

CHAPITRE 3

PARAMÈTRES DE CONCEPTION DES FILTRES CIC DÉCIMATEURS

3.1 Introduction

Comme indiqué dans les chapitres précédents, la structure des filtres CIC a été présentée en 1981 par Hogenauer [7]. Actuellement, des récepteurs numériques commerciaux utilisent cette structure. Cependant, l'implémentation des filtres CIC décimateurs demande l'analyse de plusieurs aspects. Ainsi, dans ce chapitre, la structure du filtre CIC décimateur et les différents aspects à prendre en considération durant l'implémentation sont présentés en détail.

3.2 Description et analyse mathématique du filtre CIC décimateur

La structure des filtres CIC décimateurs telle que proposée par Hogenauer est présentée à la figure 24. Le filtre est constitué de N intégrateurs et de N différentiateurs séparés par un facteur de décimation R . Les données arrivent à la fréquence d'échantillonnage f_s et sont traitées par les intégrateurs. Ceci veut dire que les intégrateurs fonctionnent à la fréquence f_s . Le facteur de décimation R permet de choisir une sortie sur R du dernier intégrateur qui sera traitée par les différentiateurs. Ceci veut dire que les différentiateurs fonctionnent à la fréquence $\frac{f_s}{R}$. Donc, la fréquence d'échantillonnage à la sortie du filtre CIC décimateur est réduite et est égale à $\frac{f_s}{R}$.

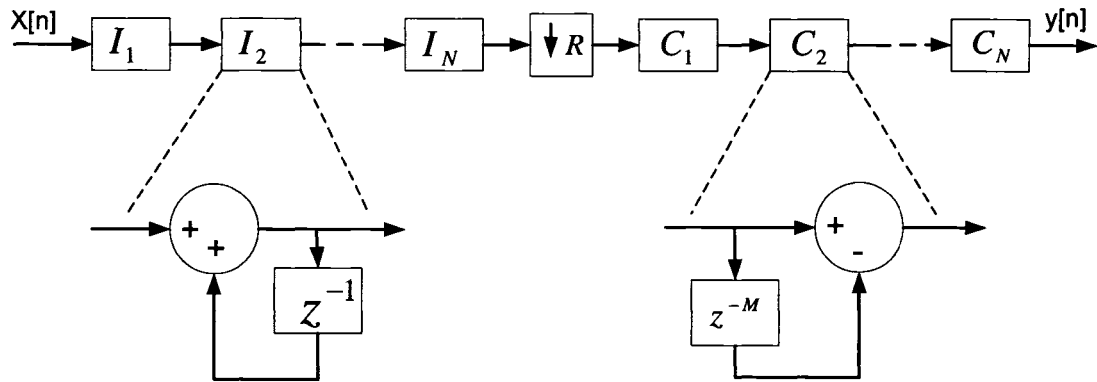


Figure 24 Structure du filtre CIC décimateur d'ordre N

La fonction de transfert de cette structure est donnée par :

$$H(z) = \left(\frac{1 - Z^{-RM}}{1 - Z^{-1}} \right)^N \quad (3.1)$$

Cette implémentation utilise $2N$ additionneurs et $4N + 2$ registres : il y a un additionneur dans chaque étage, deux registres sont donc utilisés pour les deux entrées de chaque additionneur et deux registres additionnels pour les sorties de l'intégrateur et du différentiateur. Ce nombre de calcul est très minime comparé aux autres structures de réalisation de filtre à décimation.

3.3 Analyse fréquentielle du filtre CIC décimateur

Analysons le filtre CIC décimateur dans le domaine fréquentiel. Posons $x_1(n)$ la sortie du $N^{ième}$ intégrateur et $x_2(n)$ la sortie de la décimation c'est-à-dire l'entrée du premier différentiateur. Si la transformée de Fourier de $x(n)$ est $X(w)$, alors $x_1(n)$ dans le domaine fréquentiel est donné par :

$$X_1(w) = \left(\frac{1}{1 - e^{-jw}} \right)^N \cdot X(w) \quad (3.2)$$

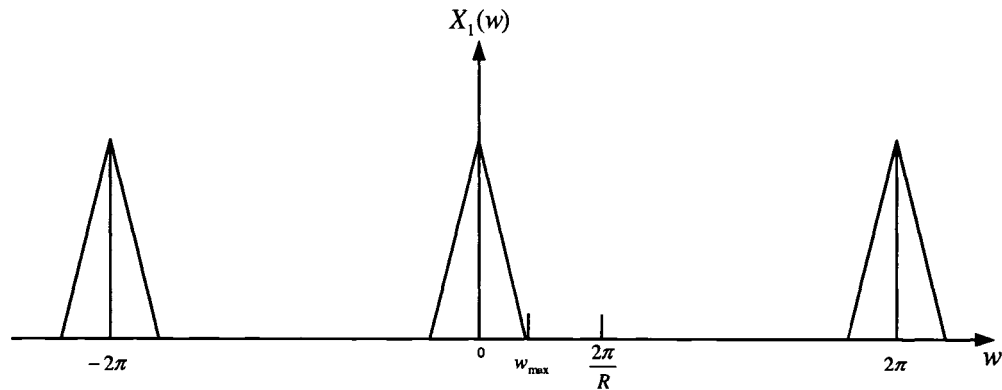
$x_2(n)$ est donné par

$$\begin{aligned} X_2(w) &= \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{R-1} X_1\left(\frac{w - k \cdot 2\pi}{R}\right) \\ &= \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{R-1} \left[\left(\frac{1}{1 - e^{-j\left(\frac{w - k \cdot 2\pi}{R}\right)}} \right)^N \cdot X\left(\frac{w - k \cdot 2\pi}{R}\right) \right] \\ &= \frac{1}{R} \left\{ \left[\frac{1}{1 - e^{-j\left(\frac{w}{R}\right)}} \right]^N \cdot X\left(\frac{w}{R}\right) + \left[\frac{1}{1 - e^{-j\left(\frac{w - 2\pi}{R}\right)}} \right]^N \cdot X\left(\frac{w - 2\pi}{R}\right) + \dots \right\} \quad (3.3) \end{aligned}$$

