

CHAPITRE 3

COMMANDE DE SYSTÈMES À PARAMÈTRES VARIANTS

Dans la plupart des problèmes de commande, l'objectif principal est de garantir la stabilité du système et un certain niveau de performance sur un domaine d'évolution paramétrique relativement large. Ces variations ou incertitudes qui affectent inévitablement le système nominal, sont essentiellement de trois types :

- incertitude non structurée qui correspond aux dynamiques mal connues ou négligées.
- incertitude structurée qui affectent la connaissance de certains paramètres physiques généralement bien localisés.
- variation paramétrique liée essentiellement aux changement de condition de fonctionnement.

Pour les systèmes linéaires invariants (*LTI*), l'approche \mathcal{H}_∞ offre des outils efficaces de synthèse pour satisfaire ces objectifs de robustesse [15]. Par ailleurs, le traitement des incertitudes paramétriques reste un problème délicat et peut être approché d'une manière itérative par la μ -synthèse [13, 14]. Mais qu'arrive-t-il, dans le cas de variations paramétriques non stationnaires ?

L'approche classique et communément utilisée dans l'industrie, repose sur deux étapes indépendantes: concevoir une série de correcteurs en différents points de fonctionnement du système, supposé localement stationnaire. Puis, élaborer une loi de commande globale par interpolation en ligne des commandes locales. Citons par exemple, le cas de l'avion dont la dynamique évolue considérablement en fonction des conditions de vol. Chaque condition de vol est caractérisée, par exemple, par la vitesse (nombre de Mach) et l'altitude, voir figure 3.1.

Malheureusement, cette technique n'offre aucune garantie a priori quant au comportement global du système (stabilité, performance). Elle soulève par ailleurs une difficulté pratique

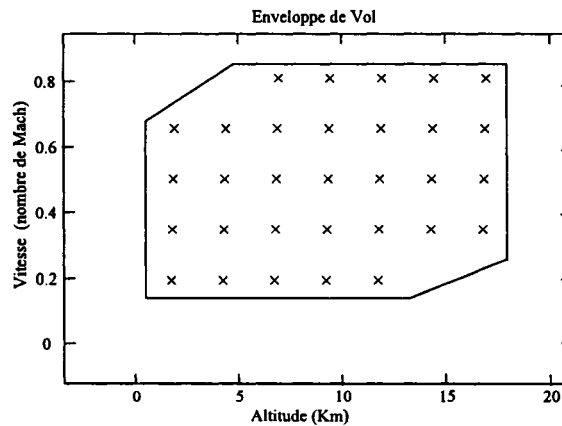


Figure 3.1 Enveloppe de vol pour un avion hypothétique. (×) représente une condition de vol utilisée dans le design

de conception relative au choix de la méthode d'interpolation en ligne, dans le cas où les correcteurs *locaux* sont d'ordre élevé. Une autre approche fondée sur la théorie de la commande adaptative, permet de prendre en compte l'évolution paramétrique du système, grâce à une estimation en ligne. Cette approche s'avère performante, mais peu robuste aux erreurs de modèles.

L'approche que nous proposons d'adopter dans cette partie de la thèse repose sur le concept de commande robuste des systèmes linéaires à paramètres variants, *LPV*.

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta(t))x + B(\theta(t))u \\ y = C(\theta(t))x + D(\theta(t))u \end{cases} \quad (3.1)$$

où $\theta(t)$ caractérise l'évolution paramétrique du système en fonction du temps.

En ce sens, on pourra donc la rapprocher des méthodes classiques. Elle s'en démarque néanmoins par le fait essentiel que la loi de commande est recherchée sous la forme d'un *correcteur global*, ayant la même dépendance paramétrique que le système à commander. Autrement dit, les équations du correcteur, appelé *correcteur LPV*, s'écrivent sous la forme:

$$\begin{cases} \dot{x}_K = A_K(\theta(t))x_K + B_K(\theta(t))y \\ u = C_K(\theta(t))x_K + D_K(\theta(t))y \end{cases} \quad (3.2)$$

Cette nouvelle structure de commande se justifie par le fait que les valeurs paramétriques $\theta(t)$, peuvent être mesurées à chaque instant t . En raison de leur caractère évolutif, ce type de correcteur peut garantir stabilité et performance sur un domaine d'évolution paramétrique relativement large. De plus, contrairement aux méthodes adaptatives, cette approche évite le recours au processus d'identification en ligne. Il faut noter également que le temps de calcul lors de la mise en œuvre de telles structures de commande est faible.

Dans ce chapitre, nous décrivons la problématique générale de la synthèse \mathcal{H}_∞ pour les systèmes *LPV*, telle développée principalement par Packard [45] et Apkarian et Gahinet [4]. Dans la dernière section, nous proposons d'inclure les spécifications de robustesse au niveau même de la conception de la loi de commande. Ceci a pour but d'orienter notre propos vers un aspect central de la thèse : **La synthèse de correcteurs *LFT* robustes pour les systèmes *LPV* incertains**. L'algorithme que nous proposons, combine à la fois la synthèse *LPV* avec les techniques de μ -analyse. Il s'agit d'une formulation proche de la *D-K itération*.

3.1 Classes des systèmes linéaires

Rappelons qu'un système linéaire à paramètres variants dans le temps (système *LTV*), d'ordre n , avec m entrées et p sorties, peut être décrit, dans le domaine temporel, par une représentation d'état de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x + B(t)u \\ y = C(t)x + D(t)u \end{cases} \quad (3.3)$$

où les matrices $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ et $D(t)$ sont des fonctions généralement continues et bornées du temps, dont la dépendance est connue a priori.

Il devient maintenant impossible de déterminer une expression générale de la matrice de transition du système. Tout ce que l'on peut dire, c'est qu'elle vérifie les relations :

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial t} = A(t)\Phi(t, \tau)$$

et

$$\frac{\partial \Phi(t, \tau)}{\partial \tau} = -\Phi(t, \tau)A(\tau)$$

Aussi, l'utilisation d'un critère de stabilité qui repose sur l'utilisation de la matrice de transition devient très délicate, dans la mesure où il faut déterminer une borne sur Φ dont on ne connaît pas de formulation explicite.

