

## CHAPITRE 5

SYNTHÈSE D'UN CORRECTEUR *LPV* POUR LE PILOTAGE D'UN  
AVION DE CHASSE

L'application que nous allons développer dans ce chapitre concerne la conception d'une loi de commande robuste à paramètres variants permettant de faciliter le pilotage d'un avion de chasse dans le plan longitudinal.

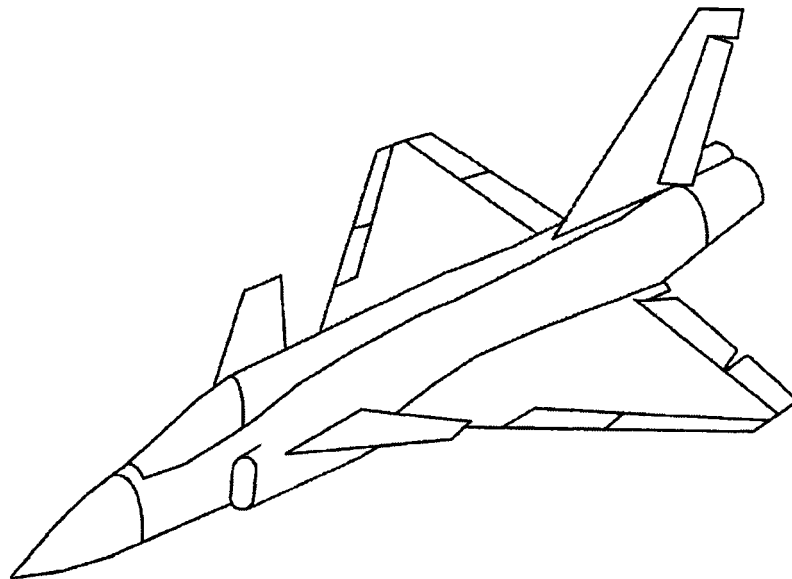


Figure 5.1 Avion de chasse avec configuration *delta-canard*

Le système pris en considération est celui du modèle ADMIRE détaillé dans la section 4.2. Dans cette section, nous avons effectué une synthèse *LTI*. L'approche proposée ici est différente. Nous ne considérons plus l'évolution de l'avion autour d'un point de vol, mais sur un domaine plus large, défini par un ensemble de points de vol. Il faut donc s'attendre à des variations paramétriques, ainsi qu'à d'importantes non-linéarités. Par conséquent, la loi de commande devra s'adapter à ces évolutions, qui engendrent des variations importantes sur les dynamiques de l'appareil. De plus, pour répondre au cahier

des charge, elle doit :

- assurer un niveau de performance élevé sur l'ensemble du domaine de vol,
- garantir la stabilité de l'avion et assurer des marges de robustesse satisfaisantes.

La démarche que nous proposons de suivre, repose sur le concept de système *LPV* et la technique de synthèse employée s'appuiera sur une modélisation de type *LFT* jugée mieux adaptée. Ce choix permettra notamment d'appliquer l'algorithme de synthèse de lois de commande *LPV* développé au chapitre 3. Le correcteur obtenu sera analysé puis implémenté sur le système non linéaire. Une série de simulations temporelles viendra finalement valider cette approche.

## 5.1 Description générale

### 5.1.1 Equations du mouvement longitudinal

Dans cette application, on suppose légitime le découplage des axes de tangage, de roulis et lacet, et on s'intéressera par la suite aux évolutions de l'avion dans le plan longitudinal, car il est ici question de contrôle de tangage.

Après linéarisation autour d'un point de vol, les équations du mouvement longitudinal sont décrites par la représentation simplifiée :

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{\dot{\alpha}\alpha} & A_{\dot{\alpha}q} \\ A_{\dot{q}\alpha} & A_{\dot{q}q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{\dot{\alpha}\delta_e} \\ B_{\dot{q}\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e \quad (5.1)$$

où les états  $\alpha$  et  $q$  correspondent respectivement à l'angle d'incidence, et à la vitesse de tangage  $q$ , tandis que la commande  $\delta_e$  représente le débattement des gouvernes aérodynamiques couplées agissant en guise de profondeur. Les mesures disponibles sont la vitesse de tangage  $q$  et le facteur de charge vertical  $n_z = -V_{T_e}(\dot{\alpha} - q)/g$ , où  $V_{T_e}$  désigne la vitesse de l'avion par rapport à l'air, en régime établi.

L'équation de sortie est donnée par :

$$\begin{bmatrix} q \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ C_{n_z\alpha} & C_{n_zq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_{n_z\delta_e} \end{bmatrix} \delta_e \quad (5.2)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\dot{\alpha}\alpha} = Z_\alpha/(mV_{T_e}); \quad Z_\alpha = -\bar{q}SC_{z\alpha}; \\ A_{\dot{\alpha}q} = 1 + Z_q/(mV_{T_e}); \quad Z_q = -\bar{q}S\bar{c}/(2V_{T_e})C_{zq}; \\ A_{\dot{q}\alpha} = 1/I_y [M_\alpha + (Z_\alpha/(mV_{T_e}))M_{\dot{\alpha}}]; \quad M_{\dot{\alpha}} = \bar{q}S\bar{c}(\bar{c}/(2V_{T_e}))C_{m\dot{\alpha}}; \\ M_\alpha = \bar{q}S\bar{c}C_{m\alpha} - x_{cg}\bar{q}SC_{z\alpha} + z_{cg}\bar{q}SC_{x\alpha} + M_{T\alpha}; \\ A_{\dot{q}q} = 1/I_y [M_q + (1 + Z_q/(mV_{T_e}))M_{\dot{\alpha}}]; \quad M_q = \bar{q}S\bar{c}(\bar{c}/(2V_{T_e}))C_{mq} - x_{cg}\bar{q}SC_{zq}; \\ B_{\dot{\alpha}\delta_e} = Z_{\delta_e}/(mV_{T_e}); \quad Z_{\delta_e} = -\bar{q}SC_{z\delta_e}; \\ B_{\dot{q}\delta_e} = 1/I_y [M_{\delta_e} + (Z_{\delta_e}/(mV_{T_e}))M_{\dot{\alpha}}]; \\ M_{\delta_e} = \bar{q}S\bar{c}C_{m\delta_e} - x_{cg}\bar{q}SC_{z\delta_e} + z_{cg}\bar{q}SC_{x\delta_e}; \\ C_{n_z\alpha} = -Z_\alpha/(mg); \\ C_{n_zq} = -Z_q/(mg); \\ D_{n_z\delta_e} = -Z_{\delta_e}/(mg). \end{array} \right.$$

Les éléments  $\{A_{\dot{\alpha}\alpha}, A_{\dot{\alpha}q}, B_{\dot{\alpha}\delta_e}, \dots\}$  s'expriment bien sûr, en fonction des caractéristiques aérodynamiques de l'avion, et dépendent principalement du point de vol. Pour plus de détails sur la définition de ces coefficients, le lecteur pourra se reporter à [42] ou [53].

### 5.1.2 Nature et rôle du correcteur

Avant d'aborder les différentes étapes de la construction du modèle de synthèse, on doit avant tout préciser ici, qu'il ne s'agit pas de concevoir un système de pilotage automatique longitudinal complet, mais uniquement de régler la partie *short-period* portant sur la dynamique rapide. Son rôle est de permettre un asservissement direct de la chaîne de tangage, de sorte que le pilote n'ait qu'à afficher la consigne à suivre, sans se soucier des paramètres (altitude, vitesse) susceptibles d'influencer le comportement de l'avion.