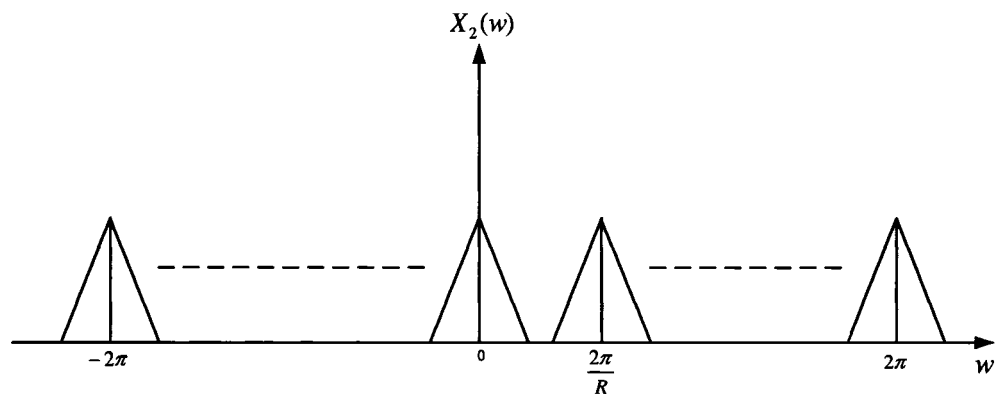
Si $X(w) = 0$ quand $w > \frac{\pi}{R}$ ou $2w_{\max} < \frac{2\pi}{R}$, $w \in \left[-\frac{\pi}{R}, \frac{\pi}{R}\right]$, alors l'équation (3.3) peut se simplifier pour s'écrire comme suit :

$$X_2(w) = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{1 - e^{-j\frac{w}{R}}} \right)^N \cdot X\left(\frac{w}{R}\right) \quad (3.4)$$

L'équation (3.4) montre qu'à part le premier terme, les autres termes ne contribuent pas dans le calcul de $X_2(w)$ dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{R}, \frac{\pi}{R}\right]$. Ceci est bien illustré par la figure



(a) Spectre du signal d'entrée



(b) Spectre du signal de sortie après décimation

Figure 25 Comparaison du spectre du signal avant et après décimation

La figure 25 montre qu'il est important, dans un filtre à décimation, d'éliminer les composantes hautes fréquences du signal d'entrée pour éviter qu'il y ait des chevauchements. Ceci veut dire qu'il faut que la fréquence maximale w_{\max} du signal d'entrée soit inférieure à $\frac{\pi}{R}$ (théorème de Nyquist). Dans un filtre CIC décimateur, cette élimination de composantes en hautes fréquences du signal d'entrée est réalisée par les intégrateurs et plus leur nombre augmente plus l'atténuation est grande. Si le nombre

d'intégrateur N est assez grand, alors la simplification de l'équation (3.3) est applicable dans le cadre des filtres CIC. Cependant, les intégrateurs du filtre CIC ne sont pas stables d'où l'amplification des composantes en basse fréquence. Mais, comme un filtre CIC n'est rien d'autres que des filtres FIR en cascade, alors il est stable. Ceci est expliqué par le fait que l'étage de différentiateur ait une structure de filtre passe haut ce qui lui permet d'atténuer les composantes en basse fréquence d'où la stabilité du filtre CIC [7].

Calculons maintenant la réponse en fréquence du filtre CIC au complet :

$$\begin{aligned}
 Y(w) &= (1 - e^{-jw})^N \cdot X_2(w) \\
 &= \frac{1}{R} \frac{(1 - e^{-jw})^N}{\left(1 - e^{-j\frac{w}{R}}\right)^N} \cdot X\left(\frac{w}{R}\right) \\
 &= \frac{1}{R} \left[\frac{e^{-j\frac{w}{2}} \left(e^{j\frac{w}{2}} - e^{-j\frac{w}{2}}\right)}{e^{-j\frac{w}{2R}} \left(e^{j\frac{w}{2R}} - e^{-j\frac{w}{2R}}\right)} \right]^N \cdot X\left(\frac{w}{R}\right) \\
 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\sin \frac{w}{2}}{\sin \frac{w}{2R}} \cdot e^{-jw \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2R}\right)} \right)^N \cdot X\left(\frac{w}{R}\right) \\
 &= \frac{1}{R} \left(\frac{\sin \frac{w}{2}}{\sin \frac{w}{2R}} \right)^N \cdot e^{-jN \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2R}\right)w} \cdot X\left(\frac{w}{R}\right) \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

L'équation (3.5) montre bien la réponse en amplitude et en phase du CIC au complet. En augmentant l'ordre du filtre N , la réponse en fréquence de l'amplitude montre que l'atténuation dans la bande passante augmente. La réponse en amplitude d'un filtre CIC avec différents ordres est présentée à la figure 26.

