

## CHAPITRE 1

### BASES THÉORIQUES

#### 1.1 Électrostatique

Bien que la connaissance des phénomènes électrostatiques ait été connue dès l'antiquité, il a fallu attendre la fin du 18<sup>ième</sup> siècle pour avoir une quantification des phénomènes.

##### 1.1.1 Loi de Coulomb

Entre 1785 et 1791, Charles-Augustin de Coulomb établit la loi pour calculer la force électrostatique existant entre deux charges  $q$  et  $q'$  :

$$\vec{F} = \frac{q \cdot q'}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \vec{u} \quad (1.1)$$

où  $\vec{F}$  désigne le vecteur force en Newton,  $q$  et  $q'$  deux charges en Coulomb,  $r$  la distance entre les charges en mètre,  $\vec{u}$  le vecteur unitaire dirigé d'une charge vers une autre et  $\epsilon$  est la permittivité du milieu en Farad/mètre.

##### 1.1.2 Champ et potentiel électrique

De l'équation (1.1), naissent les notions de champ et potentiel électrique. Le champ électrique pour une charge ponctuelle  $q$ , en un point  $M$  est donné par :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot r^2} \vec{u} \quad (1.2)$$

Le vecteur champ électrique  $\vec{E}$  en un point  $M$  est exprimé en Volt/mètre,  $r$  est la distance entre la charge et le point  $M$  et  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire dirigé de la charge vers le point  $M$ .

Le potentiel est le champ scalaire  $V$  sous jacent au champ électrique tel que :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (1.3)$$

Le potentiel électrique  $V$  est une grandeur scalaire exprimée en Volt.

### 1.1.3 Induction électrique

Si l'on place un matériau diélectrique dans un milieu où existe un champ électrique, il en résultera un changement de celui-ci. Pour obtenir une grandeur qui ne dépende plus que de la charge et de la position, on définit le vecteur "induction électrique" comme suit :

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{q}{4.\pi.r^2} . \vec{u} \quad (1.4)$$

où  $\vec{D}$  s'exprime en  $C/m^2$ .

### 1.1.4 Flux électrostatique

Par définition, le flux induit par un champ de vecteur  $\vec{D}$  à travers une surface  $S$  est donné par la relation suivante :

$$\varphi_s = \oiint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} \quad (1.5)$$

où  $\vec{dS}$  est le vecteur normal à l'élément de surface  $S$  au point courant.

Prenons le cas d'une charge  $q$  placée au centre d'une sphère de surface  $S$  et calculons le flux du vecteur induction électrique. La charge étant au centre et à égale distance de chaque point de la surface  $S$  de la sphère, il s'ensuit que le vecteur induction électrique est constant sur la surface et de même direction que la normale  $\vec{dS}$  d'où :

$$\begin{aligned} \vec{E} \text{ et } d\vec{S} \text{ de même direction} &\Rightarrow \vec{D} \cdot d\vec{S} = \|\vec{D}\| \|d\vec{S}\| \cos(\vec{D}, d\vec{S}) = \|\vec{D}\| \|d\vec{S}\| \\ \varphi = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \oiint_S \|\vec{D}\| \|d\vec{S}\| = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \cdot \underbrace{4 \cdot \pi \cdot r^2}_{\text{Surf Sphère}} = q \end{aligned} \quad (1.6)$$

Le flux électrostatique total induit est indépendant du rayon de la sphère.

### 1.1.5 Théorème de Gauss

Le résultat (1.6) a été étendu par Gauss, qui stipule que le flux du vecteur induction électrique  $\vec{D}$  à travers une surface fermée  $S$ , est égal à la somme des charges intérieures.

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_S q \quad (1.7)$$

Cette relation simplifie le calcul du champ électrique car elle permet de tenir compte de la symétrie existante dans certains problèmes. Si on fait tendre la surface  $S$  vers 0 alors on obtient la forme locale du théorème de Gauss, soit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho \quad (1.8)$$

où  $\rho$  désigne la densité de charge volumique en  $C/m^3$ .