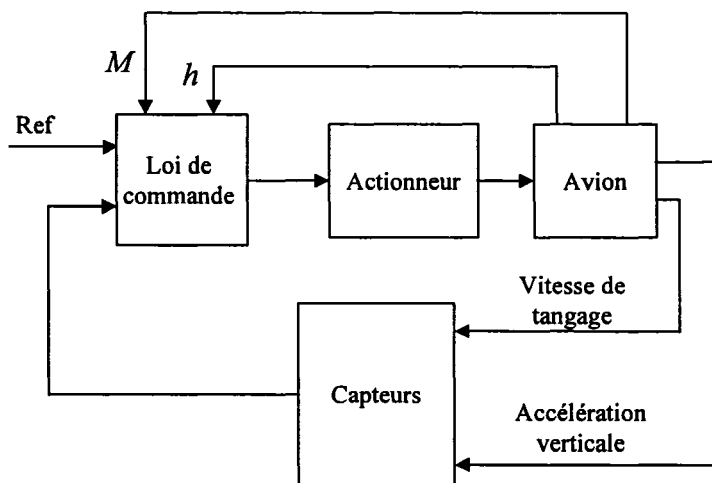


Figure 5.2 Structure de commande pour le contrôle en tangage

Pour élaborer le signal de commande, le contrôleur (*pitch-rate control augmentation system*) utilise essentiellement comme mesures : la vitesse de tangage et l'accélération verticale (*normal load factor*), voir figure 5.2. Il devra par ailleurs s'adapter aux évolutions du modèle en intégrant les paramètres ( $h$  et  $M$ ) qui caractérisent le point de vol. La loi de commande recherchée est donc non stationnaire. Compte tenu du haut niveau de performance requis sur un large domaine de vol, nous illustrons par la suite le bien fondé de ce choix de méthodes de synthèse *LPV*.

## 5.2 Modélisation

Compte tenu des éléments qui précèdent, nous allons simplement chercher à modéliser la dynamique rapide de l'avion. Le but est d'obtenir un système *LPV* exploitable par les techniques développées au chapitre 3.

### 5.2.1 Le domaine de vol

Le domaine de vol considéré dans cette application est représenté sur la figure 5.3, où chaque point correspond à une condition de vol, caractérisée par l'altitude  $h$  et le nombre

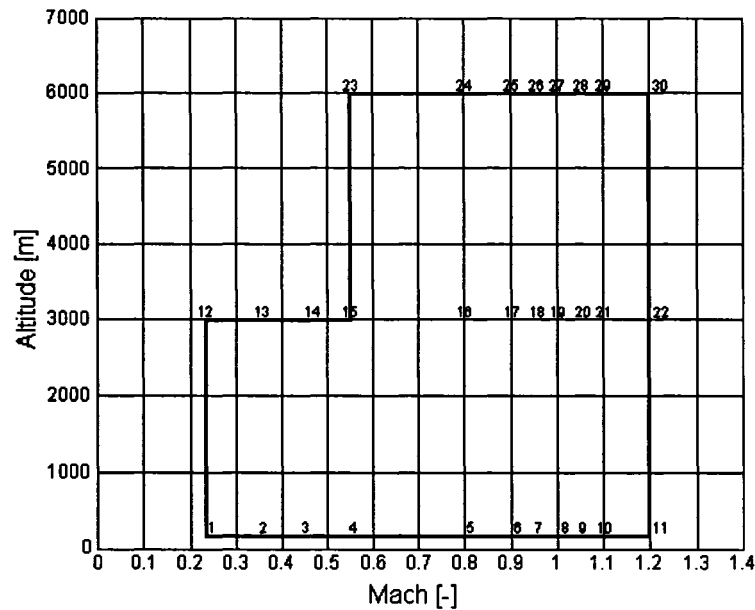


Figure 5.3 Domaine de vol dans le plan  $(M, h)$

de Mach  $M$ .

Les équations (5.1)-(5.2) décrivent donc un système *LPV* dont les éléments  $\{A_{\dot{\alpha}\alpha}(h, M), A_{\dot{\alpha}q}(h, M), B_{\dot{\alpha}\delta_e}(h, M), \dots\}$  sont ici des fonctions des paramètres (Altitude  $h$  et nombre de Mach  $M$ ) qui évoluent dans le domaine de vol (figure 5.3).

### 5.2.2 Approximation par un modèle *LFT*

Dans la construction de ce modèle, on distingue deux grandes étapes :

- Interpolation des éléments  $\{A_{\dot{\alpha}\alpha}, A_{\dot{\alpha}q}, B_{\dot{\alpha}\delta_e}, \dots\}$  par des fonctions rationnelles et/ou polynômiales,
- Mise sous forme *LFT* (cf. chapitre 2).

La première est spécifique de la nature de l'application considérée. C'est aussi une étape préliminaire très importante qui permet de définir les éléments du bloc paramétrique  $\Theta$  de la *LFT*.

## Interpolations

La technique utilisée repose sur une interpolation bi-dimensionnelle, au sens des moindres carrés, d'un ensemble de 30 modèles de la forme (5.1)-(5.2). Le calcul des modèles est effectué pour différentes valeurs d'altitude  $\{20m, 3000m, 6000m\}$  et du nombre de Mach  $\{0.22, 0.35, 0.45, 0.55, 0.80, 0.90, 0.95, 1.00, 1.05, 1.10, 1.20\}$ .

Avant de procéder à l'interpolation, nous commençons par exprimer les variations d'altitude  $h \in [\underline{h}, \bar{h}]$  et du nombre de Mach  $M \in [\underline{M}, \bar{M}]$ , sous une forme normalisée, il vient :

$$\begin{aligned} h &= h_0 + h_1 \delta_h, & |\delta_h| &\leq 1 \\ M &= M_0 + M_1 \delta_M, & |\delta_M| &\leq 1 \end{aligned} \quad (5.3)$$

où  $h_0 = (\underline{h} + \bar{h})/2$ ,  $h_1 = (\bar{h} - \underline{h})/2$ ,  $M_0 = (\underline{M} + \bar{M})/2$  et  $M_1 = (\bar{M} - \underline{M})/2$ . Ainsi, les éléments  $\{A_{\dot{\alpha}\alpha}, A_{\dot{\alpha}q}, B_{\dot{\alpha}\delta_e}, \dots\}$  s'exprimeront à présent en fonction des variables ( $\delta_h$  et  $\delta_M$ ) au lieu de ( $h$  et  $M$ ).

Dans le but de limiter la complexité du modèle, les éléments  $\{A_{\dot{\alpha}\alpha}, A_{\dot{\alpha}q}, B_{\dot{\alpha}\delta_e}, \dots\}$  seront approchés par des fonctions polynômiales en  $\delta_h$  et  $\delta_M$ , de la forme :

$$\left\{ \begin{aligned} A_{\dot{\alpha}\alpha} &= A_{\dot{\alpha}\alpha}^0 + A_{\dot{\alpha}\alpha}^1 \delta_h + A_{\dot{\alpha}\alpha}^2 \delta_M + A_{\dot{\alpha}\alpha}^3 \delta_h \delta_M \\ A_{\dot{\alpha}q} &= A_{\dot{\alpha}q}^0 + A_{\dot{\alpha}q}^1 \delta_h + A_{\dot{\alpha}q}^2 \delta_M + A_{\dot{\alpha}q}^3 \delta_h \delta_M \\ B_{\dot{\alpha}\delta_e} &= B_{\dot{\alpha}\delta_e}^0 + B_{\dot{\alpha}\delta_e}^1 \delta_h + B_{\dot{\alpha}\delta_e}^2 \delta_M + B_{\dot{\alpha}\delta_e}^3 \delta_h \delta_M \\ C_{n_z\alpha} &= C_{n_z\alpha}^0 + C_{n_z\alpha}^1 \delta_h + C_{n_z\alpha}^2 \delta_M + C_{n_z\alpha}^3 \delta_h \delta_M \\ D_{n_z\delta_e} &= D_{n_z\delta_e}^0 + D_{n_z\delta_e}^1 \delta_h + D_{n_z\delta_e}^2 \delta_M + D_{n_z\delta_e}^3 \delta_h \delta_M \\ &\quad \vdots \end{aligned} \right. \quad (5.4)$$