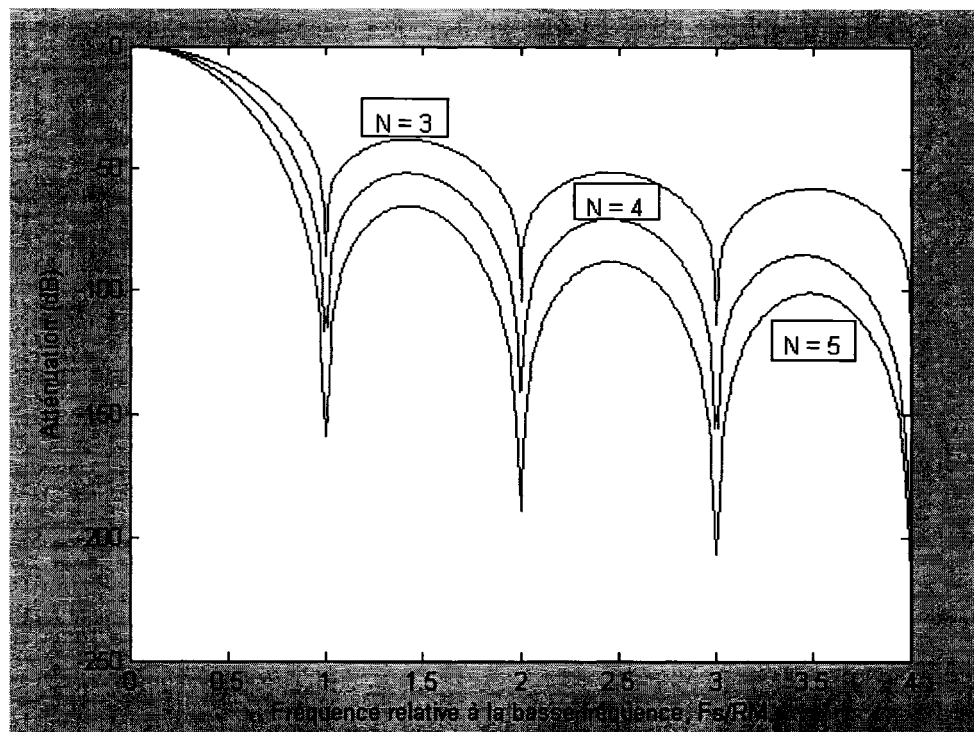


Figure 26 Réponse en amplitude du CIC avec différentes valeurs de N

La figure 26 montre que le filtre CIC décimateur est un filtre passe bas dans l'intervalle $[0, 1]$. Posons $[0, f_c]$ la bande passante et $[f_A, 1]$ la bande image/recouvrement qui a la même largeur que la bande passante (f_c est la fréquence de coupure relative à la basse fréquence). f_A est donné par [Hogenuer] : $f_A = 1 - f_c$. Ainsi, en augmentant l'ordre du filtre CIC, l'atténuation dans la bande image/recouvrement est meilleure mais la perte dans la bande passante augmente. Les tableaux IV et V présentent respectivement l'atténuation dans la bande passante et celle dans la bande image/recouvrement en

fonction de l'ordre du filtre [7]. Dans ces tableaux, il est considéré que le facteur de décimation est assez grand pour permettre la simplification de la réponse en amplitude du filtre CIC $P(f)$ de l'équation (3.6) [7],

$$P(f) = \left[\frac{\sin \pi M f}{\sin \frac{\pi f}{R}} \right]^{2N} \quad (3.6)$$

en $P_s(f)$ de l'équation (3.7)

$$P_s(f) = \left[RM \frac{\sin \pi M f}{\pi M f} \right]^{2N} \quad (3.7)$$

f est la fréquence relative à la basse fréquence et M le délai différentiel. L'erreur faite en simplifiant $P(f)$ par $P_s(f)$ est inférieure à 1 dB si $RM \geq 10$, $1 \leq N \leq 7$ et $0 \leq f \leq \frac{255}{256M}$ [7].

Tableau IV
Atténuation dans la bande passante

Largeur de bande relative à la basse fréquence (f_c)	L'atténuation (en dB) dans la bande passante à la fréquence (f_c) en fonction de l'ordre du filtre N					
	1	2	3	4	5	6
1/128	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01
1/64	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02
1/32	0.01	0.03	0.04	0.06	0.07	0.08

Tableau IV (suite)

Largeur de bande relative à la basse fréquence (f_c)	L'atténuation (en dB) dans la bande passante à la fréquence (f_c) en fonction de l'ordre du filtre N					
	1	2	3	4	5	6
1/16	0.06	0.11	0.17	0.22	0.28	0.34
1/8	0.22	0.45	0.67	0.90	1.12	1.35
1/4	0.91	1.82	2.74	3.65	4.56	5.47

