politique



de commande nécessaire pour remplir les spécifications du cahier des charges, et peuvent poser des problèmes lors de la mise en œuvre de la loi de commande sur un ordinateur numérique.

La question maintenant est de savoir comment obtenir un correcteur d'ordre réduit, de sorte à assurer les mêmes performances que le correcteur complet, c'est-à-dire remplir correctement le cahier des charges, pour ce qui est de la stabilité, de la robustesse et de la performance. C'est ce que nous essayons de répondre à la section suivante.

## 2.5 Réduction de correcteurs

L'objectif de la réduction de modèle est : étant donnée une matrice de transfert  $G(s)$  d'ordre  $n$ , rechercher une matrice de transfert  $G_r(s)$ , d'ordre  $r$  avec  $r < n$ , qui soit *relativement proche* de  $G(s)$ . En utilisant la norme  $\mathcal{H}_\infty$ ,  $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty$  définit alors une distance entre les deux transferts dans le cas où ils sont stables. Cela revient à assurer que leurs réponses fréquentielles (par exemple, leurs diagrammes de Bode) soient les plus proches possibles. Mathématiquement, le problème s'écrit donc :

Étant donnée  $G(s)$  stable :

$$\min_{G_r} \|G(s) - G_r(s)\|_\infty$$

où  $G_r(s)$  est une matrice de transfert stable, d'ordre  $r$ , figure 2.21.

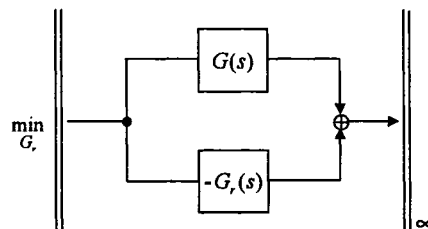


Figure 2.21 Réduction de modèle en utilisant la norme  $\mathcal{H}_\infty$

Malheureusement, on ne sait pas résoudre efficacement ce problème. Par contre, on peut

construire une matrice de transfert  $G_r(s)$  d'ordre  $r$ , pour laquelle, même si ce n'est pas une solution optimale, il est possible de garantir que  $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \gamma$ ,  $\gamma$  étant calculé a priori à partir de  $G(s)$ .

Parmi les nombreuses méthodes proposées dans la littérature, nous nous intéressons aux méthodes de réduction associées à la représentation d'état des systèmes linéaires [40], et plus particulièrement à celles basées sur la notion de commandabilité et d'observabilité, mieux adaptées pour fournir des modèles d'ordre réduit pour la synthèse des lois de commande proposées dans la thèse.

Soit  $G(s)$  une matrice de transfert, d'ordre  $n$ . On appelle toute représentation d'état  $(A, B, C, D)$ , telle que :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

ou encore

$$G(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

une réalisation de  $G(s)$ .

**Définition 2.5.1.** *La réalisation  $(A, B, C, D)$  est dite minimale si la dimension de la matrice d'état  $A$ , est minimale.*

D'autre part, il existe un lien étroit entre la minimalité d'une représentation et les propriétés d'observabilité et de commandabilité.

**Théorème 2.5.1.** *Une représentation d'état  $(A, B, C, D)$  de  $G(s)$  est minimale si et seulement si la paire  $(C, A)$  est observable et la paire  $(A, B)$  est commandable.*

On déduit alors que, pour obtenir une réalisation minimale à partir d'une représentation d'état  $(A, B, C, D)$  stable, supposée non minimale, il suffit donc d'éliminer les états non

observables et les états non commandables.

Il est donc nécessaire, dans un premier temps, de définir des mesures d'observabilité et de commandabilité d'un système asymptotiquement stable (c'est-à-dire tel que les valeurs propres de la matrice  $A$  sont à partie réelle strictement négative).

### 2.5.1 Gramiens et réalisation équilibrée

Rappelons que le gramien de commandabilité  $P$  et le gramien d'observabilité  $Q$  d'un système asymptotiquement stable, de réalisation minimale  $(A, B, C, D)$ , sont les solutions uniques des équations de Lyapunov suivantes :

$$\begin{aligned} AP + PA^T + BB^T &= 0 \\ A^T Q + QA + C^T C &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part, les gramiens dépendent de la base dans laquelle ils sont exprimés. Par conséquent, pour ne pas privilégier ni la commandabilité, ni l'observabilité, on choisit de les représenter dans une base *équilibrée*.