### 1.1.6 Équations de Maxwell

Au 19<sup>ième</sup> siècle, Maxwell regroupe les lois trouvées par ses prédécesseurs et les exprime sous forme différentielle. Nous en énoncerons deux. La première loi est l'expression locale du théorème de Gauss. Quant à la seconde elle exprime la conservation de la charge. Ces deux expressions, dans le vide, sont données par :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (1.9)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \text{div}(\vec{J}(t)) + \frac{\partial \rho_{\text{libre}}}{\partial t} \quad (1.10)$$

où  $\vec{J}$  désigne le vecteur densité de courant en  $A/m^2$ ,  $\rho_{\text{libre}}$  la densité surfacique de charge libres en  $A/m^2$  et  $\rho$  désigne la densité volumique de charge en  $C/m^3$  et  $\vec{H}$  le vecteur champ magnétique en l'absence de matériau.

## 1.2 Diélectrique

### 1.2.1 Permittivité relative

Dans l'expression de la force électrostatique donnée en (1.1), celle-ci dépendait de  $\epsilon$  qui est définie comme une propriété du milieu, et sa valeur dépend du système d'unités. Pour éviter cette dépendance, on exprime généralement la permittivité d'un matériau par rapport à la permittivité du vide. De cette façon la permittivité d'un matériau s'exprime comme suit :

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (1.11)$$

Le terme  $\epsilon_0$  désigne la permittivité du vide en  $F/m$  et  $\epsilon_r$  est la permittivité relative, une quantité sans dimension. Comme la permittivité relative ne dépend pas du système d'unités, elle est plus pratique à utiliser. En général on parle de permittivité en faisant allusion à la permittivité relative, mais aucune confusion n'est possible sachant que l'ordre de grandeur de  $\epsilon$  est de  $10^{-10}$  F/m, alors que celui de  $\epsilon_r$  est supérieur à 1.

### 1.2.2 Polarisation

Lorsque soumis à un champ électrique, les électrons et atomes ont tendance à se déplacer légèrement de leur position d'équilibre, donnant lieu à une situation où des charges de signes opposées ( $-q$  et  $+q$ ) sont séparées par une petite distance  $d$ .

On définit le moment dipolaire comme suit :

$$\vec{p} = qd\vec{u} \quad (1.12)$$

où  $q$  est la charge,  $d$  la distance entre les charges de signes opposées,  $\vec{u}$  le vecteur unitaire dirigé d'une charge vers l'autre et  $\vec{p}$  le moment dipolaire ou de polarisation.

Au niveau macroscopique la polarisation  $\vec{P}$  volumique, est vue comme étant la contribution des dipôles élémentaires par unité de volume.

$$\vec{P} = N \cdot \vec{p} \quad (1.13)$$

où  $\vec{p}$  représente le moment dipolaire moyen et  $N$  la densité moléculaire.

Dorénavant on parlera de la polarisation, pour désigner la polarisation volumique.

Lorsque le matériau est linéaire et isotrope, ce qui revient à dire que la polarisation est proportionnelle au champ et indépendante de la direction de celui ci, on a la relation locale suivante :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \quad (1.14)$$

où  $\chi$  est une quantité sans dimension appelée susceptibilité électrique. Elle informe sur la capacité du matériau à se polariser.

L'induction diélectrique dans le diélectrique est donné par :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 \underbrace{(1 + \chi)}_{\epsilon_r} \vec{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (1.15)$$

où  $\epsilon_r$  désigne la permittivité électrique relative.

### 1.2.3 Capacité

On définit la capacité  $C$  d'un diélectrique comme le rapport entre la charge  $Q$  accumulée entre les électrodes et la différence de potentiel  $U$  entre les électrodes.

$$C = \frac{Q}{U} \quad (1.16)$$

$C$  s'exprime en F

La valeur de la capacité lorsque le diélectrique est remplacé par du vide est appelée capacité géométrique ou capacité sous vide. La relation entre la permittivité relative et la capacité est donnée par l'expression suivante :

$$C = \epsilon_r C_0 \quad (1.17)$$

où  $C_0$  désigne la capacité géométrique en F/m.

### 1.2.4 Mécanismes de polarisation

La matière est composée de molécules qui sont des arrangements d'atomes. Ceux ci sont à leur tour composés de protons entourés d'un nuage d'électrons. Lors de l'application d'un champ électrique, la polarisation résulte de la superposition de trois mécanismes, tel qu'illustré dans la figure 1 [1].