De nombreux travaux ont toutefois été entrepris, en s'appuyant sur l'hypothèse fondamentale d'évolution **lente** du système. En effet, une solution du problème \mathcal{H}_∞ correspondant a été proposée dans [46]. Cependant, sa mise en œuvre est très lourde et peu pratique car elle nécessite l'intégration des équations différentielles de Riccati en temps réel. Par opposition, à ces méthodes, on peut aisément appliquer des techniques de types Lyapunov à des systèmes de types *LTV* particuliers (systèmes *LPV*), où la dépendance temporelle de la représentation d'état apparaît à travers la dépendance paramétrique sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta(t))x + B(\theta(t))u \\ y = C(\theta(t))x + D(\theta(t))u \end{cases} \quad (3.4)$$

où $\theta(t)$ est un vecteur de paramètres variants et $A(\theta(t))$, $B(\theta(t))$, $C(\theta(t))$ et $D(\theta(t))$ dépendent de $\theta(t)$ sous une forme définie a priori. Cette classe de systèmes n'est pas complètement générale, mais recouvre de nombreux exemples pratiques tels que les avions, les robots, etc. Il est important de noter que cette description n'exige aucune information particulière sur $\theta(t)$ excepté son domaine de variation. Le schéma de la figure 3.2 montre les liens entre les systèmes *LTI*, *LTV* et *LPV*, où l'on voit qu'un système *LTI* peut s'interpréter comme un système *LPV* dont on a figé le paramètre θ_0 , ou encore comme un système *LTV* dont on a figé le temps t_0 . Par ailleurs, un système *LTV* peut être vu

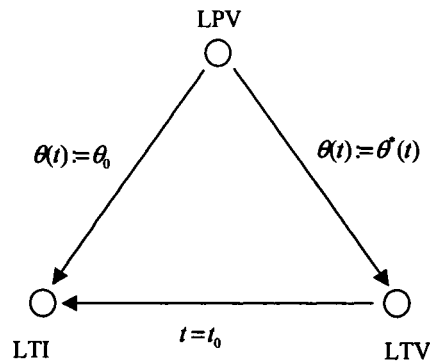


Figure 3.2 Classes de systèmes linéaires

comme un système *LPV* dont on aurait prédéfini la trajectoire $\theta^*(t)$.

Ainsi, par opposition à un système *LTV*, un système *LPV* pourra afficher autant de comportements différents qu'il y a de trajectoires paramétriques admissibles. Compte tenu de cette définition, on entend par trajectoires admissibles, toutes celles dont les points appartiennent à chaque instant à un domaine \mathcal{P} de l'espace-temps. La caractérisation que nous avons retenue autorise en effet certaines évolutions paramétriques présentant par exemple des discontinuités de vitesse voire même de position. Néanmoins, sur le plan mathématique, définir un ensemble de points plutôt qu'un ensemble de trajectoires, rendra le développement des méthodes d'analyse et de synthèse beaucoup plus facile.

D'autre part, et afin de rendre les formules plus lisibles, il nous arrivera fréquemment d'omettre la dépendance temporelle. Ainsi, le système 3.4 devient :

$$\begin{cases} \dot{x} = A(\theta)x + B(\theta)u \\ y = C(\theta)x + D(\theta)u \end{cases} \quad (3.5)$$

où $\theta(t)$ est donné par :

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_K) \in \mathbb{R}^K \quad (3.6)$$

3.2 Synthèse de lois de commande à paramètres variants

3.2.1 Structure de commande des systèmes *LPV* de type *LFT*

L'ensemble des systèmes non stationnaires est excessivement général pour servir de cadre à une étude dont on puisse espérer des résultats numériques exploitables. Ainsi, pour un système physique donné, il devient nécessaire de le représenter par un modèle qui permettra de simplifier la mise en œuvre des méthodes d'analyse et de synthèse. Dans le cadre de notre étude, nous nous limiterons à la représentation de la classe des systèmes *LPV*, dont la dépendance vis-à-vis du paramètre variant $\theta(t)$ est supposée linéaire fractionnelle, c'est à dire sous la forme d'une transformation linéaire fractionnelle (*LFT*).

Pour cela, rappelons qu'un système $P(s)$, associant un signal exogène w et un signal de commande u à un signal à contrôler z et un signal de mesures y , peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}}_{P(s)} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Le problème \mathcal{H}_∞ classique consiste à déterminer un contrôleur *LTI*, $K(s)$, qui assure la stabilité interne du système et tel que $\|\mathcal{F}_l(P, K)\|_\infty$ soit inférieure à un certain niveau de performance γ . La version *LPV* de ce problème s'exprime de manière analogue pour un système qui est maintenant de type *LPV* et non plus *LTI*. En supposant la dépendance paramétrique rationnelle, le système *LPV* initialement quelconque, peut être décrit par une *LFT* supérieure comme sur la figure 3.3. Les équations du système bouclé associé sont alors :

$$\begin{bmatrix} z_\theta \\ z \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{\theta\theta}(s) & P_{\theta 1}(s) & P_{\theta 2}(s) \\ P_{1\theta}(s) & P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{2\theta}(s) & P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}}_{P(s)} \begin{bmatrix} w_\theta \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

et

$$w_\theta = \Theta z_\theta \quad (3.9)$$

où $P(s)$ est un système *LTI*, et w_θ et z_θ sont les sorties et les entrées du bloc paramétrique Θ , tel que :

$$\Theta = \text{diag}(\theta_1 I_{r_1}, \dots, \theta_K I_{r_K}) \quad (3.10)$$

où $r_i > 1$, chaque fois que le paramètre θ_i est répété, [14]. Soit Θ l'ensemble des opérateurs Θ de structure (3.10), tel que :

$$\Theta = \{\text{diag}(\theta_1 I_{r_1}, \dots, \theta_K I_{r_K}) : \theta_i \in \mathbb{R}\} \quad (3.11)$$

Cet ensemble définit ainsi la structure de Θ et son action sur la dynamique du système. Dans ce qui suit, Θ représente un espace vectoriel complexe dont les dimensions sont déterminées par celle de Θ .

