

Introduction à la Gestion des Risques

Cours ENSAI de 3^{ème} année

Thierry RONCALLI

Groupe de Recherche Opérationnelle
Crédit Lyonnais

thierry.roncalli@creditlyonnais.fr

Notes de cours écrites avec la collaboration de
Nicolas Baud, Sakda Hoeung et Gaël Riboulet

Octobre 2001

Table des matières

Avant-Propos	1
I Problématique générale de la gestion des risques	3
1 Introduction historique	5
1.1 Quelques repères théoriques	5
1.2 Le développement des produits financiers	6
1.3 L'histoire récente des crises financières	7
1.4 L'évolution de la réglementation	9
2 Définition du risque	11
2.1 Typologie des risques	11
2.2 La mesure du risque	11
2.3 L'optimisation du couple rentabilité/risque	13
3 Le nouvel Accord de Bâle et le ratio McDonough	15
3.1 Les fonds propres	15
3.2 Le ratio Cooke	16
3.3 Bâle II et le nouveau ratio de solvabilité	17
4 La notion de Capital Economique et l'allocation de fonds propres	21
4.1 La problématique	21
4.2 La notion de capital économique	21
4.3 La construction d'un modèle interne	21
4.3.1 L'approche <i>bottom-up</i>	21
4.3.2 L'approche <i>top-down</i>	22
II Le risque de marché	25
5 La réglementation prudentielle	27
5.1 Les textes officiels	28
5.2 Les normes générales	29
5.3 Les critères qualitatifs	29
5.4 Les critères quantitatifs	30

5.5	Autres considérations	32
5.5.1	Définition des facteurs de risque de marché	32
5.5.2	Traitement du risque spécifique	33
5.5.3	Simulations de crise	33
5.6	Dispositif prudentiel de contrôle ex post lié à l'utilisation des modèles internes	34
6	La valeur en risque	37
6.1	Définition	37
6.1.1	La <i>VaR</i> analytique (ou paramétrique)	38
6.1.2	La <i>VaR</i> historique (ou non paramétrique)	39
6.1.3	La <i>VaR</i> Monte-Carlo	41
6.1.4	Pertinence des mesures <i>VaRs</i>	41
6.2	Quelques réflexions sur la <i>VaR</i>	43
6.2.1	L'interprétation du seuil de confiance α	43
6.2.2	Une explication du facteur multiplicatif $(3 + \xi)$	44
6.2.3	Le choix de la distribution de probabilité	45
6.2.4	L'estimation de la matrice de covariance	47
6.2.4.1	Un exercice de backtesting	50
6.2.4.2	Les approches conditionnelles de l'estimation de la matrice de covariance	52
6.2.5	Le problème du <i>scaling</i>	55
6.2.5.1	Quelques éléments théoriques	55
6.2.5.2	Un exercice de simulation	56
6.2.5.3	Conclusion	59
6.3	Les produits optionnels	59
6.3.1	La problématique	59
6.3.2	Les solutions	60
6.3.3	La gestion du risque des produits optionnels	61
6.4	Conclusion	61
7	Les programmes de stress-testing	65
7.1	Directions méthodologiques choisies par les institutions bancaires	66
7.2	L'approche historique	67
7.3	Une approche subjective : le macro stress-testing	67
7.4	La méthode WCS	68
7.5	La théorie des valeurs extrêmes	71
7.5.1	Une introduction heuristique des extrêmes	71
7.5.2	La théorie classique	72
7.5.2.1	Présentation des 3 lois d'extrêmes	72
7.5.2.2	Quelques remarques sur les lois d'extrêmes	75
7.5.2.3	Estimation des paramètres de la distribution GEV	77
7.5.3	Le concept de temps de retour	78
7.5.4	Applications	78
7.5.5	Le cas multidimensionnel	80
7.5.6	Annexes	80
7.5.6.1	Forme générale d'une loi d'extrêmes	80
7.5.6.2	Jacobien analytique de la fonction de log-vraisemblance	80
III	Le risque de crédit	83
8	Présentation générale du risque de crédit	85
8.1	Origine du risque de crédit	85
8.2	Le marché du risque de crédit	86
8.2.1	Le marché des prêts bancaires	86
8.2.2	Le marché des obligations risquées	86
8.2.3	Les dérivés de crédit	86

9	L'approche standard	89
9.1	La réglementation prudentielle	89
9.2	Les pondérations	90
9.3	Les notations externes	91
9.4	Les procédures de réduction des risques	94
9.4.1	Les sûretés ou collatéraux	94
9.4.1.1	L'approche complète	94
9.4.1.2	L'approche simple	97
9.4.2	Les garanties et les dérivés de crédit	97
9.4.3	Autres considérations	98
9.4.3.1	Compensation de bilan	98
9.4.3.2	Le décalage des maturités	98
9.4.3.3	L'asymétrie des devises	99
9.4.4	Quelques exemples	99
9.4.4.1	Collateralised transactions	99
9.4.4.2	On-balance sheet netting	102
9.4.4.3	Guarantees/credit derivatives	103
10	La méthode IRB	105
10.1	Les principes généraux	105
10.1.1	Le schéma simplifiée de l'approche IRB	105
10.1.2	Définition de la défaillance	106
10.1.3	La notation interne	106
10.2	L'exemple de la méthode IRB pour les entreprises	106
10.2.1	Formulation des pondérations de risque	107
10.2.1.1	Dans l'approche IRB simple	107
10.2.1.2	Dans l'approche IRB avancée	108
10.2.2	Justification de la méthode IRB	112
10.2.3	Paramètres de la fonction de pondération	121
10.2.3.1	La probabilité de défaillance	121
10.2.3.2	La perte en cas de défaillance	121
10.2.3.3	La maturité	121
10.2.3.4	L'exposition en cas de défaillance	121
10.2.4	Les exigences minimales d'éligibilité	121
10.3	Prolongements	122
10.3.1	Risque retail	122
10.3.2	Risque souverain	122
10.3.3	Risque banque	122
10.3.4	Risque financement de projet	122
10.3.5	Risque equity	122
10.4	Granularité du portefeuille	122
10.4.1	La méthodologie	122
10.4.2	Exemples	124
10.4.3	Dérivation du coefficient d'ajustement de granularité	125
10.4.3.1	La détermination du coefficient β	125
10.4.3.2	Du coefficient β à l'ajustement de granularité du Comité de Bâle	129
10.5	Les modifications du 5 novembre 2001	133
IV	Les modèles de risque de crédit	137
11	Introduction	139
12	Le modèle de la firme	141
12.1	Le modèle de MERTON [1974]	142
12.2	Extensions du modèle de Merton	144
12.2.1	Généralisation de la notion de défaut	144

12.2.2	Introduction de sauts dans le processus de valorisation des actifs	145
12.3	Méthodologie mise en place par K.M.V. Corporation	146
12.3.1	Une mesure du risque de défaut : la distance au défaut	146
12.3.2	Estimation de la distance au défaut	147
12.3.3	Calcul de l'EDF	148
12.4	Une application : le modèle CreditMetrics	151
13	L'approche actuarielle de CreditRisk+	153
13.1	La démarche	153
13.2	Modélisation à taux de défaut fixes	155
13.2.1	Occurrence de défauts	155
13.2.2	Pertes de défaut	156
13.2.2.1	Procédure de calcul et distribution des pertes	156
13.2.2.2	Application au cas multi-annuel	157
13.3	Passage à des taux de défaut aléatoires	158
13.3.1	Incertitude des taux de défaut	158
13.3.2	Analyse par secteur	158
13.3.3	Occurrence de défauts	159
13.3.4	Distribution des pertes de défaut	160
13.3.4.1	Pertes de défaut	160
13.3.4.2	Relation de récurrence	160
13.4	Conclusion	161
14	L'approche Intensité : une approche sous forme réduite	163
14.1	Cadre de l'analyse	163
14.1.1	Définition de l'intensité de survie	164
14.1.2	Une autre approche de l'intensité de défaut	165
14.2	Les différentes représentations du prix de la dette risquée	165
14.2.1	Premières représentations	165
14.2.2	Théorème de représentation du prix de la dette risquée	166
14.3	Un exemple d'application : le modèle de JARROW et TURNBULL [1995]	166
V	Le risque opérationnel	169
15	La réglementation prudentielle	171
15.1	La définition du risque opérationnel	171
15.2	Les approches forfaitaires	173
15.2.1	Basic Indicator Approach (BIA)	173
15.2.2	Standardised Approach (SA)	174
15.3	Annexe : composition du Risk Management Group (RMG) of the Basel Committee on Banking Supervision	174
16	Les méthodes AMA	177
16.1	L'approche IMA	177
16.2	L'approche LDA	179
16.2.1	Présentation de la méthode statistique	179
16.2.2	Robustesse de l'approche LDA	180
16.3	Le mapping IMA/LDA	181
16.4	L'approche Scorecard	182
	Conclusion générale	185

Table des figures

2.1	Les différents types de risque	12
2.2	Représentation graphique de la valeur en risque	13
5.1	BIS Colour frequency (taux de couverture de 99%)	35
6.1	Estimation d'un quantile et erreur de second type	40
6.2	Une illustration de la méthode de Monte-Carlo	42
6.3	Caractère lepto-kurtique d'une distribution de probabilité	46
6.4	Distribution empirique du rendement du titre BARCLAYS	46
6.5	Pondération d'une moyenne mobile exponentielle	48
6.6	Pondération cumulée d'une moyenne mobile exponentielle	49
6.7	Evolution de la valeur en risque (titre BARCLAYS)	49
6.8	Backtesting avec le titre SOCIETE GENERALE	51
6.9	Détermination de la valeur optimale pour λ	52
6.10	Valeur optimale de λ pour différents titres	53
6.11	Variance conditionnelle du rendement du titre BARCLAYS — modèle GARCH(1,1)	54
6.12	Corrélation conditionnelle des rendements des titres BARCLAYS et LLOYDS/TSB — modèle BEEK GARCH(1,1)	55
6.13	Simulation du modèle ARCH	57
6.14	Détermination du scaling (modèle ARCH)	58
6.15	Simulation du modèle Hull-White	58
6.16	Détermination du scaling (modèle Hull-White)	59
6.17	Positions relatives des <i>VaRs</i>	60
7.1	Fonction de distribution de χ_N^-	69
7.2	L'influence de la queue de distribution sur $\eta(N)$	70
7.3	Queue de distribution des rendements du titre LLOYDS/TSB	71
7.4	Distribution jointe des rendements des titres BARCLAYS et LLOYDS/TSB	72
7.5	Exemples de distribution GEV (I)	74
7.6	Exemples de distribution GEV (II)	74
7.7	Convergence de \mathbf{G}_N vers la distribution de Gumbel lorsque \mathbf{F} est gaussienne	75
7.8	Convergence de certaines distributions vers la distribution de Fréchet	76
7.9	Quantile de la distribution GEV	77
7.10	Estimation des densité des lois des extrêmes	79
7.11	Relation entre l'échelle de risque et le temps de retour	80

9.1	Evolution de la pondération ajustée r^* en fonction de la sûreté ajustée C_A ($E = 100$) . . .	95
9.2	Evolution de la pondération ajustée r^* en fonction de l'exposition E ($C_A = 50$)	96
10.1	Fonction de référence BRW	108
10.2	Dérivée première de la fonction de référence BRW	109
10.3	Ajustement de la maturité ($1 + 0.470 \times \frac{1-PD}{PD^{0.44}}$)	109
10.4	Représentation graphique de la fonction $b(PD)$	114
10.5	Influence du seuil α sur la probabilité de défaillance conditionnelle P_i ($\rho = 20\%$)	117
10.6	Influence du seuil α sur la probabilité de défaillance conditionnelle P_i pour des valeurs données de p_i ($\rho = 20\%$)	117
10.7	Influence de la corrélation ρ sur la probabilité de défaillance conditionnelle P_i ($\alpha = 99.5\%$)	118
10.8	Influence de la corrélation ρ sur la probabilité de défaillance conditionnelle P_i pour des valeurs données de p_i ($\alpha = 99.5\%$)	118
10.9	Fonction de référence BRW (ajustement de maturité/formule exacte)	120
10.10	Impact des paramètres sur le coefficient β (valeurs par défaut : LGD = 50%, $\alpha = 99.5\%$, $\rho = 20\%$ et $\sigma[X] = 2$)	129
10.11	Impact des propositions du 5 Novembre 2001 sur les pondérations en risque (I)	135
10.12	Impact des propositions du 5 Novembre 2001 sur les pondérations en risque (II)	135
10.13	Impact des propositions du 5 Novembre 2001 sur les corrélations $\rho(PD)$	136
12.1	Effet de levier ($d > 1$)	144
12.2	Effet de levier ($d < 1$)	145
12.3	Volatilité des actifs, secteur d'activité et taille de l'entreprise	147
12.4	Expected default frequency	148
12.5	EDF de Bangkok Metropolitan Bank	149
12.6	EDF de Burns Philip	150
12.7	Valeur de marché de Burns Philip	150
13.1	Organigramme de la démarche suivie par CreditRisk+	154
16.1	Distribution agrégée avec $\zeta(i, j) \sim \mathcal{LN}(8, 2.2)$ et $N(i, j) \sim \mathcal{P}(50)$	180

Liste des documents distribués en cours

1. Comité de Bâle sur le Contrôle Bancaire, Vue d'ensemble du Nouvel Accord de Bâle sur les fonds propres, Document soumis à consultation, Janvier 2001
2. PUNJABI, S. [1998], Many happy returns, *Risk Magazine*, **June**, 71-76
3. Modalités de Calcul du Ratio de Solvabilité — Actualisation au 31 décembre 2000, Commission Bancaire, Secrétariat Général, Service des Affaires Internationales, 31 Janvier 2001
4. DERMAN, E. [2001], Markets and model, *Risk Magazine*, **14**, July, 48-50
5. REBONATO, R. [2001], Model risk : new challenges, new solutions, *Risk Magazine*, **14**, March, 87-90
6. TURC, J. [1999], Présentation du marché du risque de crédit, CDC Marchés, *Séminaire INRIA du 8 juin 1999*
7. Basel Committee on Banking Supervision, Credit Ratings and Complementary Sources of Credit Quality Information, *Working Paper*, **3**, August 2000
8. KOYLUOGLU, H.U. et A. HICKMAN [1998], Reconcilable differences, *Risk Magazine*, **11**, October, 56-62
9. FINGER, C.C. [1999], Conditional approaches for CreditMetrics portfolio distributions, *CreditMetrics Monitor*, **April**, 14-33
10. WILSON, T. [2001], IRB approach explained, *Risk Magazine*, **14**, May, 87-90
11. WILSON, T. [2001], Probing granularity, *Risk Magazine*, **14**, August, 103-106
12. Basel Committee on Banking Supervision, Working Paper on the Regulatory Treatment of Operational Risk, *Working Paper*, **8**, September 2001
13. FRACHOT, A., P. GEORGES et T. RONCALLI [2001], Loss Distribution Approach for operational risk, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
14. PENNEQUIN, M. [2001], Risques opérationnels : comment se préparer à la réforme de Bâle, Club Banque, Fédération des Banques Françaises, 27 septembre 2001

Avant-Propos

Ceci est le support écrit qui accompagne le cours "Introduction à la Gestion des Risques". L'exposé oral du cours sera sensiblement différent de ces notes. Celui-ci portera plus sur la culture financière du risque que sur les méthodes.

Les méthodes seront abordées de façon plus approfondie dans deux autres cours : "La Théorie des Extrêmes et la Gestion des Risques de Marché" et "La Gestion des Risques Multiples". C'est dans ces deux cours que nous verrons la mise en œuvre pratique des méthodes avec le logiciel GAUSS. A titre indicatif, le premier cours portera sur la VaR et le stress-testing. Et nous aborderons les copulas, le risque de crédit et le risque opérationnel dans le second cours.

Les propositions de Bâle pour le nouvel Accord évoluent rapidement. Par exemple, la publication le 28 septembre 2001 d'un nouveau document consultatif sur le risque opérationnel modifie sensiblement les propositions du 16 janvier 2001. Dans l'exposé oral, je présenterai les derniers travaux. Certains paragraphes du présent document peuvent donc être (partiellement) obsolètes.

La rédaction de ce document a été faite à partir de différents travaux et articles qui ont été réalisés au **Groupe de Recherche Opérationnelle du Crédit Lyonnais**.

1. Les chapitres de la partie "Le risque de marché" reprennent la note [HRR] que j'ai rédigée en collaboration avec Sakda Hoeung et Gaël Riboulet.
2. Les chapitres sur le modèle de Merton et l'approche Intensité sont extraits du rapport de stage long de Nicolas Baud.
3. Le chapitre sur CreditRisk+ est extrait du document [R] écrit par Gaël Riboulet.
4. La partie sur le risque opérationnel s'inspire très largement des différents travaux que j'ai menés avec Antoine Frachot et Pierre Georges.

Vous pouvez télécharger les documents originaux à l'adresse internet du **GRO** : <http://gro.creditlyonnais.fr>.

- [B] BAUD, N. [2000], La mesure du risque de crédit, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Rapport de Stage*
- [BFIMR] BAUD, N., A. FRACHOT, P. IGIGABEL, P. MARTINEU et T. RONCALLI [1999], An analysis framework for bank capital allocation, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper* (document disponible sur le site web du GRO)
- [BN] BEZAT, A. et A. NIKEGHBALI [2000], La théorie des extrêmes et la gestion des risques de marché, GT ENSAE (document disponible sur le site web du GRO)
- [BDNRR] BOUYÉ, E., V. DURRLEMAN, A. NIKEGHBALI, G. RIBOULET et T. RONCALLI [2000], Copulas for finance : a reading guide and some applications, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper* (document disponible sur le site web du GRO)
- [C] COSTINOT, A. [2000], La construction d'un programme de simulation de crise, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Rapport de Stage*
- [CRR] COSTINOT, A., G. RIBOULET et T. RONCALLI [2000], Stress-testing et théorie des valeurs extrêmes : une vision quantifiée du risque extrême, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper* (document disponible sur le site web du GRO)
- [FGR] FRACHOT, A., P. GEORGES et T. RONCALLI [2001], Loss Distribution Approach for operational risk, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper* (document disponible sur le site web du GRO)
- [HRR] HOEUNG, S., G. RIBOULET et T. RONCALLI [1999], Les risques de marché — Réglementations, mesures et pratiques, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *document interne*
- [R] RIBOULET, G. [2000], Mesure du risque de crédit d'un portefeuille, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *document interne*

Première partie

Problématique générale de la gestion des risques

1

Introduction historique

La gestion des risques est une fonction relativement récente dans les banques. Afin de bien comprendre son évolution, il est indispensable de disposer de certains repères historiques.

1.1 Quelques repères théoriques

1900 Thèse de Louis Bachelier “Théorie de la Spéculation”.

1952 Parution de l'article “Portfolio selection” de Harry Markowitz dans *Journal of Finance*.

1964 William Sharpe invente le modèle CAPM.

1970 Synthèse des travaux sur l'efficience des marchés par Eugene Fama.

1973 Formule de valorisation d'une option européenne de Fisher Black et Myron Scholes.

1974 Etude de l'obligation risquée par Robert Merton.

1977 Modèles de taux de Vasicek et de Cox, Ingersoll et Ross.

1992 Parution de l'article d'Heath, Jarrow et Morton dans *Econometrica*.

1994 RiskMetrics.

On associe généralement la naissance de la théorie financière aux travaux fondateurs de Bachelier. Ceux-ci ont été ignorés pendant très longtemps, jusqu'à leur découverte par Paul Samuelson. Les années 30 marquent le début des recherches empiriques sur les prix des actifs avec la création de la Cowles Commission for Research in Economics en 1932 et celle de la revue *Econometrica* par Joseph Schumpeter en 1933. Ces recherches portent plus spécifiquement sur la formation des prix, l'efficience du marché et la détection de stratégies profitables (c'est-à-dire sur l'anticipation des cours des actions). Ce n'est que dans les années 50 que les chercheurs (Markowitz, Lintner, Sharpe, etc.) entreprennent des travaux conséquents sur le risque. Ceux-ci aboutissent à la théorie moderne du choix de portefeuille basée sur les modèles CAPM et APT. L'année 1973 marque un tournant dans l'histoire financière pour deux raisons :

1. La première est la création du CBOE (Chicago Board Options Exchange) avec la mise en place de mécanismes d'une chambre de compensation (clearing house).
2. La seconde est la parution de la très célèbre formule de Black et Scholes pour valoriser une option Européenne.

C'est le point de départ au développement intensif des recherches concernant la valorisation (**pricing**) des produits dérivés. Durant les années 80 et 90, la mise en place de couverture (**hedging**) de ces produits sensibilise les acteurs du marché au risque (perçu comme une variation du **P&L**, c'est-à-dire du résultat). A la même période, de nouveaux outils statistiques sont mis en place dans les banques pour la sélection de clientèle (**credit scoring**). Ces outils concernent aussi bien le risque de défaillance (**default/credit risk**)

que les problèmes de tarification. L'Accord de Bâle de 1988 impose aussi une nouvelle vision du risque, beaucoup plus réglementaire. La publication en 1994 de la méthodologie RiskMetrics par *JP Morgan* permet une diffusion très large des méthodes **Value-at-Risk** (VaR ou valeur en risque) aussi bien auprès des professionnels que des académiques.

1.2 Le développement des produits financiers

Il existe plusieurs types de risque (voir le chapitre suivant). Les deux principaux sont le risque de crédit (**credit risk**) et le risque de marché (**market risk**) — en fait, le risque opérationnel (**operational risk**) est considéré comme plus important que le risque de marché. Pour une première définition, nous pouvons assimiler le risque de marché à un risque de volatilité des prix des actifs et le risque de crédit au risque de défaillance. L'Accord de Bâle de 1988 traite de ces deux risques — pour être précis, seul le risque de crédit était concerné, le risque de marché a été pris en compte plus tard. Néanmoins, il est vite apparu que le traitement réglementaire (**capital forfaitaire**) du risque de marché était mal adapté. Les autorités réglementaires ont donc autorisé les banques à utiliser des modèles internes pour mesurer ce risque. Cela n'est pas le cas du risque de crédit, car le marché du crédit n'avait pas (et n'a toujours pas) la maturité suffisante pour mesurer le risque de façon rationnelle et cohérente. Cela explique la part particulière de ce cours consacrée au risque de marché. Cependant, afin de bien cerner le risque de marché, il est indispensable de connaître les différents produits.

L'historique suivant est extrait de JORION [2001] (voir la section 1.2.2) et de CROUHY, GALAI et MARK [2001] (section 2 du chapitre 1).

- Foreign currency futures (1972)
- Equity options (1973)
- Over-the-counter currency options (1979)
- Currency swaps (1980)
- Interest rate swaps (1981)
- Equity index options (1983)
- Interest rate caps/floors (1983)
- Swaptions (1985)
- Path-dependent options (Asian, lookback, etc.) (1987)
- CAT options (1992)
- Captions/Floortions (1993)
- Credit default options (1994)
- Weather derivatives (1997)

L'innovation financière a surtout concerné dans un premier temps le marché des changes (**FX market**). Cela s'explique par la crise pétrolière de 1973. Cette innovation s'est rapidement transmise aux marchés d'actions (**Equity market**) et de taux d'intérêt (**Bond market** ou **Interest Rate market**), et dans une moindre mesure au marché des matières premières (**Commodity market**). Il faut noter que celle-ci s'est faite en dehors des marchés organisés (**centralized exchanges**). Ce sont donc généralement des produits traités sur des marchés de gré à gré (**over-the-counter markets** ou **OTC markets**).

Voyons quelques définitions (très simplifiées) des principaux produits.

- Un contrat à terme (**futures**) fixe les caractéristiques d'une transaction future : la maturité du contrat, le cours à terme (**forward**), etc.
- Une option est un contrat entre deux parties par lequel l'une accorde à l'autre le droit, mais non l'obligation, de lui acheter (option d'achat) ou de lui vendre (option de vente) l'actif support selon certaines conditions. L'option est un exemple d'actif **conditionnel** ou d'actif **contingent**. Voici quelques caractéristiques qui permettent de définir le contrat :

1. Le support du contrat est appelé le sous-jacent de l'option.
2. Le prix convenu à l'avance auquel **peut** avoir lieu la transaction est le prix d'exercice (strike).
3. Si la maturité de l'option n'est pas précisée, l'option est dite perpétuelle.
4. L'acheteur de l'option paye une prime (**premium**) au vendeur de l'option pour le droit d'exercer l'option.
5. Une option d'achat est un **call** et une option de vente est un **put**.
6. Si la date d'exercice correspond à l'échéance de l'option, l'option est dite **Européenne**. Si l'acheteur peut exercer à tout moment avant la maturité de l'option, nous avons une option **Américaine**. Ces deux types d'option définissent les options Vanilles (**Vanilla options**). Lorsqu'il existe plusieurs dates discrètes d'exercice, on les appelle des **options Bermuda**

La caractérisation mathématique de l'option correspond à la définition de la fonction **payoff** :

European Call	$(S(T) - K)^+$
European Put	$(K - S(T))^+$
Asian (Floating Strike)	$(S(T) - \bar{S})^+$
Asian (Fixed Strike)	$(K - \bar{S})^+$
Lookback	$(S(T) - \min_{t_0 \leq t \leq T} S(t))^+$
Barrier (DOC)	$1_{[\min_{t_0 \leq t \leq T} S(t) \geq L]} \cdot (S(T) - K)^+$
Spread	$(S_1(T) - S_2(T) - K)^+$
Basket	$(S_1(T) + S_2(T) - K)^+$

- Un swap est un échange de deux échéanciers de flux futurs. Par exemple, un swap de taux fixe/variable (**fixed/floating**) est l'échange d'un taux fixe contre un taux variable (Euribor, etc.).
- Un cap est un contrat qui permet à l'acheteur de se garantir contre une hausse des taux en fixant un taux plafond.

1.3 L'histoire récente des crises financières

La réglementation prudentielle en matière de contrôle des risques financiers est une conséquence des différentes crises financières et de leur impact sur la solvabilité des établissements financiers. Le chapitre 2 de JORION [2001] présente un historique assez complet des "désastres" financiers récents. Voici quelques points de repère :

- 1974 **Herstatt Bank** — FX trading — \$4.8 Mds.
- 1994 **Orange County** — Reverse repos — \$1.81 Mds.
- 1994 **Metallgesellschaft** — Oil futures — \$1.34 Mds.
- 1994 **Procter & Gamble** — Swaps — \$0.16 Mds.
- 1995 **Barings** — Index Nikkei 225 futures — \$1.33 Mds.
- 1997 **Natwest** — Swaptions — \$0.13 Mds.
- 1998 **LTCM** — Liquidity crisis — \$2 Mds.

Pourquoi mettre en place des mécanismes de surveillance des établissements financiers par des autorités de tutelle ? Lors de crises financières importantes (crise mexicaine, crise russe, crise asiatique, etc.), la mise en place d'un **prêteur en dernier ressort** s'avère très couteuse pour éviter une crise systémique. De même, la défaillance d'un seul établissement financier peut conduire à une contagion aux autres établissements financiers à cause de la panique financière (DIAMOND et DYBVG [1983]). La mise en place d'une réglementation en matière des risques vise donc dans un premier temps à limiter le risque systémique, et dans un deuxième temps à éviter les défaillances individuelles des établissements financiers.

The Basel Committee on Banking Supervision

The Basel Committee, established by the central-bank Governors of the Group of Ten countries at the end of 1974, meets regularly four times a year. It has about thirty technical working groups and task forces which also meet regularly.

The Committee's members come from Belgium, Canada, France, Germany, Italy, Japan, Luxembourg, the Netherlands, Spain, Sweden, Switzerland, United Kingdom and United States. Countries are represented by their central bank and also by the authority with formal responsibility for the prudential supervision of banking business where this is not the central bank. The present Chairman of the Committee is Mr. William J. McDonough, President and CEO of the Federal Reserve Bank of New York.

The Committee does not possess any formal supranational supervisory authority, and its conclusions do not, and were never intended to, have legal force. Rather, it formulates broad supervisory standards and guidelines and recommends statements of best practice in the expectation that individual authorities will take steps to implement them through detailed arrangements - statutory or otherwise - which are best suited to their own national systems. In this way, the Committee encourages convergence towards common approaches and common standards without attempting detailed harmonisation of member countries' supervisory techniques.

The Committee reports to the central bank Governors of the Group of Ten countries and seeks the Governors' endorsement for its major initiatives. In addition, however, since the Committee contains representatives from institutions which are not central banks, the decisions it takes carry the commitment of many national authorities outside the central banking fraternity. These decisions cover a very wide range of financial issues. One important objective of the Committee's work has been to close gaps in international supervisory coverage in pursuit of two basic principles : that no foreign banking establishment should escape supervision ; and that supervision should be adequate. To achieve this, the Committee has issued a number of documents since 1975.

In 1988, the Committee decided to introduce a capital measurement system commonly referred to as the Basel Capital Accord. This system provided for the implementation of a credit risk measurement framework with a minimum capital standard of 8% by end-1992. Since 1988, this framework has been progressively introduced not only in member countries but also in virtually all other countries with active international banks. In June 1999, the Committee issued a proposal for a New Capital Adequacy Framework to replace the 1988 Accord. The proposed capital framework consists of three pillars : minimum capital requirements, which seek to refine the standardised rules set forth in the 1988 Accord ; supervisory review of an institution's internal assessment process and capital adequacy ; and effective use of disclosure to strengthen market discipline as a complement to supervisory efforts. Following extensive interaction with banks and industry groups, a second consultative document, taking into account comments and incorporating further work performed by the Committee, is to be issued in January 2001, with a view to introducing the new framework in 2004.

Over the past few years, the Committee has moved more aggressively to promote sound supervisory standards worldwide. In close collaboration with many non-G-10 supervisory authorities, the Committee in 1997 developed a set of "Core Principles for Effective Banking Supervision", which provides a comprehensive blueprint for an effective supervisory system. To facilitate implementation and assessment, the Committee in October 1999 developed the "Core Principles Methodology".

In order to enable a wider group of countries to be associated with the work being pursued in Basel, the Committee has always encouraged contacts and cooperation between its members and other banking supervisory authorities. It circulates to supervisors throughout the world published and unpublished papers. In many cases, supervisory authorities in non-G-10 countries have seen fit publicly to associate themselves with the Committee's initiatives. Contacts have been further strengthened by an International Conference of Banking Supervisors which takes place every two years, most recently in Basel.

The Committee's Secretariat is provided by the Bank for International Settlements in Basel. The twelve person Secretariat is mainly staffed by professional supervisors on temporary secondment from member institutions. In addition to undertaking the secretarial work for the Committee and its many expert sub-committees, it stands ready to give advice to supervisory authorities in all countries.

TABLE 1.1. About Basle Committee (from <http://www.bis.org>)

1.4 L'évolution de la réglementation

La réglementation prudentielle a considérablement évolué ces vingt dernières années sous l'impulsion des travaux du Comité de Bâle. Même si celui-ci n'a aucun pouvoir décisionnel, ses recommandations sont reprises par les différentes autorités de tutelle des différents pays industrialisés. Bien sûr, il existe de petites différences entre les textes de Bâle et les textes officiels.

En Europe, c'est la Commission Européenne qui est chargée de définir la **CAD (Capital Adequacy Directive)**. Mais la mise en œuvre revient aux différentes autorités de tutelle nationales. En France, c'est la Commission Bancaire (qui est rattachée à la Banque de France) qui contrôle l'application de la CAD (en fait, une version française adaptée à la législation française par le Comité de la Réglementation Bancaire et Financière — **CRBF**).

Les principales dates de l'évolution de la réglementation sont les suivantes :

1988 The Basle Capital Accord

1993 Capital Adequacy Directive

1996 Amendment to the Capital Accord to incorporate market risks

1999 A new capital adequacy framework

2001 The New Basel Capital Accord

2004 (2005 ?) Basle II

Bibliographie

- [1] Amendment to the capital accord to incorporate market risks, *Basle Committee on Banking Supervision*, January 1996, N° **24**
- [2] BERNSTEIN, P.L. [1995], *Des Idées Capitales*, Presses Universitaires de France, Paris
- [3] CROUHY, M., D. GALAI et R. MARK [2001], *Risk Management*, McGraw-Hill
- [4] DIAMOND, D.W. et P.H. DYBVIK [1983] Bank runs, deposit insurance and liquidity, *Journal of Political Economy*, **91(3)**, 401-419
- [5] JORION, P. [2001], *Value at Risk : The new Benchmark for Controlling Market Risks*, deuxième édition, McGraw-Hill

2

Définition du risque

Il est très difficile de définir de façon générale la notion de risque. Le risque est lié à la survenance d'un événement que l'on ne peut prévoir qui a des conséquences importantes sur le bilan de la banque. Il faut donc distinguer le caractère aléatoire et imprévisible (qui est l'origine du risque) de l'enjeu (conséquence finale).

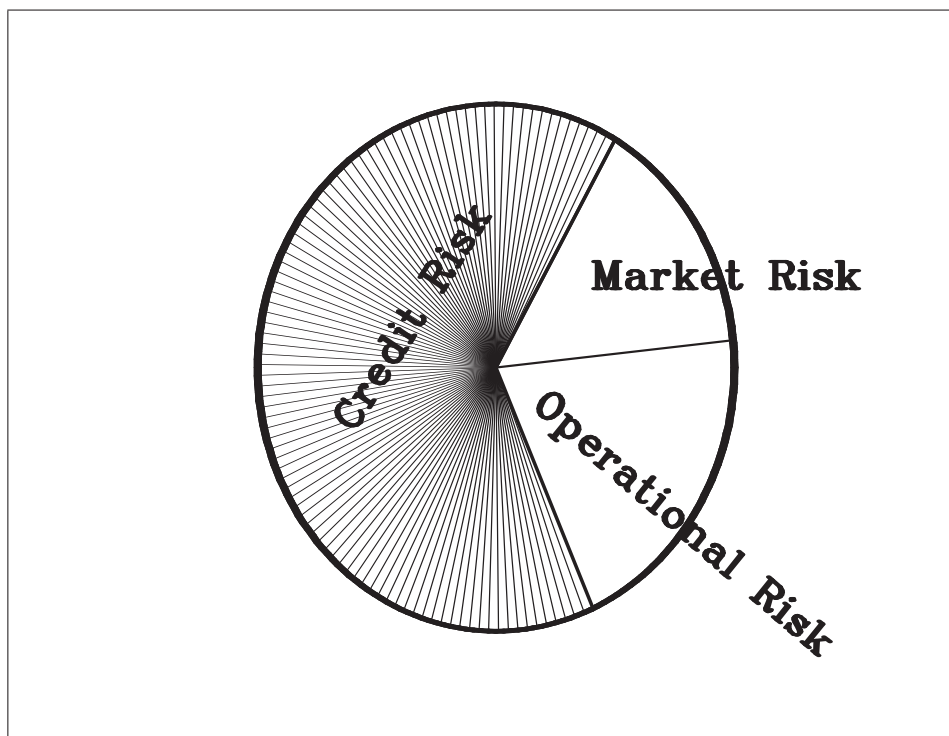
2.1 Typologie des risques

Voici une liste non exhaustive des différents risques que peut rencontrer un établissement financier :

- Risque de crédit
 - Risque de défaillance (default risk)
 - Risque de dégradation de la valeur de la créance (downgrading risk)
- Risque de marché
 - Risque de taux d'intérêt
 - Risque de change
 - Risque de modèle
- Risque opérationnel
 - Risque de désastre
 - Risque de fraude
 - Risque de traitement
 - Risque technologique
 - Risque juridique
- Risque de liquidité
- Risque stratégique

2.2 La mesure du risque

Le risque est lié à la volatilité du **Mark to Market** (ou valorisation au prix de marché) du portefeuille d'actifs. Pendant très longtemps, la mesure naturelle du risque a donc été la volatilité. Par exemple, dans



GRAPHIQUE 2.1. Les différents types de risque

le modèle de sélection de portefeuille de Markowitz, l'agent maximise son espérance de gain pour un niveau de risque donné, qui est mesuré par l'écart-type.

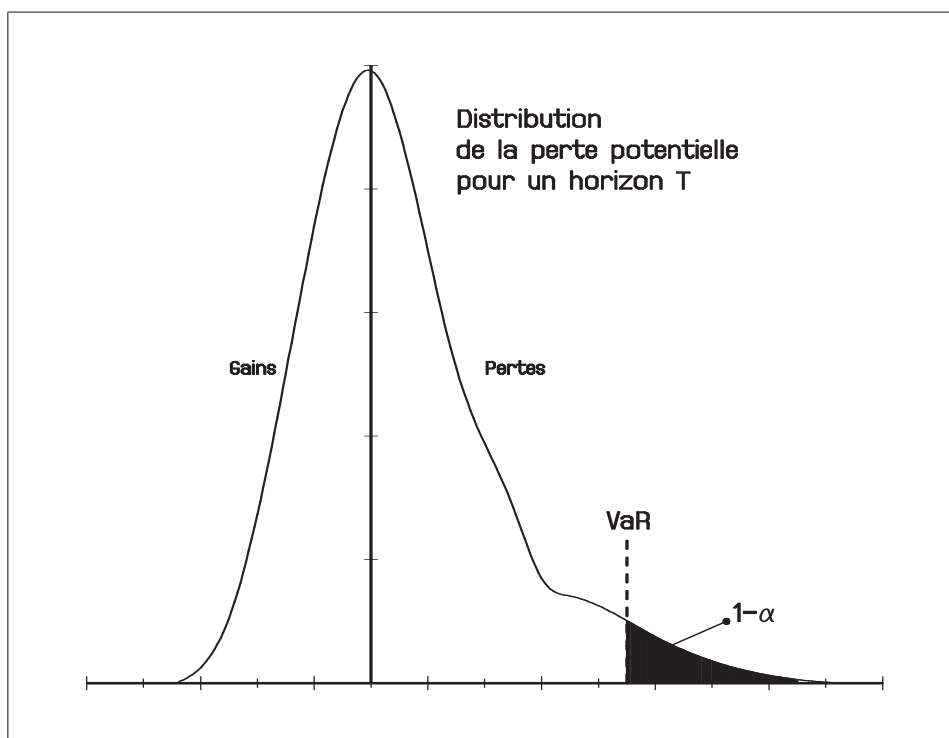
Cette vision du risque n'est cohérente que dans un monde gaussien. Cependant, nous savons depuis fort longtemps que l'hypothèse de normalité des rendements des actifs financiers n'est pas vérifiée. Actuellement, la mesure de risque qui est la plus répandue est la valeur en risque (**Value-at-Risk** ou **VaR**). Statistiquement, ce n'est rien d'autre que le quantile α de la perte potentielle pour un horizon donné. Soit ϑ la variable aléatoire représentant la perte potentielle. Notons \mathbf{F} la distribution de probabilité de ϑ . Nous avons

$$\text{VaR} = \mathbf{F}^{-1}(\alpha) \tag{2.1}$$

Deux éléments sont donc déterminants pour calculer la valeur en risque : la distribution de probabilité et le seuil de confiance.

Rating	Réglementaire (marché)	BBB	A	AA	AAA
α	99%	99.75%	99.9%	99.95%	99.97%
Temps de retour	100 jours	400 jours	4 années	8 années	13 années
$\Phi^{-1}(\alpha)$	2.33	2.81	3.09	3.29	3.43
$t_4^{-1}(\alpha)$	3.75	5.60	7.17	8.61	9.83

La perte moyenne $\mathbb{E}[\vartheta]$ est désignée par le terme **expected loss**. Dans le risque de marché, le capital en risque (**Capital-at-Risk** ou **CaR**) correspond à la valeur en risque. Dans le risque de crédit, il est égal à la différence entre le quantile et la perte moyenne — cette différence est appelée la perte exceptionnelle (**unexpected loss**). Dans ce dernier cas, on suppose que les marges (et les provisions) couvrent la perte moyenne. Enfin, il nous faut définir aussi la charge en capital (**capital charge**) qui est fonction du capital en risque. Cette charge en capital correspond au montant **effectif** de fonds propres immobilisés pour assurer l'opération.



GRAPHIQUE 2.2. Représentation graphique de la valeur en risque

2.3 L'optimisation du couple rentabilité/risque

Il est difficile de finir ce chapitre consacré au risque sans évoquer la rentabilité. Car le but d'une banque, ce n'est pas de prendre le moins de risque possible, mais d'atteindre une rentabilité maximale pour un risque donné.

La mesure des risques va permettre de calculer les fonds propres nécessaires pour assurer chaque opération financière. C'est donc un outil qui a plusieurs vocations. Il permet bien sûr de dimensionner les risques encourus en fonction du montant de ces fonds propres. Mais c'est aussi un outil indispensable pour calculer des mesures de performances. Au niveau global, la mesure de performance la plus utilisée est le rendement des fonds propres (**Return on Equity** ou **ROE**). A des niveaux beaucoup plus fins (jusqu'au niveau transactionnel), les banques utilisent des mesures de performance ajustée du risque (**risk-adjusted performance measure** ou **RAPM**). Par exemple, le rapport du rendement espéré sur le capital en risque est une mesure RAPM.