**Polarisation électronique.** Elle est le résultat de la déformation du nuage électronique, résultante de l'équilibre entre la force électrostatique que subissent les électrons en présence du champ électrique et les forces de liaison. Ce type de polarisation se produit presque instantanément et de ce fait épouse parfaitement toute variation du champ électrique.

Polarisation moléculaire. Lorsque les molécules qui composent le matériau sollicité ne présentent pas de symétrie au niveau de leur structure moléculaire, c'est-à-dire que le barycentre des charges positives et des charges négatives ne coïncident pas, on observe un couple de force qui tendra à aligner le dipôle ainsi formé dans une situation d'équilibre où il minimise son énergie potentielle. Ce type de polarisation est plus lent que la polarisation électronique et possède une constante de temps caractéristique qui dépend du matériau considéré.

Polarisation interfaciale. Lorsque deux matériaux de permittivité et conductivité différentes sont en contact, les charges libres se concentrent aux interfaces. Dans le cas du transformateur, la contribution la plus importante est celle provenant de l'accumulation des porteurs de charge libres de l'huile aux interfaces avec le papier, sous l'effet du champ électrique.

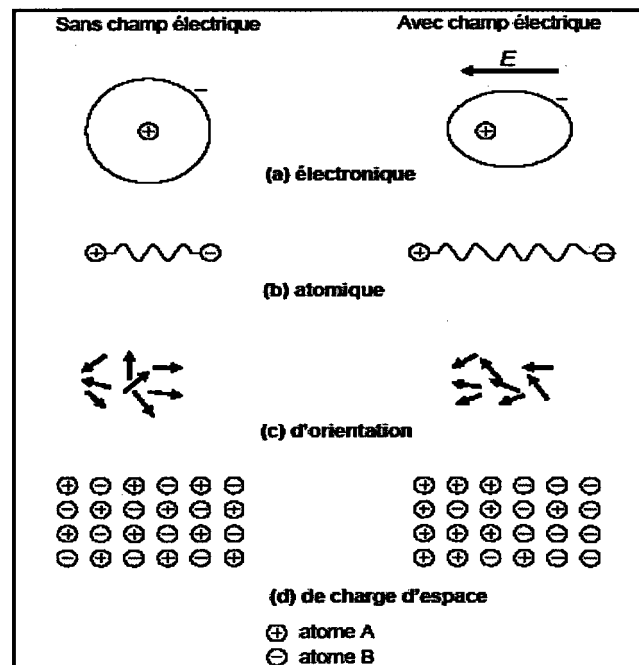


Figure 1 Les différents types de mécanismes de polarisation [1]

On retiendra, que de tous les phénomènes ci-dessus, la polarisation interfaciale et la polarisation d'orientation restent les plus intéressants à étudier car ils se produisent sur une grande plage de fréquence et sont influencés par l'arrangement de la matière dans le matériau.

### 1.3 Expression analytique de la densité de courant

Auparavant, nous rappellerons deux résultats d'analyse vectorielle.

En premier lieu, nous énoncerons l'une des formules de Leibniz pour les produits.

$$\operatorname{div} \frac{\vec{P}}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{P} + \vec{\nabla} \frac{1}{r} \cdot \vec{P} \quad (1.18)$$

En second lieu, nous énoncerons le théorème de la divergence.

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{P}) d\Omega = \iint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (1.19)$$

où  $\Gamma$  est la surface limitant le volume  $\Omega$  et le vecteur  $d\vec{S}$ , est le vecteur normale à la surface  $\Gamma$ .

Le potentiel  $dV$  créé par un petit volume de dipôles  $dv$  en un point  $M$  s'écrit :

$$dV_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P} \cdot \vec{u}}{r^2} dv \quad (1.20)$$

où  $\vec{u}$  est le vecteur dirigé du centre du volume  $dv$  vers le point  $M$ ,  $r$  la distance entre le centre du dipôle et le point  $M$  et  $\vec{P}$  la polarisation.