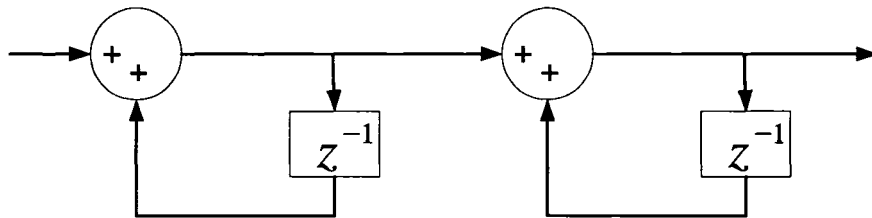
Tableau V

Atténuation dans la bande image/recouvrement

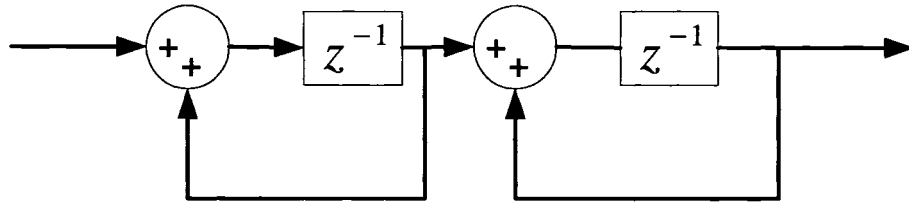
Délai différentiel (M)	Bande passante relative	Atténuation (en dB) dans la bande image/recouvrement à la fréquence f_A					
		1	2	3	4	5	6
1	1/128	42.1	84.2	126.2	168.3	210.4	252.5
1	1/64	36.0	72.0	108.0	144.0	180.0	215.9
1	1/32	29.8	59.7	89.5	119.4	149.2	179.0
1	1/16	23.6	47.2	70.7	94.3	117.9	141.5
1	1/8	17.1	34.3	51.4	68.5	85.6	102.8
1	1/4	10.5	20.9	31.4	41.8	52.3	62.7
2	1/256	48.1	96.3	144.4	192.5	240.7	288.8
2	1/128	42.1	84.2	126.2	168.3	210.4	252.5
2	1/64	36.0	72.0	108.0	144.0	180.0	216.0
2	1/32	29.9	59.8	89.6	119.5	149.4	179.3
2	1/16	23.7	47.5	71.2	95.0	118.7	142.5
2	1/8	17.8	35.6	53.4	71.3	89.1	106.9

3.4 Structure pipeline des intégrateurs

Pour augmenter le débit des filtres CIC décimateurs, le design doit être fait de façon à pouvoir utiliser une grande fréquence de fonctionnement. La fréquence maximale de fonctionnement est donnée par le délai maximal entre deux registres adjacents sensibles au même front d'horloge. Dans un filtre CIC décimateur, les intégrateurs fonctionnent à une fréquence R fois supérieure à celle des différentiateurs. Donc la fréquence de fonctionnement des intégrateurs donne la fréquence de fonctionnement du filtre CIC au complet. Ainsi, augmenter le débit d'un filtre CIC revient à augmenter la fréquence de fonctionnement des intégrateurs. La structure pipeline des intégrateurs, comparée à celle régulière présentée par Hogenauer, permet d'augmenter la fréquence de fonctionnement des intégrateurs. La figure 27 montre la structure régulière et pipeline des intégrateurs [8]. Il est intéressant de constater que la structure pipeline utilise les mêmes ressources matérielles que la structure régulière. Ceci veut dire que la structure pipeline des intégrateurs ne nécessite pas de registres additionnels. Ainsi, comme le délai entre deux registres adjacents détermine la fréquence maximale, alors plus il est court plus la fréquence est grande. Dans la structure régulière, il existe deux additionneurs entre deux registres adjacents alors qu'il en existe qu'un seul dans la structure pipeline d'où sa préférence par rapport à celle régulière. La structure pipeline n'est pas nécessaire dans la partie différentiateur du CIC car la fréquence est beaucoup plus basse comparée à celle des intégrateurs.



(a) structure régulière



(b) structure pipeline

Figure 27 Structure régulière et pipeline du CIC d'ordre 2

3.5 Augmentation de la largeur des registres sans troncation

Dans un filtre récursif idéal à pôle simple, l'addition de deux nombres binaires peut provoquer un débordement si la largeur binaire de la somme dépasse celle réservée dans l'implémentation du CIC. Étant donné que les N premiers étages d'un filtre CIC sont constitués d'intégrateurs avec des rétroactions unitaires, alors la largeur binaire de leur sortie peut augmenter sans limite si les données d'entrée sont statistiquement indépendantes. Ceci provoque du débordement dans les registres des intégrateurs qui peut être résolu en respectant les deux conditions suivantes [7] :

- Utiliser une arithmétique complément à deux ou une autre arithmétique qui permet le passage du plus grand nombre positif au plus grand nombre négatif.
- L'amplitude maximale utilisée pour tous les étages de calculs doit être supérieure ou égale à l'amplitude maximale à la sortie du filtre CIC au complet.

Si ces deux conditions sont réunies, alors le débordement dans les étages intermédiaires n'affecte pas les résultats finaux. Ceci est expliqué dans les sections suivantes.

3.5.1 Représentation en complément à deux

Une représentation ou codification d'un nombre est la façon selon laquelle il est décrit sous forme binaire. La représentation des nombres sur un ordinateur est indispensable pour que celui-ci puisse les stocker et les manipuler. Il s'agit donc de prédéfinir un nombre de bits et la manière de les utiliser pour que ceux-ci servent le plus efficacement possible à représenter l'entité. La représentation en complément à deux d'un nombre positif est obtenue en soustrayant de sa valeur absolue 2^n où n représente la largeur binaire du nombre. Ceci consiste, pratiquement, à inverser tous les bits du nombre positif et y ajouter 1. Le bit le plus significatif (le bit de signe) est 1, ce qui représente un nombre négatif. La figure 28 présente la sortie d'un compteur de 4 bits en représentation décimale non signée et sa conversion en complément à deux. Il faut remarquer que si la sortie de l'additionneur dépasse 7 en décimal, ceci crée un débordement dans la représentation en complément à deux. Ainsi, une troncation est effectuée en supprimant les bits qui sont au delà du MSB ce qui permet le passage entre le plus grand nombre positif et le plus grand nombre négatif.