Il est donc important de considérer la mesure des risques non pas uniquement comme un outil réglementaire, mais comme un outil stratégique de décision pour la banque, car

*[...] la gestion d'une banque consiste en une **gestion globale et coordonnée**, sous contraintes internes et externes, **de la rentabilité et des risques liés aux activités de l'établissement** (AUGROS et QUÉRUEL [2000]).*

Bibliographie

- [1] ARTZNER, A., F. DELBAEN, J-M. EBER et D. HEATH [1997], Thinking coherently, *Risk magazine*, **10**, November, 68-71
- [2] ARTZNER, A., F. DELBAEN, J-M. EBER et D. HEATH [1999], Coherent measures of risk, *Mathematical Finance*, **9**, 203-228
- [3] AUGROS, J-C. et M. QUÉRUEL [2000], Risque de Taux d'Intérêt et Gestion Bancaire, Economica, Paris

- [4] GULDIMANN, Til. [1994], RiskMetricsTM Technical Document, 2nd edition, *J.P. Morgan*, New York
- [5] MARKOWITZ, H.M. [1987], Mean-Variance Analyses in Portfolio Choice and Capital Markets, Basil Blackwell, Oxford

3

Le nouvel Accord de Bâle et le ratio McDonough

3.1 Les fonds propres

Voici le bilan simplifié d'une banque

ACTIF	PASSIF
Actifs immobilisés	Fonds propres
Crédits et prêts	Dette
titres (portfeuilles de négociation, de placement et d'investissement)	Dépôts
Trésorerie	

Les fonds propres (ou le **capital**) sont un éléments du passif d'une banque. Ils regroupent :

- Les actions ordinaires et les certificats d'investissement,
- les réserves,
- le résultat non distribué,
- etc.

Les autres éléments du passif d'une banque sont les dépôts, l'épargne des ménages, ainsi que les dettes. A l'actif, nous trouvons les crédits et les prêts aux ménages et aux entreprises, les services, le portefeuille de titres, etc.

Le rôle des fonds propres est triple (DUBERNET [1997]) :

1. *«Les fonds propres sont nécessaires à la croissance.»*

Les fonds propres sont le moteur de l'activité de la banque. A cause des contraintes externes (par exemple, la réglementation) et internes (imposées par exemple par les actionnaires), ces fonds propres dimensionnent le risque de la banque, et donc l'activité de la banque. La croissance de l'établissement financier dépend donc de l'évolution de son capital.

2. *«Les fonds propres sont une garantie vis-à-vis des créanciers.»*

Ils servent à **garantir** l'activité de la banque. En particulier, ils doivent permettre d'absorber les **fortes** pertes dues à des éléments exogènes et/ou inattendus :

- Crise russe (risque pays — défaut de paiement),
- Crise asiatique (implosion des systèmes bancaires),
- Crise immobilière (krach spéculatif),
- etc.

Ainsi plus leur niveau est élevé, plus la banque présente des gages de solidité (à activité bancaire constante). Ces fonds propres sont un des éléments de notation de la banque (**rating**), note qui conditionne le coût des ressources (de trésorerie et de long terme).

3. «*Les fonds propres sont les ressources les plus chères (exigence de rentabilité).*»

Puisque les fonds propres permettent de couvrir les risques, ils sont rémunérés. Le taux de rémunération est appelé **Return on Equity** ou **ROE**. L'objectif de la banque est donc d'offrir le **ROE** le plus élevé à ses actionnaires (prendre le moins de risque et dégager la plus de résultat net). Actuellement, celui-ci varie fortement d'un établissement financier à un autre avec une moyenne autour de 15%. Notons que celui-ci a une influence très importante sur la valeur de marché de la banque (**Market Value Added** ou **MVA**) et conditionne (partiellement) la croissance externe (OPA, OPE, fusion, etc.) de l'établissement financier.

3.2 Le ratio Cooke

En 1988, le Comité de Bâle propose un ratio international de solvabilité qui doit permettre

- une meilleure adéquation des fonds propres par rapport aux risques
- de renforcer la solidité et la stabilité du système bancaire,
- et d'atténuer les inégalités concurrentielles entre les banques.

C'est le fameux ratio Cooke (du nom du président du Comité de Bâle de l'époque) qui correspond au rapport entre le montant des fonds propres et celui des encours (pondérés) EPC de crédit. Plusieurs niveaux de fonds propres sont définis :

1. Les fonds propres de base FP_1 ou "noyau dur" (**TIER 1**).
2. Les fonds propres complémentaires FP_2 (**TIER 2**).
3. Les fonds propres surcomplémentaires FP_3 (**TIER 3**).

Les fonds propres de base correspondent au capital et aux réserves. Les fonds propres complémentaires sont plus difficiles à définir, mais sont principalement constitués par des emprunts subordonnés. Selon l'Accord de Bâle (**Basle Accord**), les établissements financiers doivent respecter les contraintes suivantes :

$$\begin{cases} FP_2 \leq FP_1 \\ FP_1 / EPC \geq 4\% \\ (FP_1 + FP_2) / EPC \geq 8\% \end{cases} \quad (\text{ratio Cooke})$$

Les encours pondérés de crédit concerne le bilan et le hors bilan et les pondérations sont les suivantes (BESSIS [1995]) :

- «0% pour les créances sur des Etats de l'OCDE,
- 20% pour les créances sur les banques et les collectivités locales d'Etats de l'OCDE;
- 50% pour les créances garanties par une hypothèque ou crédit bail immobilier;
- 100% pour tous les autres éléments d'actifs, dont les crédits à la clientèle.»

L'Accord de Bâle a été adopté par le Parlement Européen en 1993. La réglementation a évolué progressivement pour prendre en compte les risques de marché. Contrairement au risque de crédit, deux approches existent pour calculer les risques de marché. La première approche est une méthode **forfaitaire**, alors que la seconde approche autorise les banques à utiliser un modèle interne. L'idée principale est d'inciter les banques à construire des modèles robustes pour calculer les risques de marché et donc d'obtenir des exigences en fonds propres beaucoup plus réalistes.

Remarque 1 *Le site internet de la Reserve Bank of New Zeland contient un exemple complet de calcul des ratios **TIER 1** et **TIER 2**. Le lien direct est*

<http://www.rbnz.govt.nz/banking/regulation/0091769.html>

3.3 Bâle II et le nouveau ratio de solvabilité

Le Comité de Bâle a publié le 16 janvier 2001 le second document consultatif pour une réforme (en profondeur) de la réglementation prudentielle. Celui-ci fait suite à la publication en juin 1999 d'un premier document consultatif et aux diverses réactions de la profession. Dans le calendrier original de la réforme, une seconde période consultative devait avoir lieu jusqu'au 31 mai 2001 pour permettre la rédaction finale du nouvel Accord pour fin 2001. L'implémentation de celui-ci était prévu pour janvier 2004.

Le calendrier original est actuellement retardé, et l'implémentation n'est désormais prévue qu'en 2005 pour plusieurs raisons :

- Le Comité de Bâle n'est pas satisfait des réponses fournies par les banques aux questionnaires **QIS (Quantitative Impact Study)**.
- La calibration aux données s'avère difficile.
- Il existe des désaccords importants entre le Comité de Bâle et les associations de banques (par exemple, sur la part du risque opérationnel).
- Enfin, plusieurs questions méthodologiques ne sont pas résolues.

Les motivations du nouvel Accord sont multiples. La première d'entre elle est la modification de l'assiette des risques :

$$\frac{FP_1 + FP_2}{\text{risque de crédit} + \text{risque opérationnel} + \text{risque de marché}} \geq 8\%$$

L'assiette des risques intègre désormais le risque opérationnel. Dans la version de janvier 2001, le Comité de Bâle proposait la répartition suivante de la charge en fonds propres

Type de risque	Exigence en FP	Répartition
Crédit	6%	75%
Marché	0.4%	5%
Opérationnel	1.6%	20%
Total	8%	100%

La seconde motivation de l'Accord est de rapprocher la réglementation des pratiques en vigueur dans l'industrie pour le pilotage des risques, afin que l'exigence en fonds propres sont plus sensible au risque réel (**more risk sensitive**) de la banque. A terme, l'idée est d'autoriser les banques, sous certaines conditions, d'utiliser les modèles internes pour mesurer le risque de crédit et le risque opérationnel, comme cela se fait déjà pour le risque de marché.

[...] Le renforcement de l'égalité des conditions de concurrence et le meilleur alignement des exigences de fonds propres sur les risques sous-jacents sont [...] deux finalités importantes du futur dispositif. [...] Le nouveau ratio permettra non seulement de faire converger le capital réglementaire — souci des autorités de contrôle — et le capital économique — souci des établissements — mais aussi, au-delà des exigences de fonds propres, de poser un véritable cadre prudentiel pour le contrôle bancaire des prochaines années (PUJAL [2001]).

Le nouveau dispositif se décompose en trois piliers :

1. First Pillar : Minimum Capital Requirement
2. Second Pillar : Supervisory Review Process
3. Third Pillar : Market Discipline

Le premier pilier concerne l'exigence minimale en fonds propres. Le traitement du risque de marché reste inchangé. Le traitement du risque de crédit est revu en profondeur. Trois méthodes sont désormais possibles pour mesurer le risque de crédit :

- L'approche standardisée est une version actualisée de l'approche réglementaire actuelle. En particulier, la classification est beaucoup plus fine et la notation externe (**rating**) est prise en compte.

- L’approche **IRB (Internal Ratings Based Approach)** est une méthode de calcul basée sur des mesures **internes** des probabilités de défaillance (**Probability of Default** ou **PD**) et des mesures **externes** des autres paramètres du modèle.
- Dans l’approche **IRB** “avancée”, la banque estime aussi le taux de perte (**Loss Given Default** ou **LGD**), l’exposition au défaut (**Exposure At Default** ou **EAD**) et le traitement des garanties.

La méthode de calcul (relativement complexe — voir le chapitre 10 page 105) est standardisée et imposée par le Comité de Bâle. Pour l’instant, le Comité de Bâle n’envisage pas d’autoriser l’utilisation de modèles internes. Le risque opérationnel fait maintenant partie de l’assiette des risques. Comme pour le risque opérationnel, le Comité de Bâle propose trois méthodes pour le mesurer :

1. La méthode **Basic Indicator Approach (BIA)**.

Dans ce cas, le risque opérationnel d’un établissement est appréhendé à partir d’un indicateur financier. Le Comité de Bâle propose de retenir le revenu brut GI comme proxy. La charge en capital K se calcule alors très facilement à partir de la formule

$$K = \alpha \times GI \quad (3.1)$$

où α est un coefficient fixé par les autorités réglementaires. Un premier calcul du Comité de Bâle donne α égal à 30%.

2. La méthode **Standardized Approach (SA)**.

Dans cette approche, l’établissement financier est divisé en business lines. Un indicateur financier FI est alors utilisé pour calculer la charge en capital spécifique à la business line i

$$K(i) = \beta(i) \times FI(i) \quad (3.2)$$

La charge en capital pour la banque au titre du risque opérationnel correspond alors à la somme des charges en capital spécifiques :

$$K = \sum_i K(i) = \sum_i \beta(i) \times FI(i) \quad (3.3)$$

Pour l’instant, le Comité de Bâle a retenu 7 business lines et n’envisage pas de prendre en compte les effets de diversification (c’est-à-dire les corrélations).

3. La méthode **Internal Measurement Approach (IMA)**.

C’est l’approche la plus sophistiquée. Le Comité de Bâle a adopté un découpage matriciel du risque opérationnel. Pour une business line i et un type de risque j , la charge en capital est définie comme l’*unexpected loss* $UL(i, j)$ au seuil de confiance de 99%. La formule suivante est utilisée pour calculer $UL(i, j)$:

$$K(i, j) := UL(i, j) = EL(i, j) \times \gamma(i, j) \times RPI(i, j) \quad (3.4)$$

où $EL(i, j)$ représente la perte moyenne, γ est un facteur d’échelle réglementaire et RPI est l’indice de profil de risque. Notons que le Comité de Bâle propose de calculer la perte moyenne comme le produit de trois termes :

$$EL(i, j) = EI(i, j) \times PE(i, j) \times LGE(i, j) \quad (3.5)$$

où $EI(i, j)$ est l’indicateur d’exposition, $PE(i, j)$ est la probabilité d’occurrence d’une perte unitaire et $LGE(i, j)$ est le montant de la perte unitaire. En combinant ces deux équations, nous obtenons l’expression suivante pour $UL(i, j)$:

$$UL(i, j) = EI(i, j) \times PE(i, j) \times LGE(i, j) \times \gamma(i, j) \times RPI(i, j) \quad (3.6)$$

Parmi les 5 paramètres nécessaires au calcul, seul γ est un paramètre externe fourni par les autorités réglementaires. Comme pour la méthode **SA**, la charge en capital pour la banque au titre du risque opérationnel correspond alors à la somme des charges en capital spécifiques :

$$K = \sum_i \sum_j UL(i, j) \quad (3.7)$$

Depuis la publication du second document consultatif, la position du Comité de Bâle a évolué :

- Les risques opérationnels pourraient représenter moins de 20% de l'exigence en fonds propres.
- L'approche **IMA** est remplacée par l'approche **AMA (Advanced Measurement Approach)** qui pourrait être composée de plusieurs méthodes (**IMA, ScoreCard, LDA, etc.**). Il n'est donc pas exclu que le Comité de Bâle autorise l'utilisation des modèles internes **LDA**.

Le second pilier concerne le processus de surveillance. Les autorités de contrôle (la Commission Bancaire en France) disposeront d'un pouvoir beaucoup plus important. Enfin, le troisième pilier vise à promouvoir une discipline de marché plus efficace (communication publique de la structure du capital, de l'allocation de fonds propres, de l'exposition aux risques et des pertes).

Bibliographie

- [1] International convergence of capital measurement and capital standards, *Basle Committee on Banking Supervision*, July 1988, N° 4
- [2] Capital Adequacy Directive (CAD), directive 93/6/CEE du CONSEIL du 15 mars 1993 sur l'adéquation des fonds propres des entreprises d'investissement et des établissements de crédit, *Journal Officiel des Communautés Européennes*, N° L 141/1-26
- [3] Amendment to the capital accord to incorporate market risks, *Basle Committee on Banking Supervision*, January 1996, N° 24
- [4] A new capital adequacy framework, *Basle Committee on Banking Supervision*, June 1999, N° 50
- [5] The New Basel Capital Accord — Consultative Document, *Basle Committee on Banking Supervision*, January 2001
- [6] Overview of The New Basel Capital Accord — Consultative Document, *Basle Committee on Banking Supervision*, January 2001
- [7] The New Basel Capital Accord : an explanatory note — Consultative Document, *Basle Committee on Banking Supervision*, January 2001
- [8] Basel part one : the new Accord, *Risk Magazine*, 14, February, 24-29
- [9] The new Accord delayed, *Risk Magazine*, 14, July, 29-31
- [10] BESSIS, J. [1995], *Gestion des Risques et Gestion Actif-Passif des Banques*, Dalloz, Paris
- [11] DUBERNET, M. [1997], *Gestion Actif-Passif et Tarification des Services Bancaires*, Economica, Paris
- [12] PUJAL, A. [2001], Un nouveau ratio de solvabilité en 2004, *Banque Magazine*, 622, Février, 36-39

4

La notion de Capital Economique et l'allocation de fonds propres

4.1 La problématique

- *Cadre d'analyse* : Utilisation d'un modèle interne d'allocation de fonds propres sur base économique.
- *Objectif* : Création de valeur (**EVA**) pour les actionnaires (**Shareholder Value Added analysis** — **SVA**).
- *Moyens* : Calcul de la rentabilité **économique** de chaque opération, de chaque projet (c'est-à-dire de la rentabilité de chaque projet en tenant compte du montant de fonds propres — *capital économique* consommé).

4.2 La notion de capital économique

Chaque opération (risquée) mobilise des fonds propres de la banque. Ceux-ci peuvent être calculés de façon réglementaire. Dans ce cas, on parle de **fonds propres forfaitaires**. Cependant, le calcul ne tient pas compte des effets de diversification, de la nature du portefeuille de la banque, de la signature (rating) de la contrepartie, etc. Ceux-ci peuvent aussi être calculés à partir de modèles internes, qui sont (supposés être) plus rationnels. Dans ce cas, on parle de **fonds propres économiques** (ou capital économique = mesure juste du risque).

4.3 La construction d'un modèle interne

La valeur en risque est l'outil de mesure du capital économique. Elle permet donc de savoir combien il faut allouer de capital économique à un nouveau projet, mais ce n'est pas **un modèle d'allocation**. Un modèle d'allocation est un modèle qui permet d'allouer de façon **efficente** les fonds propres entre différentes activités ou différents projets. Deux approches existent : l'approche *bottom-up* et l'approche *top-down*.

4.3.1 L'approche *bottom-up*

L'approche *bottom-up* peut être considérée comme un modèle d'allocation de fonds propres **et/ou** comme un suivi de la consommation de fonds propres. Le principe est de mesurer le capital économique au niveau le plus fin, c'est-à-dire au niveau de la transaction, puis de consolider ces capitaux économiques à des niveaux moins détaillés. De par sa nature, l'approche *bottom-up* permet effectivement de suivre la consommation en fonds propres.

Plusieurs questions se posent alors :

- Comment décider la réalisation ou non d'une opération ?
- Comment choisir entre deux opérations ?
- Que faire lorsque l'enveloppe allouée est entièrement consommée ?

Nous voyons bien que dans ce contexte le principe de "premier arrivé, premier servi" ne tient plus.

Une première approche considère le principe d'Euler. Soit un portefeuille avec un vecteur de stratégie u . Notons \mathcal{R} la mesure de risque et \mathcal{K} le vecteur de capital économique. Nous pouvons alors définir une mesure de performance *raisonnable* par (TASCHE [1999], théorème 4.4) :

$$a(u) = \partial_u \mathcal{R}(u) \quad (4.1)$$

Le capital économique est alors défini par $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_i(u))$ avec

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_i(u) &\equiv \frac{u_i}{\mathcal{R}(u)} a_i(u) \\ &= \frac{u_i}{\mathcal{R}(u)} \partial_u \mathcal{R}(u) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Dans le cas d'une mesure de risque de type *Value-at-Risk* gaussienne, nous retrouvons le principe de covariance. Une deuxième approche considère l'égalisation des mesures de performance ajustée du risque (**RAPM**) :

1. Roc (return on regulatory capital)
2. Rorac (return on risk-adjusted capital)
3. Raroc (risk-adjusted return on regulatory capital)
4. Rarorac (risk-adjusted return on risk-adjusted capital)

Par exemple, la mesure RORAC est définie par

$$\text{RORAC} = \frac{\text{Revenu net}}{\text{Capital économique}} \quad (4.3)$$

L'idée sous-jacente est alors de comparer cette mesure à une cible, et seuls les projets qui présentent des performances supérieures à cette cible seront retenus.

Considérons M activités relativement indépendantes. Notons \mathcal{K}_m le capital économique alloué à la m -ième activité. Soit $\varphi(\mathcal{K})$ la fonction qui relie le capital économique et le RORAC. \mathbf{C} représente le capital de la banque. Nous pouvons alors formaliser le problème d'allocation de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathcal{K}_1 + \dots + \mathcal{K}_M \leq \mathbf{C} \\ \varphi_m(\mathcal{K}_m) = \varphi_{m'}(\mathcal{K}_{m'}) \end{cases} \quad (4.4)$$

A moins de considérer l'indépendance entre les différentes activités (ou de faire des hypothèses simplificatrices), l'approche *bottom-up* est difficile à utiliser pour faire un véritable exercice d'allocation de fonds propres. En fait, cette approche est beaucoup plus appropriée pour suivre la consommation de fonds propres, et à posteriori pour mesurer la véritable rentabilité de chaque activité.

4.3.2 L'approche top-down

Contrairement à l'approche *bottom-up* qui consiste à consolider le risque du portefeuille bancaire depuis le niveau élémentaire (la transaction) jusqu'à l'unité d'allocation (la ligne de métier), l'approche *top-down* consiste à désagréger une information mesurée sur l'ensemble du portefeuille bancaire, celle-ci étant utilisée comme un **proxy** pour la mesure de risque.

Concrètement, selon la méthodologie **EaR (Earnings-at-Risk)** usuellement mise en œuvre dans ce contexte, le risque d'une activité est directement relié à la volatilité de son résultat. De ce point de vue,

la volatilité est perçue comme un **intégrateur de l'ensemble des risques** associés à cette activité. Cette démarche est une étape préliminaire naturelle de l'allocation puisqu'elle adopte le point de vue de l'actionnaire qui investit son capital dans différentes activités bancaires assimilées à autant d'actifs financiers. C'est donc une méthode proche de la théorie du portefeuille, mais avec des particularités liées à l'activité bancaire.

Remarque 2 *Vous trouverez un exemple de méthode top-down dans l'article de BAUD, FRACHOT, IGIGABEL, MARTINEU et RONCALLI [1999].*

Bibliographie

- [1] BAUD, N., A. FRACHOT, P. IGIGABEL, P. MARTINEU et T. RONCALLI [1999], An Analysis Framework for Bank Capital Allocation, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [2] DENAULT, M. [1999], Coherent allocation of risk capital, Swiss Federal Institute of Technology, *Working Paper*
- [3] FROOT, K.A. et J.C. STEIN [1998], Risk management, capital budgeting, and capital structure policy for financial institutions : an integrated approach, *Journal of Financial Economics*, **47**, 55-82
- [4] PUNJABI, S. [1998], Many happy returns, *Risk*, **June**, 71-76
- [5] TASCHE, D. [1999], Risk contributions and performance measurement, Zentrum Mathematik, TU München, *Working Paper*

Deuxième partie

Le risque de marché

5

La réglementation prudentielle

Le développement des marchés financiers dans les années 80 et surtout dans les années 90, a conduit les autorités de contrôle bancaire et les autorités de marché à prendre un certain nombre de décisions pour réguler ces marchés. En particulier, ces décisions ont concerné fortement les risques de marché. Actuellement, ils existent plusieurs textes réglementaires relatifs à ce sujet. Nous pouvons citer par exemple celui de la Commission Bancaire daté du 3 Novembre 1997 et celui de la CAD [1]. Ces textes réglementaires ont eu pour effet de pousser les établissements financiers à développer des modèles internes de mesure de risque.

Avant de situer les enjeux pour une banque, nous devons préciser dans un premier temps la notion de risque de marché. Celui-ci est présenté de la manière suivante dans le texte de la Commission Bancaire (référence [3], section 1) :

Le risque de marché, défini comme le risque de pertes sur les positions du bilan et du hors-bilan à la suite de variations des prix de marché, recouvre :

– Les risques relatifs aux instruments liés aux taux d'intérêt et titres de propriété du portefeuille de négociation ;

– Le risque de change et le risque sur produits de base encourus pour l'ensemble de l'activité de bilan et hors-bilan.

Nous remarquons tout de suite le caractère **potentiel** de la perte induit par cette définition. Et nous voyons aussi que le périmètre considéré est relativement large. Nous devons noter tout de même que cette perte doit être liée à des possibles variations de prix de marché.

De la même manière que pour le risque de crédit, les exigences de fonds propres relatives aux risques de marché s'appliquent sur une base consolidée. Pour les mesurer, les établissements ont le choix entre deux types d'approches :

1. l'approche standard présentée dans les différentes annexes du document [3]. Celles-ci concernent les catégories suivantes de risques et «sont additionnées de manière arithmétique» ;

Catégorie de risque	Périmètre de calcul
Risque de Taux (risque général et risque spécifique)	Portefeuille de négociation
Risque sur Titres de Propriété (risque général et risque spécifique)	Portefeuille de négociation
Risque de Change	Ensemble des opérations qu'elles appartiennent au portefeuille de négociation ou non
Risque sur matières premières	Ensemble des opérations qu'elles appartiennent au portefeuille de négociation ou non
Risques optionnels	Options associées à chacune des catégories de risques précédentes

2. ou l'approche *modèles internes*. L'utilisation de cette méthode, subordonnée à la réalisation de certaines conditions, «est soumise à l'approbation explicite du Secrétariat Général de la Commission Bancaire».

Le problème de l'utilisation conjointe des modèles internes et de la méthodologie standardisée fait l'objet d'un paragraphe dans l'annexe 7 du document [3]. La position de la Commission Bancaire sur ce point est donc la suivante :

Ainsi, un établissement commençant à utiliser des modèles pour une ou plusieurs catégories de facteurs de risque doit en principe étendre progressivement ce système à tous ses risques de marché et ne peut plus, pour les risques évalués, revenir à la méthodologie standardisée (à moins que la Commission Bancaire ne lui ait retiré son agrément pour ses modèles).

La Commission Bancaire tolère donc l'utilisation combinée des modèles internes et de la méthode standardisée. Mais elle prête une attention particulière à la permanence des méthodes, ainsi qu'à leur évolution afin de s'orienter vers un modèle global qui tient compte de l'**ensemble** des risques de marché.

Pour la banque, en plus de fournir une mesure plus juste des risques de marché, la construction d'un modèle interne est un projet qui permet aussi d'assainir son système d'information, notamment sur le stockage et la qualité des données. Mais le véritable enjeu concerne l'exigence en fonds propres. Nous pouvons penser qu'une mesure plus réfléchie permet de mieux mesurer la consommation en fonds propres des activités de marché. Un modèle interne est donc un élément de réponse dans le cadre d'un modèle d'allocation de fonds propres, comme peuvent l'être les outils RAROC.

La lecture des textes réglementaires est intéressante à plusieurs titres. Elle permet de dégager les critères définissant *un bon modèle selon les autorités réglementaires*, c'est-à-dire de définir les normes de validation. Elle permet aussi de s'interroger sur les aspects méthodologiques et le choix d'un modèle. Elle permet enfin de repositionner les pratiques actuelles en matière de gestion du risque de marché par rapport aux exigences réglementaires.

5.1 Les textes officiels

Il existe plusieurs textes officiels relatifs à la réglementation des risques de marché. En ce qui nous concerne, nous nous intéressons principalement à celui de la Commission Bancaire et celui de la CAD. Ce sont les deux textes (l'un provenant d'une autorité de réglementation française, l'autre d'une autorité européenne) qui s'appliquent aux établissements financiers français.

La réglementation de la Commission Bancaire a fait l'objet de plusieurs révisions importantes qui sont présentées dans l'article [2] de la *Revue d'Economie Financière*. Dans les années 80, suite à la déréglementation et la libéralisation des mouvements de capitaux, les opérations de marché ont connu un essor considérable. Jusque là, les risques de marché étaient relativement peu contrôlés. Une des conséquences de la crise d'octobre 1987 a été la signature d'un premier accord international (l'Accord de

Bâle) sur le risque bancaire, mais celui-ci concernait plus spécifiquement «le risque de crédit, c'est-à-dire le risque de défaillance de la contrepartie». Ce n'est «qu'en 1993 que des méthodes standardisées pour mesurer les risques de marché ont commencé à être proposées dans le cadre du Comité de Bâle, sans encore faire l'objet d'application en termes de contrôle». Sous la pression de certains événements marquants du début des années 1990 (en particulier, la faillite de la banque Barings), de nouveaux travaux ont vu le jour, notamment l'amendement à l'Accord sur les fonds propres de 1988 concernant les risques de marché du comité de Bâle en janvier 1996. C'est sur ce texte, ainsi que sur la directive 93/6/CEE du Conseil de l'Union Européenne du 15 mars 1993, que s'appuie très fortement la réglementation de la Commission Bancaire.

Les institutions financières ont la possibilité d'utiliser leurs propres modèles internes de mesure de risques de marché à la place des méthodes *standardisées*. Ces modèles internes doivent cependant être validés par l'autorité de tutelle, c'est-à-dire qu'ils doivent respecter des normes qualitatives et des critères qualitatifs et quantitatifs. Nous développons ceux-ci dans les paragraphes qui suivent.

5.2 Les normes générales

Les modèles internes doivent remplir les conditions minimales suivantes (section 1 de l'annexe 7 du document [3]) :

- «le système de gestion des risques de l'établissement repose sur des principes sains et mis en œuvre de manière intègre ;
- l'établissement possède en nombre suffisant de personnel qualifié pour l'utilisation de modèles élaborés non seulement dans le domaine de la négociation, mais aussi dans ceux du contrôle des risques, de l'audit interne et, du postmarché ;
- les modèles de l'établissement ont fait la preuve sur une durée significative qu'ils mesurent les risques avec une précision raisonnable ;
- l'établissement effectue régulièrement des simulations de crise selon les modalités précisées à la section 5.5.3.»

Dans la même section, la Commission Bancaire précise la procédure de soumission du modèle et les modalités d'utilisation :

*L'utilisation des modèles internes pour le calcul de l'exigence prudentielle en fonds propres est soumise à l'**approbation préalable** de la Commission Bancaire, après une période de suivi et de test en situation réelle.*

5.3 Les critères qualitatifs

Les systèmes de gestion des risques de marché doivent **respecter** certains critères qualitatifs. Les conséquences sont relativement importantes, puisque «le degré de conformité à ces critères peut conditionner le niveau du multiplicateur. Seuls les établissements les respectant **intégralement** pourront prétendre au multiplicateur minimal.» Ce multiplicateur (qui correspond au $(3 + \xi)$ de la formule 5.1 page 31) intervient dans le calcul de l'exigence de fonds propres et doit être considéré comme un paramètre de pénalisation.

L'ensemble des critères qualitatifs est présenté dans le paragraphe 2 de l'annexe 7 du document [3]. Nous présentons ici un résumé de ces différents critères :

- a. L'établissement financier doit disposer «d'**une unité de contrôle des risques**, responsable de la configuration et de l'exploitation du système de gestion des risques, **indépendante des unités de négociation**.» Elle doit «établir et analyser des rapports **quotidiens** sur les résultats produits par les modèles ainsi qu'une évaluation de l'utilisation des limites de négociation et **rend compte directement à l'organe exécutif de l'établissement**.»
- b. Cette unité doit effectuer régulièrement («au moins **trimestriellement**») des contrôles *ex-post*.

- c. «L'organe délibérant et l'organe exécutif doivent être **activement associés** au processus de contrôles des risques et le considérer comme **un aspect essentiel de l'activité** de l'établissement.»
- d. «Les rapports quotidiens doivent être revus par des responsables disposant de l'expertise et de l'autorité suffisantes pour **exiger** au besoin une réduction des positions prises par un opérateur **voire une diminution** du degré d'exposition global de la banque.»
- e. «Les modèles internes doivent être étroitement intégrés à la gestion **journalière** des risques.»
- f. «Le système de mesure des risques doit être utilisé **conjointement** avec les limites opérationnelles.»
- g. «Un programme rigoureux de simulations de crise doit **régulièrement compléter** l'analyse des risques fondée sur les résultats quotidiens des modèles internes. Lorsque ses conclusions font apparaître une vulnérabilité particulière à un ensemble donné de circonstances, des mesures appropriées doivent être prises rapidement pour réduire ces risques.»
- h. «Les établissements doivent **disposer d'un programme de vérification du respect des règles et procédures** internes relatives au fonctionnement du système de mesure des risques. Ce système fait l'objet d'une **documentation** décrivant les principes de base et le détail des techniques de mesure utilisées.»
- i. «Une **analyse indépendante** du système de mesure des risques doit être effectuée régulièrement dans le cadre du processus d'un audit interne de l'établissement. Elle doit porter à la fois sur les activités des unités de négociation et **sur celles de l'unité indépendante de contrôle des risques**. Réalisée à intervalles réguliers, si possible **annuellement**, elle doit couvrir au minimum :
- le caractère adéquat de la documentation concernant le système et les processus de mesure des risques ;
 - l'organisation de l'unité de contrôle des risques ;
 - l'intégration des mesures des risques de marché dans la gestion journalière des risques ;
 - les procédures d'agrément des modèles et systèmes de valorisation ;
 - la validation de toute modification significative du processus de mesure des risques ;
 - la couverture par le modèle des différents risques de marché ;
 - la fiabilité et l'intégrité du système d'information et des tableaux de bord destinés aux responsables ;
 - **la précision et l'exhaustivité des données relatives aux positions ;**
 - le contrôle de la cohérence, de la mise à jour et de la fiabilité des données utilisées dans les modèles internes ainsi que de l'indépendance des sources ;
 - l'exactitude et la pertinence des hypothèses en matière de **volatilité et corrélations ;**
 - la vérification de la précision des modèles par le biais d'analyses *ex-post* fréquentes.»

Plusieurs commentaires peuvent être faits sur ces critères qualitatifs. Tout d'abord, la Commission Bancaire insiste fortement sur l'organisation du système des risques et notamment sur l'unité de contrôle. Sans fournir la structure désirée du système, elle indique des signaux forts pour l'unité de contrôle concernant **son indépendance, son pouvoir et sa compétence**. La Commission Bancaire insiste aussi sur la transparence des modèles. Ils doivent notamment faire l'objet d'une description écrite détaillée et doivent être alimentés par **des bases de données fiables**.

5.4 Les critères quantitatifs

Le choix des modèles est laissé aux établissements financiers. Mais ils doivent respecter un certain nombre de règles, qui sont décrites dans le paragraphe 5 de l'annexe 7 du document [3] :

1. «La *perte potentielle* est calculée quotidiennement.»
2. «Le *niveau de confiance* unilatéral requis est de 99%.»
3. «Il est appliqué un choc instantané sur les prix équivalent à une variation sur dix jours correspondant à une *période de détention* de dix jours ouvrés.»

4. «La *période d'observation* (échantillon historique) pour le calcul de la perte potentielle doit être au minimum d'un an.»
5. «Les établissements doivent mettre à jour leurs *séries de données au moins une fois tous les trois mois* et plus fréquemment en cas d'accroissement notable des volatilités observées.»
6. «Les établissements peuvent prendre en compte les *corrélations* empiriques **entre tous les facteurs** de risques sous réserve que le système de mesure de celles-ci soit fiable, appliqué de manière intégrée et que **la qualité des estimations soit suffisante**.»
7. «Les modèles doivent appréhender avec précision les risques particuliers liés au **caractère non linéaire** du prix des options.»
8. «Chaque établissement doit satisfaire, sur une base journalière, à *l'exigence de fonds propres* correspondant à **la valeur la plus élevée entre** : i) la perte potentielle du jour précédent ; et ii) la moyenne des pertes potentielles sur les soixante derniers jours ouvrés, à laquelle est appliqué un facteur de multiplication.»
9. «La Commission Bancaire attribue à chaque établissement un *facteur multiplicatif* en fonction de la qualité de son système de gestion des risques, avec un minimum de 3, le *complément éventuel*, compris entre 0 et 1, étant directement lié aux performances de son modèle, évaluées *a posteriori*.»
10. «Lorsque le risque spécifique inhérent aux instruments liés au taux d'intérêt et aux titres de propriété n'est pas pris en compte de manière satisfaisante dans leurs modèles, les établissements sont assujettis à une exigence de fonds propres distincte destinée à couvrir ce *risque* calculée selon la méthodologie standard.»

Plusieurs des critères précédents sont discutés dans la section concernant les aspects méthodologiques. Pour résumer, **les établissements doivent calculer la perte potentielle quotidiennement pour une période de détention de 10 jours**. Notons cette perte potentielle $P(t)$ à la date t (jour ouvré). A chaque date t , l'établissement calcule l'exigence de fonds propres $FP(t)$ de la façon suivante

$$FP(t) = \max \left(P(t-1), (3 + \xi) \times \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} P(t-i) \right) \quad (5.1)$$

avec ξ le complément éventuel ($0 \leq \xi \leq 1$). Il est donc important de **disposer d'une bonne mesure des risques** (c'est-à-dire de la perte potentielle) puisque celle-ci conditionne totalement l'exigence en fonds propres. **Dans le cadre d'une banque universelle, il est important de veiller à ce que la mesure des risques de marché ne soit ni sur-estimée, ni sous-estimée afin de ne pas défavoriser ou favoriser l'activité Corporate Marché au détriment des autres activités de la banque.** De même, nous pouvons supposer que la Commission Bancaire attribuera automatiquement un coefficient multiplicateur égal à 4 lorsque la mesure de risque lui sera présentée pour la première fois. Ce n'est qu'au vu du comportement de cette mesure que la Commission Bancaire modifiera ce coefficient et le fixera peut-être à 3. Il convient donc de prendre conscience de l'importance des réflexions menées en amont sur la mesure et sur la nécessité de la période de test.

Remarque 3 *L'exigence en fonds propres est calculée pour une période de détention de 10 jours. Cependant, cette période de détention est ramenée à un jour lorsque l'analyse concerne le calcul des exceptions, c'est-à-dire le backtesting. Il convient donc de bien distinguer ces deux mesures de risque.*

Deux points sont importants dans la mise en place du modèle. Le point 6 précise que nous devons prendre en compte l'ensemble des facteurs de marché. Il n'est donc pas nécessaire de considérer chaque produit comme un facteur de marché. Nous pouvons donc effectuer des regroupements (notamment pour les produits de taux) à partir de techniques d'analyse de données pour construire ces facteurs. Mais ces facteurs pris dans leur ensemble doivent parfaitement refléter les possibilités de variation des prix. Cela s'applique en particuliers aux produits optionnels (point 7). Il n'est pourtant pas précisé les types de non-linéarité que doit appréhender le modèle. Il est communément admis que les convexités d'ordre 1 et 2 par rapport au prix du sous-jacent (risques de Delta et Gamma) doivent être pris en compte. Dans l'annexe 6, il est de plus précisé que nous devons tenir aussi compte de la «sensibilité des options à la volatilité des sous-jacents (risque vega)». Nous pouvons donc supposer que les modèles de mesure de risque des options doivent être basés sur des modèles qui prennent en compte le *smile* de volatilité. Enfin,

la Commission Bancaire est assez imprécise concernant le cinquième point. Elle ne précise pas ce qui est considéré comme un accroissement notable de la volatilité. L'appréciation est laissée à la discrétion de l'unité de contrôle.

5.5 Autres considérations

Dans ce paragraphe, nous présentons des points particuliers relatifs aux facteurs de marché, au risque spécifique et aux simulations de crise.

5.5.1 Définition des facteurs de risque de marché

D'une manière générale, les grandes catégories de facteurs concernent :

- Les taux d'intérêt ;
- Les cours de change ;
- Les prix des titres de propriété et de produits de base¹ ;
- La volatilité des options correspondantes.

Plus précisément, la commission Bancaire propose de définir les facteurs de risque comme «les paramètres de marché qui affectent la valeur des positions de négociation de l'établissement» et propose un certain nombre de recommandations :

1. Pour les taux d'intérêt, un ensemble de facteurs de risque doit exister pour chaque monnaie.
 - La modélisation de la courbe des taux doit faire intervenir «plusieurs bandes de maturité, afin d'appréhender la variation de la volatilité des taux tout au long de l'échéancier ; à chaque bande correspond **au moins** un facteur de risque.»
 - Le système de mesure doit inclure «des facteurs distincts destinés à saisir le risque lié aux écarts de taux entre types d'instruments et/ou catégories d'émetteurs.»
2. Pour les cours de change, on doit prévoir «des facteurs correspondant au cours contre monnaie nationale de chaque devise.»
3. «Les facteurs de risque doivent exister pour chacun des marchés de titres de propriété. Au minimum, un facteur de risque doit appréhender les fluctuations des prix d'un marché donné (indice de marché). Une méthode plus détaillée consiste à définir des facteurs de risque correspondant aux différents secteurs du marché. L'approche la plus complète consiste à retenir comme facteurs de risque les titres spécifiques.»
4. Pour les produits de base, un facteur de risque unique peut être admis lorsque les positions sont faibles. En cas d'activité plus importante, les modèles doivent tenir compte des différences entre qualités du même produit et maturités.
5. Pour les options, on doit tenir compte de «facteurs de risque appréhendant la volatilité des taux/prix/-cours sous-jacents.» Lorsque les positions sont importantes ou lorsque l'actif conditionnel est complexe, on doit utiliser «des volatilités différenciées en fonction des échéances et le cas échéant des prix d'exercice.»

Ce dernier point est important, puisque la Commission Bancaire précise comment doit être pris en compte le risque de volatilité. D'une manière générale, l'aspect *volatility skew*² doit être intégré dans

¹Les risques de marché concernent aussi les produits sur matières premières. Cela apparaît clairement dans l'actualisation du 31 décembre 1998 (référence [4]) :

Enfin, par instruments sur produits de base, il faut comprendre tous contrats à terme ou d'échange, toutes options achetées ou tous produits dérivés similaires ayant pour sous-jacents des contrats sur produits énergétiques, productions agricoles ou métaux non ferreux (par exemple aluminium, cuivre et zinc), ainsi que les autres métaux non précieux.

²La notion de *volatility skew* (ou *volatility smile*) correspond au fait que la volatilité implicite des options de même maturité n'est pas constante et qu'elle dépend des prix d'exercice. Si nous représentons sur un graphe la volatilité en fonction du prix d'exercice, nous obtenons une courbe qui ressemble souvent à un sourire.

le modèle. Il est aussi intéressant de remarquer la construction du troisième point. A sa lecture, la meilleure méthode consisterait à prendre en compte la totalité des prix de titres pour définir les facteurs de risque. Cependant, ce type d'approche pose des problèmes statistiques importants liés à la théorie de convergence des estimateurs, de telle sorte que, concrètement, une application à la lettre du point 3 peut être dangereuse.

5.5.2 Traitement du risque spécifique

Nous rappelons que le risque spécifique « *vise à tenir compte du risque de contrepartie lié à l'émetteur de l'instrument* » (document [2], page 9). Les modèles internes, qui prennent en compte ce risque spécifique, doivent satisfaire les critères suivants :

- «Le modèle est apte à expliquer **ex ante** les variations historiques des valeurs du portefeuille,
- il fournit la preuve de sa sensibilité au risque de concentration dans la composition du portefeuille,
- sa fiabilité de fonctionnement demeure **bonne** dans un environnement **adverse**,
- la qualité de ses performances est justifiée par un contrôle ex-post (backtesting),
- la méthodologie sous-jacente doit être en mesure de prendre en compte le risque d'événements imprévisibles (OPA, OPE, etc.) ainsi que le risque de défaillance de l'émetteur.»