En utilisant la méthode des moindres carrés, on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} A_{\dot{\alpha}\alpha}(\delta_h, \delta_M) &= -1.9216 + 0.6318 \delta_h - 1.5418 \delta_M + 0.3942 \delta_h \delta_M \\ A_{\dot{\alpha}q}(\delta_h, \delta_M) &= 0.9771 + 0.0024 \delta_h + 0.0183 \delta_M - 0.0012 \delta_h \delta_M \\ A_{\dot{q}\alpha}(\delta_h, \delta_M) &= -12.6745 + 8.0843 \delta_h - 44.4783 \delta_M + 2.7475 \delta_h \delta_M \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{\dot{q}q}(\delta_h, \delta_M) = -2.0157 + 0.4880 \delta_h - 1.1329 \delta_M + 0.3755 \delta_h \delta_M \\ B_{\dot{\alpha}\delta_e}(\delta_h, \delta_M) = 0.1995 - 0.0213 \delta_h - 0.0073 \delta_M + 0.0007 \delta_h \delta_M \\ B_{\dot{q}\delta_e}(\delta_h, \delta_M) = 20.1174 - 4.5809 \delta_h + 16.9868 \delta_M - 3.8893 \delta_h \delta_M \\ C_{n_z\alpha}(\delta_h, \delta_M) = 55.7965 - 21.9749 \delta_h + 71.1299 \delta_M - 18.5000 \delta_h \delta_M \\ C_{n_zq}(\delta_h, \delta_M) = 0.4741 - 0.0134 \delta_h - 0.2622 \delta_M - 0.0434 \delta_h \delta_M \\ D_{n_z\delta_e}(\delta_h, \delta_M) = -4.9583 + 0.5227 \delta_h - 2.0803 \delta_M + 0.3879 \delta_h \delta_M \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Notons par ailleurs que les erreurs de modèle liées bien sûr aux erreurs d'interpolation, mais aussi aux erreurs dues à la linéarisation, seront prises en compte sous forme de perturbation multiplicative en entrée, comme on le verra lors de la construction du modèle de synthèse.

### Mise sous forme *LFT*

En appliquant les techniques de modélisation exposées aux paragraphes 2.2, on obtient ainsi le modèle *LFT* correspondant, comme indiqué sur la figure 5.5. La variation d'altitude ( $\delta_h$ ) est répétée 3 fois tandis que la variation de vitesse ( $\delta_M$ ) est répétée 6 fois.

La représentation d'état associée au transfert  $G(s)$ , est donnée par :

$$G(s) = \begin{pmatrix} D_{\theta\theta} & D_{\theta 2} \\ D_{2\theta} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_\theta \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} (B_\theta \quad B_2) \quad (5.6)$$

avec

$$\begin{bmatrix} w_{\delta_h} \\ w_{\delta_M} \end{bmatrix} = \Theta \begin{bmatrix} z_{\delta_h} \\ z_{\delta_M} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

A noter que le partitionnement des matrices est conforme aux dimensions du problème. Après réduction, le bloc paramétrique obtenu est de dimension 6 :

$$\Theta(t) = \text{diag}(\theta_1 I_3, \theta_2 I_3), \quad \text{avec } \theta_1 = \delta_h \text{ et } \theta_2 = \delta_M \quad (5.8)$$

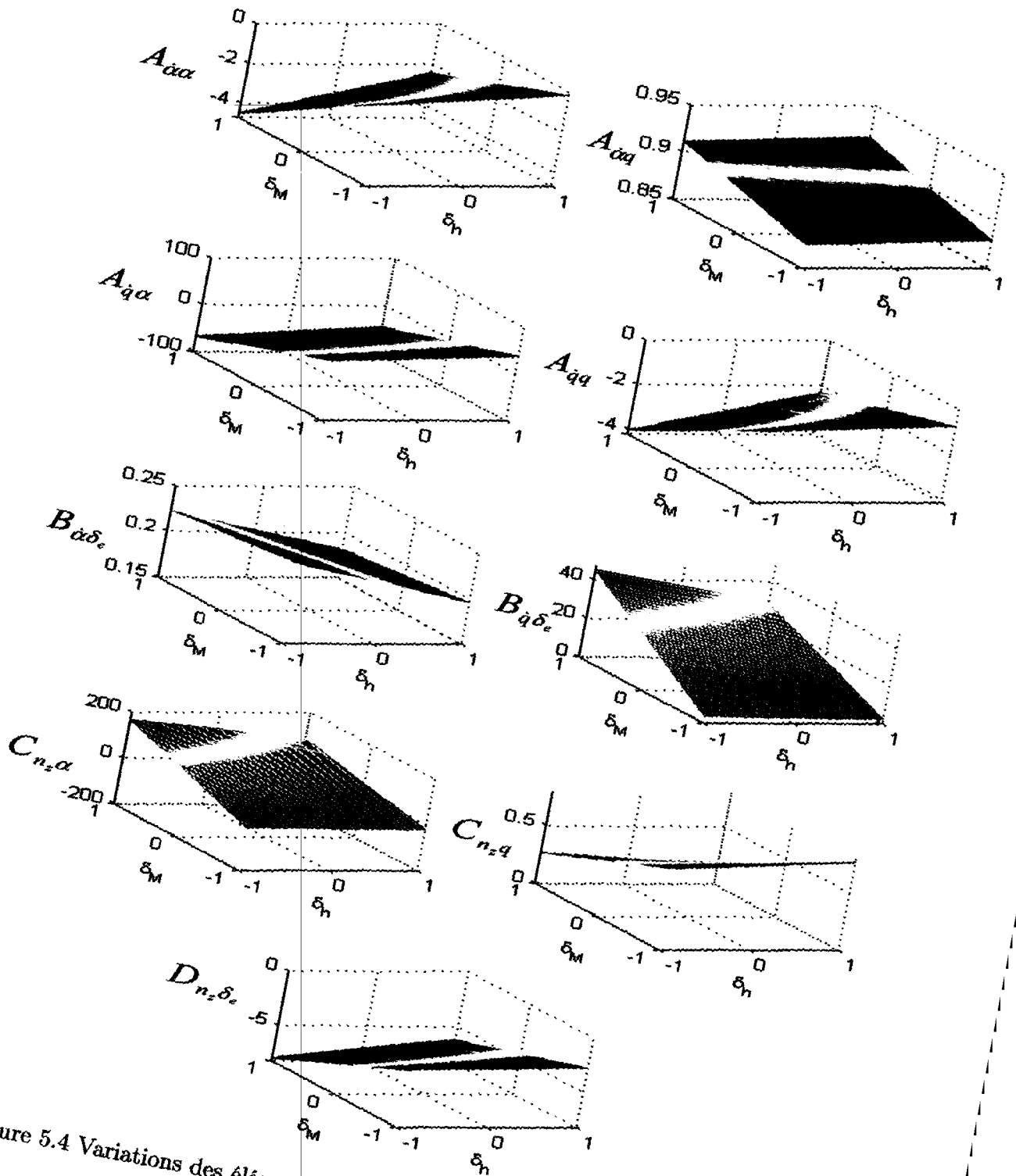


Figure 5.4 Variations des éléments  $\{A_{\alpha\alpha}, A_{\alpha q}, \dots\}$  en fonction de  $\delta_h$  et  $\delta_M$



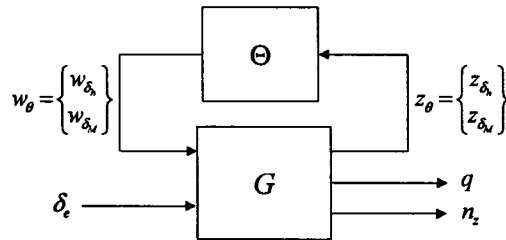


Figure 5.5 Représentation *LFT* de la dynamique rapide

Par ailleurs, on pourra vérifier que la *LFT* obtenue (5.6), est une réalisation minimale.

### 5.3 Construction du modèle de synthèse *LPV*

Nous présentons maintenant les différentes étapes de la construction du modèle de synthèse *LPV* sur lequel nous appliquerons ensuite la méthode résumée par l'algorithme 3.4.1 : *Synthèse LPV robuste*.