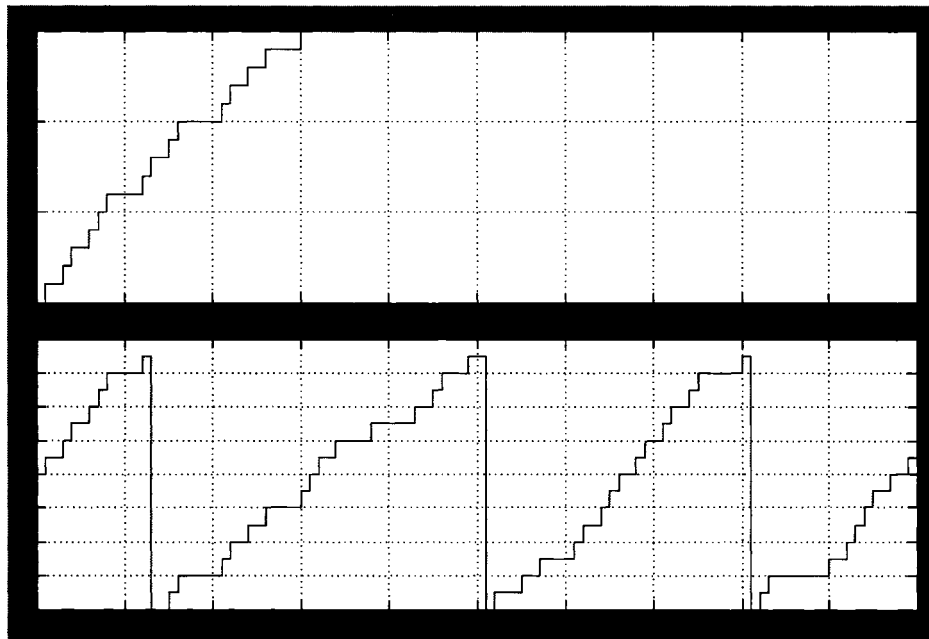


Figure 28 Sortie d'un compteur de 4 bits en décimal non signé et en complément à deux

3.5.2 Calcul de la largeur maximale des registres

La largeur maximale des registres se calcule en se basant sur le gain des intégrateurs. Ce calcul est très important dans l'implémentation d'un filtre CIC car il permet de trouver la largeur maximale des registres qui permet de négliger les débordements à l'intérieur des étages intermédiaires. Ceci sera expliqué plus tard.

Dans un filtre CIC décimateur, les intégrateurs fonctionnent à une fréquence R fois plus rapide que celle des différentiateurs. Ceci fait que chaque intégrateur a un gain de R . Alors, un CIC d'ordre N a un gain maximal G_{\max} qui est donné par [7] :

$$G_{\max} = R^N \quad (3.8)$$

Ainsi, si la largeur binaire du signal d'entrée est B_{in} , alors la largeur binaire maximale B_{max} , qu'il faut à la sortie du filtre, est donnée par [7] :

$$B_{max} = \lceil N \log_2 R + B_{in} \rceil \quad (3.9)$$

où le bit le moins significatif du signal d'entrée est le bit 0 de B_{max} et le résultat de l'opérateur $\lceil x \rceil$ est l'entier le plus petit mais pas inférieur à x lui-même .

L'équation (3.9) peut être utilisée pour calculer la largeur binaire maximale à la sortie du filtre CIC décimateur polyphasé. Si la largeur binaire du signal d'entrée est B_{in1} , alors la largeur binaire B_{max_FIR} à la sortie du FIR polyphasé est donné par :

$$B_{max_FIR} = \lceil N_1 \log_2 R_1 \rceil + B_{in1} \quad (3.10)$$

Comme la sortie du FIR polyphasé est l'entrée du CIC régulier, alors la largeur binaire à l'entrée du CIC régulier est B_{max_FIR} . La largeur maximale $B_{out_CIC_poly}$ à la sortie du CIC polyphasé est donné par :

$$B_{out_CIC_poly} = \lceil N_2 \log_2 (R_2 M) \rceil + B_{max_FIR} \quad (3.11)$$

Le deuxième facteur de décimation R_2 est égale à $\frac{R}{R_1}$. L'équation (3.11) devient alors :

$$\begin{aligned} B_{out_CIC_poly} &= \left\lceil N_2 \log_2 \left(\frac{R}{R_1} M \right) \right\rceil + B_{max_FIR} \\ &= \lceil N_2 (\log_2 (RM) - \log_2 (R_1)) \rceil + B_{max_FIR} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= [N_2(\log_2(RM) - \log_2(R_1))] + [N_1 \log_2 R_1] + B_{in1} \\
&= \underbrace{[N_2 \log_2 R] + B_{in1}}_{B_{max}} - ([N_2 \log_2 R_1] - [N_1 \log_2 R_1]) \quad (3.12)
\end{aligned}$$

L'équation (3.12) montre que la largeur maximale du CIC décimateur polyphasé est plus courte que celle du CIC régulier de $([N_2 \log_2 R_1] - [N_1 \log_2 R_1])$ bits. Ceci est dû, principalement, à la décimation multi-étage et sera expliqué plus tard. Cette réduction de la largeur des registres est très intéressante car elle augmente la vitesse des additionneurs et diminue la complexité.

3.5.3 Largeur des registres du CIC décimateur

La largeur maximale des registres d'un filtre CIC décimateur est strictement liée au facteur de décimation R et à l'ordre du filtre N . Une fois ces deux paramètres déterminés, le gain G_{max} est fixe. Ainsi, si $B_{max} - 1$ est le bit le plus significatif à la sortie du filtre, la largeur du registre à la sortie est suffisante. De ce fait, l'amplitude maximale utilisée pour tous les étages de calcul est supérieure à l'amplitude maximale à la sortie du filtre CIC au complet, ce qui est une des conditions à respecter. Ceci étant fait, si l'arithmétique complément à deux est utilisée, ce qui est la deuxième condition à respecter, alors le débordement dans les étages intermédiaires n'affecte pas les résultats à la sortie du filtre. La figure 29 présente le comportement de débordement dans un compteur binaire en complément à deux.