La conséquence immédiate de la non prise en compte du risque spécifique dans le modèle est que

... les exigences de fonds propres pour la couverture du risque spécifique feront l'objet d'une surcharge en capital.

Le mode de calcul de l'exigence de fonds propres est relativement peu clair dans ce cas (voir page 53 du document [3]). Néanmoins, la Commission bancaire fournit la formule suivante :

- soit $3 \times (VaR \text{ globale}) + (VaR \text{ risque spécifique du portefeuille global})$,
- soit $3 \times (VaR \text{ globale}) + (VaR \text{ des sous-portefeuilles contenant du risque spécifique})$.

Il est difficile de faire le lien entre cette formule et la formule (5.1). Dans l'actualisation du 31 décembre 1998 (référence [4]), la Commission Bancaire est encore moins précise sur le risque spécifique puisque le paragraphe traitant de ce sujet se réduit à « *une peau de chagrin* ». Néanmoins, nous pouvons penser que le coefficient 3 est en fait le coefficient multiplicatif $3 + \xi$. En notant VaR_{sp} la VaR du risque spécifique (c'est-à-dire la VaR risque spécifique du portefeuille global ou la VaR des sous-portefeuilles contenant du risque spécifique), il est possible que la vraie formulation soit

$$FP(t) = \max \left(P(t-1) + VaR_{sp}(t-1), (3 + \xi) \times \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} P(t-i) + \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} VaR_{sp}(t-i) \right) \quad (5.2)$$

Il est intéressant de noter que la Commission Bancaire fait explicitement référence à la VaR (Value-at-Risk) que nous pouvons traduire sous le terme de « *valeur en risque* ». Même si cela n'est pas affirmé parfaitement, la méthode interne de référence est clairement la VaR .

5.5.3 Simulations de crise

Nous rappelons que les simulations de crise font partie des normes générales d'acceptation de la méthode interne. C'est donc un point important dans la mise en place d'un modèle interne. Celles-ci font d'ailleurs l'objet d'un paragraphe dans le texte de la Commission Bancaire. 7 points sont alors évoqués :

1. «Les établissements... **doivent se doter d'un programme de simulations** de crise à la fois rigoureux et complet. Ces simulations, qui permettent d'identifier les événements susceptibles d'avoir une forte incidence, constituent un **élément-clé** de l'évaluation du niveau des risques.
2. Elles doivent couvrir toute la gamme des facteurs, y compris les événements à probabilité réduite. Elles doivent aussi rendre compte de l'impact de ces événements sur les produits linéaires et non linéaires.
3. Les simulations de crise doivent revêtir un caractère quantitatif et qualitatif. En outre, l'établissement doit dresser l'inventaire des mesures à prendre pour réduire ses risques et préserver son capital. Leurs conclusions doivent être communiquées systématiquement à la direction générale, et périodiquement, au conseil d'administration.

4. L'exercice prudentiel consiste à tester sur le portefeuille courant des situations passées de perturbations majeures, en tenant compte des fortes variations de prix et de la vive réduction de la liquidité associées à ces événements et/ou à évaluer la sensibilité des positions de marché aux modifications des hypothèses de volatilité et corrélations, ce qui nécessite une mesure des marges de fluctuations de ces valeurs dans le passé et un calcul sur la base des chiffres **extrêmes**.
5. Ces scénarios doivent notamment comprendre les situations que l'établissement identifie comme étant les plus défavorables, sur la base des caractéristiques de son portefeuille.
6. La Commission Bancaire peut demander à l'établissement d'évaluer l'impact de scénarios qu'elle a définis et de lui communiquer l'ensemble des conclusions.
7. Les résultats doivent être revus à intervalles réguliers par la Direction Générale et être pris en compte dans la définition des limites et stratégies fixées. En outre, si la simulation fait apparaître une vulnérabilité particulière à un ensemble donné de circonstances, l'établissement doit prendre rapidement les mesures nécessaires à une gestion adéquate de ces risques.»

Nous voyons ici l'importance de la direction générale dans le système de gestion des risques. Celle-ci doit être continuellement informée. Il est intéressant de noter que le cœur du modèle interne doit être basé sur les événements extrêmes. Le modèle doit donc bien mesurer **une perte potentielle, un risque extrême**. Enfin, nous devons aussi remarquer l'importance de la Commission Bancaire qui, si elle le désire, peut intervenir et demander à l'établissement de chiffrer des scénarios.

5.6 Dispositif prudentiel de contrôle ex post lié à l'utilisation des modèles internes

Les contrôles ex post visent à s'assurer que le degré de couverture observé correspond bien au niveau de confiance de 99%. Voici quelques éléments pour mener à bien ces contrôles :

1. Ils sont réalisés à partir des résultats réels et/ou hypothétiques.
2. Ils sont réalisés au moins trimestriellement et les données des douze derniers mois glissants doivent être utilisées.

Ces contrôles permettent notamment de calculer les exceptions. Une exception correspond à une date où la perte dépasse le risque calculé par le modèle. La Commission Bancaire utilise le nombre d'exceptions pour valider le modèle **et** pour déterminer le coefficient multiplicateur ($3 + \xi$). Elle définit le concept de probabilité cumulée des exceptions comme «la probabilité d'obtenir au maximum le nombre d'exceptions indiqué avec un taux de couverture effectif de 99%.» Voyons de façon concrète comment le calcul est effectué. Si \varkappa désigne la variable qui prend la valeur 1 dans le cas d'une exception, alors \varkappa est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{100}$ (nous avons une chance sur 100 pour que \varkappa corresponde à une exception lorsque le taux effectif de couverture est de 99%). Si on considère une période $[t_1, t_2]$ comprenant N jours ouvrés. Pendant cette période, et sous l'hypothèse que les événements sont indépendants, la probabilité d'avoir n exceptions est égale à

$$\Pr(X = n) = C_N^n p^n (1 - p)^{N-n}$$

avec X la variable aléatoire correspondant au nombre d'exceptions pour la période $[t_1, t_2]$. X correspond bien sûr à une variable aléatoire Binomiale \mathcal{B}_p^N . La probabilité cumulée d'avoir n exceptions a donc pour expression

$$\Pr(X \leq n) = \sum_{i=1}^n C_N^i p^i (1 - p)^{N-i}$$

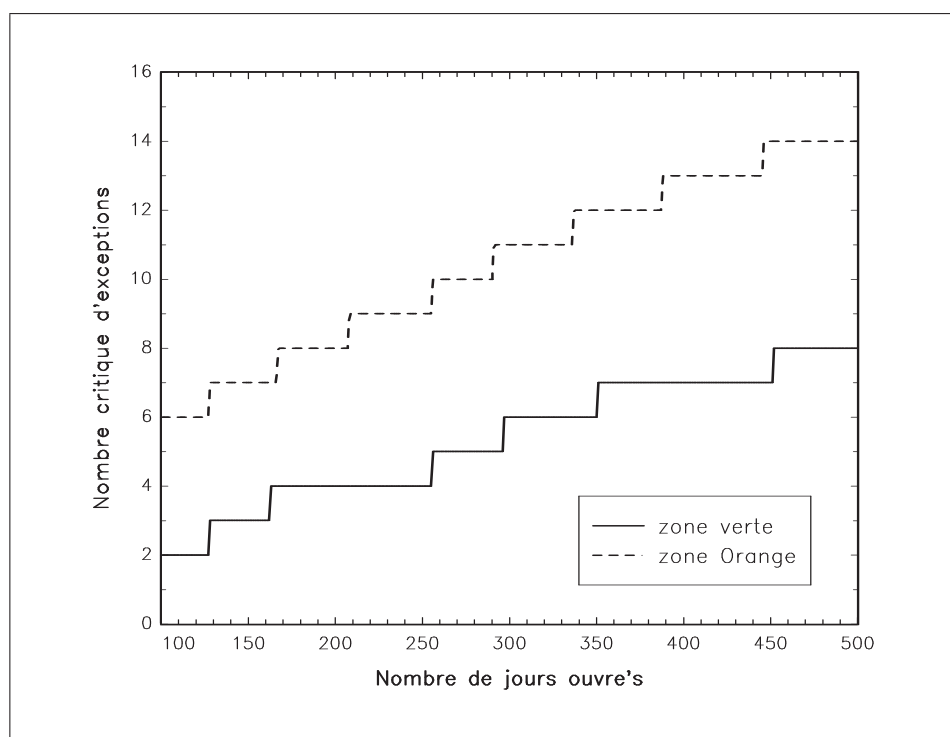
La Commission Bancaire définit alors trois zones pour évaluer les résultats des contrôles ex post et pour appliquer le complément éventuel au coefficient multiplicateur 3 :

Zone	Définition de la zone	Valeur de ξ
Verte	$\Pr(X \leq n) < 95\%$	0
Orange	$\Pr(X \leq n) < 99.99\%$	0 - 1
Rouge	$\Pr(X \leq n) \geq 99.99\%$	1

A titre d'illustration, nous reproduisons le tableau de la Commission Bancaire pour N égal à 250 jours ouvrés.

Zone	Nombre n d'exceptions	Probabilité (en %) $\Pr(X = n)$	Probabilité cumulée $\Pr(X \leq n)$	Majoration du facteur de multiplication
Verte	0	8.1059	8.1059	0.00
	1	20.469	28.575	0.00
	2	25.742	54.317	0.00
	3	21.495	75.812	0.00
	4	13.407	89.219	0.00
Orange	5	6.663	95.882	0.40
	6	2.748	98.630	0.50
	7	0.968	99.597	0.65
	8	0.297	99.894	0.75
	9	0.081	99.975	0.85
Rouge	10+	0.020	99.995	1.00

Le graphique (5.1) représente le nombre critique d'exceptions pour la détermination des frontières des zones verte, orange et rouge. La lecture du graphique est la suivante : Par exemple, pour 500 jours ouvrés, la zone verte est défini pour un nombre d'exceptions inférieur ou égal à 8, la zone orange va de 9 à 14 exceptions et la zone rouge commence à 15 exceptions. Toutefois, la Commission Bancaire ne précise pas



GRAPHIQUE 5.1. BIS Colour frequency (taux de couverture de 99%)

comment est calculé la majoration du facteur multiplicatif dans la zone orange. Elle précise néanmoins que celles-ci «ne sont toutefois pas destinées à être appliquées **de façon purement automatique**, plusieurs éléments d'information pouvant être pris en compte pour compléter l'évaluation.»

Remarque 4 *La position de la Commission Bancaire n'est pas très claire sur le facteur multiplicateur. Nous avons vu dans le paragraphe consacré aux critères qualitatifs que le degré de conformité à ces*

critères peut conditionner le niveau de multiplicateur. Ici, nous avons l'impression que ce niveau est presque entièrement déterminé par la procédure de backtesting.

L'actualisation du 31 décembre 1998 permet de préciser et de modifier certains points. En premier lieu, le backtesting porte sur la *Valeur en Risque sur un jour*, et non sur la *Valeur en Risque* pour une période de détention de 10 jours. Ensuite, les contrôles doivent porter **sur les 250 derniers jours ouvrables**. Cela est important, car si nous supposons que les “douze derniers mois” correspondent à 260 jours, les zones sont définies différemment à cause du caractère *escalier* de la loi Binomiale :

Zone	$N = 250$	$N = 260$
Verte	moins de 5 exceptions	moins de 6 exceptions
Orange	entre 5 et 9 exceptions	entre 6 et 10 exceptions
Rouge	plus de 10 exceptions	plus de 11 exceptions

Enfin, les exceptions doivent être communiquées à la Commission Bancaire :

*Afin de permettre à la Commission Bancaire de vérifier en permanence l'adéquation du facteur complémentaire, l'établissement informe sans délai et, en tout état de cause, **dans les cinq jours ouvrables**, le Secrétariat Général de la Commission Bancaire, des dépassements révélés par leur programme de contrôle ex-post qui, en fonction du tableau ci-dessus, impliqueraient un relèvement du facteur complémentaire.*

Bibliographie

- [1] Capital Adequacy Directive (CAD), directive 93/6/CEE du CONSEIL du 15 mars 1993 sur l'adéquation des fonds propres des entreprises d'investissement et des établissements de crédit, *Journal Officiel des Communautés Européennes*, N° **L 141/1-26**
- [2] La surveillance prudentielle des risques de marché supportés par les établissements de crédit, Commission Bancaire, Service des études bancaires, article pour la *Revue d'Economie Financière*, 26 juin 1996
- [3] Modalités de Calcul du Ratio de Solvabilité — Actualisation au 31 décembre 1997, Commission Bancaire, Cellule de contrôle des Risques de marché, 3 novembre 1997
- [4] Modalités de Calcul du Ratio de Solvabilité — Actualisation au 31 décembre 1998, Commission Bancaire, Secrétariat Général, Service des Affaires Internationales, 30 décembre 1998

6

La valeur en risque

6.1 Définition

La Valeur en Risque, plus connue sous le nom anglais *Value-at-Risk* ou *VaR*, est une mesure de la perte **potentielle** qui peut survenir à la suite de mouvements adverses des prix de marché. Elle permet de répondre à la question suivante :

Combien l'établissement financier peut-il perdre
avec une probabilité α pour un horizon de temps T fixé ?

Deux éléments sont donc indispensables pour interpréter le chiffre *VaR* (qui permet de donner une vision globale du risque de marché d'un portefeuille) :

1. la période de détention T ou *holding period* qui correspond à la période sur laquelle la variation de valeur du portefeuille est mesurée ;
2. le seuil de confiance α du chiffre *VaR* qui correspond à la probabilité de ne pas dépasser cette mesure du risque.

Si ces deux paramètres ne sont pas spécifiés, nous ne pouvons pas interpréter le chiffre *VaR*, car un risque à 10 jours avec une probabilité de 99% est beaucoup plus important qu'un risque à 1 jour avec une probabilité de 90%. Dans le premier cas, nous avons une chance sur 100 que la perte réalisée pour les 10 prochains jours ouvrés soit supérieure à celle estimée par la *VaR*. Dans le second cas, nous avons une chance sur 10 que la perte réalisée demain soit plus grande que la *VaR*. Avec la mesure *VaR*, on passe donc d'une mesure de risque comme volatilité à une mesure de risque comme quantile.

Il faut bien avoir à l'esprit que la mesure *VaR* ne donne une image du risque que dans le cadre de conditions normales de marché et pour un niveau de confiance inférieur ou égal à 99% (dans le cas de la réglementation). Pour avoir une mesure du risque extrême, d'autres techniques sont plus adaptées : les méthodes de *stress testing* — présentées au chapitre 7 — et la *théorie des valeurs extrêmes* — présentées à la section 7.5 — permettent de mieux appréhender les risques extrêmes.

Pour calculer la *VaR*, nous devons identifier les facteurs de marché qui affectent la valeur du portefeuille. Le nombre de ces facteurs peut être plus ou moins grand, mais dépend généralement du type de marché considéré. En pratique, nous pouvons obtenir les facteurs de marché en décomposant les instruments du portefeuille en instruments de base (par exemple, nous pouvons décomposer un portefeuille de contrats forward en un portefeuille équivalent d'obligations à coupon zéro). Le calcul de la *VaR* dépend alors de la méthodologie utilisée. D'une manière générale, nous avons le choix entre trois grandes familles de méthodes :

1. la *VaR* analytique (ou paramétrique) ;

2. la *VaR* historique (ou non paramétrique) ;
3. la *VaR* Monte-Carlo.

Ces trois méthodes utilisent les données du passé pour estimer les variations potentielles de la valeur du portefeuille dans le futur proche. Cela suppose implicitement que ce futur se comporte comme le passé : nous supposons donc que la variation de la valeur du portefeuille est stationnaire. Nous comprenons pourquoi l'approche *Value-at-Risk* n'est pertinente que dans des conditions normales de marché (à moins que les données utilisées aient été collectées pendant des périodes anormales).

6.1.1 La *VaR* analytique (ou paramétrique)

Dans le modèle de *VaR* paramétrique, nous supposons que la valeur algébrique d'un portefeuille est représentée par une combinaison linéaire de K facteurs gaussiens. Notons $\mathbf{P}(t)$ la valeur du portefeuille à l'instant t et $\mathbf{F}(t)$ le vecteur gaussien des facteurs de loi $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. La valeur du portefeuille en t vaut alors $\mathbf{P}(t) = \mathbf{a}^\top \mathbf{F}(t)$ avec \mathbf{a} le vecteur de sensibilités. A la période t , la valeur de $\mathbf{P}(t+1)$ n'est pas connue puisque nous ne disposons que de l'information jusqu'en t . En t , $\mathbf{P}(t+1)$ est donc une variable aléatoire gaussienne de loi $\mathcal{N}(\mathbf{a}^\top \mu, \mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a})$. La valeur de la *VaR* pour un seuil de confiance α correspond alors à

$$\Pr \{ \mathbf{P}(t+1) - \mathbf{P}(t) \geq -VaR_\alpha \} = \alpha \quad (6.1)$$

Dans cette équation, $\mathbf{P}(t+1) - \mathbf{P}(t)$ représente la variation du portefeuille entre l'instant $t+1$ et l'instant t . C'est donc une perte si la valeur réalisée du portefeuille dans un jour est inférieure à la valeur actuelle du portefeuille. Comme la *VaR* représente la perte potentielle que l'on s'autorise et que celle-ci est exprimée en valeur absolue, $\Pr \{ \mathbf{P}(t+1) - \mathbf{P}(t) \geq -VaR_\alpha \}$ est la probabilité que la perte ne dépasse pas la *VaR* (ou perte potentielle). Par définition, cette probabilité est notre seuil de confiance α . Lorsque la période de détention n'est pas 1 jour mais T jours, la mesure de *VaR* se définit à partir de la relation suivante :

$$\Pr \{ \mathbf{P}(t+T) - \mathbf{P}(t) \geq -VaR_\alpha \} = \alpha \quad (6.2)$$

Comme nous savons que $\mathbf{P}(t+1)$ est gaussien, nous en déduisons que

$$\Pr \left\{ \frac{\mathbf{P}(t+1) - \mathbf{a}^\top \mu}{\sqrt{\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a}}} \geq \Phi^{-1}(1 - \alpha) \right\} = \alpha \quad (6.3)$$

avec Φ^{-1} la fonction gaussienne inverse. Or nous avons $\Phi^{-1}(1 - \alpha) = -\Phi^{-1}(\alpha)$ avec $\Phi^{-1}(\alpha)$ le quantile à $\alpha\%$ de la loi gaussienne. Un rapide calcul montre que

$$VaR_\alpha = \mathbf{P}(t) - \mathbf{a}^\top \mu + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a}} \quad (6.4)$$

Lorsque les facteurs \mathbf{F} modélisent directement la variation du portefeuille, la mesure *VaR* devient

$$VaR_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a}} - \mathbf{a}^\top \mu \quad (6.5)$$

En général, nous supposons que $\mu = \mathbf{0}$, et nous avons finalement

$$VaR_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a}} \quad (6.6)$$

Cette méthode de calcul de la *VaR* est appelée la méthode de variance-covariance, puisqu'elle dérive directement de la matrice de covariance Σ des facteurs.

La relation (6.6) s'interprète très facilement ; $\sqrt{\mathbf{a}^\top \Sigma \mathbf{a}}$ est en fait l'écart-type de la variation du portefeuille : nous pouvons l'assimiler à un *risque-volatilité* (par référence à la théorie du portefeuille de Markowitz) ; $\Phi^{-1}(\alpha)$ est un coefficient que nous notons c ; nous avons donc une relation linéaire entre le *risque-volatilité* et la perte potentielle :

$$VaR = c \times \text{risque-volatilité}$$

A titre d'illustration, c prend la valeur 2.33 pour un seuil de confiance $\alpha = 99\%$. Dans ce cas, la *VaR* correspond au *risque-volatilité* multiplié par ce facteur 2.33. A noter que lorsque les facteurs de marché correspondent directement aux variations de prix des actifs du portefeuille, le vecteur \mathbf{a} est le vecteur des composantes du portefeuille.

Avant de développer dans la section 6.2 des éléments de réflexion sur la pertinence de la méthode et sur le périmètre de validité, nous pouvons noter tout de suite que cette méthode repose sur trois hypothèses :

1. l'indépendance temporelle des variations de la valeur du portefeuille ;
2. la normalité des facteurs $\mathbf{F}(t)$;
3. et la relation linéaire entre les facteurs et la valeur du portefeuille.

Ces trois hypothèses simplifient le calcul de la VaR , puisque les quantiles de $\mathbf{a}^\top \mathbf{F}(t)$ sont liés de façon linéaire au quantile de la loi normale à une dimension. La principale difficulté de cette méthode est d'estimer la matrice de covariance et de déterminer les sensibilités.

Nous pouvons montrer que l'expression (6.6) de la VaR obtenue pour une période de détention d'un jour peut se généraliser à une période de détention de T jours. Dans ce cas, Σ représente la matrice de covariance des facteurs pour T jours. Nous rappelons que la période de détention réglementaire est fixée à 10 jours. Les autorités réglementaires autorisent de calculer une VaR pour une période de détention de 1 jour et de la convertir en une VaR à 10 jours en multipliant par $\sqrt{10}$. Ce coefficient \sqrt{T} n'est autre que ce qu'on dénomme le *scaling factor*¹.

Enfin, nous rappelons que **cette méthode n'est utilisable que pour les produits linéaires** car elle ne prend pas en compte le caractère non-linéaire des positions (risque Gamma par exemple). Aussi, le calcul d'une VaR paramétrique pour un portefeuille d'options n'est pas adapté (voir la section 6.3 consacré au produit optionnels).

6.1.2 La VaR historique (ou non paramétrique)

Contrairement à la VaR paramétrique, la VaR historique est entièrement basée sur les variations historiques des facteurs de risque $\mathbf{F}(t)$. Supposons que nous disposions d'un historique de longueur N . En t_0 , nous pouvons valoriser le portefeuille avec les facteurs de risque de l'historique. Cela veut dire que nous calculons pour chaque date $t = \{t_0 - 1, \dots, t - N\}$ une valeur (potentielle) du portefeuille. Nous pouvons alors déterminer N variations potentielles, que nous assimilons à N pertes potentielles (certaines pertes sont en fait des gains). Ainsi, à partir de l'historique, nous construisons implicitement une distribution empirique. De celle-ci, nous pouvons extraire le quantile à $\alpha\%$. Il suffit pour cela de ranger les N pertes potentielles et de prendre la valeur absolue de la $N \times (1 - \alpha)$ i -ième plus petite valeur. Voyons un exemple. Nous supposons que les pertes potentielles P sont ordonnées. Nous obtenons alors un ensemble $\{P_1, \dots, P_n, \dots, P_N\}$ avec $P_n \leq P_m$ quelque soit $n < m$. Pour un seuil de confiance de 99%, la VaR correspond à la première perte potentielle $|P_1|$ si $N = 100$, à la dixième perte potentielle $|P_{10}|$ si $N = 1000$, etc. Lorsque $N \times (1 - \alpha)$ n'est pas un entier, dans ce cas, la VaR est calculée par interpolation :

$$VaR = |P_{n^*} + (N \times (1 - \alpha) - n^*) (P_{n^*+1} - P_{n^*})| \quad (6.7)$$

avec $n^* = \lfloor N \times (1 - \alpha) \rfloor$ l'entier inférieur le plus proche de $N \times (1 - \alpha)$ (arrondi de type *floor*). Par exemple, si nous considérons un historique de 250 jours et un intervalle de confiance de 99%, nous avons

$$VaR = \left| P_2 + \frac{1}{2} (P_3 - P_2) \right| \quad (6.8)$$

Il est généralement admis que la VaR historique n'impose pas d'hypothèses a priori sur la loi de distribution des facteurs $\mathbf{F}(t)$ à la différence de la méthode paramétrique. Mais il est quand même nécessaire d'avoir un modèle sous-jacent pour estimer les facteurs pour l'historique de longueur N . Cela explique que les $VaRs$ historiques sont principalement appliqués avec des facteurs de marché qui sont exactement les variations des actifs (dans ce cas, nous avons autant d'actifs que de facteurs).

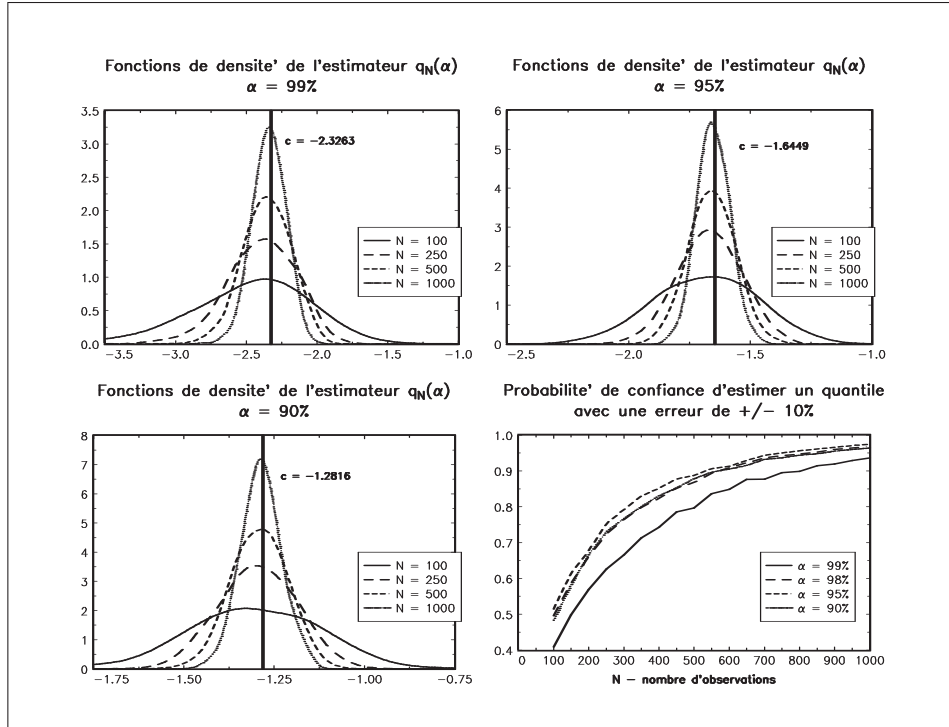
Cette méthode est vraiment très simple conceptuellement et facile à implémenter. Elle est donc très utilisée. Cependant, elle présente quelques difficultés. En effet, l'estimation d'un quantile a une vitesse de convergence beaucoup plus faible que les estimateurs de la moyenne, de la variance, de la médiane, etc. Cela tient au fait que l'estimation d'un quantile est une estimation locale qui demande donc beaucoup

¹Voir le paragraphe 6.2.5 consacré au problème du *scaling factor*.

d'observations afin d'en avoir suffisamment autour du quantile. Le graphique (6.1) est une illustration de ce problème. Considérons un portefeuille composé d'une position longue sur un seul actif. Nous supposons que les variations du prix de cet actif sont gaussiennes, centrées autour de la valeur zéro et de variance égale à 1. Nous cherchons à calculer la perte potentielle du portefeuille en employant la *VaR* historique. Cela revient à calculer le quantile $q_N(\alpha)$ des N variations de prix historiques. Sur le graphique, nous avons considéré plusieurs valeurs de α et N . Nous mettons en évidence que l'estimateur $q_N(\alpha)$ converge plus rapidement lorsque le nombre d'observations croît. De plus, la puissance de cet estimateur dépend de α . Cela peut se comprendre aisément. Nous avons vu que l'estimation du quantile revient à trouver la valeur optimale $n^* = \lfloor N \times (1 - \alpha) \rfloor$. Cela revient aussi à chercher n^* tel que pour $n^* - 1$ la fréquence soit supérieure à α et pour $n^* + 1$ la fréquence soit inférieure à α . Si ces deux probabilités sont proches de α , l'erreur d'estimation sur le quantile est faible. Sinon, l'erreur peut être très importante. Pour illustrer ceci, nous considérons les tableaux suivants :

N	n^*	Quantile associé à		
		n^*	$n^* - 1$	$n^* + 1$
100	1	99	100	98
1000	10	99	99.1	98.9
10000	100	99	99.01	98.99
1000000	10000	99	99.0001	98.9999

N	n^*	Quantile associé à		
		n^*	$n^* - 5$	$n^* + 5$
100	1	99	100	94
1000	10	99	99.5	98.5
10000	100	99	99.05	98.95
1000000	10000	99	99.0005	98.9995



GRAPHIQUE 6.1. Estimation d'un quantile et erreur de second type

Nous voyons donc à quel quantile serait associé la n^* -ième position si nous éliminions la donnée $n^* - 1$ ou $n^* + 1$ de la base de données. Dans le même genre d'idée, la quatrième figure du graphique (6.1)

montre comment évolue la probabilité d’estimer un quantile avec une erreur de plus ou moins 10%. Le problème est le même que celui considéré précédemment. Nous voyons bien que cette probabilité “de confiance” croît avec le nombre d’observations. Et il est intéressant de remarquer la différence entre le seuil de confiance de 99% et les autres seuils de confiance.

Remarque 5 *Si les autorités de régulation décident d’augmenter le seuil de confiance, cela aura un impact très important sur la gestion des bases de données, qui devront être plus longues. A titre d’illustration, il n’est pas possible d’estimer une VaR historique à 99.9% avec moins de 1000 observations.*

6.1.3 La VaR Monte-Carlo

La VaR Monte-Carlo est basée sur la simulation des facteurs de marché $\mathbf{F}(t)$ dont on se donne une loi de distribution a priori, de préférence admissible avec l’historique. Nous pouvons alors valoriser le portefeuille avec les facteurs simulés. Si nous utilisons N simulations, nous pouvons alors déterminer N variations simulées du portefeuille, que nous assimilons à N pertes potentielles. Il suffit ensuite de calculer le quantile correspondant tout comme pour la méthode de la VaR historique. Les deux méthodes sont donc très semblables. La seule différence est que l’une des méthodes utilise les facteurs passés, alors que l’autre utilise des facteurs simulés. Une autre différence concerne la taille N de l’échantillon pour la calcul du quantile, qui n’est pas contraint dans le cas de la VaR Monte-Carlo.

A titre d’illustration, le schéma 6.2 montre les différentes étapes de l’algorithme lorsque les facteurs de marché correspondent aux variations des prix des actifs. Cette méthode est très intéressante, puisque nous pouvons calculer directement la VaR pour une période de détention de T jours même si les facteurs de marché correspondent à une période de 1 jour.

Il faut cependant noter que cette méthode nécessite un ordinateur très performant car elle est coûteuse en temps de calcul (elle convient difficilement au calcul journalier d’une VaR pour un nombre trop grand d’actifs). De plus, elle demande un effort important de modélisation puisque celle-ci déterminera entièrement les trajectoires des facteurs de marché que l’on utilise pour le calcul de la VaR.

6.1.4 Pertinence des mesures VaRs

Nous avons vu que la VaR paramétrique ne convenait pas pour les portefeuilles d’options. Toutes les mesures ne sont donc pas pertinentes pour n’importe quel type de portefeuille. Le tableau suivant montre le périmètre d’utilisation des VaRs en fonction de la normalité des facteurs de marché et de la linéarité du portefeuille :

Instruments linéaires	Normalité des facteurs	
	Oui	Non
Oui	Paramétrique Monte-Carlo Historique	Historique
Non	Monte-Carlo Historique	Historique

source : BOULIER, BRABANT, DALAUD et DIEU [1997]

A noter que nous pouvons aussi utiliser la méthode de Monte Carlo lorsque les facteurs ne sont pas normaux, mais dans ce cas, elle peut être extrêmement difficile à mettre en place si elle présente des spécificités importantes.

Nous notons :

$\Delta \mathbf{P}(t_1, t_2)$ la variation du portefeuille entre les périodes t_1 et t_2

$\mathbf{F}(t)$ le vecteur des variations des prix des actifs

T la période de détention

t_0 la date actuelle

\mathbf{S} la méthode de simulation basée sur le modèle \mathcal{M}

Nous définissons 2 processus de simulation :

\mathbf{S}_T permet de simuler $\tilde{\mathbf{F}}(t+T)$ directement à partir du vecteur $\mathbf{F}(t)$

\mathbf{S}_1 permet de simuler $\tilde{\mathbf{F}}(t+1)$ à partir du vecteur $\mathbf{F}(t)$

◇ \mathbf{S}_T

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{F}(t_0) \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{F}}_1(t_0+T) \Rightarrow \Delta \tilde{\mathbf{P}}_1(t_0, t_0+T) \\
 \vdots \\
 \mathbf{F}(t_0) \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{F}}_N(t_0+T) \Rightarrow \Delta \tilde{\mathbf{P}}_N(t_0, t_0+T) \\
 \left\{ \Delta \tilde{\mathbf{P}}_1(t_0, t_0+T), \dots, \Delta \tilde{\mathbf{P}}_N(t_0, t_0+T) \right\} \Rightarrow \text{calcul du quantile } \alpha \\
 = \mathbf{VaR} \ T \ \text{jours}
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \mathbf{F}(t_0) \\ \vdots \\ \mathbf{F}(t_0) \end{array}} \right\} N \text{ simulations}$$

◇ \mathbf{S}_1

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{F}(t_0) \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{F}}_1(t_0+1) \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{F}}_1(t_0+2) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{F}}_1(t_0+T) \Rightarrow \Delta \tilde{\mathbf{P}}_1(t_0, T) \\
 \vdots \\
 \mathbf{F}(t_0) \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{F}}_N(t_0+1) \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{F}}_N(t_0+2) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \tilde{\mathbf{F}}_N(t_0+T) \Rightarrow \Delta \tilde{\mathbf{P}}_N(t_0, T) \\
 \left\{ \Delta \tilde{\mathbf{P}}_1(t_0, t_0+T), \dots, \Delta \tilde{\mathbf{P}}_N(t_0, t_0+T) \right\} \Rightarrow \text{calcul du quantile } \alpha \\
 = \mathbf{VaR} \ T \ \text{jours}
 \end{array}
 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \mathbf{F}(t_0) \\ \vdots \\ \mathbf{F}(t_0) \end{array}} \right\} N \text{ simulations}$$

Remarque : Pour calculer la $\mathbf{VaR} \ T$ jours, nous pouvons aussi calculer la $\mathbf{VaR} \ 1$ jour avec le processus de simulation \mathbf{S}_T et convertir celle-ci en $\mathbf{VaR} \ T$ jours avec la méthode \sqrt{T} rule.

GRAPHIQUE 6.2. Une illustration de la méthode de Monte-Carlo

6.2 Quelques réflexions sur la VaR

6.2.1 L'interprétation du seuil de confiance α

Le seuil de confiance α est l'un des deux paramètres qui permettent de définir la VaR (l'autre étant la période de détention). Celui-ci est fixé à 99% par les autorités réglementaires. Cela veut dire que la probabilité que la perte réalisée soit supérieure à la perte prévue est de 1%. Cela doit donc se produire **théoriquement** une période toutes les cent périodes. Comme la période de détention est de 10 jours, nous disons communément que nous avons alors 1 retour tous les 4 ans (car $100 \text{ périodes} \times 10 \text{ jours} = 1000 \text{ jours de trading} \simeq \text{quatre années calendaires}^2$).

La notion de seuil de confiance est utilisée en statistique depuis fort longtemps. Elle est fortement associée à la notion de probabilité. Depuis la fin de la seconde guerre mondiale, de nombreux travaux (Savage, De Finetti, l'école Bayésienne, etc.) ont vu le jour et ont fortement modifié *la notion de probabilités objectives* et *la vision fréquentiste de la théorie de l'estimation fonctionnelle*³. Sans rentrer dans les détails des théories associées à la notion de probabilité *subjective*, l'idée générale est la suivante :

Existe-t-il une classe d'ordre sur les probabilités ?

Il existe un exemple fort célèbre qui consiste à demander à une personne :

- "Si vous **savez** que vous avez une probabilité de 5% de gagner à la prochaine loterie nationale, prenez-vous le risque de jouer ?"
- "Si vous êtes directeur d'une centrale nucléaire et que vous **savez** qu'il y a une probabilité de 5% qu'il se produise un incident, continuez-vous à faire fonctionner cette centrale nucléaire ?"

Derrière la notion de seuil de confiance, il y a l'idée que la probabilité que l'évènement survienne est trop faible pour que cet évènement se réalise effectivement. Cette probabilité devient une simple "**mesure d'incertitude**, pouvant varier avec les circonstances et l'observateur". Cela a conduit à de nombreux débats en statistique sur la pertinence de cette notion.

Du point de vue des instances réglementaires, nous pouvons parfaitement comprendre l'utilisation de ce seuil de confiance qui apparaît alors comme une fonction d'utilité ; la fonction d'utilité des autorités de régulation correspond alors un problème de minimisation du nombre de faillites. On s'autorise ainsi un certain nombre de faillites qui ne doit pas dépasser ce fameux 1%. Ce seuil de confiance s'interprète donc comme une **fréquence**. Du point de vue de l'établissement financier, la fonction d'utilité est sûrement très différente. Il faut donc bien comprendre que ce seuil de confiance peut parfaitement changer dans le futur, si les préférences des autorités se modifient.

Ce seuil de confiance tient une très grande importance pour le calcul des fonds propres. Sous l'hypothèse de normalité, nous pouvons calculer la variation du niveau de fonds propres requis selon le niveau de confiance souhaité par rapport à l'exigence réglementaire (en supposant que les autres paramètres restent inchangés⁴) :

Niveau de confiance de la VaR	90%	95%	98.04%	98.5%	99%	99.5%	99.96%
Variation de fonds propres	-44.9%	-29.3%	-11.4%	-9,69%	0%	+10.7%	+44.1%

Le niveau de confiance de 99.96% correspond **au risque décennal**, c'est-à-dire à une occurrence en moyenne tous les 10 ans de perte supérieure à la VaR . Améliorer l'intervalle de confiance de 0.96% revient donc à augmenter de 44.12% le montant des fonds propres. En revanche, une diminution de l'intervalle de confiance de 0.96% ne permet de diminuer l'exigence en capital que de 11.36%. Il n'y a donc pas de relation linéaire entre le seuil de confiance, la probabilité de perte et l'exigence en fonds propres. Nous

²La durée de retour t , qui indique le temps qu'il faut attendre pour la perte soit supérieure à la VaR , est une variable aléatoire géométrique de paramètre $(1 - \alpha)$. Par conséquent, la durée moyenne \bar{t} est bien égale à $(1 - \alpha)^{-1}$ (à cause de la propriété de l'espérance mathématique de la loi géométrique).

³A ce sujet, le traité de De Finetti commence par la célèbre phrase "**La probabilité n'existe pas**".

⁴Nous montrons dans le prochain paragraphe que ce seuil de confiance a aussi une incidence sur le coefficient multiplicateur.

pouvons par exemple considérer que les niveaux de confiance 98.5% et 99.5% sont très proches du fait de leur faible écart absolu, ou au contraire les considérer très différents, car la VaR à 99.5% a 3 fois moins de chance d'être dépassée que la VaR à 98.5%.

6.2.2 Une explication du facteur multiplicatif ($3 + \xi$)

Les modèles internes de risques de marché sont majoritairement basés sur les méthodes VaR . Or, ces méthodes ne donnent qu'une approximation de la vraie distribution pour modéliser la variation des prix. C'est pourquoi il est nécessaire de corriger l'estimation du quantile par un **facteur de prudence**. Celui-ci correspond implicitement au facteur multiplicatif. Comme STAHL [1997] le montre, ce facteur, souvent présenté comme arbitraire, a des fondements théoriques rigoureux (dans le cadre d'une VaR gaussienne).

Le problème est le suivant : étant donné une variable aléatoire X de loi quelconque dont nous connaissons les deux premiers moments μ et σ^2 , à quelle distance relative par rapport à l'écart-type se situe le quantile α ? Pour cela, nous utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebyshev :

$$\Pr(|X - \mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \tag{6.9}$$

Si la loi est symétrique, nous avons

$$\Pr(X \leq \mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{2k^2} \tag{6.10}$$

Or cette probabilité n'est rien d'autre que la fonction de répartition F :

$$F(\mu + k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{2k^2} \tag{6.11}$$

Au seuil de confiance de α et si nous désignons par F^{-1} la fonction inverse de répartition (qui n'est rien d'autre que la fonction de quantile), nous en déduisons que

$$X \leq \mu + k\sigma \iff F^{-1}\left(1 - \frac{1}{2k^2}\right) = \alpha \tag{6.12}$$

et donc

$$k \leq \sqrt{\frac{1}{2 - 2\alpha}}$$

En négligeant la tendance μ et en assimilant X à la perte potentielle, celle-ci se situe donc à k écarts-types. Or la VaR telle qu'elle est calculée se situe à $c = \Phi^{-1}(\alpha)$ écarts-types. Le ratio $\frac{k}{c}$ est le coefficient de multiplication qui permet d'être sûr que la VaR correspond bien à un quantile au moins égal à α lorsque nous utilisons une approximation gaussienne et ceci quelle que soit la vraie fonction de distribution.

Remarque 6 Il est facile de montrer que lorsque la fonction de distribution est asymétrique, une borne supérieure de k est $(1 - \alpha)^{-1}$.