#### 5.3.1 Spécifications : performances et robustesse

Le problème de commande considéré dans cette application, consiste à réaliser un asservissement de la vitesse de tangage, en laissant le contrôle de l'incidence à la charge du pilote. Il s'agit d'un choix classique dans la conception d'un pilotage longitudinal. Par ailleurs, en plus de répondre à des objectifs de pilotage classiques (qualités de vol et de manoeuvrabilité), la loi de commande doit assurer un niveau de performance élevé sur l'ensemble du domaine de fonctionnement, en prenant en compte l'évolution des dynamiques au cours du vol.

#### Modèle de référence et qualités de vol

Afin de satisfaire ces objectifs, qui correspondent également à une demande de la part des pilotes, on envisage un suivi de modèle de référence de la forme suivante :

$$W_r(s) = \frac{K_\theta (T_{\theta 2}s + 1) \exp(-\tau_\theta s)}{s^2 + 2 \zeta_{sp} \omega_{sp}s + \omega_{sp}^2} \quad (5.9)$$

Ce modèle est donc un système de second ordre, dont le choix des paramètres  $\{K_\theta, T_{\theta 2}, \zeta_{sp}, \omega_{sp}, \tau_\theta\}$  tient compte des spécifications du cahier des charges en termes de qualité de vol et de manoeuvrabilité des avions, comme décrites par la norme (MIL-STD-1797A). L'ensemble de ces spécifications est indiqué par le tableau suivant :

Tableau XIII Qualités de vol (QV) et spécifications en performance

QV & Performances	Contraintes à respecter
$Drb/q_{ss}$ ( <i>Gibson's Dropback</i> )	$0.0 < Drb/q_{ss} < 0.25 \text{ sec}$
$\omega_{BW}$ ( <i>Attitude Bandwidth</i> )	$> 1.75 \text{ rad/sec}$
$\tau_p$ ( <i>Phase Delay</i> )	$< 0.14 \text{ sec}$
$\zeta_{sp}$ ( <i>Short-Period Mode Damping Ratio</i> )	$0.35 < \zeta_{sp} < 1.30$
CAP ( <i>Control Anticipation Parameter</i> )	$0.16 < CAP < 3.6$

En plus, on doit également assurer la séparation des modes longitudinaux (phugoïde et oscillation d'incidence) et conserver la stabilité du mode phugoïde. Pour ce faire, nous avons choisi un modèle de référence stationnaire avec un amortissement de 0.6 et une pulsation de 4 *rad/sec* :

$$W_r(s) = \frac{4^2}{s^2 + 2(0.6)(4)s + 4^2} \quad (5.10)$$

## Robustesse

Afin de prendre en compte les erreurs de modélisation, mais aussi les imperfections du modèle mathématique<sup>1</sup>, nous avons intégré au modèle *LPV*, un bloc supplémentaire  $\{\Delta_u, W_u\}$ , où  $\Delta_u$  représente une incertitude de modèle non structurée, ramenée en entrée du système, tandis que  $W_u$  permet d'assurer  $\bar{\sigma}(\Delta_u) \leq 1$  à toute fréquence, (figure 5.6).

<sup>1</sup> utilisation d'un modèle simplifié, erreurs d'interpolation, etc.

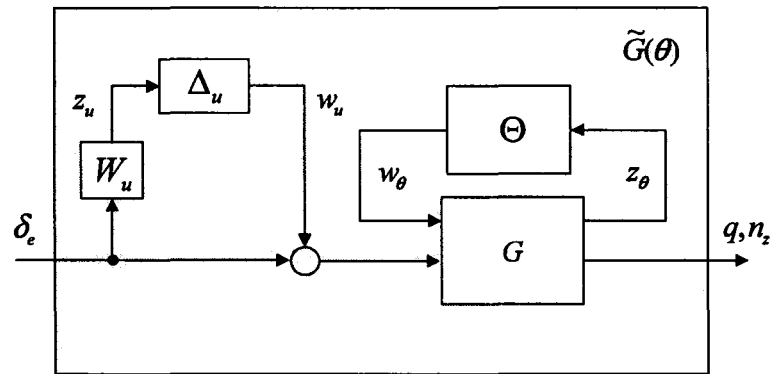


Figure 5.6 Représentation des incertitudes de modélisation

Le gabarit fréquentiel choisi pour  $W_u$  est :

$$W_u(s) = \frac{0.001 \times (s/100 + 1)}{s/10000 + 1} \quad (5.11)$$

ce qui signifie que le modèle *LPV* peut tolérer une erreur multiplicative de 0.1% en basse fréquence, qui augmente jusqu'à 10% en haute fréquence.

Par ailleurs, il convient d'inclure au schéma de synthèse d'autres spécifications de robustesse. Celles-ci devront traduire notamment les incertitudes au niveau de l'actionneur d'une part et du processus de mesure d'autre part. On traduira ces phénomènes par la modélisation de perturbations en entrée et en sortie (voir figure 5.8).

### 5.3.2 Structure de la loi de commande

On retiendra pour cette application, une structure de commande analogue à celle que nous avons utilisée pour le pilotage longitudinal d'un avion civil (paragraphe 4.1.3). Le *feedback*  $K_1$  a pour but de diminuer la sensibilité de la boucle fermée face aux incertitudes dynamiques et/ou paramétriques tandis que la *précommande*  $K_2$  améliore les performances sur la poursuite d'une référence (figure 5.7).

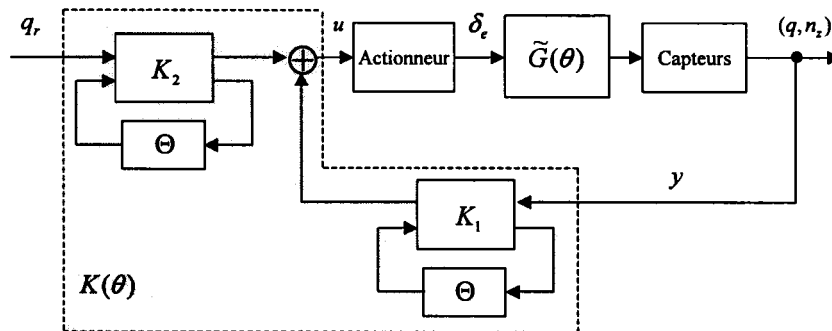


Figure 5.7 Structure de commande à 2 degrés de liberté

On y trouve également :

- un actionneur, décrit par :

$$F_1(s) = \frac{e^{-0.02s}}{0.05s + 1}$$

- deux capteurs inertiels (même fonction pour  $q$  et  $n_z$ ), dont les fonctions de transfert sont données par :

$$H_q(s) = H_{n_z}(s) = \frac{1 + 0.005346s + 0.0001903s^2}{1 + 0.03082s + 0.0004942s^2}$$

Notons par ailleurs, qu'au lieu de chercher à déterminer explicitement  $K_1(\theta)$  et  $K_2(\theta)$ , nous adoptons la même approche qui consiste à synthétiser un seul correcteur  $K(\theta)$ , selon la structure de commande à 2 degrés de liberté.

### 5.3.3 Description du modèle de synthèse

La procédure de construction du modèle de synthèse que nous détaillons maintenant est largement inspirée de la formulation classique des problèmes de synthèse  $\mathcal{H}_\infty$ . La différence essentielle réside dans le fait que les opérateurs dont on va rechercher à minimiser le gain, dépendent du paramètre variant  $\theta$ .

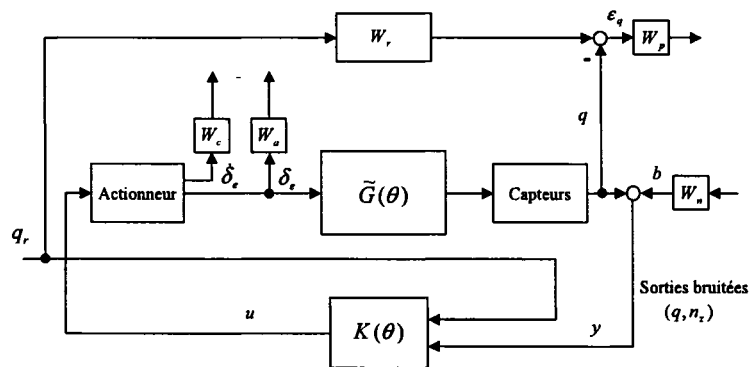


Figure 5.8 Schéma de synthèse

Le schéma de la figure (5.8) fait apparaître les transferts suivants :

$$\mathcal{F}_1(\theta) = \mathcal{F}_{q_r \rightarrow \epsilon_q}(\theta) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_2(\theta) = \mathcal{F}_{q_r, b \rightarrow \delta_e, \dot{\delta}_e}(\theta) \quad (5.12)$$

que l'on associera respectivement aux objectifs de performance (suivi de consigne) et de robustesse (erreurs de modèle en entrée et en sortie). Notons enfin la présence de pondérations fréquentielles  $W_p$ ,  $W_a$ ,  $W_c$  et  $W_n$  dont il faut bien reconnaître que le réglage reste un problème délicat.