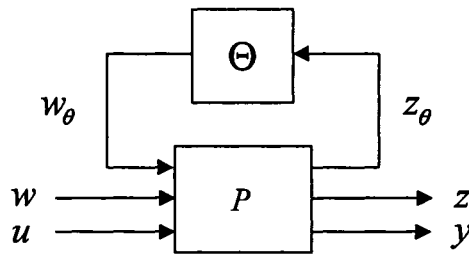


Figure 3.3 Système *LPV* de type *LFT*

Par conséquent, à chaque instant t , la fonction de transfert du système tangent est donnée par :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \mathcal{F}_u(P(s), \Theta) \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

avec

$$\mathcal{F}_u(P(s), \Theta) = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{1\theta} \\ P_{2\theta} \end{pmatrix} \Theta (I - P_{\theta\theta} \Theta)^{-1} (P_{\theta 1} \ P_{\theta 2}) \quad (3.13)$$

On s'arrange généralement pour que le domaine \mathcal{P} d'évolution des paramètres $\theta_i(t)$ soit tel que :

$$|\theta_i| \leq 1, \quad \forall i$$

de sorte que le domaine de définition de la transformation obtenue $\mathcal{F}_u(P, \Theta)$, coïncide avec l'ensemble \mathbf{B}_Θ , défini par :

$$\mathbf{B}_\Theta := \{\Theta \in \Theta : \|\Theta\|_\infty \leq 1\} \quad (3.14)$$

Là encore, plutôt que de rechercher un correcteur *LTI*, robuste aux variations paramétriques, nous proposons un correcteur dynamique ayant la même dépendance paramétrique que le système à commander P . De tels correcteurs sont *LPV* et peuvent être représentés par :

$$u = \mathcal{F}_l(K(s), \Theta)y \quad (3.15)$$

où la matrice de transfert

$$K(s) = \begin{bmatrix} K_{11}(s) & K_{1\theta}(s) \\ K_{\theta 1}(s) & K_{\theta\theta}(s) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

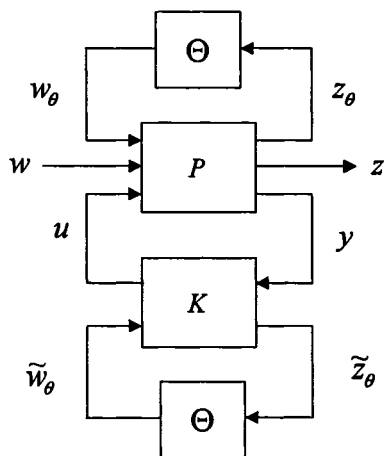
décrit la dépendance du correcteur vis-à-vis des mesures du paramètre variant $\theta(t)$. Avec ces notations, la fonction de transfert des perturbations w vers la sortie à contrôler z est donnée par :

$$T_{zw}(P, K, \Theta) = \mathcal{F}_l(\mathcal{F}_u(P(s), \Theta), \mathcal{F}_l(K(s), \Theta)) \quad (3.17)$$

3.2.2 Synthèse \mathcal{H}_∞ pour les systèmes *LPV*

A la lumière de ce qui précède, le problème de synthèse consiste alors à déterminer une structure de commande telle que le correcteur *LPV*, $\mathcal{F}_l(K(s), \Theta)$, satisfait :

- le système en boucle fermée, figure 3.4, est stable de manière interne, pour toute

Figure 3.4 Structure des correcteurs *LPV*

trajectoire paramétrique admissible, telle que :

$$\gamma^2 \Theta^T \Theta \leq 1 \quad (3.18)$$

- le transfert en boucle fermée, $T_{zw}(P, K, \Theta)$, vérifie :

$$\max_{\|\Theta\|_\infty \leq 1/\gamma} \|T_{zw}(P, K, \Theta)\|_\infty \leq \gamma \quad (3.19)$$

On appelle *correcteur LPV sous-optimal*, tout correcteur vérifiant les deux conditions précédentes. Notons que la condition (3.19) peut être interprétée comme une condition de robustesse en performance pour toutes les trajectoires possibles du paramètre $\Theta \in \Theta$.

Par ailleurs, le schéma de la figure 3.4 rappelle la formulation standard des problèmes de synthèse de lois de commande robuste développées au chapitre 2. Il en diffère néanmoins par la présence d'une boucle supplémentaire. Cette boucle est celle du correcteur qui dépend ici des paramètres. Pour se ramener à la formulation standard, il suffit alors de regrouper les blocs paramétriques du système et du correcteur pour former un seul bloc répété. Cette opération est réalisée simplement, en augmentant le système $P(s)$ de la

manière suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{z}_\theta \\ z_\theta \\ z \\ y \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & I_r \\ 0 & P(s) & 0 \\ I_r & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{P_a(s)} \begin{bmatrix} \tilde{w}_\theta \\ w_\theta \\ w \\ u \\ \tilde{u} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Ainsi, la fonction de transfert des perturbations w vers la sortie à contrôler z , s'écrit:

$$T_{zw}(P, K, \Theta) = \mathcal{F}_u \left(\mathcal{F}_i(P_a(s), K(s)), \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix} \right) \quad (3.21)$$

Il faut souligner à ce niveau que la dépendance paramétrique du système et du correcteur a été remplacée par une seule dépendance paramétrique du système augmenté $P_a(s)$. Cette formulation a le mérite de convertir le problème de synthèse *LPV* en un problème plus classique de robustesse en performance de type *LTI* où la structure paramétrique est répétée $\begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Theta \end{pmatrix}$, (voir figure 3.5). Des conditions suffisantes de résolution du problème original peuvent donc être obtenues par la théorie du petit gain, [14].

Comme dans le cas des systèmes *LTI*, nous avons besoin de la notion de transformation de similarité ou de *scaling*. On définit un ensemble de matrices de *scalings*, associé à la structure Θ définie en 3.11, tel que :

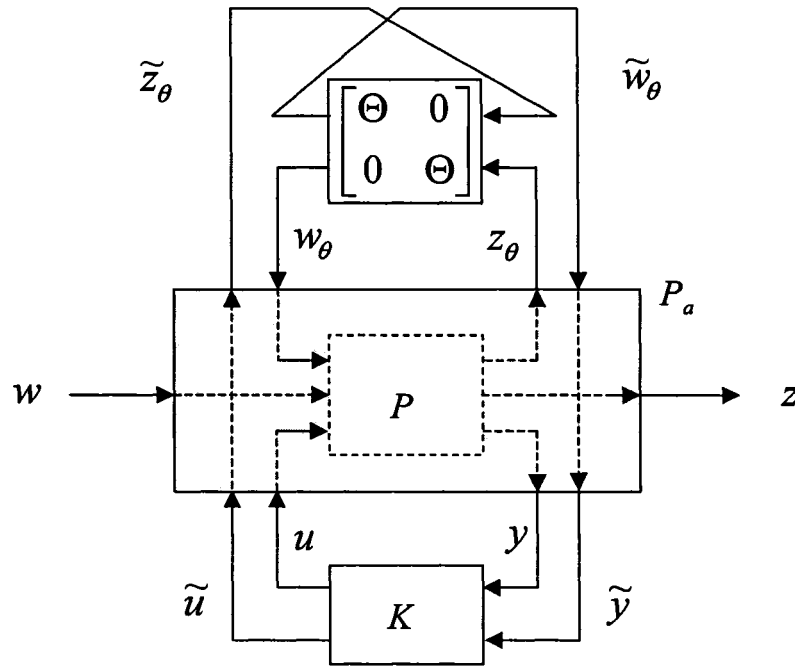
$$L_\Theta = \{L > 0 : L\Theta = \Theta L, \forall \Theta \in \Theta\} \subset \mathbb{R}^{r \times r} \quad \text{avec} \quad r = \sum_{i=1}^K r_i \quad (3.22)$$