Le tableau suivant contient les valeurs du ratio pour différentes valeurs de α .

		symétrique		asymétrique	
α	c	k	k/c	k	k/c
90.00	1.28	2.24	1.74	3.16	2.47
95.00	1.64	3.16	1.92	4.47	2.72
99.00	2.33	7.07	3.04	10.00	4.30
99.25	2.43	8.16	3.36	11.55	4.75
99.50	2.58	10.00	3.88	14.14	5.49
99.75	2.81	14.14	5.04	20.00	7.12
99.99	3.72	70.71	19.01	100.00	26.89

Nous remarquons qu'effectivement lorsque le seuil de confiance est égal à 99%, ce ratio est proche de **3** (lorsque la fonction de densité est symétrique). Supposons que les autorités réglementaires fixent le seuil de confiance à 99.5%, dans ce cas le ratio est proche de **4**. Si les autorités réglementaires prenaient alors cette valeur pour fixer le coefficient multiplicateur, cette mesure aurait pour incidence **d'augmenter les fonds propres de 41.4% par rapport à la situation actuelle**.

Il y a une remarque intéressante à faire concernant l'analyse précédente. Dans cette présentation, la *VaR* correspond à $c \cdot \sigma$, mais nous considérons que la borne supérieure de la vraie *VaR* est en fait $k \cdot \sigma$. L'exigence en fonds propres correspond donc à cette valeur $k \cdot \sigma$. Or les exceptions sont déterminées en fonction de la *VaR* $c \cdot \sigma$, et non en fonction de la *VaR* $k \cdot \sigma$. Si nous poussons l'analyse jusqu'au bout, il aurait été plus logique de déterminer les exceptions en fonction de $k \cdot \sigma$. Donc, ce coefficient multiplicateur trouve bien une justification, mais les autorités réglementaires ont fait preuve de beaucoup de prudence, puisque la probabilité que la perte potentielle dépasse le montant des fonds propres est bien inférieure à 1%.

6.2.3 Le choix de la distribution de probabilité

Ce choix est primordial dans le calcul des *VaRs* paramétrique et de Monte-Carlo. Généralement, nous utiliserons une loi normale ou log-normale pour modéliser les facteurs $\mathbf{F}(t)$. Cela implique que la distribution de $\mathbf{F}(t)$ est entièrement déterminée par les deux premiers moments μ et Σ . L'utilisation en finance de la normalité repose sur des arguments de facilité d'utilisation. Mais nous savons depuis fort longtemps que les séries financières ne sont ni normales ni log-normales. En revanche, il est facile de calculer la variance d'une combinaison des composantes d'un vecteur gaussien. De même, la simulation de nombres aléatoires normaux est très aisée à partir d'un générateur de nombres aléatoires uniformes pour le cas à une dimension, ou d'une décomposition de Cholesky ou en valeurs singulières pour le cas à plusieurs dimensions.

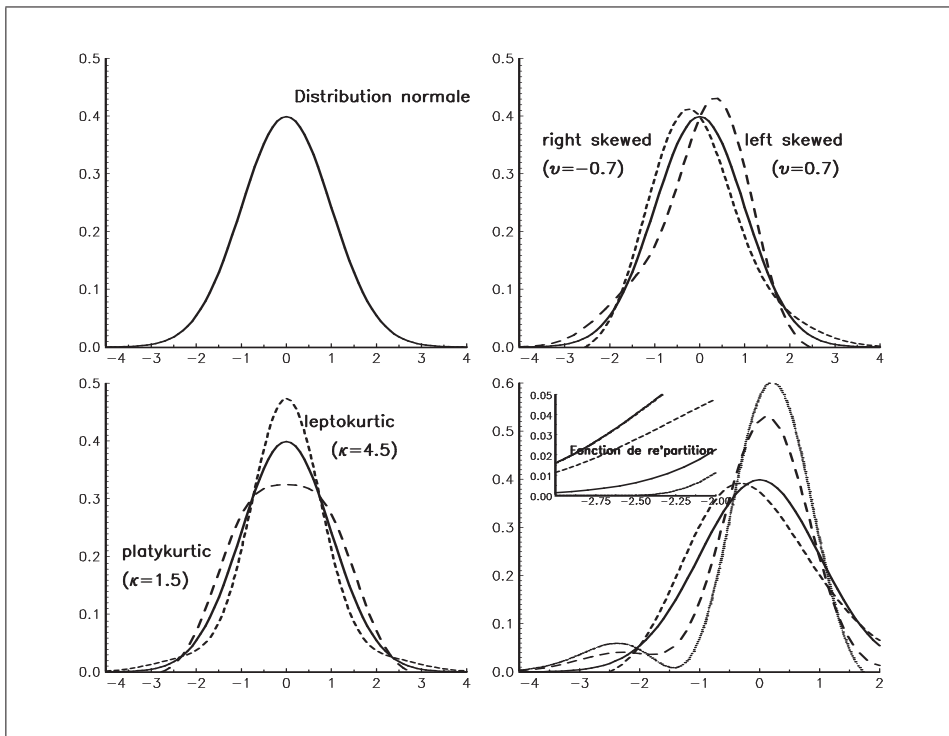
Certains auteurs ont tenté de justifier le recours à la loi normale par le théorème central-limite qui établit la convergence vers la loi normale sous des hypothèses peu contraignantes. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, alors

$$\sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mathbb{E}(X_i)}{\sigma(X_i) \sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) \quad (6.13)$$

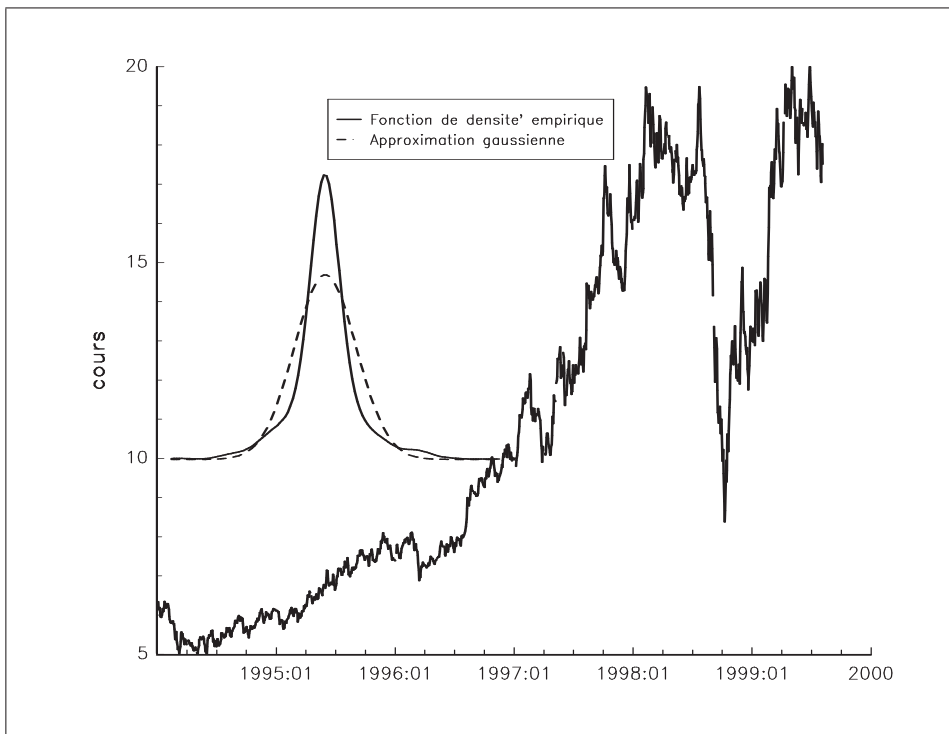
Cependant, la convergence en loi n'est rien d'autre qu'une convergence des fonctions de répartition. Cette convergence est beaucoup plus rapide dans les régions proches de la moyenne. FELLER [1968] a d'ailleurs montré que l'approximation n'est valable qu'autour de $n^{\frac{3}{4}}$ écarts-types de la moyenne. Nous pouvons alors facilement construire des exemples qui illustrent le problème du théorème central-limite dans la méthodologie *VaR* paramétrique. L'exemple suivant est proposé par BOULIER, BRABANT, DALAUD et DIEU [1997]. Les auteurs considèrent un modèle macro-économique de type APT où les rentabilités sont décrites par l'évolution aléatoire d'une trentaine de facteurs économiques, qu'ils supposent indépendants et de même loi. L'approximation n'est alors valable qu'autour de $30^{\frac{3}{4}} \simeq 12.819$ écarts-types de la moyenne. Or l'écart-type de la loi normale résultante est $\sqrt{30} \simeq 5.477$ fois plus grande que l'écart-type initial. Cela implique que l'approximation n'est plus valable au delà de la probabilité de 99.04%. Pour cet exemple, les *VaRs* au-delà de 99% ne font plus partie du domaine de validité de l'approximation par la loi normale. Dans le cas des portefeuilles de taux d'intérêt, il est recommandé d'utiliser au moins 13 facteurs. En utilisant le même raisonnement, cela voudrait dire que les *VaRs* au-delà de 97.12% sont en dehors du domaine de validité défini par Feller⁵. **Cette analyse peut être une nouvelle explication de l'utilisation d'un facteur multiplicatif.**

Comme nous l'avons déjà signalé, la variable aléatoire X de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ est entièrement caractérisée par ces deux premiers moments $\mu = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}((X - \mu)^2)$. Nous rappelons que cette fonction de distribution est utilisée en finance car elle est facilement manipulable, mais il existe de nombreux travaux qui présentent des arguments contredisant l'idée que les variations des prix des actifs sont normaux. Cela vient notamment du fait que les moments d'ordre 3 et 4 d'une série financière sont

⁵La valeur de la probabilité qui définit le domaine de validité est $\Phi\left(n^{\frac{1}{4}}\right)$.



GRAPHIQUE 6.3. Caractère leptokurtique d'une distribution de probabilité



GRAPHIQUE 6.4. Distribution empirique du rendement du titre BARCLAYS

très différents de ceux de la loi normale. La skewness v (ou moment centré d'ordre 3) est un coefficient d'asymétrie de la fonction de densité, alors que la kurtosis κ (ou moment centré d'ordre 4) est une mesure d'aplatissement. Nous avons

$$v = \frac{\mathbb{E}\left((X - \mu)^3\right)}{\sigma^3}$$

$$\kappa = \frac{\mathbb{E}\left((X - \mu)^4\right)}{\sigma^4}$$

Pour la loi normale, v et κ valent respectivement 0 et 3. Si $v < 0$ (resp. $v > 0$), on dit que la distribution est asymétrique à droite (resp. à gauche). Lorsque κ est supérieur à 3, la distribution présente des queues épaisses (elle est leptokurtique). Le graphique (6.3) présente différentes fonctions de densité⁶. Lorsque les distributions présentent des queues de distribution épaisses, le quantile α est alors bien au delà (en valeur absolue) du quantile gaussien correspondant. Prenons par exemple la figure en bas à gauche. Celle-ci contient le graphe des fonctions de répartition pour le segment $x \in [-3, -2]$. Pour la loi gaussienne, nous vérifions bien que le quantile à 1% est -2.33 . Or pour cette valeur, la quatrième distribution présente une valeur de 5% pour la fonction de répartition. Le quantile à 1% est en fait bien au-delà de -2.33 . Le graphique (6.4) correspond à l'évolution du cours du titre Barclays depuis 1994. Nous avons estimé la fonction de densité des variations du cours en utilisant la méthode non paramétrique du noyau d'Epanechnikov et comparé celle-ci avec la fonction de densité gaussienne estimée par la méthode des moments. L'estimation classique basée sur les deux premiers moments ne permet donc pas de prendre en compte les queues épaisses.

L'évolution du titre Barclays nous interpelle sur le problème de la stationnarité du processus. Nous pouvons penser qu'une approximation gaussienne ne peut être valide que localement. Cela pose alors le problème de la longueur de l'historique utilisé pour la VaR paramétrique. Les instances réglementaires exigent un historique d'au moins 1 an. **Contrairement à l'idée fort répandue que plus l'historique est long, meilleure sera la mesure des risques, l'utilisation d'un historique trop long peut avoir des conséquences néfastes sur la VaR paramétrique.** Car, dans ce cas là, il est parfaitement clair que les propriétés d'ergodicité et de stationnarité ne sont pas respectées. L'utilisation d'un historique long doit être plutôt réservé à la VaR historique.

L'utilisation de la loi normale pour la VaR paramétrique n'en demeure pas moins incontournable. Il convient donc d'apporter une attention particulière à l'estimation de la matrice de covariance.

6.2.4 L'estimation de la matrice de covariance

Nous notons $\mathbf{F}(t_0; N)$ la matrice des facteurs observés pour $t = t_0 - 1, \dots, t_0 - N$ avec

$$\mathbf{F}(t_0; N) = \begin{bmatrix} \mathbf{F}(t_0 - 1)^\top \\ \vdots \\ \mathbf{F}(t_0 - n)^\top \\ \vdots \\ \mathbf{F}(t_0 - N)^\top \end{bmatrix} \quad (6.14)$$

Considérons une matrice diagonale Λ de dimension $N \times N$ avec $\mathbf{1}^\top \text{diag}(\Lambda) = 1$. Λ est appelée la matrice des poids des observations. Nous définissons $\hat{\mu}$ et $\hat{\Sigma}$ par

$$\hat{\mu} = \mathbf{F}(t_0; N)^\top \Lambda \mathbf{1} \quad (6.15)$$

⁶Nous avons généré celles-ci en utilisant la fonction de densité d'Edgeworth (RUBINSTEIN [1998]) :

$$f(x) = b(x) \left[1 + \frac{v}{6} (x^3 - 3x) + \frac{\kappa - 3}{24} (x^4 - 6x^2 + 3) + \frac{v^2}{72} (x^5 - 10x^3 + 15x) \right]$$

avec b la fonction de densité **Binomiale**.

et

$$\hat{\Sigma} = \left(\mathbf{F}(t_0; N) - \mathbf{1} \odot \hat{\mu}^\top \right)^\top \Lambda \left(\mathbf{F}(t_0; N) - \mathbf{1} \odot \hat{\mu}^\top \right) \quad (6.16)$$

Nous pouvons alors montrer que $\hat{\mu}$ et $\hat{\Sigma}$ sont deux estimateurs consistants des paramètres μ et Σ de la loi de distribution $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$.

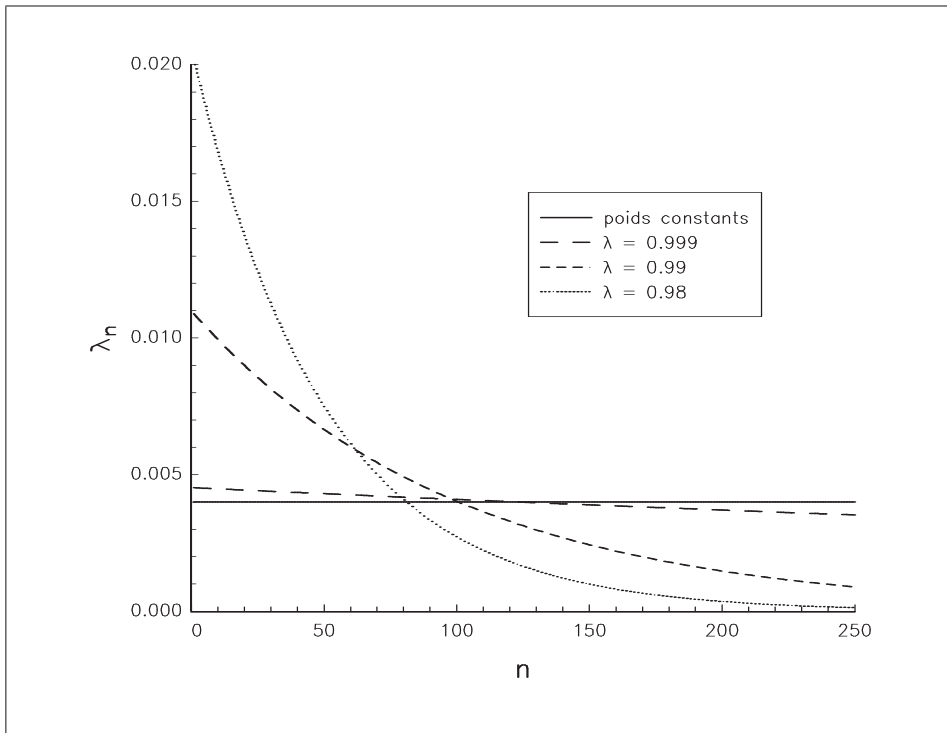
Dans le cadre d'une *VaR*, nous utilisons généralement deux types de poids :

1. L'approche standard consiste à donner le même poids à chacune des observations. Dans ce cas, nous avons $\Lambda_{n,n} = \lambda_n = \frac{1}{N}$.
2. L'approche moyenne mobile consiste à donner des poids différents en fonction des positions des observations. Plus la date d'observation est récente, plus le poids associé est important. Sous l'impulsion de RiskMetrics, la méthode de la moyenne mobile exponentielle s'est imposée. Dans ce cas, nous avons $\lambda_n = (1 - \lambda) \lambda^{n-1} / (1 - \lambda^N)$.

Le graphique (6.5) représente la fonction λ_n pour N égal à 250 jours. Nous constatons que plus la valeur de λ est petite pour les poids exponentiels, plus les observations récentes ont de l'influence sur l'estimation. Nous remarquons aussi que les poids constants sont un cas particulier des poids exponentiels puisque

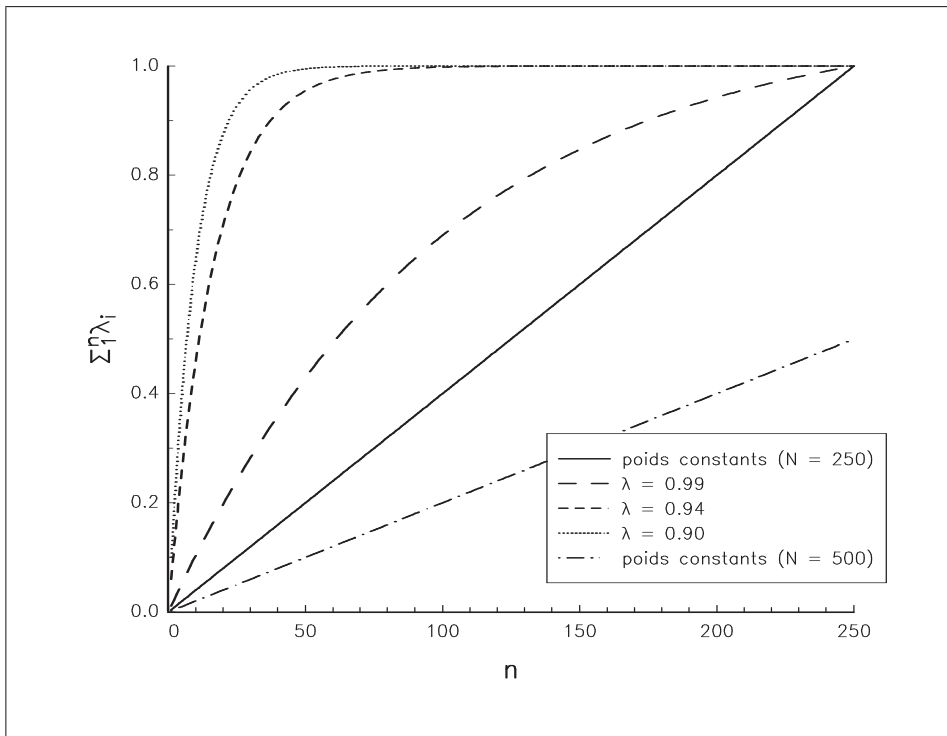
$$\lim_{\lambda \rightarrow 1} (1 - \lambda) \lambda^{n-1} / (1 - \lambda^N) = \frac{1}{N}$$

Nous pouvons aussi nous intéresser à la contribution de n premières observations, c'est-à-dire à la somme $\sum_{i=1}^n \lambda_i$. Sur le graphique (6.6), nous voyons parfaitement le caractère exponentiel de la méthode RiskMetrics. Ainsi, pour $\lambda = 0.94$ (valeur retenue par RiskMetrics), 50% des poids concernent les 12 premières observations⁷. Et, bien sûr, ceci est indépendant de la taille de l'échantillon, contrairement aux poids constants.

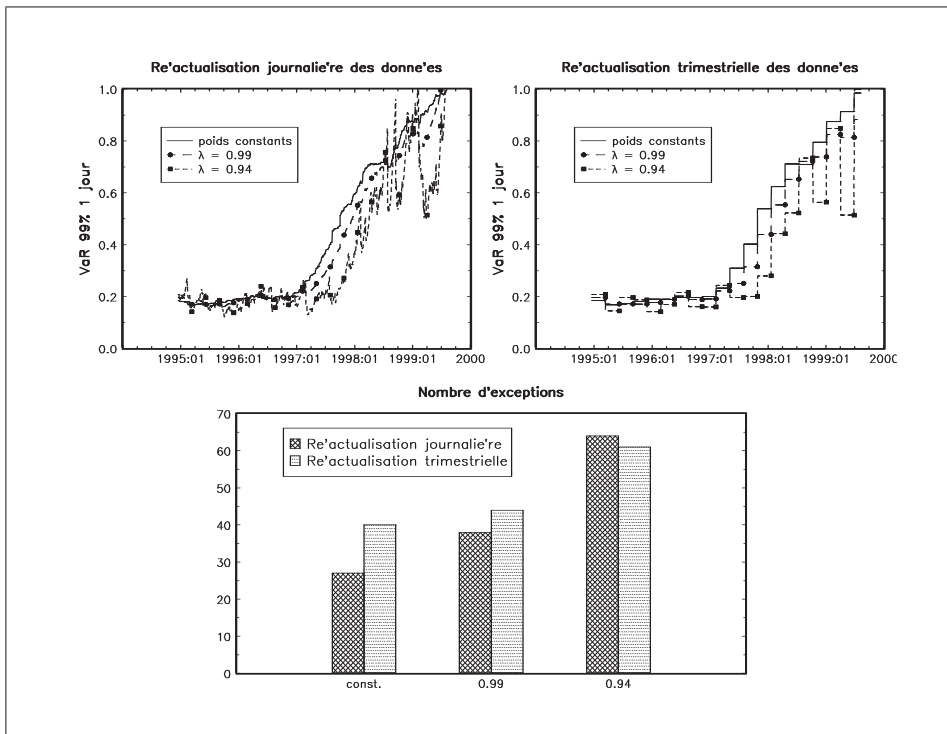


GRAPHIQUE 6.5. Pondération d'une moyenne mobile exponentielle

⁷A titre complémentaire, 75% et 95% des poids correspondent aux 23 et 49 premières observations.



GRAPHIQUE 6.6. Pondération cumulée d'une moyenne mobile exponentielle



GRAPHIQUE 6.7. Evolution de la valeur en risque (titre BARCLAYS)

Voyons un exemple montrant la différence entre les deux exemples. Nous considérons une position longue sur le titre BARCLAYS. Le graphique (6.7) présente l'évolution de la VaR avec deux types de réactualisation. La taille de l'échantillon est fixé à 250 jours de trading. En période de crise, la VaR RiskMetrics est plus grande que la VaR avec les poids constants. Ce phénomène s'inverse lors des périodes calmes (ou après les périodes de crises). Cela se comprend aisément à cause de la forme des poids. Si nous considérons le nombre d'exceptions (pour information, le nombre de jours de trading est égal à 1136), la VaR avec poids constants est la plus performante pour cet exemple. Cela tient au fait que la VaR RiskMetrics sous-estime le risque pour les périodes calmes, ce qui implique que dès qu'il y a une variation plus importante, nous obtenons une exception. Cela se voit très bien si nous considérons la localisation des exceptions. Celles-ci ont des positions différentes selon la méthodologie. Enfin, nous remarquons que la fréquence de réactualisation a une influence non négligeable sur la qualité de la VaR .

Si nous calculons le temps de retour moyen empirique pour l'exemple précédent, nous constatons qu'il est légèrement inférieur au temps de retour moyen théorique. Cela veut dire que nos mesures VaR ont sous-estimé la perte potentielle. HENDRICKS [1996] remarque ce même phénomène. Il compare douze méthodologies différentes et constate que

Virtually all of the approaches produce accurate 95th percentile risk measures. The 99th percentile risk measures, however, are somewhat less reliable and generally cover only between 98.2 percent and 98.5 percent of the outcomes. On the one hand, these deficiencies are small when considered on the basis of the percentage of outcomes missclassified. On the other hand, the risk measures would generally need to be increased across the board by 10 percent or more to cover precisely 99 percent of outcomes.

6.2.4.1 Un exercice de backtesting

Ce paragraphe s'attache à déterminer la manière optimale de calculer la matrice de covariance. Notre approche se base sur le calcul du nombre d'exceptions observées sur un historique des cours d'établissements financiers depuis 1994.

Nous nous plaçons dans le cadre d'une VaR analytique sous l'hypothèse de rendements gaussiens. Nous sommes donc en mesure de déterminer un intervalle de confiance à une certaine probabilité à partir des deux premiers moments. Nous comparons ici de manière qualitative la validité de ces intervalles de confiance selon la méthode choisie pour l'estimation des deux premiers moments. Les résultats qui suivent permettent de visualiser de manière dynamique les caractéristiques sur la VaR associées à ces méthodes.

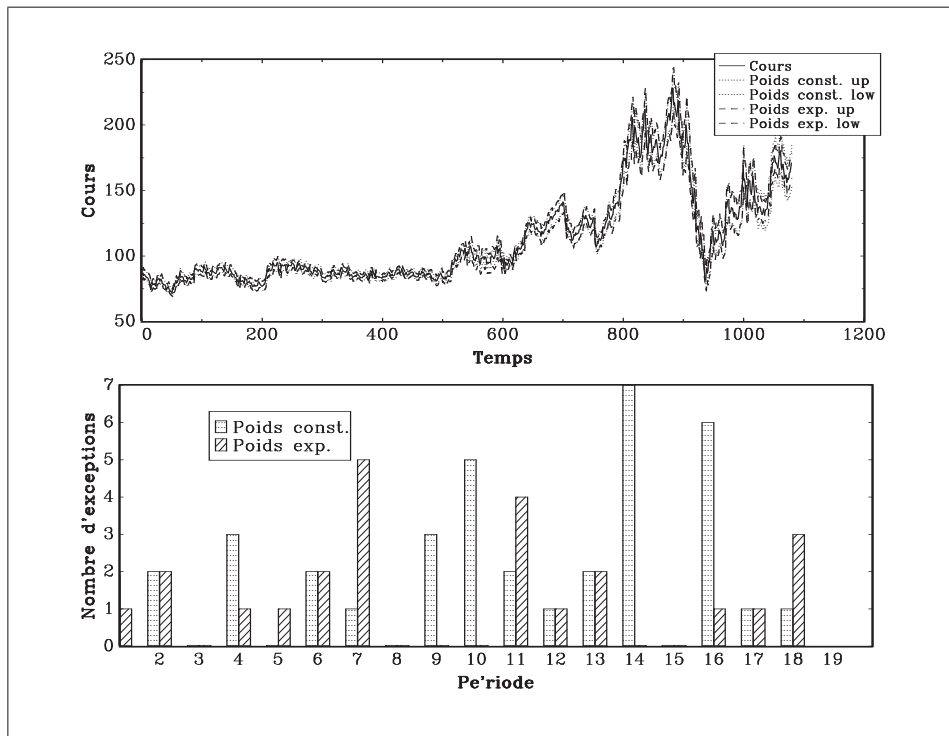
Les estimateurs retenus pour le calcul des rendements moyens et des volatilités sont les méthodes de poids constants et de poids exponentiels ($\lambda = 0.94$). L'enjeu inhérent au choix de la méthode d'estimation de ces paramètres est capital ; il s'agit d'obtenir une réactivité optimale aux variations du marché, tout en conservant une inertie suffisante pour ne pas trop sur ou sous-estimer les variations possibles. A priori, une méthode reposant sur des poids constants accusera un petit peu de retard pour réhausser son niveau dans une période à forte volatilité. De même, la méthode reposant sur des poids exponentiels risque de largement sur-estimer la VaR après une courte période d'agitation.

Afin d'illustrer ce phénomène, nous proposons par la suite d'étudier le nombre d'exceptions observées sur le cours de certains établissements financiers par période. Une exception est définie comme une valeur du titre en dehors de l'intervalle de confiance prévu. Nous considérons les cas de positions longues et courtes sur un titre, ce qui nous amène à définir des bornes supérieures et inférieures de notre intervalle. Nous nous sommes attachés à respecter les critères quantitatifs de la Commission Bancaire pour le calcul de la VaR . Ainsi avons nous retenu un niveau de confiance de 1% sur une période de détention de 1 jour. De même, l'estimation des moments des distributions des rendements quotidiens ont été calculés sur un historique d'un an renouvelé tous les trois mois. Tout ceci nous a permis de déterminer les séries des deux bornes L^u et L^d de notre intervalle pour les rendements journaliers :

$$\begin{aligned} L_t^u &= \mu_t - \Phi^{-1}(0.5\%) \times \sigma_t \\ L_t^d &= \mu_t + \Phi^{-1}(0.5\%) \times \sigma_t \end{aligned}$$

où $\Phi^{-1}(0.5\%)$ est le quantile à 0.5% de la loi normale centrée réduite ($\Phi^{-1}(0.5\%) \simeq 2.575$). μ_t et σ_t sont respectivement la moyenne et l'écart-type estimés du rendement à l'instant t .

Nous sommes alors en mesure de déterminer les valeurs *up* et *down* du cours à 1 jour avec un intervalle de confiance de 99%. Nous comptons alors le nombre de fois où le titre est sorti de cet intervalle sur chaque période de 3 mois (environ 60 jours). Les graphiques suivants représentent les mouvements des titres des grands établissements financiers par rapport aux intervalles calculés avec les poids constants et exponentiels, ainsi que le nombre d'exceptions constatés au cours des périodes. Ceci nous donne une bonne idée des avantages et inconvénients des deux méthodes d'estimation des moments. En fait, l'exemple de la Société Générale est particulièrement intéressant, puisqu'il comporte une longue période de stagnation pendant laquelle les deux méthodes sont équivalentes et performantes. Aux premiers chocs, la méthode aux poids constants réagit trop tard et accuse 3 et 5 exceptions sur 60 observations (périodes 9 et 10), alors que la méthode aux poids exponentiels encaisse très bien le choc. De même, lors de la crise de l'été 1998 (période 16), la méthode aux poids constants réagit beaucoup trop tard et ne passe pas le backtesting. D'un autre côté les légères périodes de flottements suivies de brusques variations mettent en défaut les poids exponentiels (périodes 11 et 18). Du fait d'une période, même courte, relativement calme, la volatilité calculée à partir des poids exponentiels a trop vite chuté et sous-estime les variations possibles du cours. Enfin, nous devons mentionner le cas de la période 6 qui correspond à une période de stabilité exceptionnelle, ce qui entraîne une variance pour la période 7 quasi nulle lorsque celle-ci est calculée avec la méthode des poids exponentiels. Cela explique le nombre d'exceptions relativement élevé de la *VaR* RiskMetrics sur cette période relativement calme.



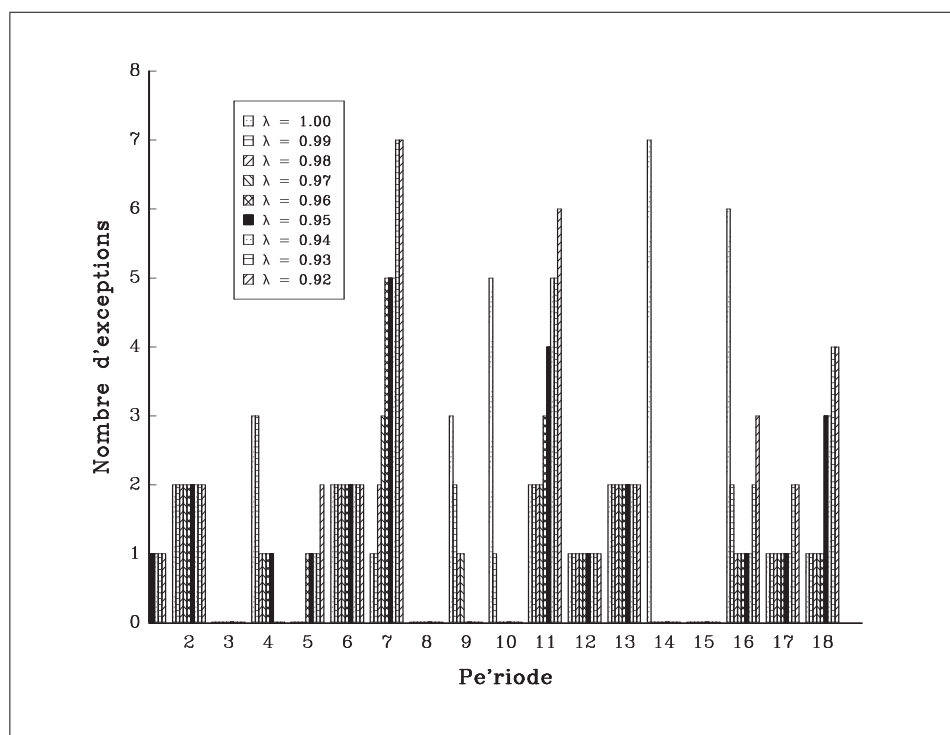
GRAPHIQUE 6.8. Backtesting avec le titre SOCIETE GENERALE

L'exemple de la Société Générale illustre la nécessité et la difficulté d'obtenir à la fois de la réactivité lors de périodes d'agitations et de l'inertie pour les fausses périodes de calme. RiskMetrics nous recommande de prendre $\lambda = 0.94$. Ceci implique que 95% de l'information est contenue dans les trois derniers mois. Outre le fait que cela pose quelques problèmes pour l'estimation des matrices de covariance de dimension trop grande, on peut s'interroger sur la mémoire de tels processus. En effet, même si les toutes dernières informations contribuent énormément à la détermination du moment, signe de réactivité forte, les informations de plus de trois mois ne jouent plus aucun rôle, signe de faible inertie.

Les résultats qui suivent traitent donc de l'influence de λ sur la qualité de la *VaR* analytique. Nous avons fait varier λ de 0.9 à 0.999, et nous avons comparé le nombre d'exceptions observées sur les périodes de trois mois suivant l'estimation des moments. Sans pour autant que ce résultat puisse être généralisé,

l'étude des séries des cours sur les établissements financiers pousse à choisir un coefficient λ favorisant une mémoire plus longue, c'est-à-dire une inertie plus importante. Il semble, de manière qualitative, que la valeur optimale de ce coefficient dans ce cas là soit de l'ordre de 0.96.

Nous notons, toutefois, que la valeur optimale de λ est susceptible de varier selon les marchés⁸. Aussi, le coefficient obtenu ne peut être adapté pour l'ensemble des séries financières. Nous conseillons plutôt une étude du marché à considérer au préalable, qui permettrait de déterminer le λ optimal.



GRAPHIQUE 6.9. Détermination de la valeur optimale pour λ

6.2.4.2 Les approches conditionnelles de l'estimation de la matrice de covariance

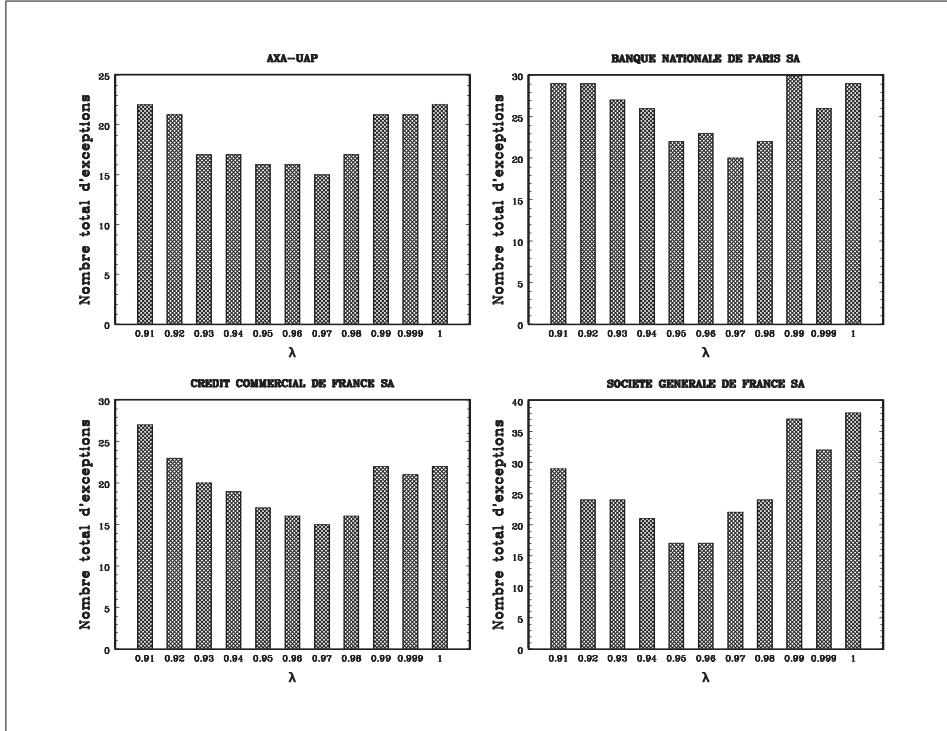
Les approches précédentes de l'estimation la matrice de covariance reposent sur l'hypothèse que Σ est une matrice constante au cours du temps. Cette hypothèse a été vivement critiquée par de nombreux économètres (voir les survey [1], [6] et [29]). Afin de prendre en compte les effets hétéroscédastiques, ENGLE [1982] introduit une nouvelle classe de processus connus sous le nom de modèles ARCH. A la suite de cet article, de nombreux travaux dans le domaine de la modélisation de la variance conditionnelle ont vu le jour et plusieurs formes de généralisation ont été introduites. Dans un premier temps, BOLLERSLEV [1986] propose d'introduire un effet "autorégressif" dans l'équation de variance conditionnelle (modèles GARCH). Ensuite, plusieurs formes d'extension au cas multidimensionnel sont apparues.

Le cas unidimensionnel

Soit le processus unidimensionnel $\{y_t\}$ en temps discret défini par

$$y_t = \mu + \varepsilon_t \tag{6.17}$$

⁸Cette étude a déjà été menée par RiskMetrics, et met en évidence des différences notables de λ selon les marchés (places financières et produits) et la période de détention. $\lambda = 0.94$ est une valeur *moyenne* basée sur un critère de moindres carrés de la variance quotidienne des rendements. Dans le cadre de la *VaR*, nous pensons que ce critère n'est pas le plus approprié et qu'il est préférable de considérer un critère de minimisation du nombre d'exceptions.


 GRAPHIQUE 6.10. Valeur optimale de λ pour différents titres

avec ε_t un processus stochastique. Sous l'hypothèse de normalité et de constance de la variance, nous avons

$$\varepsilon_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad (6.18)$$

où \mathcal{I}_{t-1} représente l'information passée. Lorsque nous estimons la variance avec la méthode présentée précédemment, nous faisons l'hypothèse implicite que le processus est celui ci-dessus. Comme nous savons que ce n'est pas la bonne représentation, les estimations sont refaites régulièrement pour tenir compte que la variance change au cours du temps. En revanche, les modèles de type ARCH supposent que

$$\varepsilon_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, h_t^2) \quad (6.19)$$

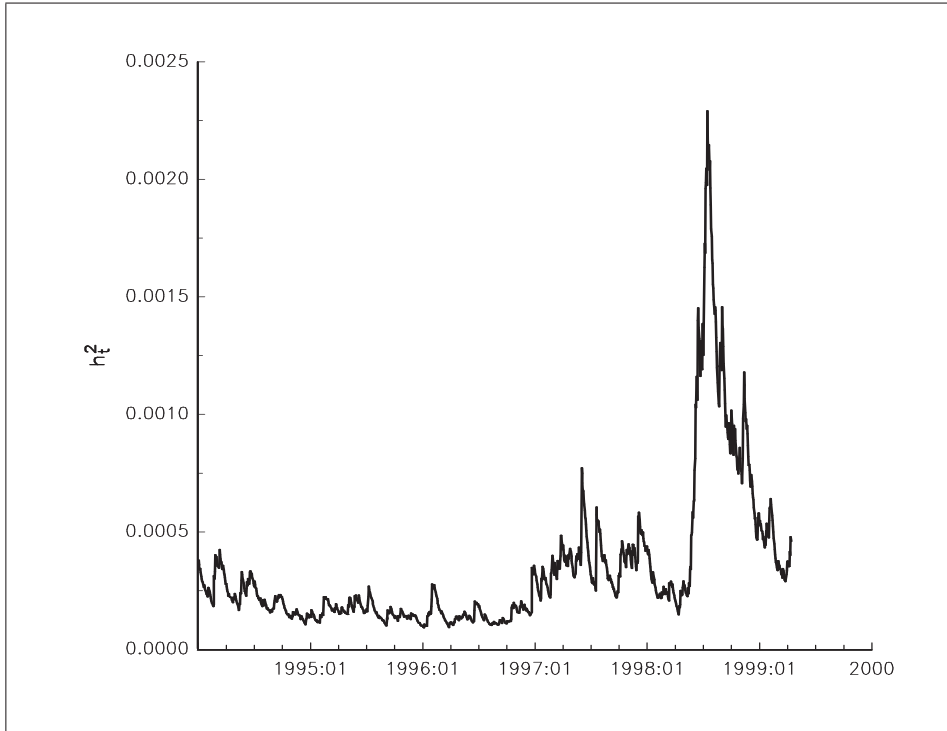
Conditionnellement à l'information passé, ε_t n'est plus un bruit blanc. Selon la spécification de h_t^2 , nous définissons plusieurs types de modèles. Par exemple, y_t est un processus ARCH(p) si

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (6.20)$$

Dans le cas d'un processus GARCH(p,q), nous avons

$$h_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i h_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \beta_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (6.21)$$

A titre illustratif, nous avons représenté sur le graphique (6.11) la variance conditionnelle du rendement du titre BARCLAYS estimée à partir d'un modèle GARCH(1,1). A partir des estimations, il est alors possible de construire des prévisions de la variance conditionnelle $\mathbb{E}_t [h_{t+h}^2]$. Dans le cas des méthodes présentées au paragraphe précédent, la seule prévision possible de la variance en $t+h$ est en fait la variance observée en t , ce qui n'est pas le cas des modèles à variances conditionnelles. L'étude de DAVÉ et STAHL [1998] montre bien que d'un point de vue dynamique, les approches traditionnelles d'estimation de la matrice de covariance présentent un biais lorsque les séries ne sont pas stationnaires. Les auteurs ont fait une étude exhaustive sur le marché des changes en considérant 5 méthodes : la méthode historique, la *VaR* analytique avec des poids constants, la *VaR* RiskMetrics et les modèle GARCH(1,1) et Tail GARCH(1,1).