### 5.3.4 Spécifications et choix des filtres

La détermination des filtres de pondération repose sur une analyse à paramètres *gelés* du système *LPV*. Les principes qui vont guider notre choix sont donc ceux que l'on retrouve en synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  classique. Les exigences au niveau performances et robustesse, si l'on considère l'avion comme un système *LTI* autour de chaque point de vol sont les suivantes:

1. Le temps de réponse de la sortie  $q$  doit être inférieur à 2 secondes avec une erreur statique  $\epsilon_q$  faible, et un dépassement inférieur à 10%.
2. Les amplitudes de la sortie actionneur  $\delta_e$  et de sa dérivée première  $\dot{\delta}_e$  doivent être limitées.

3. La stabilité robuste doit être assurée sur le modèle de synthèse (robustesse face aux erreurs de modélisation et bruits de mesures).

Après quelques essais, suivis d'analyse en boucle fermée des résultats obtenus, nous avons finalement retenu le choix suivant :

**Le filtre  $W_p$  :** Cette pondération agit directement sur le transfert  $\mathcal{F}_{q_r \rightarrow \varepsilon_q}$  qui lie l'entrée de référence  $q_r$  et l'erreur de poursuite  $\varepsilon_q$ . Le gabarit fréquentiel choisi pour satisfaire l'objectif de performance est :

$$W_p(s) = \frac{4 \times (s/10 + 1)}{s/2 + 1} \quad (5.13)$$

où  $W_p^{-1}(s)$  permet d'assurer une erreur de poursuite maximum de  $0.25 \text{ deg/sec}$  en basses fréquences.

**Les filtres  $\{W_a, W_c\}$  :** Ces pondérations agissent sur le transfert  $\mathcal{F}_{q_r, b \rightarrow \delta_e, \dot{\delta}_e}$  qui lie l'entrée de référence et/ou bruits de mesure à la sortie actionneur  $\delta_e$  et de sa dérivée  $\dot{\delta}_e$ . Ainsi, pour contrôler l'effort de commande, les pondérations obtenues sont :

$$W_a = 1/2 \quad \text{et} \quad W_c = 1/50 \quad (5.14)$$

où  $W_a$  et  $W_c$  permettent respectivement des valeurs maximales de  $2 \text{ deg}$  pour  $\delta_e$  et  $50 \text{ deg/sec}$  pour  $\dot{\delta}_e$ .

**Le filtre  $W_n$  :** Ce filtre est choisi simplement comme un gain statique,

$$W_n = 0.01 I_2 \quad (5.15)$$

afin de limiter les bruits de mesures en hautes fréquences sur  $q$  et  $n_z$ .

### 5.4 Calcul du correcteur *LPV*

La formulation du problème de synthèse considéré dans ce paragraphe est résumée par la figure 5.9 :

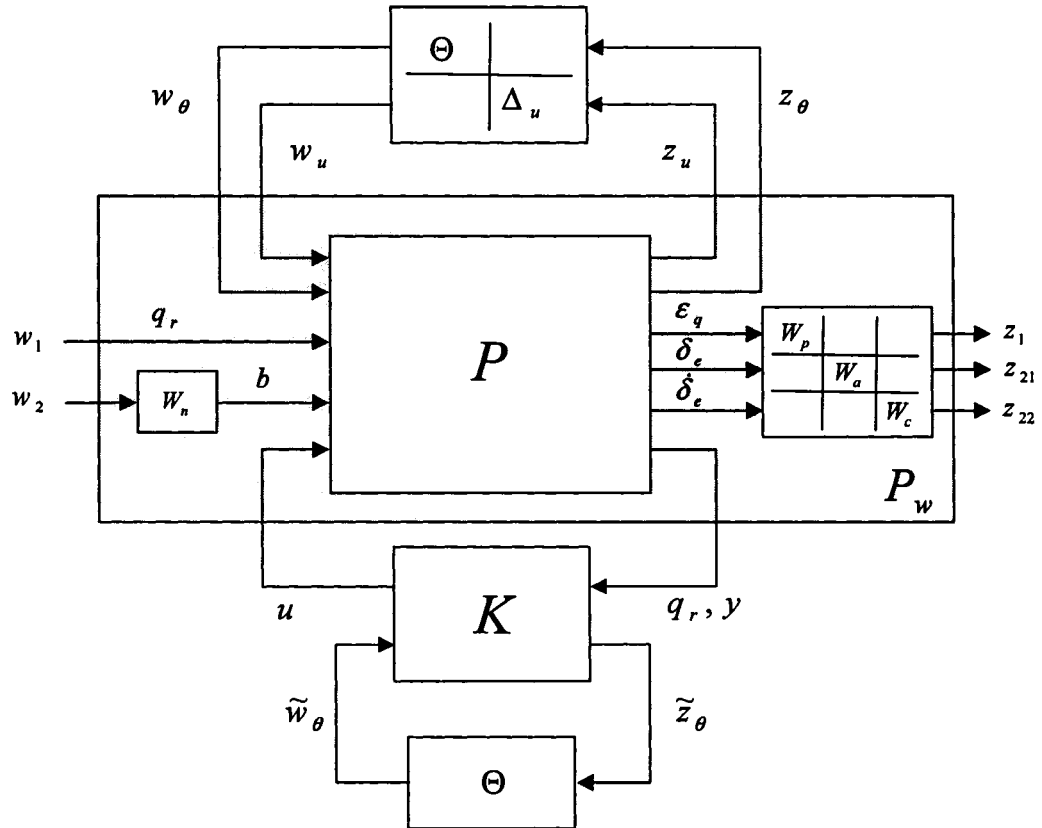


Figure 5.9 Mise en forme du problème de synthèse *LPV* robuste

On appliquera ici la méthode de résolution itérative décrite au chapitre 3, par l'algorithme 3.4.1, en comparant les résultats obtenus par la mise en œuvre de *scalings* constants puis de *scalings* dynamiques.

**Première itération :**

**Etape 1 : Synthèse LPV de type  $\mathcal{H}_\infty$**

On commence par résoudre le problème de faisabilité LMI formulé par (3.47)-(3.51) en appliquant le théorème (3.3.2) au modèle pondéré  $P_w(s)$ . La convergence est obtenue après 62 itérations, avec un niveau de performances tel que :

$$\gamma = 2.617$$

On détermine ensuite le correcteur  $K$ , tel que la condition (3.24) soit satisfaite. Pour cela, on calcule d'abord la matrice de *scalings* constants  $L$ . Puis, on résout le problème d'optimisation suivant :

$$\min \gamma / \left\| \left[ \begin{array}{cc} L^{1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{array} \right] \mathcal{F}_l(P_w^a(s), K(s)) \left[ \begin{array}{cc} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{array} \right] \right\|_\infty < 1$$

**Etape 2 : Analyse**

Pour  $K$  et  $L$  fixés, on effectue ensuite une analyse de la robustesse, en prenant en considération la structure des incertitudes. Pour ce faire, on introduira des opérateurs de *scalings* dynamiques :

$$D = \text{diag}(L_u, L_{\varepsilon_q}^p, L_{\delta_e}^p, L_{\delta_e}^p)$$

Pour résoudre le problème, on suivra la démarche indiquée au chapitre 3 (voir algorithme 3.4.1). Le calcul des *scalings* dynamiques est réalisé sur une répartition logarithmique des fréquences entre  $10^{-2}$  et  $10^3$  (on retiendra 50 points).