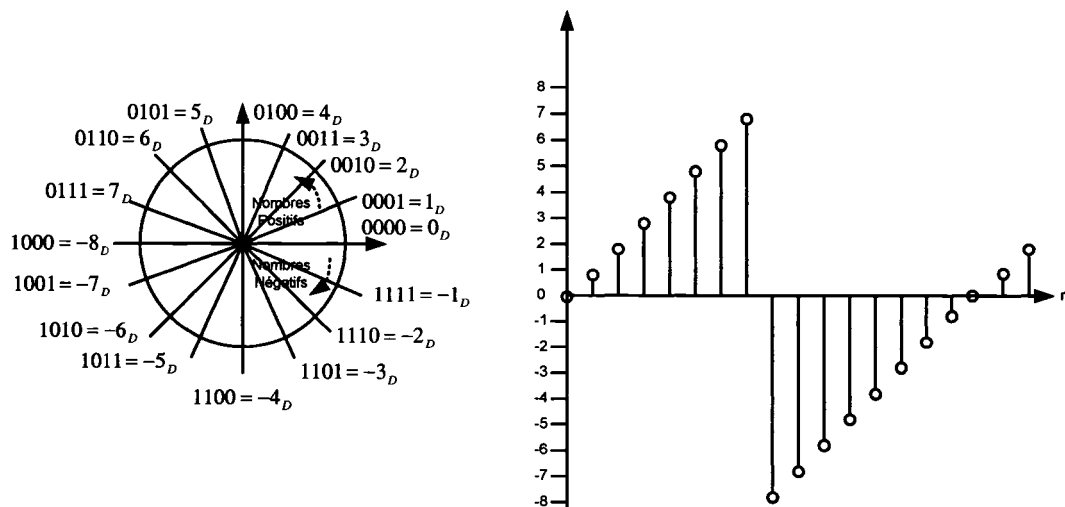


Figure 29 Comportement de débordement dans un compteur binaire en complément à deux

Le débordement est périodique. Il est intéressant de remarquer que la différence entre les points du compteur (sur le cercle) est correcte même si le compteur a subi des débordements. Comme exemple, examinons la réponse transitoire d'un filtre CIC décimateur avec un délai différentiel $M = 4$. Ici, le nombre 1 est ajouté à l'accumulateur à chaque coup d'horloge et le différentiateur qui suit l'accumulateur fait la différence entre l'entrée présente et celle formée il y a 4 coups d'horloge au paravent. La séquence de sortie est présentée au tableau VI, où nous pouvons observer que la sortie du différentiateur est correcte malgré le débordement dans l'accumulateur.

Donc, si l'accumulateur est suffisamment large et que le filtre CIC est implémenté avec une arithmétique complément à deux, alors la sortie du CIC ne sera pas affectée par les débordements dans les étages intermédiaires.

Tableau VI
Réponse transitoire d'un filtre CIC décimateur avec $M = 4$

X (n) voulu	X (n) Débordement	Opération	X (n-4) voulu	X (n-4) Débordement		Y (n) voulu	Y (n) débordement
0	0	-	0	0	=	0	0
1	1	-	0	0	=	1	1
2	2	-	0	0	=	2	2
3	3	-	0	0	=	3	3
4	4	-	0	0	=	4	4
5	5	-	1	1	=	4	4
6	6	-	2	2	=	4	4
7	7	-	3	3	=	4	4
8	-8	-	4	4	=	4	-12 = 4
9	-7	-	5	5	=	4	-12 = 4
10	-6	-	6	6	=	4	-12 = 4
11	-5	-	7	7	=	4	-12 = 4
12	-4	-	8	-8	=	4	4
15	-3	-	9	-7	=	4	4
14	-2	-	10	-6	=	4	4
15	-1	-	11	-5	=	4	4

3.6 Erreur de troncation ou d'arrondi

L'implémentation des filtres CIC décimateur exige que tous les registres aient la largeur binaire B_{\max} donnée par l'équation (3.9) pour que les débordements n'affectent pas le résultat final. Ainsi, la sortie du filtre a une largeur binaire égale à B_{\max} . Cependant, en

pratique, la largeur binaire de la sortie est prédéfinie par l'utilisateur et elle est en générale très inférieure à B_{\max} . Pour réduire cette largeur binaire B_{\max} à la largeur binaire spécifiée par l'utilisateur, la troncation ou l'arrondi est utilisée et ceci introduit de l'erreur qui va jouer sur la précision des résultats. La troncation ou l'arrondi peut être appliquée à l'entrée de chaque étage ce qui réduirait progressivement la largeur binaire. Dans ce cas, il y aura $2N + 1$ sources d'erreur de troncation ou d'arrondi qui vont contribuer à l'erreur observée à la sortie du filtre. Les $2N$ sources d'erreur proviennent des registres d'entrée de chaque étage et une source d'erreur de plus qui provient du registre à la sortie du filtre.

Pour calculer l'erreur produite par la troncation ou l'arrondi, supposons que les sources d'erreur produisent du bruit blanc qui est non corrélé avec le signal d'entrée et les autres sources d'erreur et que l'erreur à la source j a une probabilité de distribution uniforme. Il sera démontré plus tard que l'erreur statistique provoquée par la troncation ou par l'arrondi est la même à l'exception des registres d'entrée et de sortie. Étant donné que la troncation est plus facile à implémenter, elle est utilisée pour le calcul de l'erreur.