GRAPHIQUE 6.11. Variance conditionnelle du rendement du titre BARCLAYS — modèle GARCH(1,1)

La comparaison de ces méthodologies a porté sur 5 mesures de performance, et notamment la méthode **BIS Colour frequency**, qui consiste à calculer la probabilité qu'un modèle corresponde à une zone donnée (verte, orange, rouge) pour un seuil de confiance de 99%. Pour la zone rouge, les résultats sont les suivants : les méthodes qui se trouvent dans cette zone le plus souvent sont les deux *VaRs* analytiques, suivies par la méthode historique et le modèle GARCH(1,1), puis enfin par le modèle Tail GARCH(1,1).

Le cas multidimensionnel

Les modèles GARCH peuvent se généraliser au cas multidimensionnel. Dans ce cas, nous avons

$$Y_t = \mu + \varepsilon_t \tag{6.22}$$

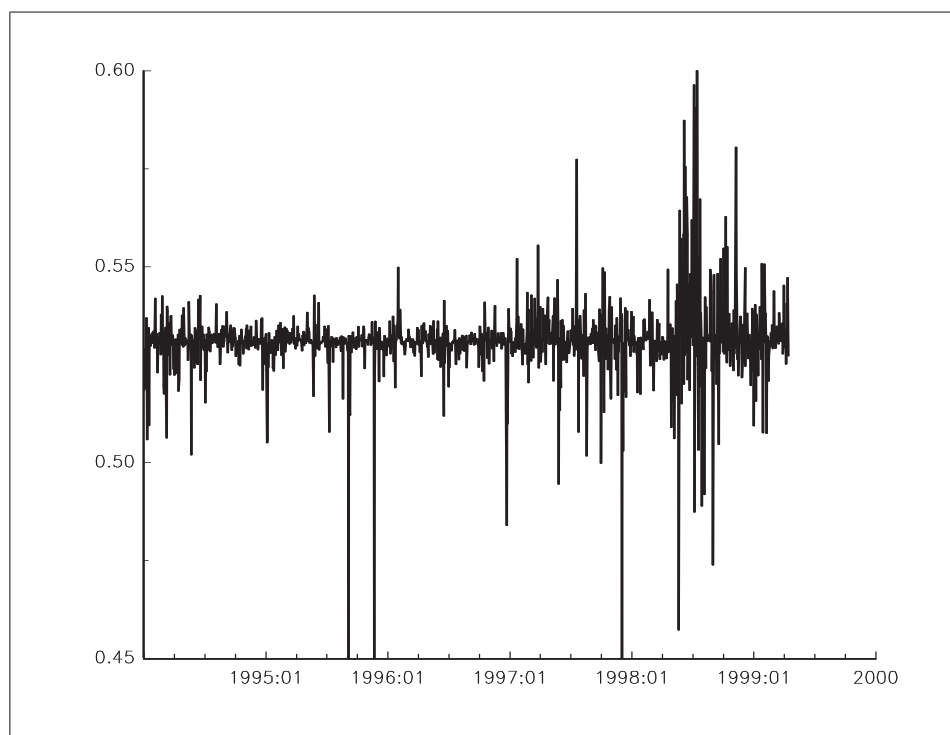
avec Y_t un processus de dimension N et

$$\varepsilon_t | \mathcal{I}_{t-1} \sim \mathcal{N}(0, V_t) \tag{6.23}$$

Il existe alors différentes formulations possibles pour définir la matrice de covariance conditionnelle. Le tableau suivant présente celles qui sont le plus souvent rencontrées dans la littérature. :

Diagonal VECH	$V_t = A_0 + \sum_{i=1}^p A_i \otimes V_{t-i} + \sum_{i=1}^q B_i \otimes \varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}^\top$
BEEK	$V_t = A_0 A_0^\top + \sum_{i=1}^p A_i V_{t-i} A_i^\top + \sum_{i=1}^q B_i (\varepsilon_{t-1} \varepsilon_{t-1}^\top) B_i^\top$

Appliquons un modèle GARCH multidimensionnel de type BEEK pour modéliser les titres BARCLAYS et LLOYDS/TSB. Dans ce cas particulier, nous remarquons sur le graphique (6.11) que la corrélation conditionnelle est la plupart du temps très régulière. Cela se comprend aisément du fait de la nature de deux titres. Ce type de modélisation est en revanche très intéressante lorsque les corrélations ne peuvent pas être considérées comme constantes au cours du temps.



GRAPHIQUE 6.12. Corrélation conditionnelle des rendements des titres BARCLAYS et LLOYDS/TSB — modèle BEEK GARCH(1,1)

6.2.5 Le problème du scaling

Cette section s'intéresse au choix de l'horizon considéré et aux difficultés qu'il engendre pour le calcul de la VaR . Selon le type d'actifs gérés, nous aurons tendance à porter notre attention à des VaR allant de l'intra-day à quelques années. De manière opérationnelle, les risques sont souvent mesurés à 1 jour. Le passage à un autre horizon peut poser quelques problèmes.

Le comité de Bâle impose une période de détention de **10 jours** pour mesurer les risques d'un portefeuille. Il conseille alors de convertir la VaR 1 jour à la VaR 10 jours par scaling. Le scaling consiste à multiplier la volatilité à 1 jour par \sqrt{T} , T étant l'horizon considéré. Cette méthode soulève une certaine polémique quant à son application, et le débat sur l'adéquation du scaling s'intensifie sans pour autant faire ressortir un consensus clair.

Nous présentons dans un premier temps les idées rencontrées dans les derniers articles publiés sur le sujet, puis nous effectuons quelques simulations pour tester la validité du coefficient $\sqrt{10}$ pour le calcul de la VaR .

6.2.5.1 Quelques éléments théoriques

Au travers des différents articles sur le sujet, il ressort trois méthodes pour la conversion de la volatilité 1 jour à une volatilité T jours :

- La première conseillée par RiskMetrics est la fameuse \sqrt{T} rule qui consiste à appliquer le coefficient multiplicatif \sqrt{T} à la VaR 1 jour. Cette méthode est appréciée principalement pour sa simplicité et sa très facile mise en œuvre. Elle repose essentiellement sur une hypothèse de normalité et d'indépendance des accroissements des prix des actifs. Ces hypothèses sont souvent discutées, et ne s'appliquent pas à toutes les maturités.
- L'alternative actuelle à la première méthode repose sur la théorie des valeurs extrêmes. Elle demande à estimer un coefficient α représentatif de l'épaisseur des queues de distribution. Par exemple, pour une loi de Student, α représente le nombre de degrés de liberté (ou l'exposant caractéristique) et pour un processus ARCH, α représente le nombre de moments finis de la distribution non conditionnée

des innovations. Ce coefficient étant déterminé, nous appliquons la $T^{\frac{1}{\alpha}}$ rule, qui consiste à passer de la VaR 1 jour à la VaR T jours en multipliant par $T^{\frac{1}{\alpha}}$.

- La dernière méthode consiste tout simplement à déterminer la matrice de variance-covariance des rendements à T jours. Cette approche nécessite un historique assez long des données et ne peut pas être appliquée à tous les horizons. Toutefois, elle permet d'obtenir la véritable matrice de variance-covariance historique. Reste alors le problème de l'adéquation du modèle à cette maturité.

Les articles rencontrés dans la littérature s'attachent plus particulièrement à tester la validité de la première approche et à développer la deuxième méthodologie au travers de modèles semi-paramétriques. Il n'y a pas de consensus arrêté sur la question. DIEBOLD et al. [15], [10] testent la procédure de scaling sur des actifs soumis à une dynamique de type GARCH. Leur argumentation repose sur la formule de Drost-Nijman qui permet de corriger la volatilité à T jours à partir de celle obtenue à 1 jour, sous certaines conditions de régularité et pour des horizons suffisamment longs. Leurs deux principales conclusions sont les suivantes :

- pour un horizon supérieur à 10-15 jours, la volatilité n'est pas prévisible. Autrement dit, les modèles à volatilité conditionnelle ne sont plus valables pour $T > 10$;
- dans tous les cas, le scaling amplifie les fluctuations de la volatilité. Même si en moyenne le coefficient \sqrt{T} peut sembler conservateur, le véritable rapport entre les deux volatilités est souvent bien au-dessous **ou** bien au-dessus de \sqrt{T} .

DANIELSSON et DE VRIES [11], [12] proposent une autre approche fondée sur des résultats de la théorie des valeurs extrêmes. Ils émettent quelques réserves sur l'application de la méthode proposée par RiskMetrics pour un horizon de 10 jours, même si les conclusions ne s'appliquent pas uniquement au passage de la VaR 1 jour à la VaR 10 jours. C'est plus la méthode fondée sur l'unique estimation de la matrice de variance-covariance qui est remise en cause. Les tests et simulations qu'ils ont effectués aboutissent aux conclusions suivantes :

- RiskMetrics **sous-estime** la VaR à 1 jour par rapport à une méthode fondée sur la théorie des extrêmes surtout pour la mesure des risques rares (i.e. 0.05% et 0.005%). Nous notons ici que les résultats obtenus pour une VaR à 1% sont comparables pour les deux méthodes.
- Pour des prévisions à 10 jours, la méthode de RiskMetrics basée sur le scaling **sur-estime** la VaR obtenue par la $T^{\frac{1}{\alpha}}$ rule (en moyenne, le coefficient α obtenu vaut 4.6).

Ces différents résultats ne font ressortir aucun consensus quant à l'application du coefficient \sqrt{T} . Les seules conclusions tirées soulignent que dans une approche purement RiskMetrics, le scaling n'est pas forcément conservateur (amplification des fluctuations) et qu'en le comparant à des méthodes plus fines, il peut s'avérer trop conservateur.

6.2.5.2 Un exercice de simulation

Pour illustrer les idées énoncées ci-dessus, nous avons effectué quelques simulations de rendements de différents actifs. Nous avons considéré successivement une dynamique de type GARCH, puis un modèle à volatilité stochastique (Hull-White). Dans ces deux cas, nous simulons des trajectoires du cours, dont nous calculons les vraies volatilités à 1 jour et à 10 jours, puis nous comparons le rapport de ces deux volatilités avec le coefficient $\sqrt{10}$. Cette approche a seulement le mérite de tester la validité de l'approximation effectuée par la \sqrt{T} rule, mais ne nous apporte aucune information quant à la pertinence d'une VaR analytique de type RiskMetrics qui ne dépend que de la matrice de variance-covariance.

Modèle GARCH

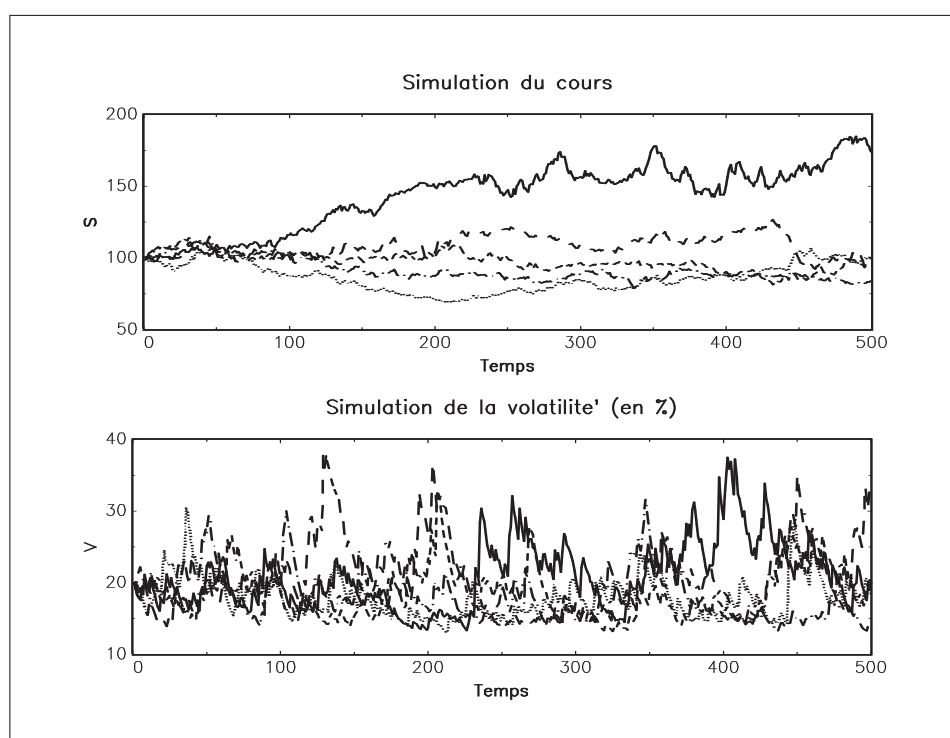
Nous supposons ici que le rendement 1 jour d'un actif peut être modélisé par un GARCH(1,1). Cette hypothèse n'est pas très restrictive et semble cadrer avec la dynamique observée sur les marchés de certains titres. Nous simulons donc un processus y_t tel que :

$$\begin{aligned} y_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= w + \alpha y_{t-1}^2 + \beta \sigma_{t-1}^2 \\ \varepsilon_t &\sim NID(0, 1) \end{aligned}$$

Nous imposons les conditions usuelles de régularité et de stationnarité

$$\begin{aligned} 0 < w < \infty \\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0 \\ \alpha + \beta < 1 \end{aligned}$$

Nous avons paramétré ce modèle de telle sorte qu'il reflète des séries de rendements à 1 jour en posant $\alpha = 0.1$ et $\beta = 0.85$. Le choix de w est purement arbitraire et est fixé à 20%. Pour illustrer le type de processus que nous obtenons, nous représentons quelques trajectoires simulées (voir le graphique 6.13). Les rendements simulés permettent de récupérer les volatilités historiques 1 jour et 10 jours pour chaque trajectoire simulée. Nous avons effectué ceci sur 1000 simulations de trajectoires. Chacune des volatilités étant calculée à partir de 250 observations quotidiennes (donc 25 observations pour la volatilité 10 jours), nous nous sommes placés dans la situation d'un historique d'un an. Les simulations effectuées rendent compte du fait que même si le rapport des volatilités semble estimer $\sqrt{10}$ en moyenne, il subsiste un fort écart-type (voir le graphique 6.14). On ne retrouve pas le phénomène d'amplification des fluctuations en multipliant par $\sqrt{10}$. Nous ne pouvons donc pas conclure quant à l'adéquation de la méthode de RiskMetrics à la VaR à 10 jours dans le cas de modèles GARCH.



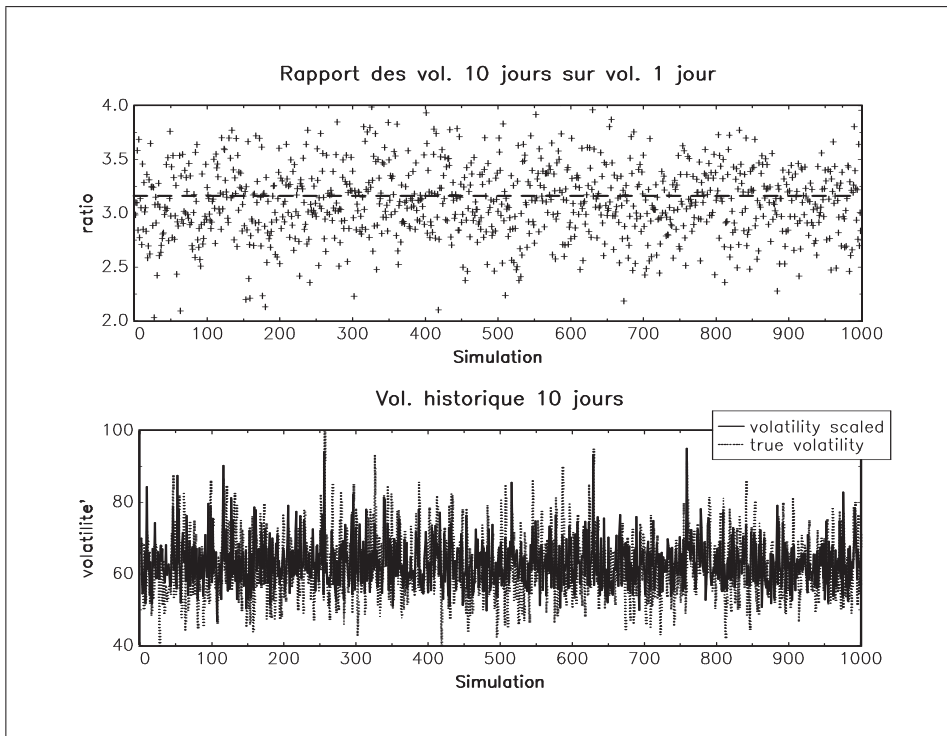
GRAPHIQUE 6.13. Simulation du modèle ARCH

Modèle à volatilité stochastique

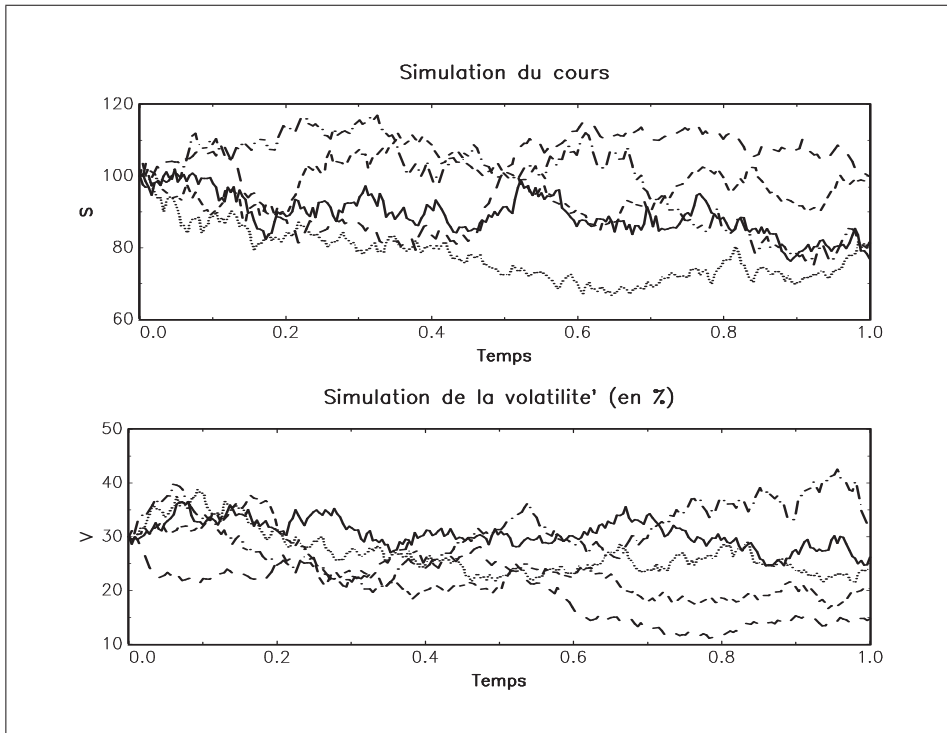
Nous avons développé la même méthodologie pour des prix d'actifs régis par un modèle à volatilité stochastique de type Hull-White. Plus précisément la dynamique des cours suit l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S(t)} &= r dt + V(t) dW^1(t) \\ \frac{dV(t)}{V(t)} &= \nu dt + \eta dW^2(t) \end{aligned}$$

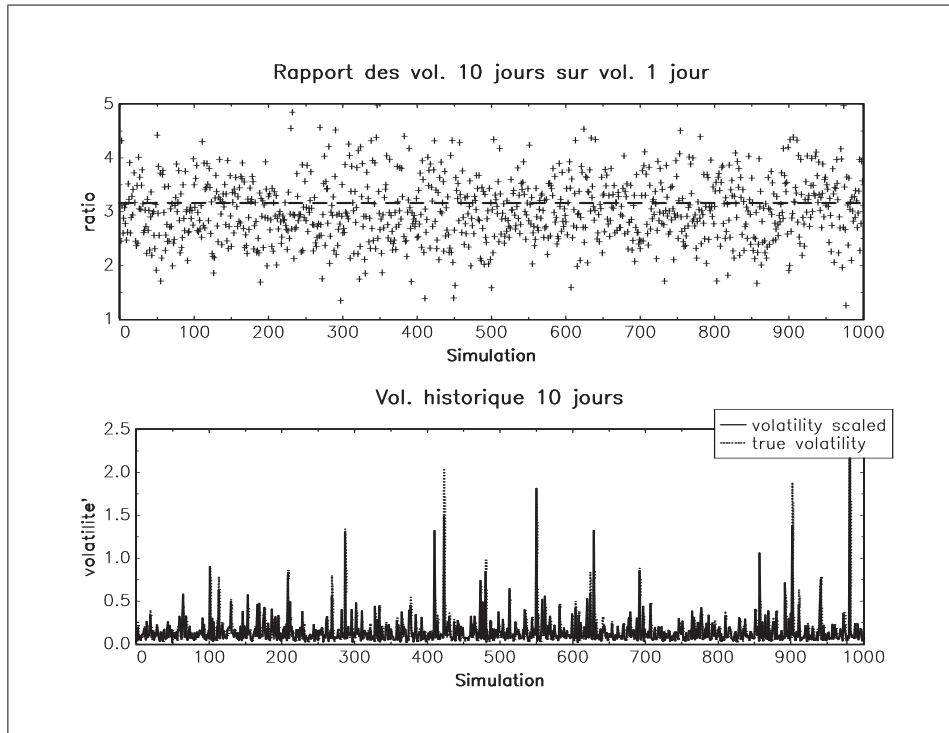
où W^1 et W^2 sont deux browniens de matrice de corrélation $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$. Ce modèle, sorte de processus ARCH en temps continu, reflète de manière assez satisfaisante la dynamique suivie par les cours de



GRAPHIQUE 6.14. Détermination du scaling (modèle ARCH)



GRAPHIQUE 6.15. Simulation du modèle Hull-White



GRAPHIQUE 6.16. Détermination du scaling (modèle Hull-White)

certaines actifs. Le graphique (6.15) contient quelques exemples de trajectoires de ces processus. Comme pour le modèle GARCH, nous avons simulé 1000 trajectoires sur 1 an de ce processus. Pour chacune des trajectoires, nous calculons la volatilité des rendements à 1 jour multipliée par $\sqrt{10}$ et la volatilité des rendements à 10 jours. Nous représentons sur le graphique (6.16) les volatilités obtenues pour ces 1000 trajectoires ainsi que le rapport des volatilités (à comparer avec $\sqrt{10}$). Nos conclusions sont les mêmes que pour le modèle GARCH.

6.2.5.3 Conclusion

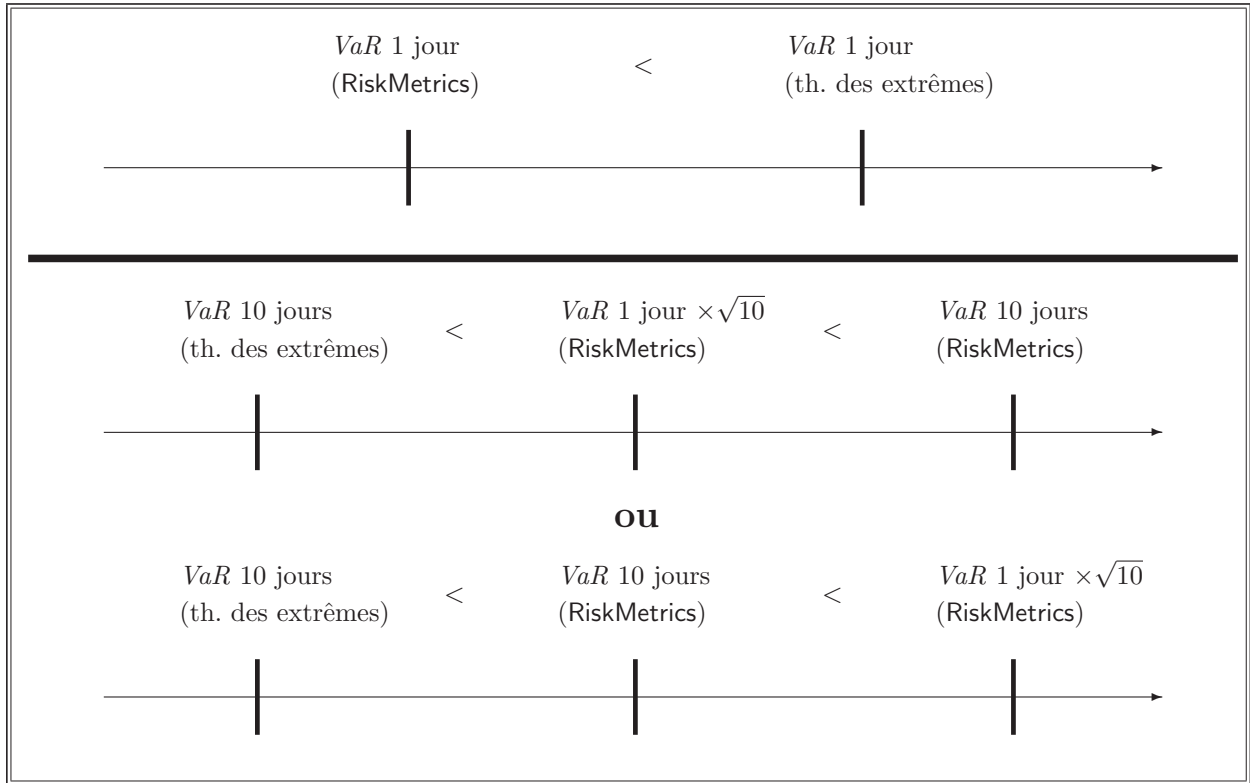
Nos résultats semblent cohérents avec les idées rencontrées dans la littérature financière. Nous ne pouvons pas affirmer que le passage d'une VaR analytique à 1 jour à une VaR analytique à 10 jours par scaling soit conservateur (voir le schéma 6.17). En effet, même si les simulations effectuées ont tendance à montrer qu'en moyenne le ratio entre les volatilités 10 jours et 1 jour est inférieur à $\sqrt{10}$, l'écart type de ce même ratio reste très élevé. Toutefois, les travaux actuels réalisés dans la théorie des valeurs extrêmes semblent montrer que le calcul d'une VaR analytique (type RiskMetrics) est inadapté pour un horizon supérieur à 10 jours. Les articles publiés sur le sujet s'accordent à dire que l'approche VaR analytique conduit à une sur-estimation de la mesure de risque à 10 jours par rapport à un calcul basé sur la théorie des extrêmes. **Si nous assimilons la mesure basée sur les extrêmes au véritable risque encouru, nous pouvons donc affirmer que la méthode du scaling est conservatrice** (voir de nouveau le schéma 6.17 pour les positions relatives des différentes mesures de risque).

6.3 Les produits optionnels

6.3.1 La problématique

Le calcul de la VaR de produits optionnels est relativement complexe, puisque la mesure de risque n'est pas une fonction linéaire de la variance d'une option. Considérons par exemple une option européenne de maturité τ et de prix d'exercice K portant sur un sous-jacent $S(t)$. Dans le modèle de Black et Scholes, à l'instant t_0 , le prix de l'option est égale à

$$C(t_0, S_0) = S_0 \exp((b-r)\tau) \Phi(d_1) - K \exp(-r\tau) \Phi(d_2) \quad (6.24)$$



GRAPHIQUE 6.17. Positions relatives des $VaRs$

avec b le cost-of-carry et Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite,

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[\ln \frac{S_0}{K} + b\tau \right] + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau} \quad (6.25)$$

Considérons un portefeuille avec une position longue sur cette option, la variation du portefeuille entre t_0 et t_0+h est égale à $C(t+h, S(t+h)) - C(t_0, S_0)$. Nous ne pouvons pas assimiler le risque du portefeuille à une distribution normale ou log-normale, car le prix de l'option BS est une fonction non-linéaire du prix du sous-jacent $S(t)$ qui correspond à une distribution log-normale dans le modèle de Black et Scholes. Notons f_S la fonction de densité de $S(t)$ et $C(S)$ la fonction de la prime d'achat. Comme la fonction C est bijective, nous avons alors

$$f_C(C) = \frac{f_S(C^{-1}(C))}{\partial_S C(C^{-1}(C))} \quad (6.26)$$

Puisque $\partial_S C(S)$ n'est pas une fonction affine de S , le distribution du prix de l'option n'est pas log-normale. Il n'est donc pas possible d'utiliser une méthode de type matrice de covariance pour calculer la VaR d'une option.

6.3.2 Les solutions

Plusieurs auteurs ont alors proposé des méthodes de types analytique ou Monte Carlo pour calculer la mesure de risque des produits non linéaires. Les méthodes analytiques sont généralement basée sur des approximations de Taylor. Par exemple, BRITTEN-JONES et SCHAEFER [1997] proposent d'utiliser une expansion partielle à l'ordre 2 afin de tenir compte du Gamma de l'option. CÁRDENAS, FRUCHARD, KOEHLER, MICHEL et THOMAZEAU [1997] intègrent dans leur analyse le risque de volatilité en considérant le Vega de l'option. Généralement, ces méthodes sont assez lourdes à mettre en place d'un point de vue technique, surtout dans le cas multidimensionnel. D'un autre côté, les méthodes de Monte Carlo sont beaucoup moins complexes, mais présentent parfois des temps de calcul prohibitifs.

Finalement, la méthode historique (parfois couplée avec une méthode Monte Carlo) semble être une méthode de compromis intéressante. Cependant, elle nécessite une gestion très efficace des bases de

données. En effet, celles-ci doivent contenir beaucoup plus d'information (par exemple, les surfaces de volatilité) que celles des actifs linéaires. Nous devons aussi mentionner le fait que dans l'esprit des textes réglementaires, la méthode doit prendre en compte les risques de volatilité. Implicitement, cela suppose donc que les pricers utilisés pour le calcul de la *VaR* soient des pricers intégrant le smile. Cela pose quelques difficultés, car il n'existe pas de "paradigme dominant" de type Black et Scholes comme dans le cas du pricing sans smile. Plusieurs modèles existent, mais tous ne sont pas de même robustesse. De plus, la qualité d'un pricer avec smile dépend de l'implémentation. Il existe ainsi plusieurs logiciels de valorisation d'options de change basée sur la méthode de Dupire, mais tous donnent un prix différent, car les méthodes d'interpolation du smile sont différentes, les données utilisées sont différentes, certains utilisent des artifices numériques pour assurer la convergence, etc. Il convient donc d'être très prudent lors du choix de la méthodologie d'une *VaR* sur des produits non linéaires.

Remarque 7 *La méthode historique est largement utilisée par les banques pour calculer les VaRs optionnelles. Cependant, il semble que la Commission Bancaire demande de plus en plus d'éviter cette méthodologie au profit de méthodes plus robustes.*

6.3.3 La gestion du risque des produits optionnels

Les produits optionnels sont parmi les actifs les plus risqués dans l'activité d'une salle de marché. Ils font donc l'objet d'une surveillance quotidienne importante. La Commission Bancaire insiste fortement sur le contrôle des risques des activités de dérivés :

- dérivés actions ;
- produits structurés (options sur plusieurs sous-jacents) ;
- exotiques de taux ;
- options de change (FX) ;
- dérivés de crédit ;
- etc.

En particulier, la Commission Bancaire demande que les pricers soient validés par une unité quantitative indépendante du Front Office. Dernièrement, elle a aussi proposé de calculer des réfections pour "risque de modèle" et "risque de paramètres".

Voici une liste (non-exhaustive) des différents risques liés aux actifs contingents :

1. Le risque de modèle ou risque de mispricing
2. Le risque d'implémentation
3. Le risque de paramètres
4. Le risque de volatilité ou risque de smile
5. Le risque de convexité
6. Le risque de corrélation

Afin de ne pas alourdir le cours, nous verrons des exemples très simples sans entrer dans les détails mathématiques. Pour cela, nous utiliserons les réflexions menées par REBONATO [2001] et DERMAN [2001].

6.4 Conclusion

Comme nous avons pu le voir, les modèles de mesure des risques de marché demandent beaucoup de savoir-faire. Celui-ci ne doit pas seulement concerner les instruments de marché ou les aspects financiers, mais aussi les outils statistiques et la gestion des bases de données. Cependant, pour reprendre l'expression de BOULIER et al. [1997], **mesurer n'est pas gérer**. La gestion des risques de marché ne consiste pas seulement à mesurer son risque. Elle cherche surtout à l'analyser, à le comprendre. En définitive, elle passe par la compréhension de la *micro-structure* de son risque de marché.

Toutefois, il est difficile de finir cette section sans évoquer les polémiques autour la *VaR*. Cette mesure – nous l'avons déjà vu – pose de nombreux problèmes statistiques. Aux États-Unis, cela a conduit à des

attaques assez violentes de la part des économètres et des statisticiens. D'autres critiques plus théoriques ont été faites. En premier lieu, elles concernent l'impossibilité de modélisation du futur par le passé (voir la controverse entre Nassim Taleb et Phillippe Jorion — références [21], [27] et [28]). En second lieu, elles portent sur la cohérence de la *VaR* en tant que mesure des risques. D'après l'axiomatique développée par ARTZNER, DELBAEN, EBER et HEATH [1998], la *VaR* ne vérifie pas la propriété fondamentale de sous-additivité⁹. Deux types de mesures \mathfrak{R} cohérentes du risque ont alors été proposés. Soit X la variable aléatoire décrivant la position nette du portefeuille, EMBRECHTS, KLÜPPELBERG et MILKOSH [1997] définissent \mathfrak{R} de la façon suivante :

$$\mathfrak{R} = \mathbb{E} [-X | X \leq x^-] \quad (6.27)$$

Dans ce cas, \mathfrak{R} n'est plus un quantile (comme pour la *VaR*), mais l'espérance de perte au delà d'un certain quantile (qui pourrait être éventuellement le niveau de la *VaR*). ARTZNER, DELBAEN, EBER et HEATH [1997] ont suggéré une deuxième mesure de risque proche de la précédente :

$$\mathfrak{R} = \sup \{ \mathbb{E} [-X | X \leq x^-, \mathbb{P} = p] | p \in \wp \} \quad (6.28)$$

avec \wp l'ensemble des distributions de probabilités des états de la nature. \wp est aussi appelé l'ensemble des "scénarios généralisés". Dans ce cas, pour chaque scénario appartenant à \wp , on calcule l'espérance de perte ($x^- = 0$) ou l'espérance de perte au delà d'un certain quantile ($x^- < 0$), puis on détermine la plus grande valeur parmi tous les scénarios de \wp . Comme le font remarquer les auteurs, cela exige une réflexion approfondie pour définir \wp :

*The generalized scenarios method is the universal coherent risk measurement method : it requires **thinking before calculating**, which can only improve risk management.*

Bibliographie

- [1] ANDERSEN, T.G. [1994], Stochastic autoregressive volatility : a framework for volatility modeling, *Mathematical Finance*, **4**, 75-102
- [2] ARTZNER, A., F. DELBAEN, J-M. EBER et D. HEATH [1997], Thinking coherently, *Risk magazine*, **10**, November, 68-71
- [3] ARTZNER, A., F. DELBAEN, J-M. EBER et D. HEATH [1998], Coherent measures of risk, *Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich*, Working Paper
- [4] BAKER, M., J. TATTERSALL et R. WILSON [1996], CAD and beyond, *Risk Magazine*, **9-2**, February
- [5] BOLLERSLEV, T. [1986], Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics*, **50**, 987-1008
- [6] BOLLERSLEV, T., R.F. ENGLE et D.B. NELSON [1993], ARCH models, in *The Handbook of Econometrics*, Volume 4, chapter 11
- [7] BOULIER, J-F., A. BRABANT, R. DALAUD et A-L. DIEU [1997]. Risques de marché : Vue de Profil, Direction de la Recherche et de l'Innovation, Crédit Commercial de France, *Quants*, **28**
- [8] BRITTEN-JONES, M. et S.M. SCHAEFER [1997], Non-linear Value at Risk, *London Business School*, Working Paper
- [9] CÁRDENAS, J., E. FRUCHARD, E. KOEHLER, C. MICHEL et I. THOMAZEAU [1997], *VaR* : One step beyond, *Risk magazine*, **10**, October, 72-75
- [10] CHRISTOFFERSEN, P.F., F.X. DIEBOLD et T. SCHUERMANN [1998], Horizon Problems and Extreme Events in Financial Risk Management, FRBNY Economic Policy Review
- [11] DANIELSSON, J. et C.G. DE VRIES [1997a], Value-at-Risk and Extreme Returns, *Tinbergen Institute Rotterdam*, Mimeo
- [12] DANIELSSON, J. et C.G. DE VRIES [1997b], Beyond the Sample : Extreme Quantile and Probability Estimation, *Tinbergen Institute Rotterdam*, Mimeo

⁹Cela veut dire que la *VaR* globale de deux portefeuilles peut être supérieure à la somme des *VaRs* individuelles des deux portefeuilles!

- [13] DAVÉ, R.D. et G STAHL [1999], On the accuracy of *VaR* estimates based on the variance-covariance approach, *Olsen & Associates*, Zürich, Working Paper
- [14] DERMAN, E. [2001], Markets and model, *Risk Magazine*, **14**, July, 48-50
- [15] DIEBOLD, F.X., A. HICKMAN, A. INOUE et T. SCHUERMANN [1997], Converting 1-Day Volatility to h-Day volatility : Scaling by \sqrt{h} is worse than you think, *The Wharton School*, University of Pennsylvania, **97-34**
- [16] ENGLE, R.F. [1982], Autoregressive conditional Heteroskedasticity with estimates of the variance of the U.K. inflation, *Econometrica*, **50**, 987-1008
- [17] EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C. et T. MIKOSCH [1997], Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer-Verlag, Berlin
- [18] FELLER, W. [1968], An introduction to probability theory and its applications, volume 1, troisième édition, John Wiley & Sons, New York
- [19] GULDIMANN, Til. [1994], RiskMetricsTM Technical Document, 2nd edition, *J.P. Morgan*, New York
- [20] HENDRICKS, D. [1996], Evaluation of Value-at-Risk models using historical data, Federal Reserve Board of New York, *FRBNY Economic Policy Review*, April, 39-69
- [21] JORION, P. [1997], In defense of *VaR*, *Derivatives Strategy*
- [22] LOPEZ, J. [1998], Methods for evaluating Value-at-Risk estimates, Federal Reserve Bank of New York
- [23] REBONATO, R. [2001], Model risk : new challenges, new solutions, *Risk Magazine*, **14**, March, 87-90
- [24] ROUVINEZ, C. [1997], Going greek with VaR, *Risk Magazine*, **10**, February
- [25] RUBINSTEIN, M. [1998], Edgeworth binomial trees, *Journal of Derivatives*, spring, 20-27
- [26] STAHL, G. [1997], Three cheers, *Risk Magazine*, **10**, May
- [27] TALEB, N. [1997a], The world according to Nassim Taleb, interview by editor Joe Kolman, *Derivatives Strategy*, December/January
- [28] TALEB, N. [1997b], Against Value-at-Risk : Nassim Taleb replies to Phillipe Jorion, document non publié
- [29] TAYLOR, S.J. [1994], Modeling stochastic volatility : a review and comparative study, *Mathematical Finance*, **4**, 183-204

7

Les programmes de stress-testing

Comme le préconisent les autorités réglementaires, les établissements financiers **doivent** effectuer régulièrement des simulations de crise afin de connaître le montant des pertes potentielles en cas de fluctuations dangereuses et importantes du marché. Il faut tout de suite préciser que malgré le caractère obligatoire, ces simulations de crises ne sont en aucun cas utilisés pour calculer l'exigence en fonds propres. **Cependant, l'utilisation de simulations de crises est l'un des quatre principes de base définis par la Commission Bancaire pour qu'un modèle interne soit validé.** Le but de ces simulations est alors de compléter le dispositif de mesure des risques, et notamment les mesures de *VaR*¹.