Le tracé de la figure 5.10 représente le niveau de performance  $\gamma(\omega)$  en fonction de la fréquence, après optimisation des *scalings*  $D$  :



$$\left\| \begin{bmatrix} L^{1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma(\omega)}} D(j\omega) \end{bmatrix} \mathcal{F}_l(P_w^a(j\omega), K(j\omega)) \begin{bmatrix} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma(\omega)}} D^{-1}(j\omega) \end{bmatrix} \right\|_{\infty} < 1$$

Comme prévu, on notera une amélioration sensible du niveau de performances. Néanmoins, les valeurs obtenus restent supérieures à 1. On devra donc procéder à une nouvelle étape de synthèse.

**Deuxième itération :**

**Etape 1 : Nouvelle synthèse LPV**

On commence ici par intégrer les matrices de *scalings* dynamiques  $D$  au modèle initial  $P_w(s)$ , tel que :

$$P_w(s) \rightarrow \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix} P_w(s) \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{bmatrix}$$

les résultats obtenus après cette nouvelle synthèse sont donc : le test de faisabilité *LMI* converge après 132 itérations, avec un niveau de performances tel que :

$$\gamma = 1.065$$

De plus, le correcteur<sup>2</sup> *LFT* correspondant est d'ordre 11.

**Etape 2 : Analyse**

On effectue ici une autre analyse du dernier résultat obtenu en synthèse (*scalings* constants). On observe donc une amélioration importante du niveau de performances qui devient inférieur à 1 (voir figure 5.10).

---

<sup>2</sup> Il est important de noter que la méthode de synthèse ne garantit pas la stabilité du correcteur, toutefois sur notre exemple, le correcteur issu de cet algorithme est stable.

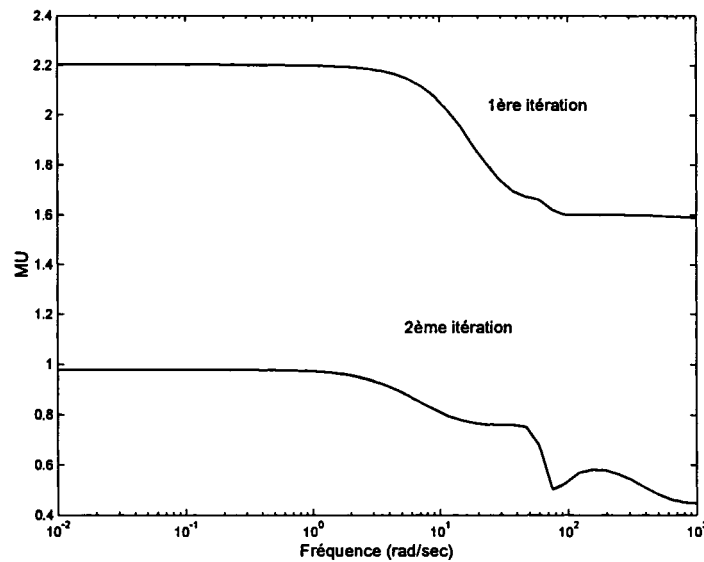


Figure 5.10 Niveau de performances

Le correcteur obtenu à la deuxième itération, est donc jugé satisfaisant dans la mesure où il remplit les objectifs de synthèse que nous nous étions fixés.

## 5.5 Analyse des résultats et simulations

Avant de procéder à l'implémentation sur le système non linéaire, puis aux validations finales, on propose ici une analyse du correcteur en boucle fermée, en termes de robustesse et de performances. Le problème de la réduction de l'ordre sera également évoqué.

### 5.5.1 Réduction du correcteur

Pour des raisons pratiques, en vue de la mise en œuvre sur système réel, la loi de commande  $\mathcal{F}_i(K(s), \Theta(t))$  a finalement été réduite. Pour cela, profitant de la structure *LFT*, nous avons appliqué une technique classique de réduction équilibrée (voir chapitre 2) au système stationnaire  $K(s)$  d'ordre 11, pour le ramener ainsi à 9.

### 5.5.2 Analyse en robustesse de la boucle fermée

Durant l'étape de construction du modèle de synthèse, nous avons supposé que les incertitudes de modèle étaient de type dynamique, et qu'elles étaient décrites par le bloc  $\Delta_u$  comme le montre le schéma de la figure 5.6. Nous avons déjà souligné le caractère conservatif introduit par une telle représentation. De plus, la prise en compte explicite des incertitudes paramétriques produit, en général, des matrices de *scalings* d'ordre très élevé, ce qui a tendance à accroître la complexité de la loi de commande. Par conséquent, il devient nécessaire d'envisager une étude (a posteriori) en robustesse du système en boucle fermée en présence d'incertitudes sur le modèle aérodynamique. Pour cela, nous reprenons pour cette analyse, les 30 modèles *LTI*, utilisés pour la synthèse du correcteur *LPV*.

Dans cette application, les incertitudes de modèle dépendent à la fois de la configuration de l'avion (répartition de la masse à l'intérieur de l'avion, position du centre de gravité), et des erreurs d'identification des coefficients aérodynamiques (voir tableau XIV). Dans le cas des incertitudes de configuration,  $I_y$  et  $x_{cg}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned} I_y &= I_{y_{nom}} (1 + \Delta I_y \delta_{I_y}) \quad \text{avec} \quad |\delta_{I_y}| \leq 1 \\ x_{cg} &= x_{cg_{nom}} + \Delta x_{cg} \delta_{x_{cg}} \quad \text{avec} \quad |\delta_{x_{cg}}| \leq 1 \end{aligned} \quad (5.16)$$

où  $I_{y_{nom}}$  et  $x_{cg_{nom}}$  correspondent respectivement aux valeurs nominales des coefficients, tandis que  $\delta_{I_y}$  et  $\delta_{x_{cg}}$  représentent les incertitudes.

De la même façon, on tiendra compte de la présence d'incertitudes sur trois coefficients qui caractérisent le modèle aérodynamique. Ces coefficients sont  $C_{m\alpha}$ ,  $C_{mq}$  et  $C_{m\delta_e}$ . On réécrit alors chaque coefficient comme suit :

$$C_{mi} = C_{mi_{nom}} + \Delta C_{mi} \delta_{C_{mi}} \quad \text{pour} \quad i = \alpha, q, \delta_e \quad (5.17)$$

où  $C_{mi_{nom}}$  représente la valeur nominale du coefficient, tandis que  $\delta_{C_{mi}}$  représente la perturbation, telle que  $|\delta_{C_{mi}}| \leq 1$ .

Afin d'appliquer les techniques exposées au chapitre 2, en particulier l'outil  $\mu$ -analyse, on

Tableau XIV Incertitudes paramétriques

Parameter Symbol	$[min; max]$	Units	Description
$\Delta I_y$	$[-20; 20]$	$[\%]$	Incertitude relative sur le moment d'inertie $I_y$ par rapport à l'axe $y_w$
$\Delta x_{cg}$	$[-0.15; 0.15]$	$[m]$	Incertitude absolue sur la position $x_{cg}$ du centre de gravité selon l'axe $x_w$
$\Delta C_{m\alpha}$	$[-0.10; 0.10]$	$[1/rad]$	Incertitude absolue sur $C_{m\alpha}$ ( <i>pitch stability coefficient</i> )
$\Delta C_{mq}$	$[-0.10; 0.10]$	$[-]$	Incertitude absolue sur $C_{mq}$ ( <i>pitch damping coefficient</i> )
$\Delta C_{m\delta_e}$	$[-0.03; 0.03]$	$[1/rad]$	Incertitude absolue sur $C_{m\delta_e}$ ( <i>pitch control coefficient</i> )

doit d'abord exprimer chaque modèle perturbé (5.1)-(5.2) sous la forme d'un modèle *LFT*. Pour cela, nous avons représenté  $1/I_y$  et  $x_{cg}$  par deux *LFT* inférieures, telles que :

$$1/I_y = \mathcal{F}_l(M_{I_y}, \delta_{I_y}) \quad \text{où} \quad M_{I_y} = \begin{bmatrix} 1/I_{y_{nom}} & -1/I_{y_{nom}} \\ \Delta I_y & -\Delta I_y \end{bmatrix}$$

et

$$x_{cg} = \mathcal{F}_l(M_{x_{cg}}, \delta_{x_{cg}}) \quad \text{où} \quad M_{x_{cg}} = \begin{bmatrix} x_{cg_{nom}} & 1 \\ \Delta x_{cg} & 0 \end{bmatrix}$$