L'ensemble L_Θ vérifie les propriétés suivantes :

P1) $I_r \in L_\Theta$

P2) $L \in L_\Theta \Rightarrow L^T \in L_\Theta$

P3) $L \in L_\Theta \Rightarrow L^{-1} \in L_\Theta$

Figure 3.5 Structure équivalente de commande *LPV*

P4) $L_1 \in L_{\Theta}, L_2 \in L_{\Theta} \Rightarrow L_1 L_2 \Theta = \Theta L_1 L_2, \forall \Theta \in \Theta$

P5) L_{Θ} est un sous ensemble convexe de $\mathbb{R}^{r \times r}$

Il s'ensuit que l'ensemble des matrices de *scalings*, commutant avec la structure répétée $\Theta \oplus \Theta$, est défini par :

$$L_{\Theta \oplus \Theta} \equiv \left\{ \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^T & L_3 \end{bmatrix} > 0 : L_1, L_3 \in L_{\Theta} \text{ et } L_2 \Theta = \Theta L_2, \forall \Theta \in \Theta \right\} \quad (3.23)$$

On peut maintenant utiliser le théorème du petit gain, pour obtenir une condition suffisante de robustesse en performance en présence d'incertitudes $\Theta \oplus \Theta$. D'où le résultat suivant qu'on peut énoncer sous forme de théorème, [4].

Théorème 3.2.1. *Considérons une structure Θ et l'ensemble des matrices de *scalings* as-*

socié $L \in L_{\Theta \oplus \Theta}$ défini en 3.23. S'il existe une matrice de *scalings* $L \in L_{\Theta \oplus \Theta}$ et une structure de commande $K(s)$ telles que le système nominal en boucle fermée $\mathcal{F}_l(P_a(s), K(s))$ soit stable de manière interne et

$$\left\| \left[\begin{array}{cc} L^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \mathcal{F}_l(P_a(s), K(s)) \left[\begin{array}{cc} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \right\|_{\infty} < \gamma \quad (3.24)$$

alors $\mathcal{F}_l(K(s), \Theta)$ est un correcteur LPV sous-optimal.

On reconnaît ici une application directe du théorème du petit gain (cf. chapitre 2), avec utilisation de *scalings* constants, [14].

3.3 Synthèse \mathcal{H}_{∞} et caractérisation LMI

Dans cette section, nous présentons une caractérisation LMI de la solution du problème \mathcal{H}_{∞} pour les systèmes LPV. Cette approche est basée sur la résolution d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes d'inégalités matricielles linéaires [10]. Elle est donc solution d'un problème de faisabilité que l'on peut résoudre par des techniques d'optimisation convexes [11]. Par ailleurs, souhaitant ne pas alourdir trop notre exposé, les résultats sont énoncés sans démonstration. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux références [4] et [22].

Pour décrire une telle solution, on a besoin d'un certain nombre de notations en espace d'état. Introduisons tout d'abord une réalisation minimale du système LPV sous la forme:

$$P(s) = \begin{pmatrix} D_{\theta\theta} & D_{\theta 1} & D_{\theta 2} \\ D_{1\theta} & D_{11} & D_{12} \\ D_{2\theta} & D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{\theta} \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} (B_{\theta} \ B_1 \ B_2) \quad (3.25)$$

où le partitionnement est conforme à (3.8). Les dimensions du problème sont données par:

$$A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \ D_{\theta\theta} \in \mathbb{R}^{r \times r}, \ D_{11} \in \mathbb{R}^{p_1 \times p_1}, \ D_{22} \in \mathbb{R}^{p_2 \times p_2} \quad (3.26)$$

On supposera dans la suite que :

(A1) (A, B_2, C_2) est stabilisable et détectable

(A2) $D_{22} = 0$

La première hypothèse est nécessaire pour que la stabilisation du système soit possible en retour de sortie. La deuxième n'induit pas de perte de généralité mais permet de simplifier considérablement les calculs. De plus, on suppose que le système vérifie l'une ou l'autre des propriétés suivantes :

(A3) $D_{2\theta} = 0$ ou $D_{\theta 2} = 0$

Cette hypothèse est suffisante (mais pas nécessaire) pour assurer que le correcteur $\mathcal{F}_l(K(s), \Theta)$, soit causal et bien défini [4]. On notera d'ailleurs que l'une ou l'autre de ces propriétés est souvent vérifiée dans la pratique. Il s'ensuit que la représentation d'état du système augmenté $P_a(s)$ défini en (3.20), s'écrit :

$$P_a(s) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & I_r \\ 0 & D_{\theta\theta} & D_{\theta 1} & D_{\theta 2} & 0 \\ 0 & D_{1\theta} & D_{11} & D_{12} & 0 \\ 0 & D_{2\theta} & D_{21} & 0 & 0 \\ I_r & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ C_\theta \\ C_1 \\ C_2 \\ 0 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} (0 \ B_\theta \ B_1 \ B_2 \ 0) \quad (3.27)$$

3.3.1 Caractérisation LMI pour les systèmes LTI

Nous commençons d'abord par présenter la formulation standard du problème \mathcal{H}_∞ avec utilisation de *scalings* constants, pour les systèmes LTI, sous forme de problème d'optimisation LMI. Pour cela, on dispose du résultat suivant, donné par le Lemme Borné Réel, (*Bounded Real Lemma*) :

Lemme 3.3.1. (Lemme Borné Réel) *Considérons une structure Θ et l'ensemble de scalings associé L_Θ défini en 3.22. Considérons aussi un système LTI dont la réalisation, $T(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$, est une matrice de transfert carrée. Alors, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

i) *A est stable et il existe une matrice de scalings $L \in L_\Theta$, telle que :*

$$\|L^{1/2}(D + C(sI - A)^{-1}B)L^{-1/2}\|_\infty < \gamma \quad (3.28)$$

ii) *il existe une matrice symétrique $X > 0$, et une matrice de scalings $L \in L_\Theta$, solutions de l'inégalité matricielle suivante :*

$$\begin{bmatrix} A^T X + X A & X B & C^T \\ B^T X & -\gamma L & D^T \\ C & D & -\gamma L \end{bmatrix} < 0 \quad (3.29)$$

Considérons maintenant un système LTI $P(s)$ donné par :

$$\begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix}}_{P(s)} \begin{bmatrix} w \\ u \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Le problème \mathcal{H}_∞ standard, avec utilisation de scalings constants, consiste alors :

Etant donnée une structure Θ et un ensemble de scalings associé L_Θ défini en 3.22. Pour un $\gamma > 0$ donné, existe-il une loi de commande $K(s)$, et une matrice de scalings $L \in L_\Theta$, telles que le système en boucle fermée soit stable de manière interne et :

$$\|L^{1/2}(\mathcal{F}_l(P(s), K(s))L^{-1/2})\|_\infty < \gamma \quad (3.31)$$

Ce problème admet deux résolutions possibles. La première approche repose sur la résolution de deux équations de Riccati (cf. chapitre 2). Une deuxième solution à ce problème

repose sur l'utilisation du Lemme Borné Réel et les techniques *LMI*. D'où le théorème suivant qui donne la solution du problème \mathcal{H}_∞ avec retour de sortie, [4].