Ces simulations de crises, parfois appelées scénarios de stress, et plus connu sous le terme anglais *stress testing*, doivent être des outils pour appréhender l'exposition de la banque à une crise grave. Contrairement à la *VaR*, elles doivent permettre de répondre à la question suivante :

**Quel est le montant de perte auquel la banque doit faire
face lors de la prochaine crise si le portefeuille de
négociation ne change pas ?**

La notion de probabilité disparaît. Statistiquement, les *stress testing* font donc référence à un maximum, et non à un quantile. C'est une vision du risque extrême. Le point de vue est donc assez différent de celui de la *VaR*, puisque le régulateur est beaucoup moins concerné par cette mesure (même si la méthodologie doit lui être communiquée). Les mesures fournies par les *stress testing* sont avant tout destinées **au risk management et à la direction générale**. Celles-ci doivent faire l'objet d'une analyse détaillée afin de bien comprendre l'exposition de la banque et afin de bien **vérifier que ce risque extrême est à un niveau supportable** :

The art of stress testing should give the institution a deeper understanding of the specific portfolios that could be put in jeopardy given a certain situation. The question then would be : "Would this be enough to bring down the firm ?" That way, each institution can know exactly what scenario it is they do not want to engage in (Michael Ong, ABN Amro, in DUNBAR et IRVING [1998]).

Deux grandes familles de stress testing existent : les méthodes *objectives* et les méthodes dites *subjectives*. Le premier type utilise les faits historiques (des faits qui se sont réellement passés) pour construire les scénarios, alors que la seconde famille est basée sur des hypothèses de travail. Pour être plus précis, nous pouvons classer les *stress testing* selon trois approches (DUNBAR et IRVING [1998]) :

¹Une étude menée par TUCKER et LAWRENCE [1998] sur le risk management auprès de 679 institutions de 25 pays montre que 93% des risk managers considèrent qu'une mesure *VaR* est insuffisante comme mesure de risque.

1. La première est la plus simple : elle consiste à utiliser les données des crises passées et à employer la méthode de simulation historique sur ces périodes troublées pour calculer **une perte potentielle maximale** (et non une *VaR*). L'établissement financier a alors une estimation de ce que causerait la survenance de ces mêmes crises avec le portefeuille de négociation actuel.
2. La deuxième approche est une analyse structurée des scénarios. Les évènements historiques sont utilisés en les appliquant aux conditions actuelles de marché. Par exemple, nous pouvons analyser l'incidence de la hausse des taux de 1994 par la Federal Reserve Bank si elle survenait aujourd'hui. Contrairement à la première méthode qui utilisent les données historiques, cette méthode va donc utiliser des données simulées à partir des données actuelles et des évènements passés.
3. La troisième approche est une analyse de scénarios spécifiques. Pour cela, il convient d'identifier une situation qui risque de menacer l'établissement financier. Cette méthode ne fait donc pas référence aux évènements passés, mais utilisent des hypothèses sur les crises potentielles futures.

Les *stress testing* sont donc des suites de questions que doit se poser l'établissement financier sur son risque :

In essence, a comprehensive stress-testing programme asks a series of "what if" questions that force risks managers to try to predict what risk banks could face next time disaster strikes (DUNBAR et IRVING [1998]).

Par exemple, voici le genre de questions que peut se poser la banque :

- Quel est l'impact d'une hausse des taux directeurs de 100 points de base ?
- Que se passe-t-il si la courbe des taux s'inverse ?
- Quelles sont les répercussions d'une dévaluation ?
- Que se passe-t-il en l'absence de liquidité ?
- Quel est l'impact d'une hausse des prix de l'immobilier ?
- etc.

Il est tout d'abord important de noter qu'il n'existe pas aujourd'hui de standard plus précis pour l'élaboration des scénarios de crise. On se contentera donc dans un premier temps d'avoir à l'esprit la problématique suivante : un programme de simulation de crise doit être en mesure de répondre à ces trois questions :

- Quelles seront les pertes si le scénario X se produit ?
- Quels sont les pires scénarios pour l'institution ?
- Que pouvons-nous faire pour limiter les pertes dans ce cas ?

Sachant par ailleurs que l'intérêt de la Commission Bancaire est que ces simulations puissent influencer directement les choix de la direction en matière de gestion du risque, il faut avoir en tête deux autres exigences :

- la crédibilité du scénario aux yeux de la direction générale ;
- la bonne lisibilité pour cette dernière de l'exposition du portefeuille aux différents facteurs de risque préalablement définis.

7.1 Directions méthodologiques choisies par les institutions bancaires

Nous fournissons ici les résultats d'une enquête menée par Deloitte & Touche en 1999 auprès de 200 banques dans le monde sur le Risk Management et publiée en mai 2000 dans la revue *Banque Magazine* :

L'utilisation du stress testing (en % des établissements interrogés)			
		Actuels	Envisagés
1	Scénarios reposant sur la politique et l'économie	40%	45%
2	Scénarios chocs marchés	70%	55%
3	Chocs historiques	65%	58%
4	Stress testing global	30%	50%
5	Micro-stress testing	44%	29%
6	Théorie des valeurs extrêmes	5%	24%

On assimilera les méthodes 1, 2, 4 et 5 à des méthodes subjectives ; les méthodes 3 et 6 correspondent évidemment à l'approche historique et à l'approche systématique utilisant les extrêmes.

Il ressort de cette enquête qu'au sein d'une même banque, sont bien utilisées plusieurs approches pour répondre aux différentes exigences de la Commission Bancaire. Les chocs historiques sont, et resteront, largement utilisés, ceci s'expliquant par le fait qu'ils sont à la fois explicitement demandés par la Commission Bancaire et facilement implementables. Cette approche ne suscite guère de polémiques tant sur le plan technique que conceptuel. Les méthodes subjectives sont elles aussi très bien représentées : peu fiables, aux dires des Risk Managers, elles restent néanmoins aujourd'hui ce que l'on peut faire de mieux, ou de "moins pire", lorsque l'on tente d'anticiper l'avenir. Enfin, nous pouvons constater que l'utilisation de la théorie des valeurs extrêmes est aujourd'hui marginale mais tend à se développer : ceci s'explique sans doute par son introduction relativement récente dans le traitement des problèmes financiers.

7.2 L'approche historique

Ce type d'approche est demandée explicitement par la Commission Bancaire. L'idée est simple : on se concentre sur l'évolution de nos facteurs de risque sur une période donnée (typiquement du 1^{er} janvier 1987 au 31 décembre 1999) et on en déduit la ou les "pires périodes" qui constitueront nos scénarios de crise. C'est évidemment dans le choix de ces "pires périodes" que va résider la qualité des scénarios proposés.

Ainsi l'approche la plus simple consiste à répertorier pour chaque facteur de risque la variation, à la hausse ou à la baisse, la plus importante sur un pas de temps préalablement choisi. On peut alors composer différents scénarios de crise en sélectionnant certaines de ces valeurs, les autres facteurs de risque étant censés restés identiques à leur valeur actuelle. On voit néanmoins que l'absence de corrélation entre les différents facteurs est un obstacle à la crédibilité de tels scénarios d'où l'idée de choisir comme scénario de crise une configuration historique incluant tous les facteurs. Le pire serait alors défini sur la base des caractéristiques du portefeuille actuel : soit en calculant les valeurs potentielles du portefeuille pour les périodes passées, soit en calculant la moyenne pondérée des variations des facteurs pour chaque période ; dans les deux cas, le pire est défini comme la période où le minimum a été obtenu. Ce type d'approche fournit alors un scénario de crise **dont la crédibilité est assurée puisqu'il s'est déjà produit**.

L'avantage de cette méthode repose donc dans sa bonne crédibilité ainsi que dans sa facilité de mise en place. Elle fournit également un cadrage quantitatif aux méthodes subjectives : la perte potentielle maximale calculée dans le passé sur la base du portefeuille actuel peut fournir l'ordre de grandeur des pertes cumulées pour tout scénario subjectivement créé. Néanmoins, ce type d'approche présente l'inconvénient d'être peu lisible : on obtient une perte agrégée et dépendant de la "pire période", ce qui rend difficile pour la direction générale, la localisation objective des zones à risque de son portefeuille.

7.3 Une approche subjective : le macro stress-testing

Qu'entend-on par méthode subjective ? il s'agit d'une méthode non plus fondée sur l'analyse des données passées mais qui, à partir d'un événement inattendu (politique ou économique), tente de créer l'enchaînement des événements engendrés puis les calibre quantitativement de manière à créer le scénario de crise. On a donc une méthode en deux étapes : élaboration d'un scénario dynamique à partir d'une entrée (par exemple -8% sur le Dow Jones), puis construction d'un bilan final chiffré en terme de facteurs de risque du portefeuille. On parle de macro stress-testing lorsqu'on entend déduire la dynamique de la crise ainsi que le bilan chiffré des modèles macro-économiques actuels.

Ce type de scénario est indispensable car lui seul permet de créer des scénarios de crise non inférables à partir des données du passé bien que plausibles. Néanmoins pour être efficace ce type d'approche doit être crédible. On pourra donc envisager :

- d'utiliser plusieurs degrés de gravité dans les scénarios de crise ;

- d’impliquer dans sa construction un grand nombre de personnes aux compétences variées et jusqu’à des niveaux de responsabilité très élevés ;
- de créer régulièrement de nouveaux scénarios adaptés aux changements politiques et économiques.

Exemple 1 *Hervé Gouletquer, Senior Economist au Crédit Lyonnais, nous a fourni un exemple de scénario de crise concernant une baisse de Wall Street difficilement gérable (voir Costinot, Riboulet and Roncalli [2000]). Aux Etats-Unis, sous le double effet d’une activité qui ralentit et d’une inflation qui devient moins sage, le marché des actions se retourne assez brutalement (−8% sur un mois pour l’indice Dow Jones). La Réserve fédérale est incapable de répondre de suite à cette baisse brutale des cours. Les taux courts restent en l’état tout au long du mois concerné. Le dollar subit la pression baissière liée aux rapatriements de capitaux vers l’Europe et le Japon. L’Euro s’apprécierait de 3 cents par rapport au Dollar (toujours en un mois). La hausse de la Livre serait un peu plus forte (6 cents). Dans ce contexte de sortie de capitaux du pays, et aussi dans un environnement qui dans un premier temps reste marqué par la crainte de plus d’inflation, le marché obligataire est mal orienté. Le rendement à 10 ans d’une obligation du Trésor américain se tend assez nettement (+55 bp). En Europe, la hausse de l’Euro freine la remontée des taux longs (+20 bp en un mois). Dans ces conditions, la baisse du CAC40 peut difficilement se comparer à celle de Wall Street. Elle n’atteint que 5%. Et la BCE ne juge pas utile de revoir son réglage monétaire.*

7.4 La méthode WCS

BOUDOUKH, RICHARDSON et WHITELAW [1995] définissent l’analyse “*worst-case scenario*” (ou WCS) de la façon suivante :

WCS asks the following question : what is the worst that can happen to the value of the firm’s trading portfolio over a given period (eg, 20 trading days) ?

Comme l’explique BAHAR, GOLD, KITTO et POLIZU [1997], l’utilisation de l’analyse WCS est motivée par les préoccupations réelles des risk managers :

...VaR has been criticised at a more fundamental level — that it asks the wrong question... VaR requires a probability that loss shocks, over a short horizon, will not exceed a certain figure. This is often interpreted as expressing the number of times a loss shock in excess of the subjective threshold would occur over a long time horizon. But managers are more likely be concerned with the probability of realising a specific loss shock, rather than the probability of landing in a region of large loss shocks.

L’analyse WCS consiste à diviser une période de référence T en N sous-intervalles de même longueur. Soit X_n la variable aléatoire décrivant la position nette du portefeuille pour le n -ième sous-intervalle. Dans ce contexte, nous pouvons définir la mesure de VaR à partir du nombre de sous-intervalles qui présentent une perte supérieure à une valeur donnée x^- :

$$\frac{\sum_{n=1}^N 1_{[X_n \leq x^-]}}{N} = 1 - \alpha \quad (7.1)$$

avec α le seuil de confiance. Présenté de cette façon, x^- n’est rien d’autre que la mesure VaR . En revanche, l’analyse WCS considère **la distribution de la perte maximale** (ou la fonction de distribution du *pire*) parmi les sous-intervalles. On cherche donc à caractériser la fonction de distribution \mathbf{G}_N de $\chi_N^- = \min(X_1, \dots, X_n, \dots, X_N)$. Si nous supposons que les variables aléatoires X_n sont indépendantes et de même loi de distribution \mathbf{F} , nous avons

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_N(x) &= \Pr(\chi_N^- \leq x) \\ &= 1 - \Pr(X_1 > x, \dots, X_n > x, \dots, X_N > x) \\ &= 1 - [1 - \mathbf{F}(x)]^N \end{aligned} \quad (7.2)$$

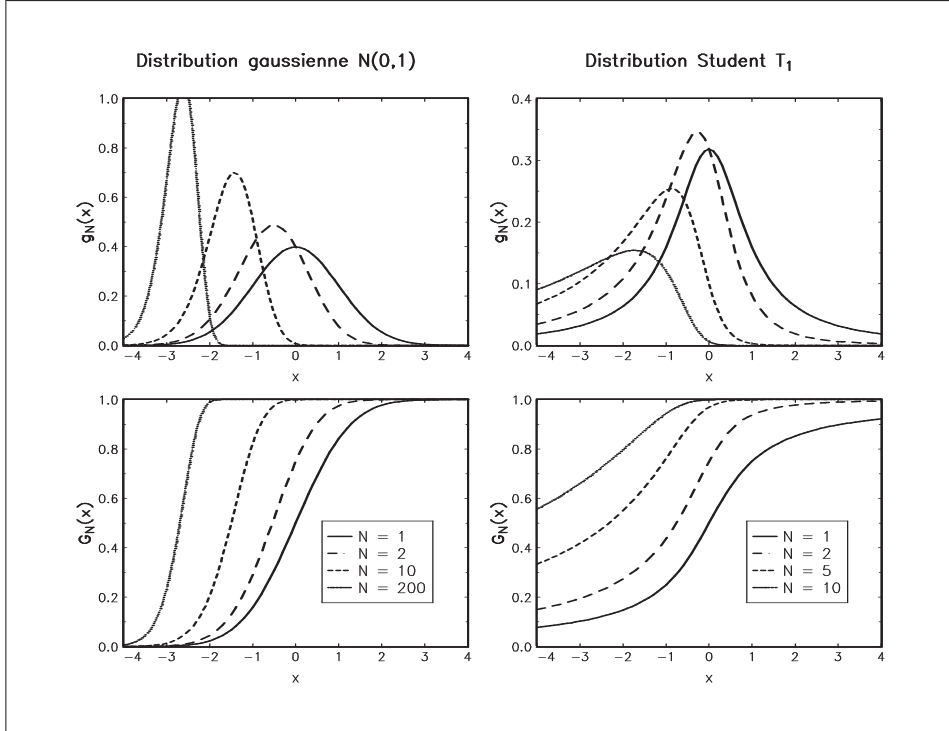
Notons g_N et f les fonctions de densité correspondantes, nous pouvons montrer facilement que

$$g_N(x) = N \times [1 - \mathbf{F}(x)]^{N-1} f(x) \quad (7.3)$$

et

$$\mathbf{G}_N^{-1}(\alpha) = \mathbf{F}^{-1}\left(1 - (1 - \alpha)^{\frac{1}{N}}\right) \quad (7.4)$$

$\mathbf{G}_N^{-1}(\alpha)$ est donc le quantile de la fonction de distribution du *pire*. A titre d'illustration, nous avons représenté sur le graphique (7.1) les fonctions WCS de densité et de répartition pour une loi normale et une loi de Student à un degré de liberté.



GRAPHIQUE 7.1. Fonction de distribution de χ_N^-

Remarque 8 Lorsque N est égal à 1, c'est-à-dire lorsque nous ne considérons qu'un seul jour de trading, nous avons $\mathbf{G}_1(x) = \mathbf{F}(x)$, $g_1(x) = f(x)$ et $\mathbf{G}_1^{-1}(\alpha) = \mathbf{F}^{-1}(\alpha)$. Dans ce cas, $|\mathbf{G}_1^{-1}(\alpha)|$ est exactement la Valeur en Risque.

$|\mathbf{G}_N^{-1}(\alpha)|$ apparaît comme une extension de la mesure *VaR*. Nous notons celle-ci $\mathfrak{R}_{\text{WCS}}$. Cette mesure de risque dépend donc de deux paramètres, N le nombre de jours de trading et α la probabilité² que la perte dépasse $\mathfrak{R}_{\text{WCS}}$. Prenons un exemple. Nous supposons que la position nette du portefeuille X suit une loi gaussienne standard $\mathcal{N}(0, 1)$. Nous avons reporté les valeurs prises par $|\mathbf{G}_N^{-1}(\alpha)|$ dans le tableau suivant :

$N - \alpha$	0.5%	1%	5%	10%
1	2.5758	2.3263	1.6449	1.2816
5	3.0896	2.8769	2.3187	2.0365
10	3.2899	3.0889	2.5679	2.3087
100	3.8900	3.7178	3.2834	3.0748
250	4.1069	3.9432	3.5334	3.3384

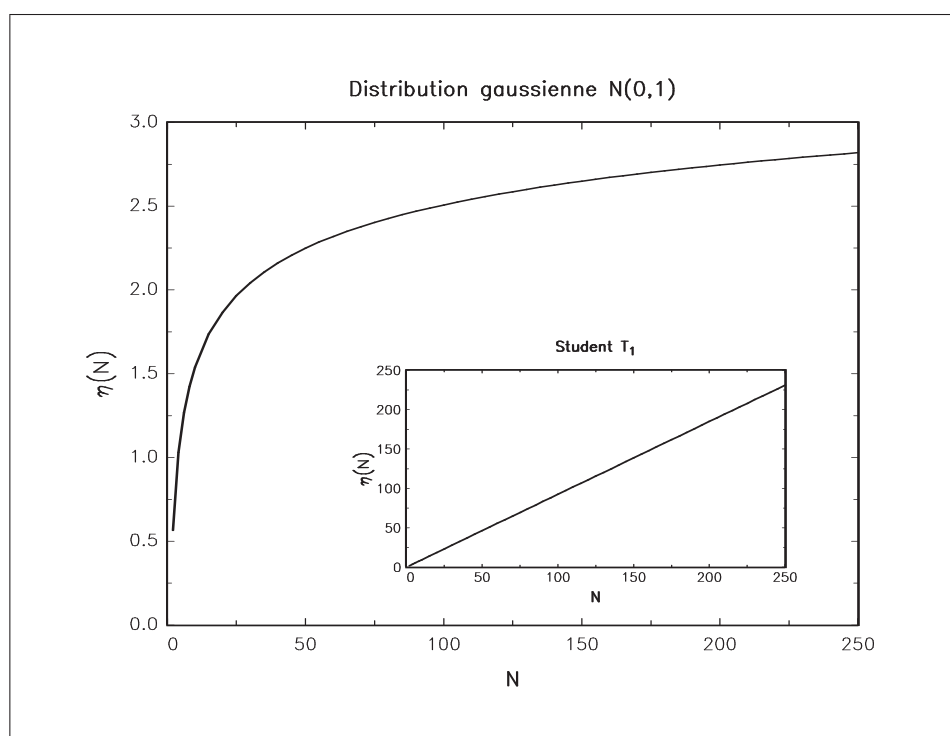
²Nous avons donc

$$\alpha_{\text{WCS}} = 1 - \alpha_{\text{VaR}}$$

Lorsque l'horizon considéré est un jour de trading et pour α égal à 1%, la mesure de risque est bien égale à 2.33, la *Valeur en Risque*. Lorsque nous prenons 5 jours de trading, la mesure de risque passe à 2.88. Nous voyons bien que le risque dépend alors du nombre de jours de trading considéré. La courbure de la fonction $|\mathbf{G}_N^{-1}(\alpha)|$ en fonction de N nous donne une certaine vision "dynamique" du risque³. A partir de la fonction de distribution du *pire*, nous pouvons construire d'autres mesures de risque. Par exemple, nous pouvons considérer l'*espérance du pire* $\eta(N)$ définie par

$$\begin{aligned} \eta(N) &= -\mathbb{E}[\chi_N] \\ &\equiv -N \times \int [1 - \mathbf{F}(x)]^{N-1} f(x) x dx \end{aligned} \quad (7.5)$$

Comme le montre le graphique (7.2), cette espérance du pire dépend fortement de la fonction de densité et notamment de la queue gauche de celle-ci. Nous voyons clairement que dans le cas où la fonction de distribution des pertes potentielles est leptokurtique (cas de la Student T_1), la différence de risque entre cette distribution et la distribution gaussienne estimée peut croître très fortement avec N .



GRAPHIQUE 7.2. L'influence de la queue de distribution sur $\eta(N)$

On associe généralement l'analyse WCS aux simulations de crises, car elles sont toutes les deux liées à la notion de temps de retour. En général, une méthodologie *VaR* a du mal à appréhender les crises. En effet, les temps de retour basés sur les *VaRs* manquent généralement de réalisme. L'analyse WCS ou la théorie des extrêmes, qui fait l'objet de la prochaine section, sont des outils plus adaptés dans ces cas-là (BOULIER, BRABANT, DALAUD et DIEU [1997]) :

On remarque d'abord le réalisme des résultats obtenus par la méthode statistique des extrêmes. Ainsi, lors du krach d'octobre 1987, la variation quotidienne la plus forte de l'indice MSCI France fut de 8.4%. Cette chute correspond à une durée de retour estimée à treize ans par la méthode des extrêmes, alors que l'approche par la loi normale fournit une durée de retour de l'ordre de dix milliards d'années. Ici la méthode paramétrique est mise en défaut parce que le quantile considéré (99.97%) a trait à un événement très rare.

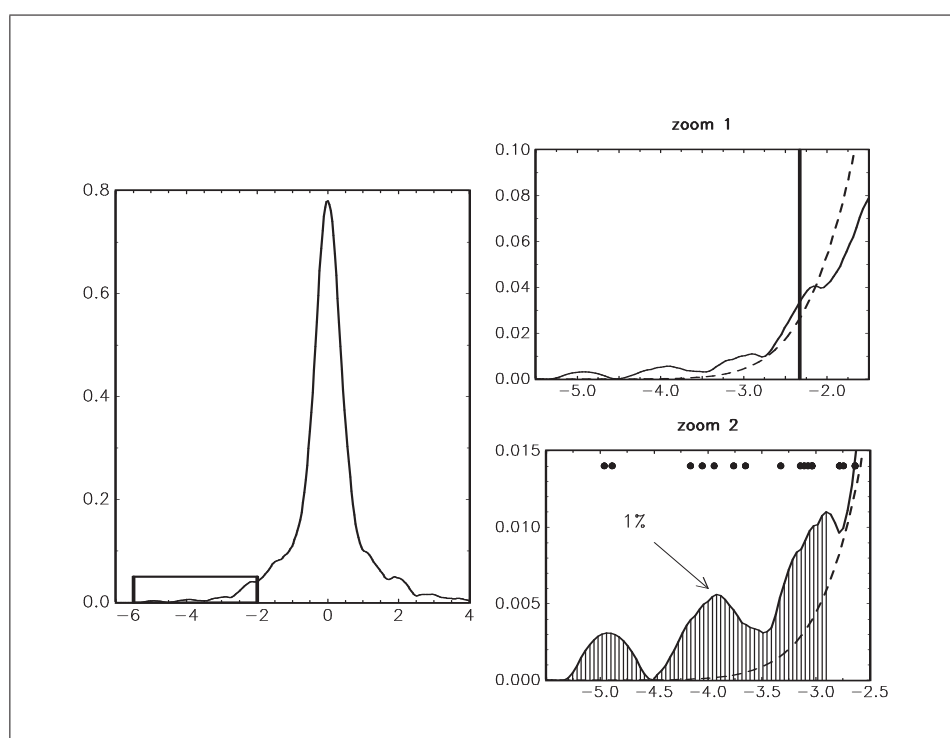
³Cependant, comme les variables aléatoires X_n sont indépendantes, cette dynamique ne tient pas compte des effets de contagion.

7.5 La théorie des valeurs extrêmes

7.5.1 Une introduction heuristique des extrêmes

La distribution gaussienne est parfaitement caractérisée par ses deux premiers moments. La connaissance de la moyenne et de la variance permet alors de calculer tous les quantiles. Avec l'hypothèse de normalité, l'analyse statistique porte donc sur les caractères les plus visibles et les plus faciles à interpréter. La gestion du risque est une gestion des événements inattendus, des événements rares. Avec la distribution gaussienne, ces événements ont un caractère "*predictable*". Et rien ne sert pour cela d'étudier leur fréquence, puisque celle-ci se déduit des deux premiers moments.

Contrairement à l'inférence statistique gaussienne, la théorie des valeurs extrêmes consiste à analyser les occurrences qui présentent des fréquences très faibles. Considérons la figure (7.3). Nous avons représenté sur celle-ci la fonction de densité⁴ des variations normalisées du cours de la banque LLOYDS/TSB pour la période allant de janvier 1994 à juillet 1999. L'analyse gaussienne consiste à se focaliser sur les événements qui sont concentrés autour du mode de la fonction de densité. Cela revient à s'éloigner suffisamment pour ne distinguer que la forme générale sans considérer les parties accidentées de cette fonction de densité. La théorie des extrêmes consiste à se rapprocher, à opérer des agrandissements afin de mieux visualiser les parties extrêmes de la fonction de densité. Cela implique qu'une grande partie des données n'est pas intéressante lors de l'analyse. Seules les observations qui présentent un intérêt pour modéliser les extrêmes seront utilisées.

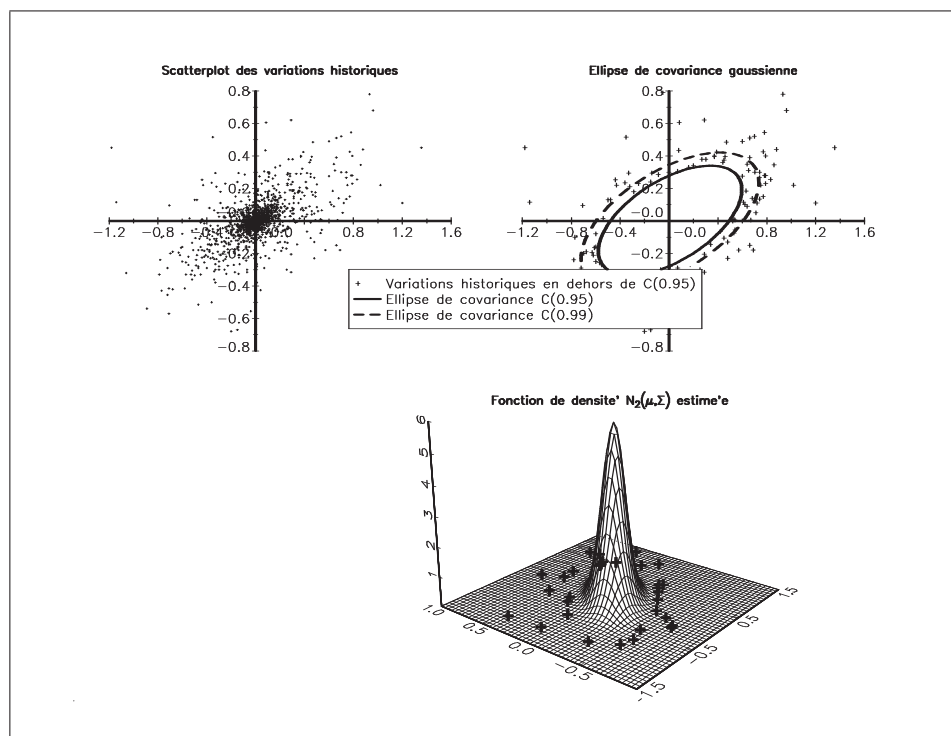


GRAPHIQUE 7.3. Queue de distribution des rendements du titre LLOYDS/TSB

Par exemple, si nous étudions la distribution jointe des cours BARCLAYS et LLOYDS/TSB, les observations qui sont proches du centre de l'ellipse de covariance gaussienne contiennent de l'information très peu utilisable pour modéliser le risque associé à un portefeuille composé de ces deux titres. L'information **pertinente** correspond en fait aux observations qui sont à l'extérieur des ellipses de covariance 95% et 99% (voir la figure (7.4)). Et nous voyons notamment que l'utilisation d'une distribution normale à deux dimensions n'est pas appropriée pour modéliser la loi jointe des cours LLOYDS/TSB et BARCLAYS,

⁴estimée par la méthode non paramétrique du noyau d'Epanechnikov.

puisque de nombreuses réalisations sont dans des domaines qui présentent des occurrences très faibles (qui sont égales numériquement à zéro).



GRAPHIQUE 7.4. Distribution jointe des rendements des titres BARCLAYS et LLOYDS/TSB

Il faut bien comprendre que **la théorie des valeurs extrêmes**, même si elle est liée aux recherches dans le domaine des queues épaisses, **n'est pas un outil de modélisation du caractère leptokurtique d'une distribution**. En fait, elle permet de caractériser la loi des extrema. Dans la section précédente, nous déterminions la distribution des minima à partir de la fonction de densité qui les engendrent. La théorie des valeurs extrêmes va nous permettre, en particulier, d'estimer directement la distribution à partir des données. L'idée est donc la suivante :

Que pouvons nous dire de la distribution limite $\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{G}_N(x)$
sans faire d'hypothèses sur la distribution \mathbf{F} ?

Comme l'explique MCNEIL [1998a], nous ne pouvons affirmer que la théorie des valeurs extrêmes permet de prédire le futur avec certitude. Mais le passé contient assez d'information (qui n'est pas forcément observable) sur les extrema pour pouvoir modéliser $\mathbf{G}_\infty(x)$, sans pour autant vouloir connaître la fonction \mathbf{F} . Et cela est possible, car sous certaines conditions, $\mathbf{G}_\infty(x)$ ne peut être décliné qu'en un **nombre très limité** de lois de distribution (voir l'annexe 7.5.6.1 pour une démonstration intuitive).

7.5.2 La théorie classique

7.5.2.1 Présentation des 3 lois d'extrêmes

Nous reprenons les notations introduites pour définir la distribution du *pire*. Nous considérons N variables aléatoires $X_1, \dots, X_n, \dots, X_N$ indépendantes et de même loi de distribution \mathbf{F} dont nous cherchons à étudier le comportement des extrêmes $\chi_N^- = \min(X_1, \dots, X_n, \dots, X_N)$ et $\chi_N^+ = \max(X_1, \dots, X_n, \dots, X_N)$. Pour cela, nous pouvons utiliser la statistique d'ordre Y sur X , c'est-à-dire que nous avons

$$\chi_N^- = Y_1 \leq \dots \leq Y_n \leq \dots \leq Y_N = \chi_N^+ \quad (7.6)$$

Considérons alors la variable aléatoire $\Lambda = \sum_{n=1}^{k(N)} \tilde{h}(Y_n)$. EMBRECHTS, RESNICK et SAMORODNITSKY [1997] donnent différents exemples d'utilisation de Λ en finance :

- Si $\tilde{h}(y) = \frac{1}{k(N)} \times y$, Λ correspond à la moyenne des $k(N)$ -ièmes pertes les plus importantes ;
- Si $\tilde{h}(y) = (y^- - y)_+$ et $k(N) = N$, Λ représente la somme des pertes plus grandes qu'un seuil ;
- Si $\tilde{h}(y) = y$ et $k(N) = \alpha N$, Λ est le quantile α de X .

Avec la théorie des extrêmes, nous nous intéressons directement à $\Lambda = Y_1$ et $\Lambda = Y_N$. Pour cela, nous avons besoin du théorème de Fisher-Tippet qui permet de caractériser la loi de distribution des extrêmes :

Théorème 1 (Th. 3.2.3 de Embrechts, Klüppelberg et Mikosch (1997)) *Supposons N variables aléatoires $X_1, \dots, X_n, \dots, X_N$ indépendantes et de même loi de distribution \mathbf{F} . S'il existe des constantes a_N et b_N et une distribution limite non dégénérée \mathbf{G} telles que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Pr \left(\frac{X_N^+ - b_N}{a_N} \leq x \right) = \mathbf{G}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (7.7)$$

alors \mathbf{G} appartient à l'un des trois types suivants de distribution :

Type I	(Frechet)	$\mathbf{G}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0 \end{cases}$	$g(x) = \begin{cases} 0 & \\ \alpha x^{-(1+\alpha)} \exp(-x^{-\alpha}) & \end{cases}$
Type II	(Weibull)	$\mathbf{G}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^\alpha) & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$	$g(x) = \begin{cases} \alpha (-x)^{\alpha-1} \exp(-(-x)^\alpha) & \\ 0 & \end{cases}$
Type III	(Gumbel)	$\mathbf{G}(x) = \exp(-e^{-x})$	$g(x) = \exp(-x - e^{-x})$

C'est l'un des résultats les plus importants de la théorie des extrêmes : sous certaines conditions, la loi de distribution des extrêmes est l'une des trois lois paramétriques précédentes. En fait, nous pouvons caractériser ces trois types de distribution par une distribution unique (COLES et TAWN [1999]) :

$$\mathbf{G}(x) = \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} \quad (7.8)$$

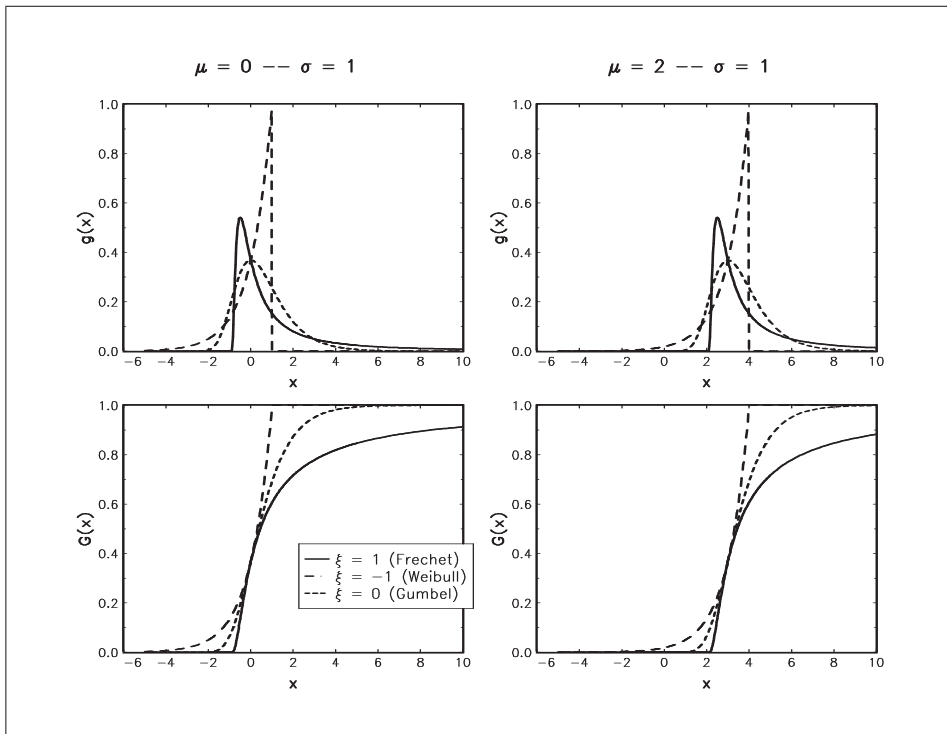
défini sur le support $\Delta = \{x : 1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) > 0\}$ et que nous notons $\mathcal{G}(\mu, \sigma, \xi)$. Cette fonction de distribution correspond à la loi de probabilité de Von Mises, mais elle est plus connue sous le nom de "Generalized Extreme Value distribution" (GEV). Nous avons alors les correspondances suivantes :

Frechet	$\xi = \alpha^{-1} > 0$
Weibul	$\xi = -\alpha^{-1} < 0$
Gumbel	$\xi \rightarrow 0$

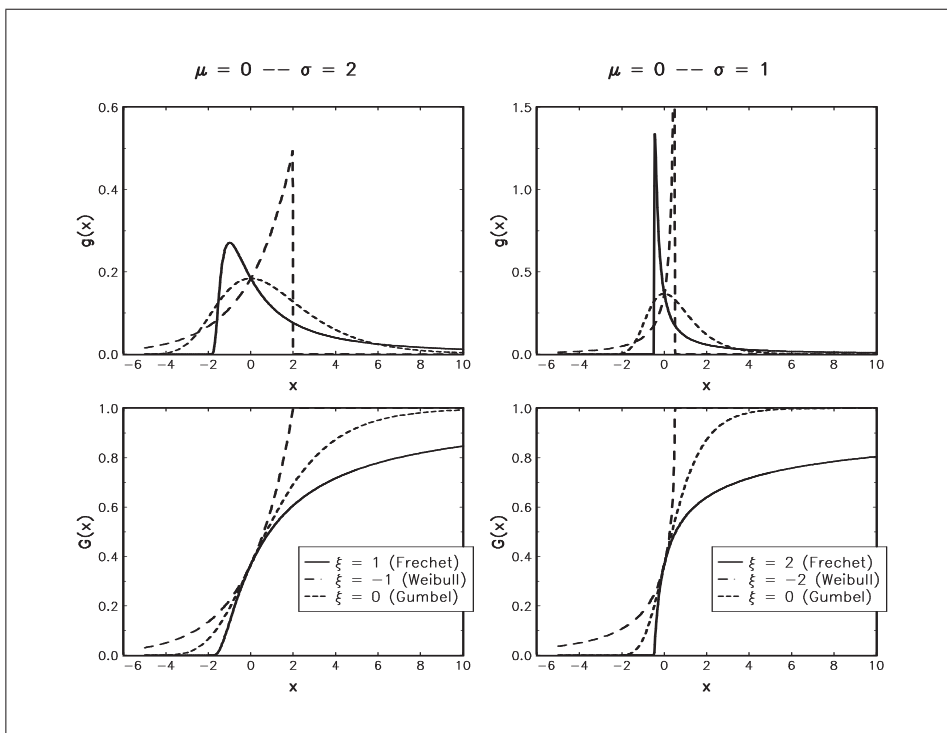
Remarquons que les paramètres μ et σ sont en fait les limites de b_N et a_N . A titre d'illustration, voyons quelques exemples de distribution GEV. Pour cela, nous pouvons facilement montrer que la fonction de densité correspondante est

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} \quad (7.9)$$

Les graphiques (7.5) et (7.6) présentent des fonctions de densité et de répartition pour différentes valeurs de paramètre. Lorsque μ varie, nous remarquons une translation des fonctions. μ est donc un paramètre de **localisation**. σ joue le rôle d'une variance, c'est pourquoi nous le considérons comme un paramètre de **dispersion**. Enfin, le paramètre ξ est lié au caractère leptokurtique de la fonction de distribution \mathbf{F} . C'est pourquoi on lui donne généralement le nom d'indice de queue ou d'indice de valeur extrême (DREES [1997]).



GRAPHIQUE 7.5. Exemples de distribution GEV (I)



GRAPHIQUE 7.6. Exemples de distribution GEV (II)

7.5.2.2 Quelques remarques sur les lois d'extrêmes

L'étude des lois d'extrême est très intéressante. C'est un domaine de recherche prolifique. Dans ce paragraphe, nous présentons quelques résultats remarquables.

Remarque 9 Reprenons l'analyse WCS et appliquons celle-ci au maximum χ_N^+ . Nous avons alors

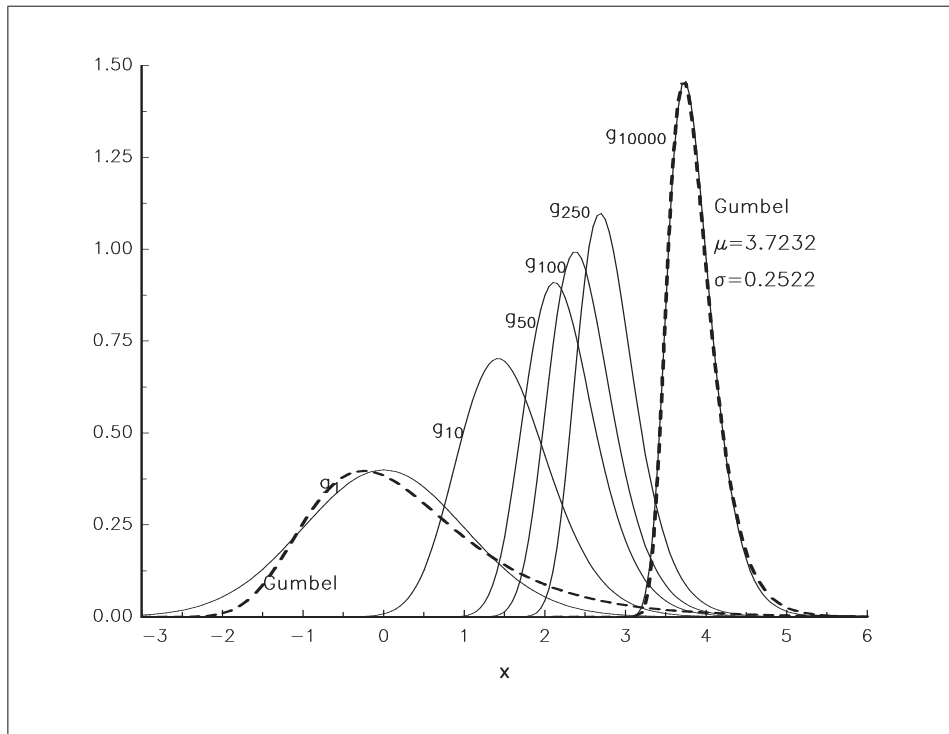
$$\begin{aligned} \mathbf{G}_N(x) &= \mathbf{F}(x)^N \\ g_N(x) &= N \times \mathbf{F}(x)^{N-1} f(x) \end{aligned} \quad (7.10)$$

et

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{G}_N(x) = \mathbf{G}(x) \quad (7.11)$$

Il est alors intéressant d'étudier la vitesse de convergence qui permet d'avoir une idée de la période de référence de l'analyse WCS pour que celle-ci soit "équivalente" à la théorie des extrêmes.