L'erreur introduite par la $j^{\text{ième}}$ source est donnée par :

$$E_j = 2^{B_j} \quad (3.13)$$

avec B_j le nombre de LSB supprimés à la $j^{\text{ième}}$ source. Comme l'erreur a une distribution uniforme, alors sa moyenne est donnée par :

$$\mu_j = \frac{1}{2} E_j \quad (3.14)$$

et la variance donnée par :

$$\sigma_j^2 = \frac{1}{12} E_j^2 \quad (3.15)$$

Dans un filtre CIC d'ordre N , le nombre de sources d'erreur est égale à $2N + 1$ et la j^{ieme} source d'erreur se propage à partir du j^{ieme} étage jusqu'au dernier étage de différentiateur. Ainsi, pour connaître la contribution de cette source d'erreur à l'erreur totale observée à la sortie du filtre, il faut calculer la fonction de transfert du filtre CIC à partir du j^{ieme} étage jusqu'au dernier étage de différentiateur. Cependant, il existe deux plages de calculs possibles pour cette fonction de transfert. La première plage est $[1, N]$ et la deuxième $[N + 1, 2N]$.

Dans la première plage, la fonction de transfert est donnée par [7] :

$$H_j(z) = H_I^{N-j+1} H_C^N = \sum_{k=0}^{(RM-1)N+j-1} h_j(k) z^{-k}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.16)$$

Une autre façon d'écrire cette fonction de transfert est d'utiliser l'expansion binomiale des termes de l'étage intégrateur et l'étage différentiateur :

$$H_j(z) = \left[\sum_{l=0}^N (-1)^l \binom{N}{l} z^{-RMl} \right] \left[\sum_{v=0}^{\infty} \binom{N-j+v}{v} z^{-v} \right] \quad (3.17)$$

Le produit des deux termes de l'équation (3.17) donne :

$$H_j(z) = \sum_{l=0}^N \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^l \binom{N}{l} \binom{N-j+v}{v} z^{-(RMl+v)} \quad (3.18)$$

En posant $k = Rl + v$, avec l un entier dans l'intervalle $[0, \frac{k}{RM}]$, l'équation (3.18) devient :

$$H_j(z) = \sum_{k \geq 0} \left[\sum_{l=0}^{\lfloor k/RM \rfloor} (-1)^l \binom{N}{l} \binom{N-j+k-RlM}{k-RlM} \right] z^{-k} \quad (3.19)$$

En comparant les équations (3.19) et (3.16), $h_j(k)$ est donné par :

$$H_j(k) = \sum_{l=0}^{\lfloor k/RM \rfloor} (-1)^l \binom{N}{l} \binom{N-j+k-RlM}{k-RlM} \quad (3.20)$$

Dans la deuxième plage, la fonction de transfert est donnée par :

$$H_j(z) = H_C^{2N+1-j} = (1 - z^{-RM})^{2N+1-j}, \quad j = N+1, \dots, 2N \quad (3.21)$$

En faisant, une expansion binomiale, l'équation (3.21) devient :

$$H_j(z) = \sum_{k=0}^{2N+1-j} h_j(k) z^{-kRM}, \quad j = N+1, \dots, 2N \quad (3.22)$$

avec $h_j(k)$ qui est donné par l'équation (3.23) :

$$h_j(k) = (-1)^k \binom{2N+1-j}{k}, \quad j = N+1, \dots, 2N \quad (3.23)$$

Ainsi, en résumé, la fonction de transfert du j^{ieme} étage jusqu'au dernier étage de différentiateur est donné par :

$$H_j(z) = \begin{cases} H_I^{N-j+1} H_C^N = \sum_{k=0}^{(RM-1)N+j-1} h_j(k) z^{-k}, & j = 1, 2, \dots, N \\ H_C^{j-N} = \sum_{k=0}^{2N+1-j} h_j(k) z^{-kRM}, & j = N+1, \dots, 2N \end{cases} \quad (3.24)$$

avec

$$h_j(k) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\lfloor k/R \rfloor} (-1)^l \binom{N}{l} \binom{N-j+k-RlM}{k-RlM}, & j = 1, 2, \dots, N \\ (-1)^k \binom{2N+1-j}{k}, & j = N+1, \dots, 2N \end{cases} \quad (3.25)$$

La figure 30 montre la propagation de l'erreur de la j^{ieme} source d'erreur.

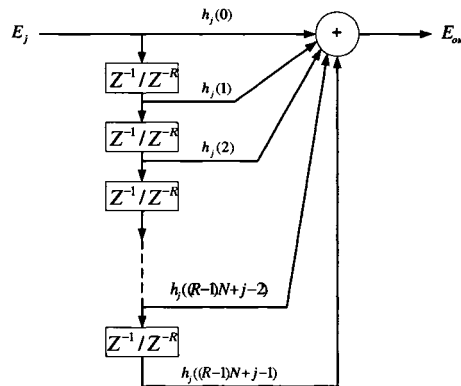


Figure 30 Propagation de l'erreur de la j^{ieme} au dernier étage de différentiateur

Cette fonction de transfert permet de calculer la moyenne et la variance de l'erreur introduite par la j^{ieme} source à la sortie du filtre. La moyenne de l'erreur est donnée par [7] :

$$\mu_{out} = \mu_j D_j$$

$$\text{avec } D_j = \begin{cases} \sum_k h_j(k), j = 1, 2, \dots, 2N \\ 1, j = 2N + 1 \end{cases} \quad (3.26)$$

qui représente le gain de l'erreur moyenne de la $j^{\text{ième}}$ source. La variance de cette erreur à la sortie est donnée par :

$$\sigma_{out}^2 = \sigma_j^2 F_j^2$$

$$\text{avec } F_j^2 = \begin{cases} \sum_k h_j^2(k), j = 1, 2, \dots, 2N \\ 1, j = 2N + 1 \end{cases} \quad (3.27)$$

qui représente le gain de la variance de l'erreur de la $j^{\text{ième}}$ source.