Théorème 3.3.1. *Considérons le système linéaire $P(s)$, d'ordre n , défini par :*

$$P(s) = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} (sI - A)^{-1} (B_1 \ B_2) \quad (3.32)$$

et supposons que les hypothèses (A1) et (A2) soient vérifiées. Le problème 3.31 admet une solution si et seulement si il existe deux paires de matrices symétriques $(R, S) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $(L, J) \in \mathbb{R}^{p_1 \times p_1}$ telles que :

$$\mathcal{N}_R^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1 R & -\gamma J & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma L \end{bmatrix} \mathcal{N}_R < 0 \quad (3.33)$$

$$\mathcal{N}_S^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_1 & C_1^T \\ B_1^T S & -\gamma L & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma J \end{bmatrix} \mathcal{N}_S < 0 \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.35)$$

$$L \in L_{\mathbf{0}}, \quad J \in L_{\mathbf{0}}, \quad LJ = 1 \quad (3.36)$$

où \mathcal{N}_R et \mathcal{N}_S sont respectivement les bases des noyaux $(B_2^T, D_{12}^T, 0)$ et $(C_2, D_{21}, 0)$.

De plus, il existe un *correcteur sous-optimal*, d'ordre k , tel que :

$$K(s) = D_K + C_K (sI - A_K)^{-1} B_K \quad (3.37)$$

si et seulement si les inégalités matricielles (3.33)-(3.36) sont satisfaites pour un certain

quadruplet (R, S, L, J) et où la paire (R, S) vérifie aussi :

$$\text{rang}(I - RS) \leq k \quad (3.38)$$

On est donc en présence d'un problème de faisabilité *LMI* dans lequel le correcteur n'est pas recherché explicitement. D'autre part, les inégalités (3.33)-(3.36) sont linéaires par rapport aux variables (R, S, L, J) et les contraintes $L \in L_{\Theta}$ et $J \in L_{\Theta}$ sont convexes. Toutefois, pour $k \geq n$, où (3.38) est satisfaite, la contrainte $LJ = I$, est fortement non convexe. Ce qui rend la résolution du problème \mathcal{H}_{∞} avec utilisation de *scalings* un exercice difficile.

Par ailleurs, contrairement à l'approche basée sur la solution des équations de Riccati, il n'est pas nécessaire que les hypothèses liées à la perte de rang et la présence de zéros sur l'axe imaginaire soient vérifiées.

3.3.2 Caractérisation *LMI* pour les systèmes *LPV*

D'une manière similaire, on obtient une caractérisation *LMI* du problème de synthèse \mathcal{H}_{∞} des systèmes *LPV* de type *LFT*.

Théorème 3.3.2. *Considérons un système LPV de réalisation minimale (3.25), une structure paramétrique Θ et l'ensemble de **scalings** associé $L \in L_{\Theta \oplus \Theta}$ défini en 3.23. Soient \mathcal{N}_R et \mathcal{N}_S respectivement des bases des noyaux $(B_2^T, D_{\theta 2}^T, D_{12}^T, 0)$ et $(C_2, D_{2\theta}, D_{21}, 0)$. Finalement, supposons que les hypothèses (A1) et (A2) soient vérifiées. Le problème 3.24 admet une solution, s'il existe deux paires de matrices symétriques $(R, S) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $(L_3, J_3) \in \mathbb{R}^{r \times r}$ telles que :*

$$\mathcal{N}_R^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & R\hat{C}_1^T & \hat{B}_1\hat{J}_3 \\ \hat{C}_1R & -\gamma\hat{J}_3 & \hat{D}_{11}\hat{J}_3 \\ \hat{J}_3\hat{B}_1^T & \hat{J}_3\hat{D}_{11}^T & -\gamma\hat{J}_3 \end{bmatrix} \mathcal{N}_R < 0 \quad (3.39)$$

$$\mathcal{N}_S^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & S\hat{B}_1 & \hat{C}_1^T \hat{L}_3 \\ \hat{B}_1^T S & -\gamma \hat{L}_3 & \hat{D}_{11}^T \hat{L}_3 \\ \hat{L}_3 \hat{C}_1 & \hat{L}_3 \hat{D}_{11} & -\gamma \hat{L}_3 \end{bmatrix} \mathcal{N}_S < 0 \quad (3.40)$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.41)$$

$$L_3 \in L_{\Theta}, \quad J_3 \in L_{\Theta}, \quad \begin{bmatrix} L_3 & I \\ I & J_3 \end{bmatrix} \geq 0 \quad (3.42)$$

avec les notations

$$\hat{B}_1 = (B_{\theta} \quad B_1), \quad \hat{C}_1 = \begin{pmatrix} C_{\theta} \\ C_1 \end{pmatrix}, \quad \hat{D}_{11} = \begin{pmatrix} D_{\theta\theta} & D_{\theta 1} \\ D_{1\theta} & D_{11} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

$$\hat{J}_3 = \begin{pmatrix} J_3 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \quad \hat{L}_3 = \begin{pmatrix} L_3 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

De plus, pour $\gamma > 0$ donné, il existe un *correcteur LFT sous-optimal*, d'ordre k , défini par la représentation d'état :

$$K(s) = \begin{pmatrix} D_{K11} & D_{K1\theta} \\ D_{K\theta 1} & D_{K\theta\theta} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{K1} \\ C_{K\theta} \end{pmatrix} (sI - A_K)^{-1} (B_{K1} \quad B_{K\theta}) \quad (3.45)$$

si les inégalités matricielles (3.39)-(3.42) sont satisfaites pour un certain quadruplet (R, S, L_3, J_3) et où la paire (R, S) vérifie aussi :

$$\text{rang}(I - RS) \leq k \quad (3.46)$$

On obtient ainsi une caractérisation *LMI* par rapport aux variables (R, S, L_3, J_3) . En

particulier, la contrainte $LJ = I$, est remplacée par :

$$\begin{bmatrix} L_3 & I \\ I & J_3 \end{bmatrix} \geq 0$$

qui garantit également la positivité des matrices L_3 et J_3 . Il en résulte ainsi une caractérisation entièrement convexe du correcteur recherché. Il faut bien noter que les inégalités matricielles (3.39)-(3.42) du théorème 3.3.2, constituent simplement une condition suffisante de performance \mathcal{H}_∞ du système LPV en boucle fermée, (figure 3.4). Dans le cas des systèmes LTI , les conditions obtenues étaient également nécessaires.