**Définition 2.5.2.** *Une réalisation est dite équilibrée (en Anglais, balanced realization) si et seulement si :*

$$P = Q = \Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\} \quad \text{avec} \quad \sigma_i = \sqrt{\lambda_i(PQ)}$$

Les  $\sigma_i$ , appelées *valeurs singulières de Hankel*, sont alors des mesures de la commandabilité et de l'observabilité. En général, on les classe dans l'ordre décroissant :

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_i \geq \dots \geq \sigma_n$$

Une fois le calcul des gramiens  $P$  et  $Q$  effectué, le problème sera alors de déterminer une matrice de passage  $T$  telle que ces gramiens soient égaux et diagonaux dans cette nouvelle base. On rappelle que pour un changement de base tel que  $x = T\bar{x}$ , les gramiens

deviennent :

$$\begin{aligned}\bar{P} &= T^{-1}P(T^{-1})^T \\ \bar{Q} &= T^TQT\end{aligned}$$

On recherche donc la matrice  $T$  telle que :

$$\bar{P} = \bar{Q} = T^{-1}P(T^{-1})^T = T^TQT = \Sigma \quad (2.29)$$

D'autre part,  $P$  étant symétrique définie positive, on peut la décomposer en facteur de Cholesky  $P = R^T R$ , ( $R$  est triangulaire supérieure). On effectue ensuite la décomposition en valeurs singulières de  $RQR^T = U\Sigma^2U^T$ , où  $\Sigma^2$  est une matrice diagonale dont les éléments sont les valeurs propres de  $RQR^T$ , et les colonnes de  $U$  sont les vecteurs propres associés. On peut alors en déduire  $T$  vérifiant la relation (2.29) :

$$T = R^T U \Sigma^{-1/2}$$

### 2.5.2 Réduction de modèle par troncature équilibrée

Une fois le système mis sous forme équilibrée, on n'a plus qu'à tronquer les états correspondant aux valeurs singulières les plus faibles. Ces valeurs singulières étant la mesure de la commandabilité et de l'observabilité jointes, on élimine les états qui sont les moins commandables et observables. Il faut donc définir une distance entre le système à réduire  $G(s)$ , et le système réduit  $G_r(s)$ . On utilise dans ce cas, comme mesure de l'erreur  $\|G - G_r\|$ , la norme  $\mathcal{H}_\infty$  :

$$\|G(j\omega) - G_r(j\omega)\|_\infty \leq 2 \sum_{i=r+1}^n \sigma_i$$

avec  $\|G(j\omega)\|_\infty = \sup_\omega \bar{\sigma}(G(j\omega))$ .

Considérons maintenant le problème de trouver une approximation  $G_r(s)$  d'ordre  $r$ , stable

pour le système continu  $G(s)$  d'ordre  $n$ , stable, tel que  $r < n$ , et qui garantit une borne arbitraire pour la norme  $\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq \gamma$ .

**Théorème 2.5.2.** Soit  $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ , telle que :

$$G(s) = \left[ \begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array} \right]$$

est une réalisation équilibrée, dont le gramien est donné par  $\Sigma = \text{diag}\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r\} \\ \Sigma_2 &= \{\sigma_{r+1}, \sigma_{r+2}, \dots, \sigma_n\} \end{aligned}$$

et

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > \dots > \sigma_r > \sigma_{r+1} > \dots > \sigma_n$$

où  $\sigma_i$ , est la  $i$ ème valeur singulière de Hankel. Alors, le modèle réduit,  $G_r(s)$ , d'ordre  $r$  de représentation d'état équilibrée :

$$G_r(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array} \right]$$

obtenu par troncature est asymptotiquement stable. D'autre part, la norme  $\mathcal{H}_\infty$  de l'erreur est majorée par :

$$\|G(s) - G_r(s)\|_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \dots + \sigma_n)$$

et cette borne est atteinte si  $r = n - 1$ , i.e.,

$$\|G(s) - G_{n-1}(s)\|_\infty = 2\sigma_n$$

Cette méthode d'obtention d'un modèle réduit est appelée *troncature équilibrée*. Elle sera utilisée par la suite pour la réduction des correcteurs obtenus par les méthodes de synthèse proposées.