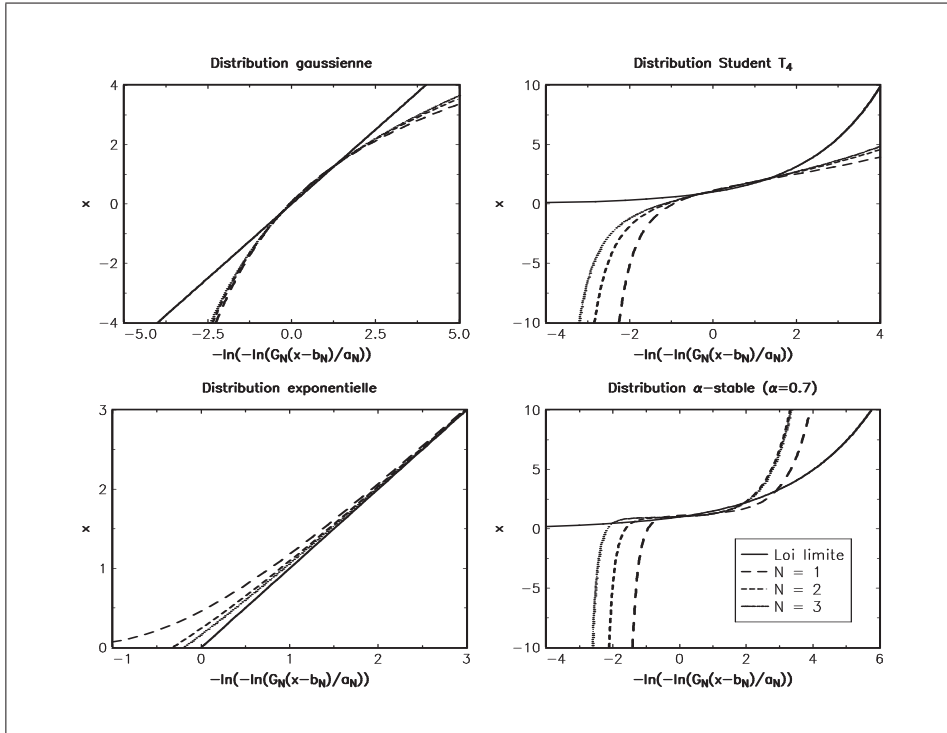
Voyons un exemple. Nous considérons la distribution gaussienne standard. Nous savons que la loi des extrêmes correspondante est une Gumbel. Sur le graphique (7.7), nous remarquons que l'approximation de $\mathbf{G}_1(x)$ par une loi de Gumbel est moins bonne que celle de $\mathbf{G}_{10000}(x)$. Nous considérons mainte-



GRAPHIQUE 7.7. Convergence de \mathbf{G}_N vers la distribution de Gumbel lorsque \mathbf{F} est gaussienne

nant plusieurs distributions : la loi gaussienne, la loi exponentielle, la loi de Student T_4 et la loi α -stable symétrique⁵ $S_{0.7}(1, 0, 0)$. Pour mesurer la convergence, COLES et TAWN [1999] proposent d'étudier graphiquement le comportement de $-\ln\left(-\ln\left(\mathbf{G}_N\left(\frac{x-b_N}{a_N}\right)\right)\right)$ en fonction de N et de le comparer celui-ci de la loi limite. Pour les lois gaussienne et exponentielle, la loi limite est la distribution de Gumbel. Pour les deux autres, c'est la distribution de Fréchet. Le problème est de construire les suites (a_N) et (b_N) . Pour la loi exponentielle, nous pouvons montrer que si $a_N = 1$ et $b_N = -\ln(N)$, $\frac{\chi_N^+ - b_N}{a_N}$ converge bien en loi vers la famille de type III. Pour les autres lois, la connaissance des suites (a_N) et (b_N) n'est

⁵voir NOLAN [1999].



GRAPHIQUE 7.8. Convergence de certaines distributions vers la distribution de Fréchet

pas toujours vérifiée⁶. Dans ce cas, nous pouvons construire les suites numériquement en adoptant un critère de bonne adéquation⁷ entre $G_N\left(\frac{x-b_N}{a_N}\right)$ et la loi limite $G(x)$. Les résultats sont présentés sur le graphique (7.8). Nous voyons ainsi que la convergence de la loi exponentielle est bien plus rapide que celle de la loi gaussienne. Et les distributions qui ont des queues leptokurtiques (c'est le cas des distributions T_4 et $S_{0.7}(1, 0, 0)$) présentent des vitesses de convergence plus faibles.

Remarque 10 Le quantile $G^{-1}(\alpha)$ d'ordre α pour la distribution GEV est donné par la formule suivante :

$$G^{-1}(\alpha) = \mu - \frac{\sigma}{\xi} \left[1 - (-\ln \alpha)^{-\xi} \right] \quad (7.12)$$

Ce quantile est donc fortement influencé⁸ par les deux paramètres σ et ξ . A titre d'illustration, le graphique (7.9) présente différentes courbes de quantiles en fonction de ξ . Intuitivement, nous comprenons que plus la distribution F possède de la variance et plus elle est leptokurtique, plus ce quantile sera élevé.

Remarque 11 Nous pouvons montrer que le mode de la distribution GEV est atteint pour la valeur $\mu + \sigma(1 - \xi)^\xi$. Quant à la moyenne $E[X_N^+]$, nous pouvons la calculer facilement en utilisant une procédure d'intégration numérique de type Gauss-Legendre ou Gauss-Hermite.

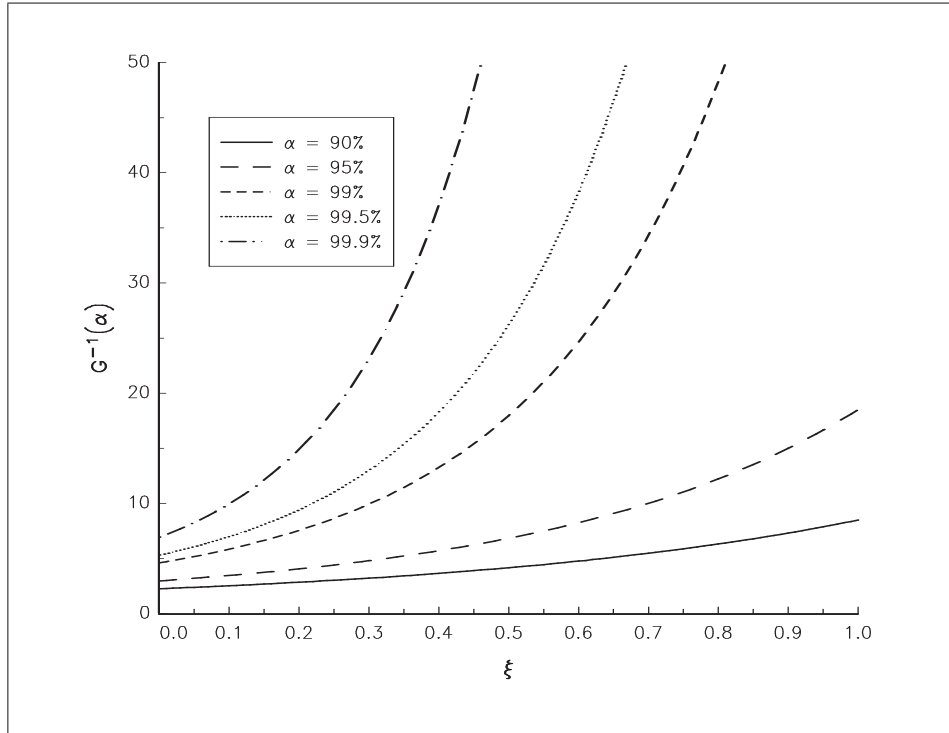
Nous avons maintenant presque tous les éléments pour appliquer la théorie des valeurs extrêmes à la gestion du risque. Soit P la perte potentielle d'un portefeuille. Mesurer le risque revient alors à analyser

⁶COLES et TAWN [1999] fournissent deux expressions pour (a_N) et (b_N) pour la loi gaussienne, mais celles-ci s'avèrent numériquement non adéquates, notamment pour des faibles valeurs de N . C'est pourquoi nous avons aussi préféré utiliser la méthode numérique de construction des suites pour la loi gaussienne.

⁷Nous avons utilisé une norme ℓ_2 pour le critère d'adéquation.

⁸En effet, nous avons

$$\partial_\alpha G^{-1}(\alpha) = \frac{\sigma}{\alpha(-\ln \alpha)^{1+\xi}} \quad (7.13)$$



GRAPHIQUE 7.9. Quantile de la distribution GEV

la loi du maximum de $-P$, c'est-à-dire la *distribution du pire*. A partir de celle-ci, nous pouvons calculer les quantiles du pire, l'espérance ou le mode du pire, les temps de retour, etc. Avant de voir quelques applications, il reste cependant à développer l'inférence statistique et les méthodes d'estimation d'une distribution GEV.

7.5.2.3 Estimation des paramètres de la distribution GEV

Il existe plusieurs méthodes pour estimer les paramètres de la distribution GEV. Nous pouvons par exemple citer les méthodes d'estimation de l'indice de queue (de type Hill ou Pickands — voir DREES, DE HAAN et RESNICK [1998]), la méthode des moments ou encore les méthodes de seuil (basée par exemple sur la distribution de Pareto généralisée). Mais celle qui reste la plus populaire et qui sous certaines conditions est la plus efficace est la méthode du Maximum de Vraisemblance⁹.

Soit θ le vecteur des paramètres. Nous avons

$$\theta = \begin{bmatrix} \mu \\ \sigma \\ \xi \end{bmatrix}$$

Nous considérons un échantillon de données $\{X_t\}$ de dimension $T = \varphi N$ avec $\varphi \in \mathbb{R}$. Nous divisons cet échantillon en N blocs et nous définissons χ_n^+ de la façon suivante

$$\chi_n^+ = \max \left\{ \{X_{1+n(t-1)}, t = 1, \dots, \varphi\} \right\} \quad (7.14)$$

L'expression de la vraisemblance de l'observation n est donc

$$L(\chi_n^+; \theta) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \xi \left(\frac{\chi_n^+ - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\left(\frac{1+\xi}{\xi}\right)} \exp \left\{ - \left[1 + \xi \left(\frac{\chi_n^+ - \mu}{\sigma} \right) \right]^{-\frac{1}{\xi}} \right\} \quad (7.15)$$

⁹Nous utilisons ici les notations et la terminologie de DAVIDSON et MACKINNON [1993], ouvrage de référence sur la question du maximum de vraisemblance.

Nous en déduisons l'expression suivante pour la log-vraisemblance :

$$\ell(\chi_n^+; \theta) = -\ln \sigma - \left(\frac{1+\xi}{\xi}\right) \ln \left(1 + \xi \left(\frac{\chi_n^+ - \mu}{\sigma}\right)\right) - \left[1 + \xi \left(\frac{\chi_n^+ - \mu}{\sigma}\right)\right]^{-\frac{1}{\xi}} \quad (7.16)$$

L'estimateur du maximum de vraisemblance correspond alors à

$$\hat{\theta}_{\text{ML}} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \sum_{n=1}^N \ell(\chi_n^+; \theta) \quad (7.17)$$

avec Θ l'espace des paramètres. L'estimation de l'expression (7.17) est relativement aisée à condition de prendre quelques précautions, notamment pour la spécification de Θ (à cause de la singularité au point $\xi = 0$). Pour les applications, nous avons utilisé l'algorithme de Bryoden-Fletcher-Goldfarb-Shanno en utilisant un jacobien analytique (voir l'annexe 7.5.6.2).

7.5.3 Le concept de temps de retour

Pour appliquer la théorie des extrêmes à la finance, il est nécessaire d'introduire la notion de **temps de retour**. Considérons un événement E ayant une probabilité d'occurrence égale à α . La loi d'apparition de cet événement est alors une variable aléatoire géométrique de probabilité α . Son espérance mathématique est

$$\tau = \frac{1}{\alpha} \quad (7.18)$$

τ est le temps de retour de E .

Exemple 2 *Considérons une VaR 99%. Le temps de retour associé à l'événement "dépassement de la VaR" est*

$$\tau = \frac{1}{1 - 0.99} = 100 \quad (7.19)$$

Si la période de détention est de 1 jour, le temps de retour de la VaR 99% est 100 jours. Cela veut dire qu'on dépasse la VaR journalière en moyenne tous les 100 jours.

Définition 1 *Soit $\alpha = \Pr\{\chi_n^+ \leq x\}$. Le temps de retour de l'événement $\Pr\{\chi_n^+ > x\}$ est égal à $(1 - \alpha)^{-1}$ périodes de référence. Le temps de retour en jours est donc*

$$\tau = \varphi \frac{1}{1 - \alpha} \quad (7.20)$$

Remarque 12 *Nous pouvons comparer les résultats entre une VaR traditionnelle et une VaR GEV à partir de la relation suivante :*

$$\alpha_{\text{GEV}} = 1 - \varphi(1 - \alpha_{\text{VAR}}) \quad (7.21)$$

7.5.4 Applications

Nous reportons les résultats obtenus par BEZAT et NIKEGBALI [2000] et BOUYÉ, DURRLEMAN, NIKEGBALI, RIBOULET et RONCALLI [2000] avec la base de données LME (les cours considérés sont celui de l'aluminium AL, du forward 15 mois de l'aluminium AL-15 et du cuivre CU).

Nous élaborons des scénarios de crise de la manière suivante. On se donne des temps de retour élevés de l'ordre de 5 ans, 10 ans, 25 ans, 50 ans, 75 ans et 100 ans et on utilise la formule (7.20) pour calculer la variation maximale négative des cours sur une journée. Les résultats obtenus sont¹⁰ :

¹⁰Pour information, la valeurs des paramètres estimés sont

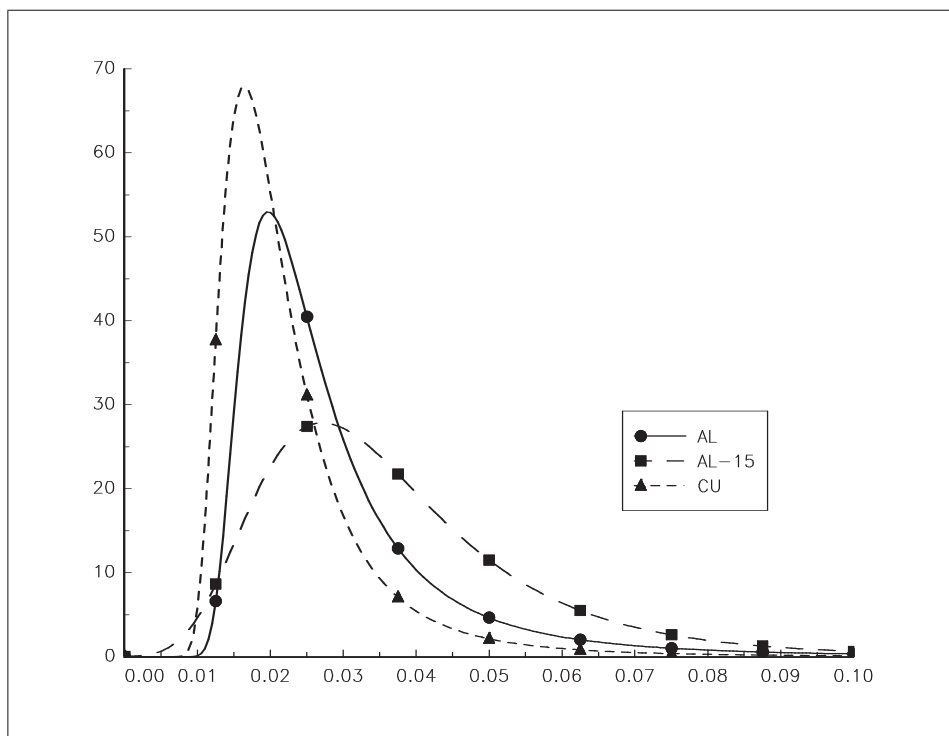
Paramètres	AL	AL-15	CU
μ	0.022	0.018	0.028
σ	0.007	0.006	0.013
ξ	0.344	0.275	0.095

Echelles de Risque (en variation journalière) pour des positions longues (en %)			
Temps de Retour	AL	AL-15	CU
5	-6.74	-4.82	-8.03
10	-8.57	-5.90	-9.35
25	-11.75	-7.68	-11.23
50	-14.91	-9.36	-12.76
75	-17.14	-10.49	-13.70
100	-18.92	-11.38	-14.39

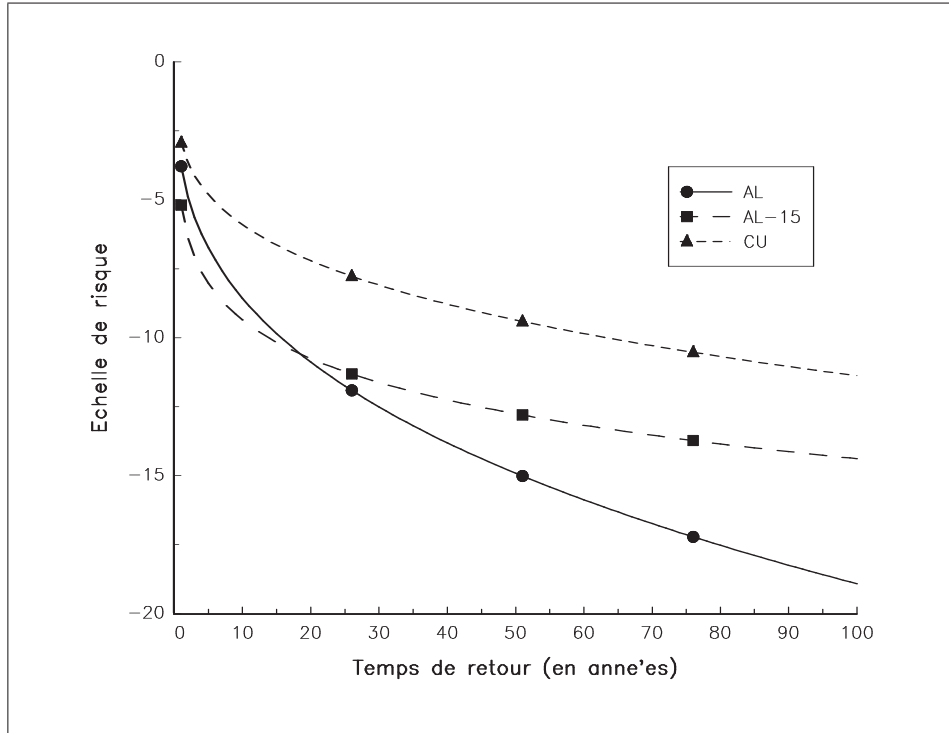
Echelles de Risque (en variation journalière) pour des positions courtes (en %)			
Temps de Retour	AL	AL-15	CU
5	6.96	5.79	7.53
10	8.35	7.10	8.82
25	10.46	9.20	10.73
50	12.32	11.12	12.34
75	13.52	12.39	13.36
100	14.43	13.38	14.12

Nous avons reporté en outre sur les figures (7.10) et (7.11) la densité des lois d'extrêmes estimées ainsi que la relation entre l'échelle de risque et le temps de retour dans le cas des positions longues.

Notons qu'il existe d'autres alternatives à l'utilisation de la **GEV**. COSTINOT, RIBOULET et RONCALLI [2000] utilisent une approche dite semi-paramétrique en s'appuyant sur le fait que les séries financières appartiennent au domaine d'attraction de la distribution de Fréchet. Les quantiles extrêmes se déduisent des quantiles empiriques à partir d'une simple homothétie paramétrée par l'indice de queue (voir aussi les travaux de STRAETMANS [1999,2000]). Dans cette approche, l'indice de queue est alors donné par l'estimateur de Hill.



GRAPHIQUE 7.10. Estimation des densités des lois des extrêmes



GRAPHIQUE 7.11. Relation entre l'échelle de risque et le temps de retour

7.5.5 Le cas multidimensionnel

Cette partie fera l'objet d'un développement dans le cours "Gestion des risques multiples". Pour une première approche, vous pouvez consulter BEZAT et NIKEGHBALI [2000] et BOUYÉ, DURRLEMAN, NIKEGHBALI, RIBOULET et RONCALLI [2000].

7.5.6 Annexes

7.5.6.1 Forme générale d'une loi d'extrêmes

Nous pouvons montrer que la forme générale d'une loi d'extrêmes est $\exp(h(x))$. Nous avons $\mathbf{G}_N(x) = \mathbf{F}(x)^N$ et

$$d\mathbf{G}_N(x) = \mathbf{F}(x)^N \ln \mathbf{F}(x) dN + N\mathbf{F}(x)^{N-1} f(x) dx \quad (7.22)$$

Nous en déduisons que

$$d \ln \mathbf{G}_N(x) = \ln \mathbf{F}(x) dN + N \frac{f(x)}{\mathbf{F}(x)} dx := h_N(x) \quad (7.23)$$

Il est alors facile de montrer que sous certaines conditions de régularité, $h_N(x) = h(x)$ lorsque $N \rightarrow \infty$ et $\mathbf{F}(x) \rightarrow 1^-$. En introduisant une contrainte de stabilité (la distribution des extrema d'un sous-échantillon doit être la même que celle de l'échantillon original), BOULIER, BRABANT, DALAUD et DIEU [1997] montrent que h est la solution d'une équation fonctionnelle qui ne possède que trois solutions.

7.5.6.2 Jacobien analytique de la fonction de log-vraisemblance

Nous avons

$$\begin{aligned} \partial_\mu \ell(\chi_n^+; \theta) &= \frac{1 + \xi - \omega^{-\frac{1}{\xi}}}{\sigma \omega} \\ \partial_\sigma \ell(\chi_n^+; \theta) &= \frac{\left((1 + \xi) - \omega^{-\frac{1}{\xi}} \right) (\chi_n^+ - \mu) - \sigma \omega}{\sigma^2 \omega} \\ \partial_\xi \ell(\chi_n^+; \theta) &= \left(1 - \omega^{-\frac{1}{\xi}} \right) \left(\frac{1}{\xi^2} \ln \omega - \frac{(\chi_n^+ - \mu)}{\xi \sigma \omega} \right) - \frac{(\chi_n^+ - \mu)}{\sigma \omega} \end{aligned} \quad (7.24)$$

avec

$$\omega = 1 + \xi \left(\frac{\chi_n^+ - \mu}{\sigma} \right) \quad (7.25)$$

Bibliographie

- [1] BAHAR, R., M. GOLD, T. KITTO et C. POLIZU [1997], Making the best of the worst, *Risk Magazine*, **10**, August
- [2] BEZAT, A. et A. NIKEGHBALI [2000], La théorie des extrêmes et la gestion des risques de marché, GT ENSAE
- [3] BOUDOUKH, J., M. RICHARDSON et R. WHITELAW [1995], Expect the worst, *Risk Magazine*, **8**, September
- [4] BOULIER, J-F., A. BRABANT, R. DALAUD et A-L. DIEU [1997]. Risques de marché : Vue de Profil, Direction de la Recherche et de l'Innovation, Crédit Commercial de France, *Quants*, **28**
- [5] BOUYÉ, E., V. DURRLEMAN, A. NIKEGHBALI, G. RIBOULET et T. RONCALLI [2000], Copulas for finance : a reading guide and some applications, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [6] COLES, S. [1998], Extreme value theory and applications, *A course presented at the 44th Reunião Annual de RBRAS*, São Paulo, 26-30 July
- [7] COLES, S. et J. TAWN [1999], Statistical methods for extreme values, *A course presented at the 1988 RSS conference*, Strathclyde, September 1998
- [8] COSTINOT, A., G. RIBOULET et T. RONCALLI [2000], Stress-testing et théorie des valeurs extrêmes : une vision quantifiée du risque extrême, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [9] DAVIDSON, R. et J. MACKINNON [1993], Estimation and Inference in Econometrics, Oxford University Press, Oxford
- [10] DREES, H. [1997], Optimal rates of convergence for estimates of the extreme value index, *University of Cologne*, Technical report
- [11] DREES, H., L. DE HAAN et S. RESNICK [1998], How to make a Hill plot, *University of Cologne*, Technical report
- [12] DUNBAR, N. et R. IRVING [1998], This is the way the world ends, *Risk Magazine*, **11**, December
- [13] EMBRECHTS, P., KLÜPPELBERG, C. et T. MIKOSCH [1997], Modelling Extremal Events for Insurance and Finance, Springer-Verlag, Berlin
- [14] EMBRECHTS, P., RESNICK, S.I. et G. SAMORODNITSKY [1997], Extreme value theory as a risk management tool, Departement Mathematik, ETHZ, Zürich, Preprint
- [15] EMBRECHTS, P., RESNICK, S.I. et G. SAMORODNITSKY [1998], Living on the edge, *Risk Magazine*, **11**, January
- [16] MCNEIL, A.J. [1997a], On extremes and crashes, Departement Mathematik, ETHZ, Zürich, Preprint
- [17] MCNEIL, A.J. [1997b], Estimating the tails of loss severity distributions using extreme value theory, *ASTIN Bulletin*, **27**, 117-137
- [18] MCNEIL, A.J. [1998a], History repeating, *Risk Magazine*, **11**, January
- [19] MCNEIL, A.J. [1998b], Calculating quantile risk measures for financial return series using extreme value theory, Departement Mathematik, ETHZ, Zürich, Preprint
- [20] MCNEIL, A.J. [1999], Extreme value theory for risk managers, Departement Mathematik, ETHZ, Zürich, Preprint
- [21] TUCKER, T et A. LAWRENCE [1998], Chain reaction, *FOW*, November, 25-28

Troisième partie

Le risque de crédit

Présentation générale du risque de crédit

8.1 Origine du risque de crédit

L'activité bancaire demeure fortement réglementée du fait du rôle particulier joué par les établissements financiers dans l'économie. Deux raisons principales sont à l'origine du contrôle de l'activité bancaire. D'une part, les liens étroits qu'entretiennent les établissements financiers sont à l'origine d'un *risque systémique* : la faillite d'une banque peut entraîner, par effet de contamination, celle d'autres établissements. D'autre part, l'Etat demeure le principal garant des dépôts bancaires : l'activité de contrôle permet de maintenir la confiance dans le système bancaire et d'en assurer la pérennité.

Les premières dispositions réglementaires concernant l'activité de crédit des banques ont été émises par le Comité de Bâle. Elles répondent à une logique d'adéquation des capitaux propres des banques aux risques qu'elles prennent : les fonds propres doivent être suffisants pour couvrir les pertes que les banques sont susceptibles d'enregistrer. L'*Accord de Bâle* (15 juillet 1988) fixe le cadre réglementaire de l'activité de crédit de l'ensemble des banques des pays signataires. Le *ratio Cooke* impose notamment un niveau de fonds propres minimal : à chaque actif détenu par la banque est associé un coefficient de pondération (0%, 20%, 50% ou 100%) en fonction du risque associé ; le capital total destiné à couvrir le risque doit atteindre au moins 8% de l'ensemble des actifs ainsi pondérés. La principale critique formulée à l'encontre des propositions du Comité de Bâle provient de l'absence de fondement économique des coefficients de pondération appliqués aux actifs : ceux-ci sont fixés de façon arbitraire si bien qu'ils ne reflètent pas correctement le risque de crédit réel encouru par les banques.

Face à cette situation réglementaire imparfaite, les établissements bancaires cherchent à mettre en place des outils de mesure du risque efficaces permettant de déterminer le *capital économique* nécessaire pour chacune de leurs activités. De tels outils doivent permettre à terme d'évaluer et de comparer les rentabilités économiques (et non plus comptables) des activités dans lesquelles les banques sont engagées.

Le risque de crédit peut être défini comme le risque de pertes consécutives au défaut d'un emprunteur sur un engagement de remboursement de dettes qu'il a contractées. En général, on distingue trois composantes :

- *Le risque de défaut* correspond à l'incapacité du débiteur à faire face à ses obligations. L'agence Moody's Investors Service retient la définition suivante du risque de défaut : «tout manquement ou tout retard sur le paiement du principal ou des intérêts». Dans une telle situation, les créanciers sont susceptibles d'accuser une perte s'ils ne recouvrent qu'une partie du montant stipulé par le contrat de dette.
- La deuxième composante du risque de crédit provient de l'incertitude pesant sur le *taux de recouvrement* une fois le défaut survenu.

- *La dégradation de la qualité du crédit* constitue la troisième source de risque portant sur une dette. Si la perception de la qualité de l'emprunteur se détériore, la prime de risque accordée par les marchés financiers s'accroît en conséquence. De plus, si l'emprunteur bénéficie d'une note de la part d'une agence de notation, celle-ci est susceptible de se dégrader suite à la perception négative des marchés.

Notons que les risques de défaut et de dégradation sont fortement corrélés dans la mesure où la dégradation de la qualité de la contrepartie peut être précurseur d'un défaut. Ce sont néanmoins deux risques bien distincts. Le risque de dégradation se traduit par une possible dévalorisation de la dette au cours sa période de vie. Les pertes liées à la dégradation de la qualité de la contrepartie se réalisent donc en cas de vente anticipée de la dette sans qu'un défaut se soit pour autant produit.

8.2 Le marché du risque de crédit

C'est un marché très hétérogène puisque le risque de crédit prend différentes formes. On distingue néanmoins deux grandes catégories. La première correspond aux prêts bancaires (et plus généralement aux différentes facilités de crédit telles que les lignes de crédit confirmées ou non confirmées). Dans ce cas là, l'événement de crédit (credit event) est un risque de défaillance (ou de contrepartie). La seconde catégorie correspond aux obligations risquées. Cela explique en partie que les banques utilisent des outils différents pour mesurer et gérer le risque de crédit selon le portefeuille considéré. La principale différence tient au choix de l'horizon temporel (**default mode (DM) paradigm** et **Mark-to-market (MTM) paradigm**).

8.2.1 *Le marché des prêts bancaires*

Ce n'est pas un marché au sens économique du terme. Le risque de crédit provient d'une asymétrie d'information entre la banque et son client.

- Prêts court terme et long terme ;
- Lignes de crédit confirmées et non confirmées ;
- Financement structurés ;
- etc.

8.2.2 *Le marché des obligations risquées*

En ce qui concerne le marché des obligations risquées (**risky bond**), TURC [1999] considère que la problématique du risque de crédit est triple :

«D'une part, l'émission des obligations implique une problématique de la demande de crédit : pourquoi se financer par obligation ? D'autre part elle est achetée, échangée, agrémentée de dérivés en tout genre, sujette à spéculation d'où une problématique de trading, ou d'intermédiation financière : comment prendre en compte le risque de défaut dans le prix d'un produit dérivé ? Enfin, l'obligation est partie intégrante du portefeuille d'un investisseur, ce qui engendre un problématique de gestion : comment gérer un portefeuille avec risque de crédit, comment estimer le risque globalement encouru par le détenteur de ce portefeuille ?»

L'investisseur en obligations risquées cherche un placement plus rentable que celui des obligations d'état (**sovereign debt**). La différence entre la rentabilité d'une obligation risquée et d'une obligation sûre est appelée le spread de taux. Deux composantes expliquent ce spread de taux : le spread de crédit (risque de dépréciation de la qualité de signature de l'emprunteur) et la liquidité (profondeur du carnet d'ordre).

8.2.3 *Les dérivés de crédit*

Contrairement aux prêts bancaires et aux obligations risquées qui sont une source de risque de crédit, les dérivés du crédit sont des instruments financiers hors bilan qui permettent de transférer le risque de l'actif à une contrepartie sans céder cet actif.

1. Première génération de dérivés de crédit

- Credit Guarantees
 - Revolving Credit
 - Repo Market
 - Asset Swaps
 - Structured Notes
2. Deuxième génération de dérivés de crédit
- Credit default swaps (**CDS**)
 - Default digital put
 - Total return swaps
 - Credit linked notes
 - Spread Options
3. Troisième génération de dérivés de crédit
- First-to-defaults (**F2D**)
 - First losses
 - Collateralized bond obligations (**CBO**)
 - Collateralized loan obligations (**CLO**)
 - Collateralized debt obligations (**CDO**)
 - Basket credit derivatives

Bibliographie

- [1] Credit risk modelling : current practices and applications, *Basle Committee on Banking Supervision*, April 1999, N° **49**
- [2] LEGRAS, J. et L. BONNAT [2001], Le Cooke est mort, vive le Cooke, Crédit Commercial de France, *Quants*, **38**
- [3] TURC, J. [1999], Présentation du marché du risque de crédit, CDC Marchés, *Séminaire INRIA du 8 juin 1999*

9

L'approche standard

9.1 La réglementation prudentielle

Nous rappelons que l'exigence minimale en fonds propres est composée de trois éléments fondamentaux :

1. une définition du capital réglementaire,
2. une définition des actifs pondérés,
3. et un ratio minimal de capital pour ces actifs pondérés :

$$\frac{\text{Capital}}{\text{Total des actifs risqués pondérés}} \geq 8\%$$

Le total des actifs risqués pondérés est la somme des actifs pondérés pour le risque de crédit et 12,5 fois les fonds propres réglementaires pour les risques de marché et opérationnel.

Remarque 13 *Contrairement aux risques de marché et opérationnel, la base de calcul concerne directement la mesure des actifs pondérés et non les fonds propres réglementaires (raison historique). Le Comité de Bâle donne l'exemple suivant. Si les fonds propres réglementaires sont égaux à \$10 pour le risque de marché et \$20 pour le risque opérationnel, et si la valeur des actifs pondérés pour le risque de crédit est \$875, alors le total des actifs risqués pondérés est \$1250 ($875 + 12.50 \times 10 + 12.50 \times 20$). L'exigence minimale en fonds propres est donc de \$100 et nous avons la répartition suivante¹ :*

Type de risque	Crédit	Marché	Opérationnel
Capital	70	10	20

Remarque 14 *Le risque de taux d'intérêt dans le portefeuille bancaire (risque de taux du bilan) ne fait pas partie de l'exigence minimale (premier pilier). Celui-ci est traité dans le second pilier (ALM).*

Plusieurs raisons sont évoquées pour justifier la refonte de la mesure des actifs pondérés pour le risque de crédit :

- obtenir une meilleure mesure de risque en prenant en compte les notations externes et internes,
- éviter l'arbitrage réglementaire, par exemple en utilisant des dérivés de crédit,
- considérer de façon plus cohérente les techniques de réduction des risques.

¹Nous vérifions que $\$70 = \$875 \times 8\%$.

9.2 Les pondérations

Définition 2 *Un actif pondéré risqué (**risk weight asset** ou **RWA**) est la valeur de l'actif risqué affectée d'un coefficient de pondération qui dépend de la nature du risque de l'actif. Cet actif pondéré risqué est aussi appelé plus simplement risque pondéré.*

Dans la version de 1988, la matrice de pondération standard comprend 4 pondérations (0%, 20%, 50% et 100%) avec un découpage assez grossier (distinction OCDE et non OCDE). La nouvelle matrice de pondération est la suivante :

Notation		AAA à AA-	A+ à A-	BBB+ à BBB-	BB+ à B-	B- à C	non noté
Emprunteurs souverains		0%	20%	50%	100%	150%	100%
Banques	1	20%	50%	100%	100%	150%	100%
	2	20%	50%	50%	100%	150%	50%
	2 CT	20%	20%	20%	50%	150%	20%
Entreprises				BBB+ à BB-		B+ à C	
		20%	50%	100%		150%	100%

Les risques pondérés souverains (**sovereign risk weights**) correspondent aux créances sur les emprunteurs souverains et leurs banques centrales nationales. Les notations utilisées sont celles définies par l'agence de rating **Standards & Poor's**. Cependant, d'autres agences de notations peuvent être utilisées (Moody's par exemple). Actuellement, le Comité de Bâle envisage la possibilité de prendre en compte les scores de risques pays (**country risk rating**) publiées par les agences de crédit à l'exportation (**Export Credit Agencies** ou **ECA**) qui utilise la méthodologie 1999 de l'OCDE (par exemple, la COFACE en France). Le mapping entre les scores de risques pays et les notations **S&P** pourrait être le suivant :

Notation S&P	AAA à AA-	A+ à A-	BBB+ à BBB-	BB+ à B-	B- à C	non noté
Score ECA	1	2	3	4 à 6	7	
Pondération	0%	20%	50%	100%	150%	100%

Notons aussi que la pondération est de 0% pour la Banque des Règlements Internationaux (**Bank for International Settlements** ou **BIS**), le Fonds Monétaire International (**International Monetary Fund** ou **IMF**), la Banque Centrale Européenne (**European Central Bank** ou **ECB**) et la Communauté Européenne (**European Community** ou **EC**).

L'autorité de régulation peut choisir de traiter les créances sur les entités du secteur public (**Non-Central Government Public Sector Entities** ou **PSE**) comme des créances sur emprunteurs souverains ou comme des créances sur banques.

Concernant les banques multilatérales de développement (**Multilateral Development Banks** ou **MDB**), le système de pondération est plus complexe. Pour appliquer une pondération de 0%, la MDB doit satisfaire plusieurs critères :

- la notation de long terme est **AAA**,
- l'actionnariat est principalement composé d'emprunteurs souverains présentant une notation égale ou supérieure à **AA**,
- etc.

Le Comité de Bâle propose ainsi que les banques suivantes ont une pondération de 0% :

1. The World Bank Group comprised of the International Bank for Reconstruction and Development (IBRD) and the International Finance Corporation (IFC)
2. The Asian Development Bank (ADB)
3. The African Development Bank (AfDB)
4. The European Bank for Reconstruction and Development (EBRD)

5. The Inter-American Development Bank (IADB)
6. The European Investment Bank (EIB)
7. The Nordic Investment Bank (NIB)
8. The Caribbean Development Bank (CDB)
9. The Council of Europe Development Bank (CEDB)

Pour les banques, les autorités réglementaires ont le choix entre deux options. **Dans la première option, la pondération dépend de la notation du pays et non de la banque.** Par exemple, la pondération 20% est applicable aux banques dont le siège social est dans un état noté AAA à AA-. **Dans la seconde option, la pondération dépend de la notation de la banque et de la maturité de la créance.** Ainsi, une pondération plus favorable est appliquée aux créances d'une durée inférieure ou égale à 3 mois. Afin de bien comprendre les deux options, voici quelques exemples :

	Caractéristiques de la créance			Pondération	
	Rating du pays	Rating de la banque	Maturité	Option 1	Option 2
1	AAA	BBB	1 mois	20%	20%
2	AAA	BBB	10 ans	20%	50%
3	BB+	AA	3 mois	100%	20%
4	BB+	AA	1 an	100%	20%
5	non noté	A	4 mois	100%	50%
6	A	non noté	4 mois	50%	50%

Pour les entreprises d'investissement (**securities firms**), les pondérations sont les mêmes que celles des banques.

Les pondérations pour les entreprises (**corporates**) s'appliquent aussi aux compagnies d'assurance (**insurance companies**). Contrairement aux banques, il n'y a qu'une seule option et seule la notation de l'entreprise est prise en compte. Néanmoins, le découpage des classes de rating est différent de celui des emprunteurs souverains. Concernant les entreprises non notées, le Comité de Bâle considère que leurs créances ne sont pas généralement de qualité faible (**signal low credit quality**) et qu'une pondération de 150% serait trop pénalisante.

Enfin, les créances garanties par des biens immobiliers résidentiels (*claims secured by residential property*) et par des biens immobiliers commerciaux (*claims secured on commercial real estate*) sont pondérées respectivement à 50% et 100%. Concernant les actifs de la banque de réseau (*retail assets*), aucune méthodologie n'a encore été proposée.