Par ailleurs, le problème de faisabilité LMI (théorème 3.3.2), peut être réécrit d'une façon équivalente, comme un problème de minimisation d'un coût linéaire sous contraintes LMI ; où l'on désire tester, dans ce cas, l'existence d'un correcteur qui assure le plus petit niveau de performance γ . En utilisant la valeur propre généralisée, (*Generalized EigenValue Problem, GEVP*), le problème ci-dessus (théorème 3.3.2) s'écrit alors :

$$\text{minimiser } \gamma \tag{3.47}$$

sous contraintes

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.48}$$

$$L_3 \in L_{\Theta}, \quad J_3 \in L_{\Theta}, \quad \begin{bmatrix} L_3 & I \\ I & J_3 \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.49}$$

$$\mathcal{N}_R^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & R\hat{C}_1^T & \hat{B}_1\hat{J}_3 \\ \hat{C}_1R & -\gamma\hat{J}_3 & \hat{D}_{11}\hat{J}_3 \\ \hat{J}_3\hat{B}_1^T & \hat{J}_3\hat{D}_{11}^T & -\gamma\hat{J}_3 \end{bmatrix} \mathcal{N}_R < 0 \tag{3.50}$$

$$\mathcal{N}_S^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & S\hat{B}_1 & \hat{C}_1^T \hat{L}_3 \\ \hat{B}_1^T S & -\gamma \hat{L}_3 & \hat{D}_{11}^T \hat{L}_3 \\ \hat{L}_3 \hat{C}_1 & \hat{L}_3 \hat{D}_{11} & -\gamma \hat{L}_3 \end{bmatrix} \mathcal{N}_S < 0 \quad (3.51)$$

On pourra résoudre ce problème à l'aide des outils de “*LMI Control Toolbox*”, [23]. Une fois les matrices R , S , L_3 et J_3 trouvées, il reste seulement à déterminer un correcteur stabilisant tel que la condition (3.24) soit satisfaite. Pour cela, on a besoin de calculer la matrice de *scalings* L qui prend en compte la contrainte :

$$L\Theta = \Theta L, \quad \forall \Theta(t) \in \Theta$$

avec

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^T & L_3 \end{bmatrix} > 0 \quad \text{et} \quad L^{-1} = \begin{bmatrix} * & * \\ * & J_3 \end{bmatrix}$$

On procède alors à la décomposition de $(I - L_3 J_3)$ en valeurs singulières telles que :

$$I - L_3 J_3 = (U\Sigma^{\frac{1}{2}})(V\Sigma^{\frac{1}{2}})^T = MN^T$$

d'où l'on déduit les matrices M et N , puis finalement L comme l'unique solution du système linéaire [22] :

$$L \begin{bmatrix} 0 & N^T \\ I & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^T & 0 \\ L_3 & I \end{bmatrix}$$

On pourra vérifier en outre que cette solution appartient bien à l'ensemble $L_{\Theta \oplus \Theta}$.

Connaissant maintenant L , la synthèse d'un correcteur *LPV* de type *LFT* est obtenue, par résolution du problème d'optimisation convexe :

$$\min \gamma / \left\| \left[\begin{array}{cc} L^{1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{array} \right] \mathcal{F}_l(P_a(s), K(s)) \left[\begin{array}{cc} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{array} \right] \right\|_{\infty} < 1 \quad (3.52)$$

Comme on l'a mentionné ci-dessus, un tel problème admet deux résolutions possibles. La

première méthode est basée sur la résolution des équations de Riccati, [15]. Alors que la seconde repose sur la résolution d'un problème d'optimisation convexe sous contraintes d'inégalités matricielles linéaires, [22]. Dans l'application du chapitre 5, nous avons opté pour la première méthode dont la solution est la plus simple et la plus fiable numériquement.

3.4 Extension au cas des systèmes *LPV* incertains

Jusqu'à présent, dans notre description des systèmes *LPV*, nous avons considéré le vecteur de paramètres $\theta(t)$, comme étant la seule variation liée au modèle et dont l'évolution peut être mesurée en temps réel. Nous étendrons ici notre étude au cas des systèmes *LPV* incertains, et ceci afin de prendre en compte, non seulement les variations paramétriques du modèle mais aussi diverses formes d'incertitudes. Une telle approche présente un réel intérêt sur le plan pratique, en particulier l'exemple de l'avion où les incertitudes qui affectent le modèle interviennent généralement à plusieurs niveaux: dynamiques mal connues ou négligées des actionneurs et des capteurs, etc. (cf. section 5.3.1). D'où l'utilisation de la valeur singulière structurée, μ , (cf. chapitre 2).

Le schéma de la figure (3.6) présente la structure générale pour la synthèse des lois de commande robuste des systèmes *LPV* incertains. Le système à commander est représenté, dans ce cas, par une *LFT* supérieure :

$$\mathcal{F}_u \left(P, \begin{pmatrix} \Theta & 0 \\ 0 & \Delta_u \end{pmatrix} \right) \quad (3.53)$$

avec, comme précédemment,

$$\Theta(t) \in \Theta \quad \text{et} \quad \|\Theta\|_\infty \leq 1 \quad (3.54)$$

et, pour le bloc d'incertitudes $\Delta_u \in \mathbf{\Delta}_u$, tel que :

$$\mathbf{\Delta}_u = \{ \text{diag}(\delta_1 I_{q_1}, \dots, \delta_S I_{q_S}, \Delta_1, \dots, \Delta_F), \delta_i \in \mathbb{R}, \Delta_j \in \mathbb{C}^{m_j \times m_j} \} \quad (3.55)$$