Soit un volume  $\Omega$  délimité par une surface fermée  $\Gamma$ . La contribution de tous les dipôles du volume  $\Omega$  en un point  $M$  de sa surface  $\Gamma$  est donnée par :

$$V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \vec{P} \cdot \frac{\vec{u}}{r^2} dv \quad (1.21)$$



où  $\vec{P}$  est le vecteur polarisation volumique tel que défini par (1.14),  $r$  la distance entre le point d'intégration courant et le point  $M$  et  $\vec{u}$  le vecteur unitaire dirigé du point d'intégration courant vers le point  $M$ . D'après les formules de calcul différentiel on a :

$$\nabla \frac{1}{r} = -\frac{\vec{u}}{r^2} \quad (1.22)$$

D'après (1.22), on peut écrire (1.21) sous la forme :

$$V_M = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} dv \quad (1.23)$$

En utilisant la relation (1.18), on peut écrire que :

$$\vec{P} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r} = \operatorname{div} \frac{\vec{P}}{r} - \frac{1}{r} \operatorname{div} \vec{P} \quad (1.24)$$

En remplaçant le résultat de (1.24) dans (1.23), on obtient :

$$V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \frac{\vec{P}}{r} dv \right] - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} \operatorname{div}(\vec{P}) dv \quad (1.25)$$

En utilisant le résultat (1.19) pour l'expression entre crochets, dans (1.25), on obtient :

$$V_M = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oiint_{\Gamma} \frac{1}{r} (\vec{P} \cdot d\vec{S}) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\Omega} \frac{1}{r} (\operatorname{div}(\vec{P})) dv \quad (1.26)$$

Le potentiel de la distribution volumique de dipôles est équivalente au potentiel créé par :

- La surface  $\Gamma$  entourant le volume  $\Omega$ , chargée avec  $\vec{P} \cdot d\vec{S}$ .
- Le volume  $\Omega$  chargé avec  $-\operatorname{div}(\vec{P})$ .

Appliquons la loi de Gauss locale à la surface  $\Gamma$  enveloppant  $\Omega$ , qui se trouve être l'interface entre le diélectrique et les électrodes. On obtiendrait comme résultat que la densité volumique de charge due à la polarisation et au champ électrique est égale à la densité volumique de charge sur l'électrode. Ce qui se traduit par la relation suivante :

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E}) + \operatorname{div}(\vec{P}) = \rho_{\text{électrode}} \quad (1.27)$$

Comme les électrodes sont un élément conducteur, le champ électrique à l'intérieur est nul. Il s'ensuit que la densité de charge volumique des électrodes se résume à la densité surfacique de charge libre sur l'électrode. Nous obtenons alors :

$$\rho_{\text{électrodes}} = \rho_{\text{libre}} \quad (1.28)$$

En combinant les relations (1.27) et (1.28), nous obtenons :

$$\operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{libre}} \quad (1.29)$$

Nous avons ainsi établi une première relation entre la polarisation, propriété du matériau, et la densité de charge libre qui est lié à la notion de courant. Relation que nous allons expliciter par la suite.

Appliquons la relation de Maxwell (1.9) avec (1.29) on obtient :

$$\left. \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{J}) = -\frac{\partial \rho_{\text{libre}}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_{\text{libre}} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{J} = -\frac{\partial}{\partial t} [\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}] \quad (1.30)$$

Pour déduire la densité de courant totale, on doit tenir compte aussi de la densité de courant reliée aux charges mobiles dans le diélectrique. Si nous la supposons proportionnelle au champ électrique cela se traduit par la relation suivante :

$$\vec{J}_{\text{mobile}}(t) = \sigma \vec{E}(t) \quad (1.31)$$

où  $\sigma$  désigne la conductivité en S/m.

En additionnant les contributions de (1.30) et (1.31) on a :

$$\vec{J}_{\text{totale}}(t) = \sigma \vec{E}(t) + \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_0 \vec{E}(t) + \vec{P}(t)] \quad (1.32)$$

On obtient donc une relation liant les caractéristiques du diélectrique à la densité de courant. Dans le cas où l'électrode entoure complètement le diélectrique à travers une surface S on peut écrire :

$$i = \oiint_{\text{Surface}} \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (1.33)$$

où  $i$  est le courant électrique en A

Les équations (1.32) et (1.33) donnent alors :

$$i = \oiint_{\text{Surface}} \left( \sigma \vec{E}(t) + \frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_0 \vec{E}(t) + \vec{P}(t)] \right) \cdot d\vec{S} \quad (1.34)$$

Cette relation sert comme point de départ à une multitude de théories et de modèles. Dans ce qui suit nous abordons le modèle linéaire à cause de ses implications pratiques pour notre projet et son grand champ d'application.