Le gain de l'erreur moyenne de la $j^{\text{ième}}$ source présentée à l'équation (3.26) peut être simplifiée sous la forme suivante :

$$D_j = \begin{cases} (RM)^N, j = 1 \\ 0, j = 2, 3, \dots, 2N \\ 1, j = 2N + 1 \end{cases} \quad (3.28)$$

Cette équation montre que le gain de l'erreur moyenne est nul partout sauf à la première et la dernière source d'erreur. Ceci veut dire que l'erreur moyenne est nulle à l'intérieure des étages intermédiaires. Alors, étant donné que l'erreur moyenne due à l'arrondi est nulle, la différence entre l'erreur moyenne due à la troncation et celle due à l'arrondi n'affecte pas l'erreur moyenne totale μ_{out} à l'exception de la première et de la dernière source d'erreur. Donc, le choix entre la troncation ou l'arrondi n'affecte que la première et la dernière source d'erreur. En ce qui concerne la variance de l'erreur, celle

créée par la troncation est identique à celle créée par l'arrondi. Ainsi, la moyenne totale de l'erreur du signal de sortie et sa variance, dues à la troncation sont données respectivement par [7]:

$$\mu_{out} = \sum_{j=1}^{2N+1} \mu_{outj} = \mu_{out1} + \mu_{out(2N+1)} \quad (3.29)$$

$$\sigma_{out}^2 = \sum_{j=1}^{2N+1} \sigma_{outj}^2 \quad (3.30)$$

3.7 Calcul de la largeur des registres avec troncation

En pratique, la largeur du registre de sortie est tronquée pour répondre aux spécifications désirées. Si l'utilisateur spécifie B_{out} comme largeur binaire de sortie, alors le nombre de LSB à supprimer à la sortie est donné par :

$$B_{2N+1} = B_{max} - B_{out} + 1 \quad (3.31)$$

Comme c'est la variance de l'erreur qui affecte toutes les sources d'erreur introduites par la troncation ou l'arrondi, elle sera utilisée comme paramètre de design pour calculer le nombre de LSB à supprimer dans chaque étage de calcul. La variance de l'erreur provoquée par la troncation effectuée à l'équation (3.26) est donnée par :

$$\sigma_{out(2N+1)}^2 = \sigma_{2N+1}^2 \quad (3.32)$$

En faisant toute la troncation au registre de sortie, la largeur binaire maximale B_{max} est traînée à travers tous les étages de calcul pour n'en choisir à la fin qu'une infime partie de cette largeur. Ceci est considéré comme du traitement inutile. Ainsi, ce serait intéressant de pouvoir tronquer étage par étage. Pour ce faire, Hogenauer utilise les

critères suivants : la somme des $2N$ sources d'erreur à la sortie est inférieure ou égale à σ_{2N+1}^2 . Cette somme d'erreur est également distribuée aux $2N$ sources d'erreur ce qui veut dire :

$$\sigma_{outj}^2 \leq \frac{1}{2N} \sigma_{2N+1}^2, \quad j = 1, 2, \dots, 2N \quad (3.33)$$

Supposons que le nombre de LSB supprimé à la j^{ieme} source est B_j , alors l'erreur de troncation est 2^{B_j} et sa variance $\sigma_j^2 = \frac{1}{12} 2^{2B_j}$. La valeur de cette variance à la sortie est calculée en utilisant l'équation (3.27) :

$$\sigma_{outj}^2 = \frac{1}{12} 2^{2B_j} F_j^2 \quad (3.34)$$

Le remplacement de σ_{outj}^2 par sa valeur dans l'équation (3.33) donne :

$$2^{2B_j} F_j^2 \leq \frac{6}{N} \sigma_{2N+1}^2 \quad (3.35)$$

$$B_j \leq -\log_2 F_j + \log_2 \sigma_{2N+1} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{6}{N}$$

B_j doit être un entier. Alors l'équation (3.35) devient :

$$B_j = \left[-\log_2 F_j + \log_2 \sigma_{2N+1} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{6}{N} \right] \quad (3.36)$$

Cette équation permet de choisir le nombre de LSB à supprimer à chaque étage du filtre CIC décimateur.

3.8 Conclusion

La structure du filtre CIC décimateur a été présentée, dans un premier temps, dans ce chapitre. La réponse fréquentielle montre que les intégrateurs amplifient les composantes à basse fréquence et atténuent celles à hautes fréquences. Ces intégrateurs sont instables mais leur connections en série avec les différentiateurs assure la stabilité du filtre. Dans un deuxième temps, les détails d'implémentation ont été présentés. Il fallait calculer la largeur des registres de chaque étage de filtrage. Cependant, comme la troncation introduit de l'erreur, il fallait adopter des critères pour les calculs des différentes largeurs binaires. Les deux critères présentés par Hogenauer ont été utilisés et sont :

- Utiliser une arithmétique complément à deux ou une autre arithmétique qui permet le passage entre le plus grand nombre positif et le plus grand nombre négatif
- L'amplitude maximale utilisée pour tous les étages de calculs doit être supérieure ou égale à l'amplitude maximale à la sortie du filtre CIC au complet.

Ainsi, dans l'implémentation du filtre CIC décimateur, l'arithmétique complément à deux est utilisée pour répondre au premier critère. La largeur maximale du registre de sortie B_{\max} est calculée et est en même temps la largeur maximale des registres intermédiaires, ce qui répond au deuxième critère.