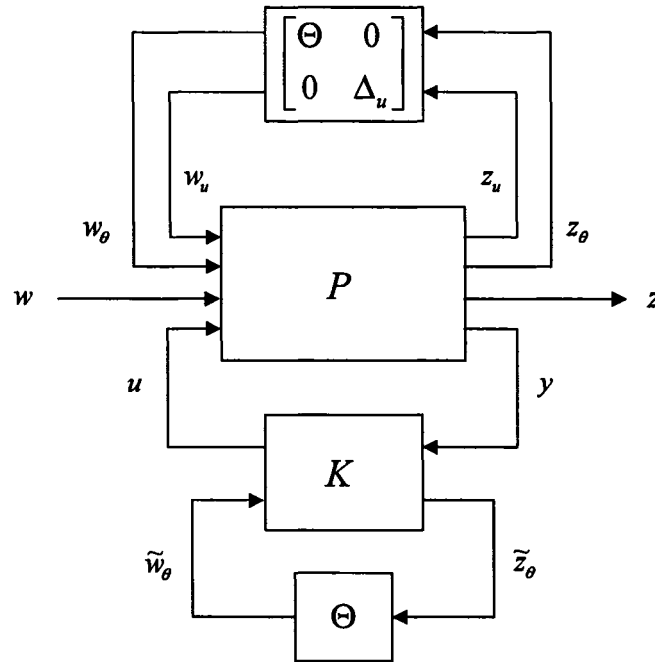


Figure 3.6 Structure de commande des systèmes *LPV* incertains

Les réels δ_i représentent des incertitudes paramétriques invariantes tandis que les blocs complexes Δ_j permettent de modéliser les dynamiques hautes fréquences négligées. On supposera par la suite que :

$$\begin{cases} |\delta_i| \leq 1, & \text{pour } i = 1, \dots, S \\ \|\Delta_j(s)\|_\infty \leq 1, & \text{pour } j = 1, \dots, F \end{cases} \quad (3.56)$$

En suivant une démarche similaire à celle présentée dans la section 3.2.2, le diagramme de la figure (3.6) peut être transformé en une forme mieux adaptée à la description des solutions du problème. La figure (3.7) illustre le schéma équivalent de la structure de commande des systèmes *LPV* incertains; où la dépendance paramétrique répétée du système

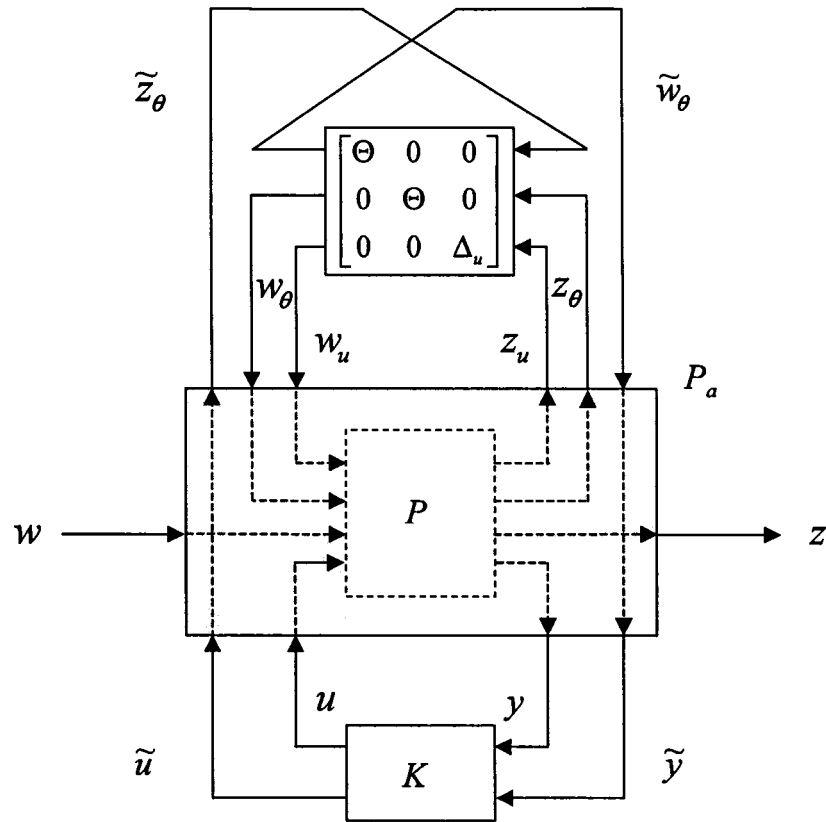


Figure 3.7 Structure équivalente de commande des systèmes *LPV* incertains

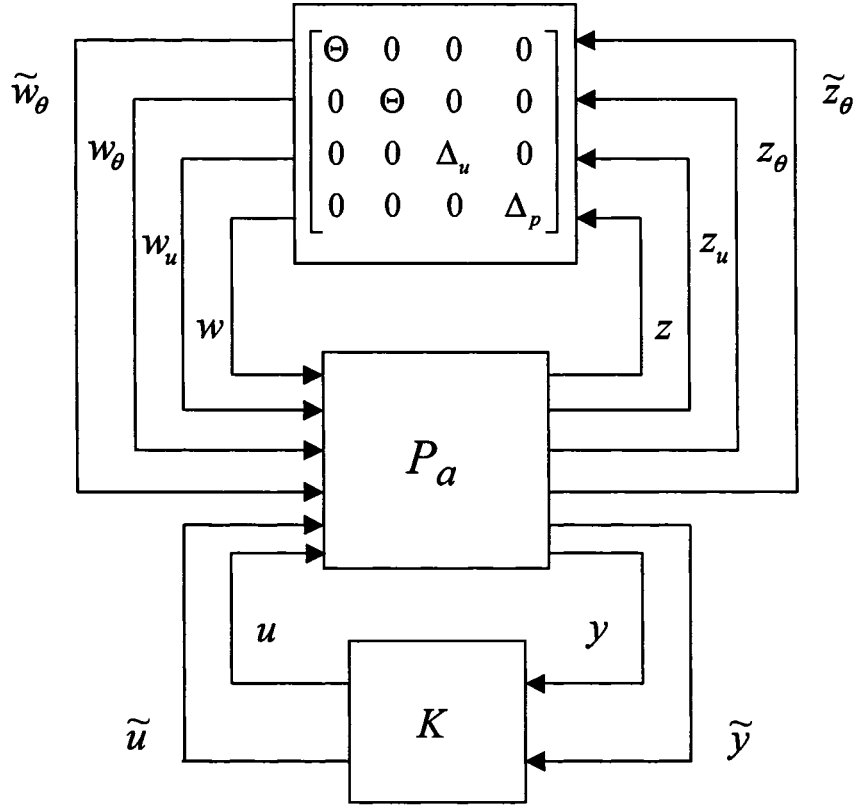
et du correcteur est augmentée par le bloc d'incertitudes stationnaires Δ_u , telle que :

$$\begin{bmatrix} \Theta & 0 & 0 \\ 0 & \Theta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta_u \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

dont l'ensemble de matrices de *scalings* associé est donné par :

$$\left\{ \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & L_u \end{bmatrix} > 0 : L \in L_{\Theta \oplus \Theta}, L_u \in L_{\Delta_u} \right\} \quad (3.58)$$