Nous avons également représenté chacun des coefficients  $C_{mi}$ , par une *LFT* inférieure, telle que, pour  $i = \alpha, q, \delta_e$  :

$$C_{mi} = \mathcal{F}_l(M_{C_{mi}}, \delta_{C_{mi}}) \quad \text{où} \quad M_{C_{mi}} = \begin{bmatrix} C_{mi_{nom}} & 1 \\ \Delta C_{mi} & 0 \end{bmatrix}$$

Nous complétons par ailleurs le modèle d'analyse, par la prise en compte d'incertitudes multiplicatives au niveau des capteurs. Pour satisfaire cette contrainte, nous avons choisi des pondérations fréquentielles de type passe-haut, telles que :

$$W_{out}(s) = \text{diag}(W_q(s), W_{nz}(s))$$

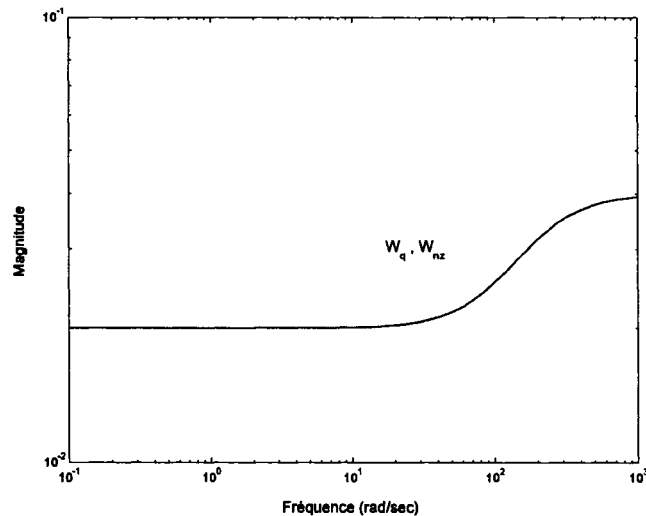


Figure 5.11 Pondérations fréquentielles

où  $W_q(s) = W_{nz}(s) = 0.02(s/100 + 1)/(s/200 + 1)$ . Un tel choix permet de représenter une dynamique capteur négligée de 2% en basses fréquences, qui augmente jusqu'à 4% en hautes fréquences (figure 5.11).

Le schéma d'interconnection pour l'analyse de la robustesse, est donné par la figure 5.12. Le bloc  $\Delta G$ , qui traduit les incertitudes paramétriques du système, comprend 5 perturbations réelles :

$$\Delta G_{5 \times 5} = \text{diag}[\delta_{x_{cg}}, \delta_{C_{m\alpha}}, \delta_{C_{mq}}, \delta_{C_{m\delta_e}}, \delta_{I_y}]$$

dont la variation de chacune d'elles, est comprise entre -1 et 1. En revanche, les blocs  $\Delta_q$  et  $\Delta_{nz}$  sont des incertitudes complexes ( $1 \times 1$ ), telles que  $\|\Delta_q(j\omega)\| \leq 1$  et  $\|\Delta_{nz}(j\omega)\| \leq 1$ .

La figure 5.13 présente les tracés de  $\mu$  pour l'analyse de la robustesse. Chaque tracé correspond à la réponse du système en boucle fermée, pour une condition de vol donnée. On peut constater que la stabilité robuste du système est assurée sur l'ensemble des points de vol donné par la figure 5.3. On gardera néanmoins à l'esprit la validité toute relative de ce type de test.

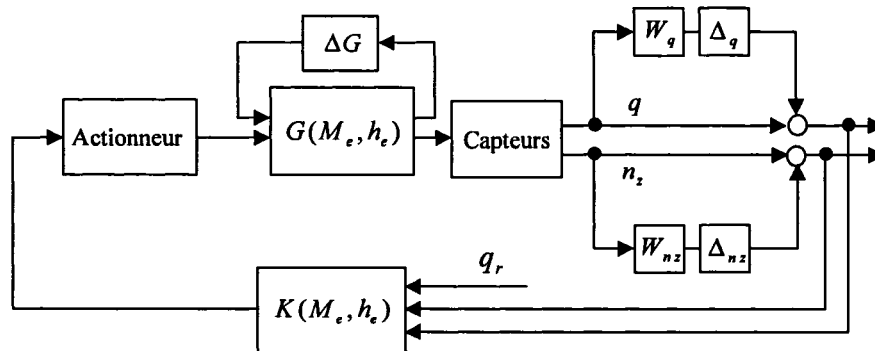


Figure 5.12 Schéma d'interconnexion pour l'analyse de la robustesse

### 5.5.3 Analyse des performances et qualités de vol

L'objectif de cette analyse est d'étudier le comportement longitudinal de l'avion sur l'ensemble du domaine de vol. Pour cela, nous avons réalisé une série de tests, sur chacun des 30 points de vol, afin de vérifier les spécifications du cahier des charges, en termes de performance et de qualité de vol (voir tableau XIII). On notera par ailleurs, que le modèle utilisé pour cette analyse, comprend : le correcteur *LTI* d'ordre 9, un ensemble "actionneur-retard", deux capteurs inertiels et le modèle longitudinal complet (phugoïde et *short-period*). Le retard est modélisé ici par une fonction de transfert d'ordre 2 (approximation de Padé).

Les résultats de ces tests<sup>3</sup> sont rassemblés dans le tableau XV. En ce qui concerne les valeurs du CAP (*Control Anticipation Parameter*), on les a tracées dans le plan, en fonction de l'amortissement  $\zeta_{sp}$ , comme le montre la figure 5.14.

Un examen rapide du tableaux XV, nous révèle que les exigences en matières de qualité de vol et de manoeuvrabilité, sont satisfaites<sup>4</sup> sur l'ensemble des conditions de vol. La figure 5.14 conduit à la même conclusion, à l'exception des points 7, 8, 9, 10, 11 et 22 où

<sup>3</sup> Il s'agit de tests classiques dans les domaines fréquentiel (diagramme de bode) et temporel (simulations *LTI*)

<sup>4</sup> niveau 1.

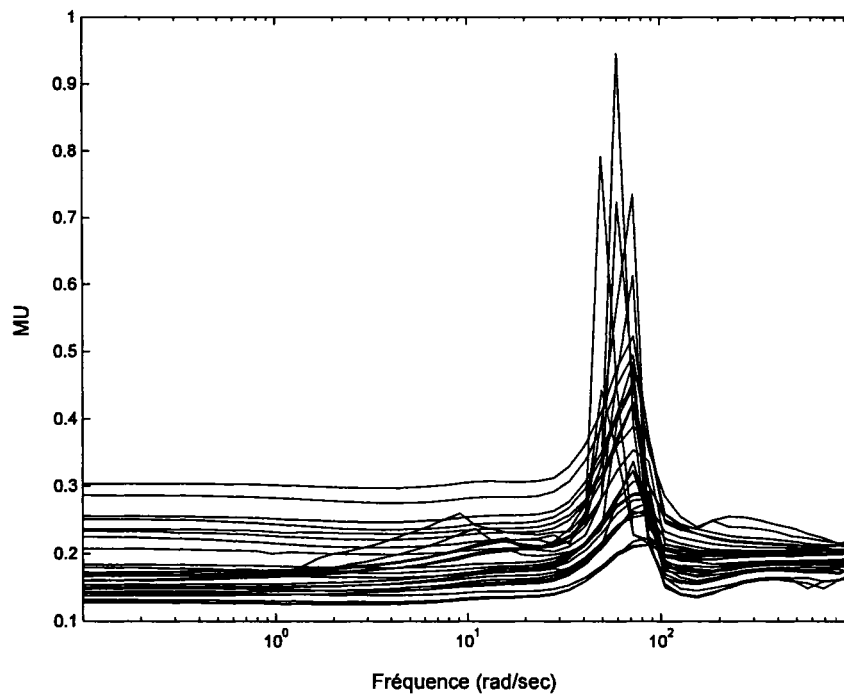


Figure 5.13 Stabilité robuste: prise en compte d'incertitudes mixtes

les spécifications en performance sont toutefois acceptables<sup>5</sup>, mais demandent un effort supplémentaire du pilote pour accomplir la mission en phase de vol.