D'autre part, si le bloc Δ_u est typiquement dédié à la représentation des incertitudes de

Figure 3.8 Structure de commande LPV/μ

modèles, on associera également un autre bloc aux signaux de performances, noté Δ_p . On interprétera ainsi le problème de synthèse, comme celui de la recherche d'une loi de commande LPV assurant la **robustesse en performance**. Ceci est illustré par le schéma de la figure 3.8. L'ensemble de *scalings* associé est alors :

$$\left\{ \left[\begin{array}{c} L \\ 0 \end{array} \left(\begin{array}{cc} L_u & 0 \\ 0 & L_p \end{array} \right) \right] > 0 : L \in L_{\Theta \oplus \Theta}, \left(\begin{array}{cc} L_u & 0 \\ 0 & L_p \end{array} \right) \in L_{\Delta_u \oplus \Delta_p}, \right\} \quad (3.59)$$

Une analyse basée sur la théorie du petit gain, [14], fournit la condition suffisante de

robustesse en performance :

$$\left\| \left[\begin{array}{cc} L^{1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \begin{pmatrix} L_u & 0 \\ 0 & L_p \end{pmatrix} \end{array} \right] \mathcal{F}_l(P_a(s), K(s)) \left[\begin{array}{cc} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \begin{pmatrix} L_u & 0 \\ 0 & L_p \end{pmatrix}^{-1} \end{array} \right] \right\|_{\infty} < 1$$

pour toute perturbation, $\Delta = \text{diag}(\Delta_u, \Delta_p)$, dont la norme \mathcal{H}_{∞} est bornée par $1/\gamma$.

Bien sûr, la condition ci-dessus n'est pas convexe par rapport à l'ensemble des variables K , L et $\text{diag}(L_u, L_p)$. Néanmoins, on pourra déterminer K et L en fixant $\text{diag}(L_u, L_p)$. Puis, en fixant K et L , on résout un problème d'optimisation de performance par rapport à $\text{diag}(L_u, L_p)$.

On en déduit donc une méthode itérative de calcul des correcteurs LPV robustes, fondée sur l'alternance des phases de synthèse et d'analyse de la robustesse. Il s'agit en fait d'une approche inspirée de la *D-K itération*, [6].

Algorithme 3.4.1. (Synthèse LPV robuste)

Etape 1) *Synthèse d'un correcteur LPV de type LFT*

- Résoudre le problème de minimisation de la valeur propre généralisée maximale, (3.47)-(3.51), pour trouver les matrices L_3 et J_3 .
- En déduire la matrice de **scalings** $L = \begin{bmatrix} L_1 & L_2 \\ L_2^T & L_3 \end{bmatrix} > 0$, solution unique de :

$$L \begin{bmatrix} 0 & N^T \\ I & J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^T & 0 \\ L_3 & I \end{bmatrix}$$

où M et N sont obtenues par décomposition de $(I - L_3 J_3)$ en valeurs singulières:

$$I - L_3 J_3 = (U \Sigma^{\frac{1}{2}})(V \Sigma^{\frac{1}{2}})^T = M N^T$$

- Résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\min \gamma / \left\| \left[\begin{array}{cc} L^{1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{array} \right] \mathcal{F}_l(P_a(s), K(s)) \left[\begin{array}{cc} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\gamma}} I \end{array} \right] \right\|_{\infty} < 1$$

pour obtenir un correcteur K .

Etape 2) Analyse de la robustesse

- Pour K et L fixés, construire le modèle d'analyse, \tilde{T}_{zw} , tel que :

$$\tilde{T}_{zw} = \left[\begin{array}{cc} L^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{array} \right] \mathcal{F}_l(P_a(s), K(s)) \left[\begin{array}{cc} L^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{array} \right]$$

- Calculer, à différentes fréquences ω , les scalaires m_{Θ} et les matrices M_{Δ_u} et M_{Δ_p} minimisant la quantité $\bar{\mu}$ donnée par :

$$\bar{\mu} = \left\| \left[\begin{array}{cc} m_{\Theta} I & 0 \\ 0 & \left(\begin{array}{cc} M_{\Delta_u} & 0 \\ 0 & M_{\Delta_p} \end{array} \right) \end{array} \right] \tilde{T}_{zw} \left[\begin{array}{cc} m_{\Theta} I & 0 \\ 0 & \left(\begin{array}{cc} M_{\Delta_u} & 0 \\ 0 & M_{\Delta_p} \end{array} \right) \end{array} \right]^{-1} \right\|_{\infty}$$

- Normaliser m_{Θ} et $\text{diag}(M_{\Delta_u}, M_{\Delta_p})$ par m_{Θ} puis obtenir $\text{diag}(L_u, L_p)$ par interpolation des fonctions de transfert normalisées M_{Δ_u} et M_{Δ_p} .
- Intégrer les matrices de *scalings* L_u et L_p au modèle initial $P(s)$, tel que :

$$P(s) \rightarrow \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & L_u & 0 \\ 0 & 0 & L_p \end{array} \right] P(s) \left[\begin{array}{ccc} I & 0 & 0 \\ 0 & L_u^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & L_p^{-1} \end{array} \right]$$

- Répétez les étapes 1) et 2) jusqu'à ce que la quantité $\bar{\mu}$ ne décroît plus.

Il est important de remarquer que la convergence de cet algorithme n'est pas garantie. Néanmoins, on peut s'attendre à un comportement proche de celui que l'on observe en μ -synthèse. De plus, il reprend le même principe de la *D-K itération* qui consiste à alterner

les deux problèmes 1) et 2) ci-dessus avec une étape supplémentaire pour le calcul de *scalings* constants, nécessaires pour la synthèse du correcteur.

Comme dans la μ -synthèse, après chaque étape d'analyse, les opérateurs de *scalings* dynamiques sont intégrés au modèle de synthèse, ce qui a tendance à générer des correcteurs d'ordre relativement élevé. Il est donc indispensable d'avoir recours à des méthodes de réduction d'ordre. Par ailleurs, l'algorithme de synthèse (3.4.1) présenté ci-dessus, correspond au cas des incertitudes purement complexes.

Notons que les résultats développés dans ce chapitre feront l'objet d'une application complète au pilotage longitudinal d'un avion de chasse, sur un domaine de vol étendu (cf. chapitre 5).