#### 5.5.4 Simulations temporelles

Bien que les analyses que nous venons de présenter donnent un premier aperçu favorable quant aux propriétés locales du correcteur, elles ne permettent pas de conclure quant au respect des spécifications lorsque l'avion évolue sur son domaine de vol. Les simulations temporelles<sup>6</sup> que nous présentons ici, sont effectuées sur le système non linéaire complet. Dans la mesure où la conception du correcteur repose sur la linéarisation du système, nous avons modifié les signaux qu'il reçoit et génère comme indiqué sur la figure 5.15.

<sup>5</sup> niveau 2.

<sup>6</sup> L'analyse fréquentielle n'est plus valable ici.

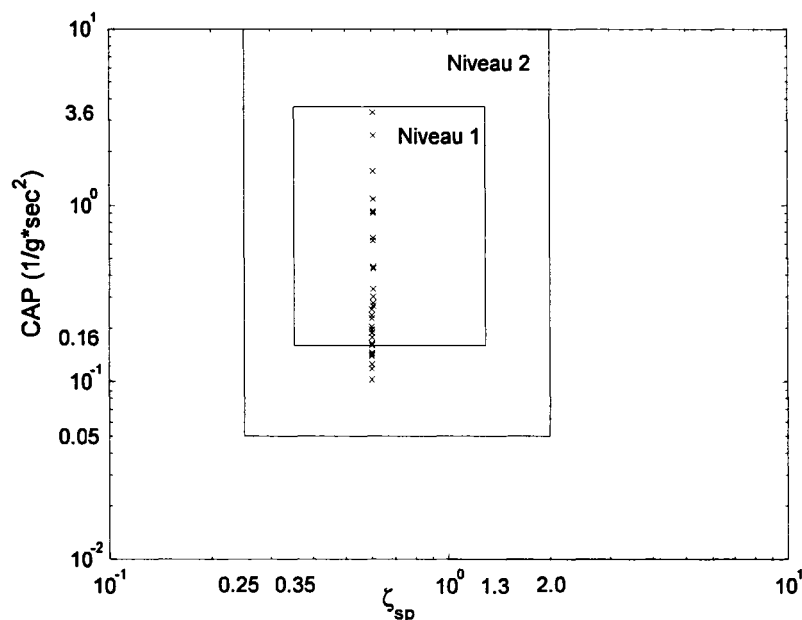


Figure 5.14 Critère CAP vs  $\zeta_{sp}$  pour les phases de vol (Catégorie C)

L'algorithme de réglage, entre chaque période d'échantillonnage, passe par les opérations suivantes :

- construction du bloc  $\Theta$  à partir de  $\delta_h$  et  $\delta_M$ ,
- rebouclage de  $\Theta$  sur le correcteur,
- discrétisation<sup>7</sup> **en ligne** du correcteur,
- calcul des signaux de commande.

D'autre part, la période d'échantillonnage que nous avons utilisée est de 1 *msec*.

Les figures 5.16 et 5.17 montrent des simulations non linéaires. Dans la première simulation, le système est initialisé à partir du point de vol (altitude=20m et Mach=0.22), alors

<sup>7</sup> La détermination du modèle discret, repose sur l'approximation classique selon laquelle sur tout intervalle de la forme  $[kT_e, (k+1)T_e[$ , les vecteurs  $x$ ,  $u$  et  $\theta$  diffèrent peu de leurs valeurs prises à l'instant  $kT_e$ .



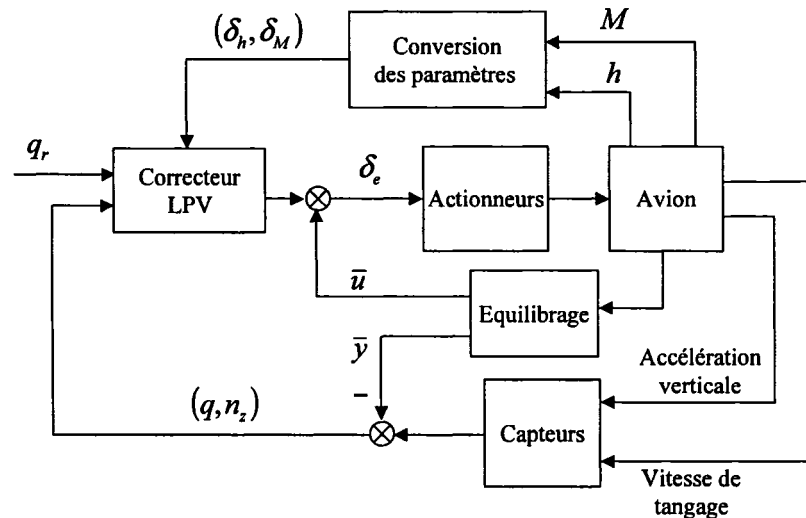


Figure 5.15 Schéma d'implémentation

que dans la seconde simulation, il est initialisé à partir de la condition (altitude=6000m et Mach=1.20). Au cours de chaque simulation, dont la durée est de 20 sec, on applique successivement deux échelons sur  $q_r$ . Le premier d'amplitude 10 deg/sec, dure 5 sec. A l'instant 10 sec, on applique un second échelon d'amplitude -10 deg/sec, pendant 5 sec. Globalement, on constate que les spécifications de performances sont entièrement satisfaites<sup>8</sup>, puisque le temps de réponse est autour de 1.5 sec avec une erreur statique nulle et un dépassement inférieur à 7%. On remarquera aussi le respect des spécifications au niveau du débattement des gouvernes ( $|\delta_e| < 0.2 \text{ rad}$ ). Par ailleurs, la dynamique phugoïde n'a pas d'effet perceptible sur les réponses du système.

Sur la troisième simulation (figure 5.18), nous avons inclus des incertitudes dans le modèle d'avion :  $\Delta I_y = 0.20 I_y$ ,  $\Delta x_{cg} = 0.15 \text{ m}$ ,  $\Delta C_{m\alpha} = 0.1 \text{ rad}^{-1}$ ,  $\Delta C_{mq} = 0.1$  et  $\Delta C_{m\delta_e} = 0.03 \text{ rad}^{-1}$ . L'avion est initialisé à partir du point d'équilibre correspondant à la condition<sup>9</sup> (altitude=2000m et Mach=0.60). On constatera que la stabilité de la boucle fermée est préservée, de plus le système présente un comportement désiré<sup>10</sup>.

<sup>8</sup> qualité de vol et de manoeuvrabilité de niveau 1.

<sup>9</sup> On notera que cette condition n'appartient pas à l'ensemble des points de vol utilisés pour la conception du correcteur LPV, toutefois reste à l'intérieur du domaine de vol.

<sup>10</sup> qualité de vol et de manoeuvrabilité de niveau 1.

## 5.6 Conclusion

Cette application au pilotage longitudinal d'un avion de chasse constitue finalement un argument supplémentaire en faveur de la méthode de synthèse développée au chapitre 3. Elle illustre notamment l'intérêt de notre algorithme qui, calqué sur le principe de la *D-K itération*, permet de générer des correcteurs *LPV* robustes. Par ailleurs, il peut être intéressant de noter la méthodologie adoptée pour la synthèse de la loi de commande *LPV*, depuis la phase de construction du modèle *LPV* jusqu'aux validations finales sur simulations non linéaires. Une procédure similaire pourrait être ainsi envisagée dans le cadre du pilotage des avions civils.