9.3 Les notations externes

Le cœur de l'approche standard (**Standardized Approach** ou SA) est bien sûr les notations externes. Celles-ci sont faites par des organismes externes d'évaluation de crédit (**External Credit Assessment Institution** ou ECAI). Nous pouvons citer par exemple les agences de rating les plus célèbres **Standard & Poor's**, **Moody's**, **Fitch IBCA** et **DCR**. La Banque de France fournit aussi une notation appelée "code BdF". Nous pouvons aussi mentionner que la **COFACE** produit des notes pays. Les autorités réglementaires auront donc à valider les ECAI que pourront utiliser les banques. Pour cela, une ECAI devra vérifier différents critères d'éligibilité (voir les paragraphes 53 à 62 du document [1]) :

- **Objectivité** (méthodologie rigoureuse et validée par un backtesting)
- **Indépendance** (pas de pressions politiques ou économiques susceptibles d'influencer la notation)
- **Accès international et transparence**
- **Information** (publication des méthodologies d'évaluation)
- **Ressources**

– **Crédibilité**

La principale difficulté va être le mapping des différentes notations. Le 30 avril 2001, le Comité de Bâle proposait la correspondance suivante entre les deux grandes agences internationales de notation :

	Prime Maximum Safety	High Grade High Quality			Upper Medium Grade			Lower Medium Grade		
S&P	AAA	AA+	AA	AA-	A+	A	A-	BBB+	BBB	BBB-
Moody's	Aaa	Aa1	Aa2	Aa3	A1	A2	A3	Baa1	Baa2	Baa3

	Non Investment Grade	Speculative		Highly Speculative			Substantial Risk	In Poor Standing	
S&P	BB+	BB	BB-	B+	B	B-	CCC+	CCC	CCC-
Moody's	Ba1	Ba2	Ba3	B1	B2	B3	Caa1	Caa2	Caa3

	Extremely Speculative	May be in Default	Default
S&P	CC	C	D
Moody's	Ca	C	

Des travaux sont en cours pour obtenir un mapping plus exhaustif. A titre d'exemple, BARDOS [2001] propose le rapprochement suivant entre les cotations Banque de France et les ratings S&P pour les risques pondérés Corporate :

Notation	AAA à AA-	A+ à A-	BBB+ à BB-	BB- à C	non noté
Cote BdF	A37	Autres A37	47	57, 67, 58, 59, 68 et 69	
Pondération	20%	50%	100%	150%	100%

A titre d'exemples, voici quelques notations que nous pouvons trouver sur le site de S&P :

<http://www.standardandpoors.com/RatingsActions/index.html>

– Extrait de Sovereign Ratings List (October 11, 2001) :

Sovereign	Local Currency			Foreign Currency		
	Long-term rating	Outlook	Short-term rating	Long-term rating	Outlook	Short-term rating
Argentina	CCC+	Negative	C	CCC+	Negative	C
Belgium	AA+	Stable	A-1+	AA+	Stable	A-1+
Canada	AAA	Stable	A-1+	AA+	Stable	A-1+
Colombia	BBB	Negative	A-3	BB	Negative	B
Denmark	AAA	Stable	A-1+	AAA	Stable	A-1+
France	AAA	Stable	A-1+	AAA	Stable	A-1+
Suriname	B	Watch Neg		B-	Watch Neg	

– Extrait de Financial Institutions Counterparty Ratings List

Banque	Notation (Long Term/Outlook/Short Term)
Credit Suisse First Boston	AA/Stable/A-1+
Morgan Stanley Dean Witter & Co.	AA-/Negative/A-1+
Merrill Lynch & Co. Inc.	AA-/Negative/A-1+
Nomura Securities Co. Ltd.	BBB+/Stable/A-2
La Poste	AAA/Stable/A-1+
J.P. Morgan Chase & Co	AA-/Stable/A-1+
Bank of America Corp.	A+/Stable/A-1
Barclays Bank PLC	AA/Stable/A-1+
UBS AG	AA+/Stable/A-1+
Deutsche Bank AG	AA/Stable/A-1+
Societe Generale	AA-/Stable/A-1+
Credit Lyonnais	A-/Positive/A-2
Caisse des Depots et Consignations	AAA/Stable/A-1+
Caisse Nationale de Credit Agricole	AA/Stable/A-1+
BNP PARIBAS	AA-/Stable/A-1+
Caisse Nationale des Caisses d'Epargne et de Prevoyance	AA/Stable/A-1+
International Industrial Bank (Russia)	CCC+/Stable/C
OJSC Infobank (Russia)	D

– Evolution du rating de la Fédération de Russie

Date	Local Currency Rating	Foreign Currency Rating
June 27, 2001	B/Stable/B	B/Stable/B
Dec. 8, 2000	B-/Stable/C	B-/Stable/C
July 27, 2000	B-/Stable/C	SD/Not Meaningful/SD
Feb. 15, 2000	CCC+/Positive/C	SD/Not Meaningful/SD
May 7, 1999	CCC/Stable/C	SD/Not Meaningful/SD
Jan. 27, 1999		SD/Not Meaningful/SD
Sept. 16, 1998		CCC-/Negative/C
Aug. 17, 1998		CCC/Negative/C
Aug. 13, 1998		B-/Negative/C
June 9, 1998		B+/Stable/B
May 27, 1998		BB-/CW-Neg./B
Dec. 19, 1997		BB-/Negative/B
Oct. 4, 1996		BB-/Stable/B

Des informations analogues sont disponibles sur le site de Moody's :

<http://www.moodys.com>

Voici quelques exemples :

- Crédit Lyonnais SA
 - LT Senior-Most Rating : A1, Mar 27 2001 , Senior Unsecured - Fgn Curr
 - ST Most Recent Rating : P-1, Apr 28 2000 , Other Short Term
- Total Fina Elf S.A.
 - LT Senior-Most Rating : Aa2, Feb 10 2000 , Senior Unsecured - Fgn Curr
 - ST Most Recent Rating : P-1, Sep 4 2000 , Other Short Term
- Groupe Danone
 - LT Senior-Most Rating : A1, Nov 4 1993 , Senior Unsecured - Dom Curr

- Vivendi Universal S.A.
 - LT Senior-Most Rating : Baa2, May 15 1998 , Senior Unsecured - Fgn Curr
- Carrefour S.A.
 - LT Senior-Most Rating : A1, Apr 13 2001 , Senior Unsecured
 - ST Most Recent Rating : P-1, Aug 16 1999 , Other Short Term
- European Aeronautic Defence & Space Co. EADS
 - LT Senior-Most Rating : A2, Mar 8 2001 , LT Issuer Rating

9.4 Les procédures de réduction des risques

Les procédures de réduction de risque (**Credit Risk Mitigation** ou CRM) permettent de diminuer le risque d'une ligne de crédit en agissant sur la valeur réelle de l'exposition ou sur le taux de recouvrement potentiel. Parmi des procédures de CRM, nous trouvons les sûretés ou collatéraux (**collateral**), les dérivés de crédit (**credit derivatives**), les garanties (**guarantees**) et les accords de compensation (**offsetting position subject to a netting agreement**). Dans l'Accord de 1988, l'approche utilisée est largement "all-or-nothing". Concernant le nouvel Accord, les techniques de réduction de risque sont beaucoup plus larges.

9.4.1 Les sûretés ou collatéraux

Dans une transaction avec un collatéral, une partie du risque est couverte par une sûreté remise par la contrepartie. Pour que cette sûreté soit éligible au titre de CRM, elle doit remplir certains critères (contrat légal, faible corrélation avec le risque de contrepartie, etc.). Les sûretés validées par le Comité de Bâle sont les suivantes :

1. Espèces
2. Or
3. Titres notés AAA à BB- d'emprunteurs souverains (par exemple des obligations d'état)
4. Titres notés AAA à BBB- des banques, des entreprises d'investissement et des entreprises (par exemple des actions)
5. Actions qui font partie d'un indice principal (par exemple les actions composant le CAC 40)
6. Actions échangées sur une bourse "internationale"

9.4.1.1 L'approche complète

Dans cette approche, on applique des décotes (**Haircuts**) à la valeur de marché de la sûreté C afin de prendre en compte la volatilité du prix de la sûreté. Si nous notons E la valeur de l'exposition et r la pondération de cette exposition, le risque pondéré n'est donc pas égal à $r \times (E - C)$. En fait, le risque pondéré sera de la forme

$$r \times (E - (1 - w) C_A) \tag{9.1}$$

où C_A représente la valeur de la sûreté après prise en compte des décotes et w est un facteur plancher (**floor**) appliqué à la part sécurisée de la transaction ($w \times C_A$ représente le *risque résiduel*). Supposons que w est égal à zéro, le risque pondéré est donc

$$r \times (E - C_A) \tag{9.2}$$

c'est-à-dire le produit entre la pondération r et l'exposition ajustée ($E - C_A$). Si w est différent de zéro, nous avons

$$\begin{aligned} r \times (E - (1 - w) C_A) &= r \times (E - C_A + w C_A) \\ &> r \times (E - C_A) \end{aligned} \tag{9.3}$$

L'introduction de ce facteur w correspond à un souci de prudence de la part du Comité de Bâle (afin de traiter le risque résiduel). Pour l'instant, w a été fixé à 15%.

Si $C_A > E$, le Comité de Bâle applique la règle $C_A = E$. Dans ce cas, le risque pondéré devient

$$r \times (E - (1 - w) E) = r \times w \times E \quad (9.4)$$

Finalement, le risque pondéré est donc

$$r \times \max((E - (1 - w) C_A), w \times E) \quad (9.5)$$

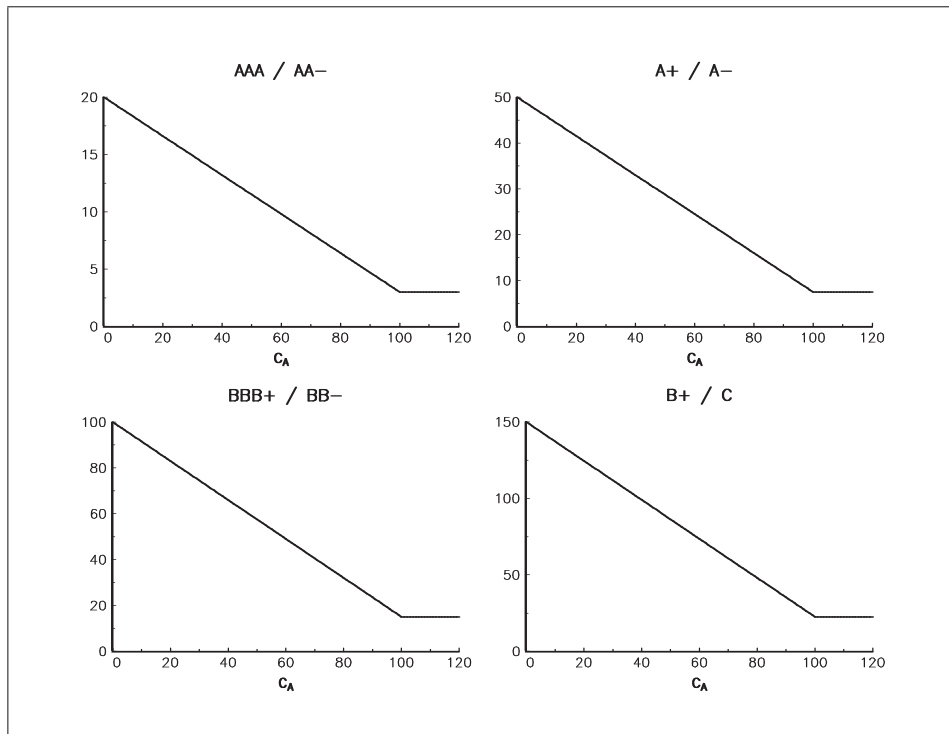
Nous pouvons alors définir une pondération ajustée r^* (c'est-à-dire une pondération prenant en compte l'effet du collatéral) par la formule suivante :

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{r \times \max((E - (1 - w) C_A), w \times E)}{E} \\ &= r \times \max((1 - (1 - w) C_A/E), w) \end{aligned} \quad (9.6)$$

Prenons un exemple pour bien comprendre l'effet de sûreté. Considérons une exposition de \$100 sur une contrepartie **corporate** notée **AA**. Celle-ci apporte en espèces une sûreté de \$20. Nous considérons qu'il n'est pas nécessaire d'appliquer une décote puisque la sûreté et l'exposition sont exprimées dans la même devise. Dans ce cas, le risque pondéré RWA est égal à

$$\begin{aligned} \text{RWA} &= 20\% \times \max((\$100 - (1 - 15\%) \$20), 15\% \times \$100) \\ &= \$16.6 \end{aligned}$$

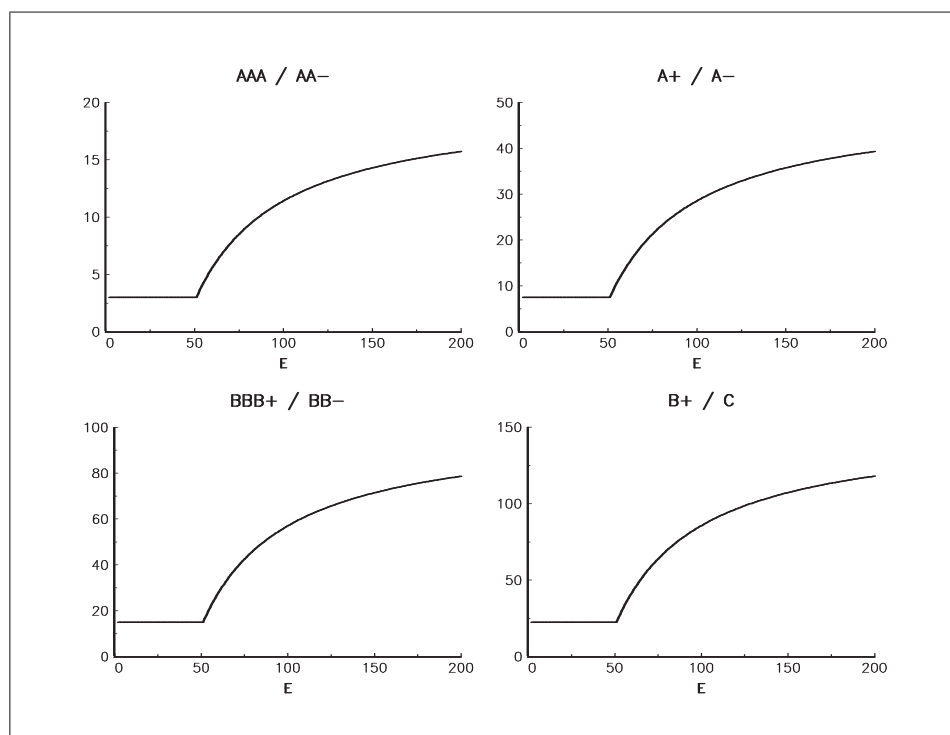
Cela revient à utiliser une pondération (ajustée) de 16,6%. Sur les graphiques (9.1) et (9.2), nous avons reporté la valeur de r^* en fonction de C_A et E dans le cas d'un emprunteur **corporate**. Nous observons clairement l'influence du facteur de seuil w , c'est-à-dire l'influence des *risques résiduels*.



GRAPHIQUE 9.1. Evolution de la pondération ajustée r^* en fonction de la sûreté ajustée C_A ($E = 100$)

Voyons maintenant comment sont appliquées les décotes pour définir la valeur ajustée du collatéral C_A . La formule générale est

$$C_A = \frac{C}{1 + H_E + H_C + H_{FX}} \quad (9.7)$$


 GRAPHIQUE 9.2. Evolution de la pondération ajustée r^* en fonction de l'exposition E ($C_A = 50$)

avec H_E la décote liée à la volatilité de l'exposition, H_C la décote liée à la volatilité de la sûreté et H_{FX} la décote liée au risque de change. Pour calculer ces décotes, nous avons deux possibilités :

- utiliser des décotes prudentielles standard données par le Comité de Bâle,
- ou les estimer statistiquement.

L'annexe 3 du document [1] présente les estimations des décotes prudentielles standard (en %) lorsque la période de détention est 10 jours et la valorisation et la reconstitution des marges sont journalières (**10-business day haircuts assuming daily mark-to-market and daily remargining**) :

Notation	Maturité résiduelle	Emprunteurs souverains	Banques/Entreprises
AAA à AA	0 à 1 an	0.5	1
	1 à 5 ans	2	4
	+5 ans	4	8
A à BBB	0 à 1 an	1	2
	1 à 5 ans	3	6
	+5 ans	6	12
BB		20	✓
Espèces		0	
Or		15	
Actions d'un indice principal		20	
Actions d'une bourse "internationale"		30	
Risque FX		8	

Considérons une sûreté de de \$100 sur une obligation du trésor AAA. Si la maturité résiduelle de l'obligation est 10 ans et si la sûreté est en espèces dans la devise de l'obligation, alors nous avons

$$C_A = \frac{100}{1 + 0.04 + 0 + 0} = \$96.153$$

Si la devise de l'obligation et la devise des espèces sont différentes, il y a un risque de change et nous obtenons

$$C_A = \frac{100}{1 + 0.04 + 0 + 0.08} = \$89.285$$

Supposons maintenant que la sûreté correspond à de l'or, nous avons

$$C_A = \frac{100}{1 + 0.04 + 0.15 + 0} = \$84.033$$

Considérons maintenant une obligation d'état **BB**, une sûreté constituée par des actions d'une bourse "internationale" (mais qui ne sont pas dans un indice principal) libellées dans une devise étrangère. La valeur ajustée de la sûreté devient

$$C_A = \frac{100}{1 + 0.20 + 0.30 + 0.08} = \$63.291$$

Si nous appliquons le risque résiduel, nous obtenons $(1 - 15\%) \times \$63,291 = \$53,797$. Dans ce dernier cas, la valeur ajustée du colatéral après prise en compte du risque résiduel ne représente que la moitié de la valeur nominale de la protection.

Dans le cadre d'une estimation interne des décotes, celle-ci doit vérifier les mêmes critères quantitatifs que ceux pour le risque de marché. En particulier, la période de détention est fixée à 10 jours et le seuil de confiance est 99%.

Quelque soit l'approche retenue pour calculer les décotes (standard ou modèle interne), les valeurs de celles-ci doivent être modifiées

- si la période N de reconstitution des marges **pour les opérations de marché** est supérieure à la journée

$$H = H_{10} \sqrt{\frac{N + 9}{10}} \tag{9.8}$$

- ou si la période N de revalorisation pour les opérations de prêts garantis est supérieure à la journée²

$$H = H_{10} \sqrt{\frac{N + 19}{10}} \tag{9.9}$$

H_{10} représente ici la décote à 10 jours.

9.4.1.2 L'approche simple

Dans cette approche, la pondération applicable à la partie non couverte ($E - C$) est celle de la contrepartie ou de l'emprunteur et la pondération applicable à la sûreté C est celle de l'instrument de couverture (avec un plancher de 20%).

9.4.2 Les garanties et les dérivés de crédit

Pour tenir compte de garanties (et des dérivés de crédit), certaines conditions doivent être remplies (voir les articles 183 à 199 du document [1]) :

- la garantie est directe, explicite, irrévocable et inconditionnelle ;
- information publique ;
- etc.

²Dans ce cas, la période de détention standard est 20 jours ouvrés et non 10 jours ouvrés.

Dans le cas d'une **couverture proportionnelle**, on calcule les risques pondérés de la façon suivante

$$r^* \times E = r \times (E - G_A) + [(r \times w) + g(1 - w)] G_A \quad (9.10)$$

avec G_A le montant de la garantie ajusté du risque de change et g la pondération du risque de la garantie. Nous remarquons que dans le cas d'une protection totale ($E = G_A$), cette expression devient

$$r^* = (r \times w) + g(1 - w) \quad (9.11)$$

et $r^* = g$ si w est égal à zéro. La méthode de calcul est proche de celle issue de l'approche simple pour les sûretés. En effet, si nous posons w égal à zéro, nous avons

$$r^* \times E = r \times (E - G_A) + g \times G_A \quad (9.12)$$

Dans le cas d'une **couverture par tranches (senior et junior)**, nous distinguons deux cas :

1. Le risque de crédit sur la tranche junior G_J est transféré et le risque de crédit sur la tranche senior G_S est conservé :

$$r^* \times E = r \times G_S + [(r \times w) + g(1 - w)] G_J \quad (9.13)$$

Cela revient donc à une couverture proportionnelle avec $G_A = G_J = E - G_S$.

2. Le risque de crédit sur la tranche junior G_J est conservé et le risque de crédit sur la tranche senior G_S est transféré :

$$r^* \times E = [(r \times w) + g(1 - w)] G_S$$

On considère dans ce cas que le risque sur la tranche junior (qui est un risque de première perte) doit être déduit du montant des fonds propres.

Concernant les risques résiduels, voici les valeurs de w calculée par le Comité de Bâle :

w	Garantie
0	Garantie souveraine
0.15	Autres garanties
0.15	Dérivés de crédit

9.4.3 Autres considérations

9.4.3.1 Compensation de bilan

Le Comité de Bâle reconnaît les accords de compensation de bilan dans le portefeuille bancaire des prêts et dépôts. Néanmoins, la contrepartie doit satisfaire certains critères. Dans ce cas, le facteur de pondération du risque résiduel w est égal à 0.

9.4.3.2 Le décalage des maturités

Un décalage de maturité intervient lorsque la maturité résiduelle de la couverture est plus faible que celle de l'exposition sous-jacente. Dans ce cas, la pondération corrigée r^{**} est

$$r^{**} = \begin{cases} r & \text{si } T_{CRM} \leq 1 \text{ an} \\ \left(1 - \frac{T_{CRM}}{T_E}\right) r + \frac{T_{CRM}}{T_E} r^* & \text{si } 1 \text{ an} \leq T_{CRM} \leq T_E \end{cases}$$

avec r la pondération de l'exposition, r^* la pondération ajustée de l'exposition, T_E la maturité de l'exposition et T_{CRM} la maturité de la couverture CRM.

9.4.3.3 L'asymétrie des devises

Nous rappelons que la valeur ajustée du collatéral C_A est

$$C_A = \frac{C}{1 + H_E + H_C + H_{FX}} \quad (9.14)$$

Dans le cadre d'une compensation de bilan, la valeur ajustée du dépôt reçu D est

$$D_A = \frac{D}{1 + H_{FX}} \quad (9.15)$$

Concernant les garanties et les dérivés de crédit, une formule analogue existe

$$G_A = \frac{G}{1 + H_{FX}}$$

9.4.4 Quelques exemples

Nous reproduisons ici les exemples donnés par le Comité de Bâle (annexe 4 du document [1]).

9.4.4.1 Collateralised transactions

Flat repo with a bank counterparty, not satisfying the conditions for zero w

Bank A repos out \$1,000-worth of 10-year AAA-rated sovereign securities to Bank B (risk weighted at 20%) and receives \$1,000 in cash collateral. Revaluation and remargining are conducted daily. There is no currency mismatch or maturity mismatch. In this case a haircut of 4% is applied to the sovereign securities lent out while there is no haircut for the collateral received, since it is cash. Then the adjusted value of the collateral, C_A , is

$$\begin{aligned} C_A &= \frac{C}{1 + H_E + H_C + H_{FX}} \\ &= \frac{\$1000}{1 + 0.04 + 0 + 0} \\ &= \$962 \end{aligned}$$

In order to calculate the risk weighted assets, the exposure E , C_A , the weight for remaining risks ($w = 0.15$), and the risk weight of counterparty ($r = 0.2$) are inserted into the equation below. Note that the exposure (\$1,000) exceeds the adjusted value of collateral (\$962).

$$\begin{aligned} r^* \times E &= r \times \max((E - (1 - w) C_A), w \times E) \\ &= 0.2 \times (1000 - 0.85 \times 962) \\ &= \$36.50 \end{aligned}$$

So, the risk weighted assets will be \$36.50 ($r = 20\%$ and $r^* = 3.65\%$).

Flat reverse repo with a bank counterparty

This is the opposite side of the transaction in Example above. Bank B takes in \$1,000 worth of 10-year AAA-rated sovereign securities (from this banks perspective these securities are the collateral received) and provides \$1,000 in cash to Bank A (counterparty risk weight 50%). Revaluation and remargining are conducted daily. There is no currency mismatch or maturity mismatch. In this case a haircut of 4% is applied to the sovereign securities reverse repoed in (i.e. taken as collateral) while there is no haircut for the cash posted. Then the adjusted value of the collateral, C_A , is

$$\begin{aligned} C_A &= \frac{\$1000}{1 + 0 + 0.04 + 0} \\ &= \$962 \end{aligned}$$

In order to calculate the risk weighted assets, the exposure E , C_A , the weight for remaining risks ($w = 0.15$), and the risk weight of Bank A ($r = 0.5$) are inserted into the equation below. Note that for Bank B, too, the exposure (\$1,000) exceeds the adjusted value of collateral (\$962).

$$\begin{aligned} r^* \times E &= r \times (E - (1 - w) C_A) \\ &= 0.5 \times (1000 - (1 - 0.15) 962) \\ &= \$91.20 \end{aligned}$$

So, the risk weighted assets will be \$91.20 ($r = 50\%$ and $r^* = 9.12\%$).

Undercollateralised repo with a bank counterparty, not satisfying the conditions for zero w

Bank A repos out \$1,000-worth of 10-year AAA-rated government securities to Bank B (risk weighted at 20%) and receives \$950 in cash collateral. Revaluation and remargining are conducted daily. There is no currency mismatch or maturity mismatch. In this case a haircut of 4% is applied to the government securities lent out while there is no haircut for the collateral received since it is cash. Then the adjusted value of the collateral, C_A , is

$$\begin{aligned} C_A &= \frac{\$950}{1 + 0.04 + 0 + 0} \\ &= \$913 \end{aligned}$$

In order to calculate the risk weighted assets, the exposure E , C_A , the weight for remaining risks ($w = 0.15$), and the risk weight of counterparty ($r = 0.2$) are inserted into the equation below. Note that the exposure (\$1,000) exceeds the adjusted value of collateral (\$913).

$$\begin{aligned} r^* \times E &= 0.2 \times (1000 - 0.85 \times 913) \\ &= \$44.71 \end{aligned}$$

So, the risk weighted assets will be \$44.71 ($r = 20\%$ and $r^* = 4.47\%$).

Reverse repo with a bank counterparty, overcollateralised

Bank B reverse repos in \$1,000-worth of 10-year AAA-rated sovereign securities from Bank A (risk weighted at 50%) and posts \$950 in cash collateral. Revaluation and remargining are conducted daily. There is no currency mismatch or maturity mismatch. In this case a haircut of 4% is applied to the government securities reverse repoed in while there is no haircut for the collateral posted since it is cash. Then the adjusted value of the collateral received, C_A , is

$$\begin{aligned} C_A &= \frac{\$1000}{1 + 0 + 0.04 + 0} \\ &= \$962 \end{aligned}$$

In order to calculate the risk weighted assets, the exposure E , C_A , the weight for remaining risks ($w = 0.15$), and the risk weight of counterparty ($r = 0.5$) are inserted into the equation below. Note that the adjusted value of collateral (\$962) exceeds the exposure (\$950).

$$\begin{aligned} r^* \times E &= 0.5 \times 0.15 \times 950 \\ &= \$71.25 \end{aligned}$$

So, the risk weighted assets will be \$71.25 ($r = 50\%$ and $r^* = 7.50\%$).

Flat repo with an non-bank finance company, zero w

Bank repos out \$1,000-worth of 10-year AAA-rated sovereign securities to finance company (risk weighted at 100%) and receives \$1,000 in cash collateral. Revaluation and remargining are conducted daily. There is no currency mismatch or maturity mismatch and the conditions for a zero w are satisfied. A haircut of 4% is applied to the sovereign securities lent out while there is no haircut for the cash collateral received. Then the adjusted value of the collateral received, C_A , is

$$\begin{aligned} C_A &= \frac{\$1000}{1 + 0.04 + 0 + 0} \\ &= \$962 \end{aligned}$$

In order to calculate the risk weighted assets, the exposure E , C_A , the weight for remaining risks ($w = 0$), and the risk weight of counterparty ($r = 1.0$) are inserted into the equation below. Note that the exposure (\$1,000) exceeds the adjusted value of collateral (\$962).

$$\begin{aligned} r^* \times E &= 1.0 \times (1000 - 962) \\ &= \$38.50 \end{aligned}$$

So, the risk weighted assets will be \$38.50 ($r = 100\%$ and $r^* = 3.85\%$).

Securities lending transaction

Bank A lends out \$1,000 in 10-year AA-rated sovereign securities to Bank B (risk weight 20%) and receives \$1,000 in 7-year AAA-rated corporate securities. Daily mark-to-market and daily remargining are conducted. There is no currency mismatch or maturity mismatch. A haircut of 4% is applied to the government securities lent out while a haircut of 8% is also applied to the corporate securities taken as collateral. The adjusted value of the collateral C_A is

$$\begin{aligned} C_A &= \frac{\$1000}{1 + 0.04 + 0.08 + 0} \\ &= \$893 \end{aligned}$$

In order to calculate the risk weighted assets, the exposure E , C_A , the weight for remaining risks ($w = 0.15$), and the risk weight of counterparty Bank B ($r = 0.2$) are inserted into the equation below. Note that E (\$1,000) exceeds C_A (\$893).

$$\begin{aligned} r^* \times E &= 0.2 \times (1000 - 0.85 \times 893) \\ &= \$48.20 \end{aligned}$$

So, the risk weighted assets will be \$48.20 ($r = 20\%$ and $r^* = 4.82\%$).

Secured lending to an unrated corporate, cash against main index equities, with a currency mismatch and revaluation every 90 business days

A bank lends \$950 to an unrated corporate and receives as collateral main index equities denominated in a different currency and currently worth \$1000. The equity collateral is revalued every 90 business days and there is no remargining. The collateral is pledged for the life of the exposure. With daily remargining, a haircut of 20% would be applied to the equity collateral while there is no haircut for the lending since it is cash. The ten-day standard supervisory haircut for currency mismatch is 8%. Since the frequency of revaluation is once every 90 days, both of these haircuts need to be increased, according to the following formula for secured lending transactions :

$$H = H_{10} \sqrt{\frac{N + 19}{10}}$$

We have

$$H_{FX} = 0.08 \sqrt{\frac{90 + 19}{10}} = 0.2641$$

and

$$H_C = 0.20 \sqrt{\frac{90 + 19}{10}} = 0.6603$$

Then $H_{FX} = 26.2\%$ and $H_C = 66.0\%$, and the adjusted value of the collateral received, C_A , is

$$\begin{aligned} C_A &= \frac{\$1000}{1 + 0 + 0.26 + 0.66} \\ &= \$520 \end{aligned}$$

In order to calculate the risk weighted assets, the exposure E , C_A , the weight for remaining risks ($w=0.15$), and the risk weight of counterparty ($r=1.0$) are inserted into the equation below. Note that the exposure (\$950) exceeds the adjusted value of collateral (\$520).

$$\begin{aligned} r^* \times E &= 100\% \times (950 - 0.85 \times 520) \\ &= \$508.31 \end{aligned}$$

So, the risk weighted assets will be \$48.20 ($r = 100\%$ and $r^* = 53.51\%$).

9.4.4.2 On-balance sheet netting

Netting of interbank loans and deposits with a maturity and currency mismatch

A bank lends \$1000 to another bank (eligible for a risk weight of 20%) with a maturity of three years. The same bank counterparty places a two-year deposit in Euros currently worth \$950, revalued every 250 business days. The conditions for on-balance sheet netting are satisfied.

There is a currency mismatch and a maturity mismatch. For on-balance sheet netting, w is zero. Both loan and deposit are cash, which attracts a zero haircut. The ten-day standard supervisory haircut for currency mismatch is 8%. Since the frequency of revaluation is once every 250 business days, this haircut needs to be increased, according to the following formula for secured lending transactions :

$$H = H_{10} \sqrt{\frac{N + 19}{10}}$$

We have

$$H_{FX} = 0.08 \sqrt{\frac{250 + 19}{10}} = 0.4149$$

Then $H_{FX} = 41.5\%$, and the adjusted value of the collateral received C_A is

$$\begin{aligned} C_A &= \frac{\$950}{1 + 0 + 0 + 0.42} \\ &= \$671 \end{aligned}$$

In order to calculate the risk weighted assets, the exposure E , C_A , and the risk weight of counterparty ($r = 0.2$) are inserted into the equation below. Note that the exposure (\$1,000) exceeds the adjusted value of collateral (\$671).

$$\begin{aligned} r^* &= \frac{r \times (E - (1 - w) C_A)}{E} \\ &= \frac{20\% \times (1000 - 671)}{1000} \\ &= 6.57\% \end{aligned}$$

Finally, there is a maturity mismatch, so r^* needs to be adjusted according to the following formula, where $t = 2$ years and $T = 3$ years.

$$\begin{aligned} r^{**} &= \left(1 - \frac{t}{T}\right) r + \frac{t}{T} r^* \\ &= \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times 20\% + \frac{2}{3} \times 6.57\% \\ &= 11.05\% \end{aligned}$$

We have

$$r^{**} \times E = 11.05\% \times 1000$$

So, the risk weighted assets will be \$110.48 ($r = 20\%$, $r^* = 6.57\%$ and $r^{**} = 11.05\%$).

9.4.4.3 Guarantees/credit derivatives

Loan to an unrated corporate fully guaranteed by a third-party corporate eligible for a 20% risk weight

A bank has lent \$1000 to an unrated corporate and has obtained a guarantee for the **full** amount from a third-party corporate (20% counterparty risk weight). The formula is

$$r^* \times E = r \times (E - G_A) + [(r \times w) + g(1 - w)] G_A$$

Here $E = G_A = \$1000$, $r = 100\%$, $g = 20\%$, $w = 0.15$ and so the risk-weighted assets are

$$\begin{aligned} r^* \times E &= [(100\% \times 15\%) + 20\% (1 - 15\%)] \times \$1000 \\ &= \$320 \end{aligned}$$

Loan to an unrated corporate fully protected by a guarantee with a third-party bank eligible for a 20% risk weight

A bank has lent \$1000 to an unrated corporate and has obtained a guarantee for the **full** amount from a third-party bank (20% counterparty risk weight). Since the guarantor is a bank, a zero w applies. So, the risk weighted assets will be

$$\begin{aligned} r^* \times E &= [(100\% \times 0\%) + 20\% (1 - 0\%)] \times \$1000 \\ &= \$200 \end{aligned}$$

Note that this result is equivalent to the present substitution approach.

Pro rata guarantee from bank

Bank A has an exposure of \$1000 with a three-year residual maturity, and has obtained a pro rata guarantee of \$500 of this exposure, also with a three-year residual maturity. The formula for r^* is

$$\begin{aligned} r^* \times E &= r \times (E - G_A) + [(r \times w) + g(1 - w)] G_A \\ &= 100\% \times (\$1000 - \$500) + [(100\% \times 0\%) + 20\% \times (1 - 0\%)] \times \$500 \\ &= \$600 \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Basel Committee on Banking Supervision, The Standardized Approach to Credit Risk — Consultative Document, Supporting document to the New Basel Capital Accord, January 2001
- [2] BARDOS [2001], Statistiques de défaillance selon les cotations, Banque de France, Secretariat Général, Direction des Entreprises, Observatoire des Entreprises

10

La méthode IRB

10.1 Les principes généraux

Contrairement à l'approche standardisée, la méthode IRB est basée sur des évaluations internes des probabilités de défaillance (**Probability of Default** ou PD). Notons que ce concept n'intervient pas dans la méthode SA. Néanmoins, elle est implicitement contenue dans la définition des pondérations. Avec la méthode IRB, le but du Comité de Bâle est double :

1. proposer une méthode plus sensible au risque de crédit («*additional risk sensitivity*»);
2. et définir une méthode “fédératrice” pour calculer le risque de crédit («*incentive compatibility, in that an appropriately structured IRB approach can provide a framework which encourages banks to continue to improve their internal risk management practices*»).

Outre la probabilité de défaut PD, la méthode IRB est basée sur deux autres concepts :

- la perte en cas de défaillance (**Loss Given Default** ou LGD);
- l'exposition en cas de défaillance (**Exposure At Default** ou EAD).

Le Comité de Bâle définit alors deux approches IRB. Dans la première approche dite approche IRB simple (*foundation approach*), seule la probabilité de défaillance est estimée par la banque alors que les autres paramètres sont fournis par les autorités de régulation. Dans la seconde approche ou approche IRB avancée (*advanced approach*), tous les paramètres sont estimés par la banque. Néanmoins, une banque qui adopte la méthode avancée ne peut avoir une exigence en fonds propres inférieure à 90% de celle calculée avec la méthode simple (c'est le concept du **floor**).

10.1.1 Le schéma simplifiée de l'approche IRB

Le schéma simplifiée de l'approche IRB est le suivant :

- Une classification des expositions.
- Pour chaque classe d'exposition, la banque doit fournir les composantes de risque (*risk components*).
- A partir de ces composantes de risque, une fonction de risques pondérés (*risk-weight function*) permet de calculer le montant des actifs pondérés.
- Le respect de certains critères est exigé pour être éligible à l'approche IRB.
- Un processus de supervision s'occupe de faire respecter ces critères.

Les banques devront donc classer les expositions du portefeuille en six catégories : emprunteurs souverains, banques, entreprises, retail (banque de détail), financements de projets (*project finance*) et equity (actions). Concernant la définition de la catégorie “retail”, l'exposition devra remplir les conditions suivantes :

1. Le risque porte sur une ou des personnes individuelles.
2. Le risque porte sur certains produits (cartes de crédits, prêts aux particuliers, crédit bail, découverts, crédits aux logements, etc.).
3. L'exposition est d'un montant relativement faible.
4. L'exposition est "comprise" parmi un grand nombre d'expositions comparables (notion de **granularité** du portefeuille).

Comme nous l'avons vu, les composantes de risque sont la probabilité de défaillance, la perte en cas de défaillance et l'exposition en cas de défaillance. Une quatrième composante concerne la maturité M . Quelle que soit la méthode (simple ou avancée), les probabilités de défaillance sont estimées par la banque et doivent correspondre à une moyenne conservatrice des probabilités de défaillance sur le long terme (conservative view of a long-run average PD). Bien sûr, ces probabilités de défaillance sont liées à la construction des notations internes. Dans l'approche simple, les valeurs de LGD sont fournies par les autorités de régulation. Le document consultatif de Janvier 2001 propose une valeur de 50% pour la plupart des transactions (dettes seniors) et 75% pour les dettes subordonnées. Dans la méthode avancée, c'est la banque elle-même qui fournit la valeur. En règle générale, l'exposition en cas de défaillance sera égale au montant nominal du crédit. Le calcul des risques pondérés RWA correspond alors

$$\text{RWA} = r \times \text{EAD} \quad (10.1)$$

avec r la pondération "interne" calculée à partir de PD, LGD, M et la fonction de risques pondérés. La banque peut alors calculer la valeur totale des risques pondérés par portefeuille (c'est-à-dire pour chaque classe d'exposition) en faisant une simple somme. Finalement, un facteur d'ajustement qui reflète la granularité du portefeuille est appliqué pour obtenir la valeur finale des risques pondérés.

10.1.2 Définition de la défaillance

On remarque que la notion clé dans cette approche est donc la défaillance. Dans les paragraphes 139 à 151 du document [3], celle-ci est définie de la façon suivante :

La défaillance d'une contrepartie donnée est supposée être survenue si l'un des quatre événements a eu lieu

1. *L'emprunteur ne peut plus honorer ses obligations de remboursement (principal, intérêts ou commission) **en totalité**.*
2. *Il est survenu un événement de crédit (par exemple, une provision spécifique).*
3. *L'emprunteur est en défaut de paiement depuis 90 jours **sur l'un de ses crédits**.*
4. *L'emprunteur est en faillite juridique.*

On voit donc que cette définition recouvre deux types de créances : les créances contentieuses (le risque de perte est constaté) et les créances douteuses (le risque de perte est potentiel). Le Comité de Bâle est conscient que cela peut poser des problèmes de périmètre. C'est pourquoi des travaux sont en cours concernant le mapping d'estimations basées sur d'autres définitions.

10.1.3 La notation interne

Celle-ci est au cœur de la méthode IRB. La table 10.1 est un exemple de système de notation interne. En général, c'est un système avec différents niveaux (**grade**) et à chaque niveau est associée une probabilité de défaillance. Ce système de notation fera l'objet d'une validation par les autorités de réglementation et la banque devra démontrer qu'il est conforme aux exigences minimum depuis au moins trois ans.

10.2 L'exemple de la méthode IRB pour les entreprises

Nous reprenons ici les grandes lignes du chapitre 2 du document [3]. Le Comité de Bâle remarque que les banques utilisent un système de notation interne basé sur 10 notes en moyenne.

Rating	Degree of risk	Definition	Borrower category by self-assessment
1	No essential risk	Extremely high degree of certainty of repayment	Normal
2	Negligible risk	High degree of certainty of repayment	
3	Some risk	Sufficient certainty of repayment	
4	Better than average	There is certainty of repayment, but substantial changes in the environment in the future may have some impact on this uncertainty	
5	Average	There are no problems foreseeable in the future, but a strong likelihood of impact from changes in the environment	
6	Tolerable	There are no problems foreseeable in the future, but the future cannot be considered entirely safe.	
7	Lower than average	There are no problems at the current time but the financial position of the borrower is relatively weak	
8	Needs preventive management	There are problems with lending terms or fulfilment, or the borrower's business conditions are poor or unstable, or there are other factors requiring careful management	Needs attention
9	Needs serious management	There is a high likelihood of bankruptcy in the future	In danger of bankruptcy Effectively bankrupt Bankrupt
10	I II	The borrower is in serious financial straits and "effectively bankrupt" The borrower is bankrupt	

TABLE 10.1. Exemple de système de notation interne (IEDA, MARUMO et YOSHIBA [2000])

10.2.1 Formulation des pondérations de risque

Les pondérations de risque (*risk weights*) sont obtenues à partir d'une fonction spécifique continue (*risk weight function*). Nous avons

$$r = RW (PD, LGD, M) \quad (10.2)$$

et

$$\begin{aligned} RWA &= r \times EAD \\ &= RW (PD, LGD, M) \times EAD \end{aligned} \quad (10.3)$$

Les valeurs de PD, LGD, M et EAD sont exprimées en chiffres réels (par exemple, 100% correspond à une valeur de 100).

Dans l'approche IRB simple, la maturité n'est pas prise en compte. Dans ce cas, la maturité moyenne des expositions est supposée égale à 3 ans. Nous avons

$$r = RW = \min \left(\frac{LGD}{50} \times BRW (PD), 12.5 \times LGD \right) \quad (10.4)$$

RW représente la pondération associée à des valeurs données des composantes de risques et BRW est la fonction dite benchmark calibrée pour une perte en cas de défaillance égale à 50%. Dans la méthode IRB avancée, la maturité est prise en compte. Nous avons alors

$$RW = \min \left(\frac{LGD}{50} \times BRW (PD) \times [1 + (M - 3) b (PD)], 12.5 \times LGD \right)$$

Si la maturité M est égale à 3 ans, nous retrouvons la formule de l'approche IRB simple. Le terme $1 + (M - 3) b (PD)$ est un facteur d'échelle multiplicatif linéaire en M . $b (PD)$ est ici une fonction de la probabilité de défaillance.

10.2.1.1 Dans l'approche IRB simple

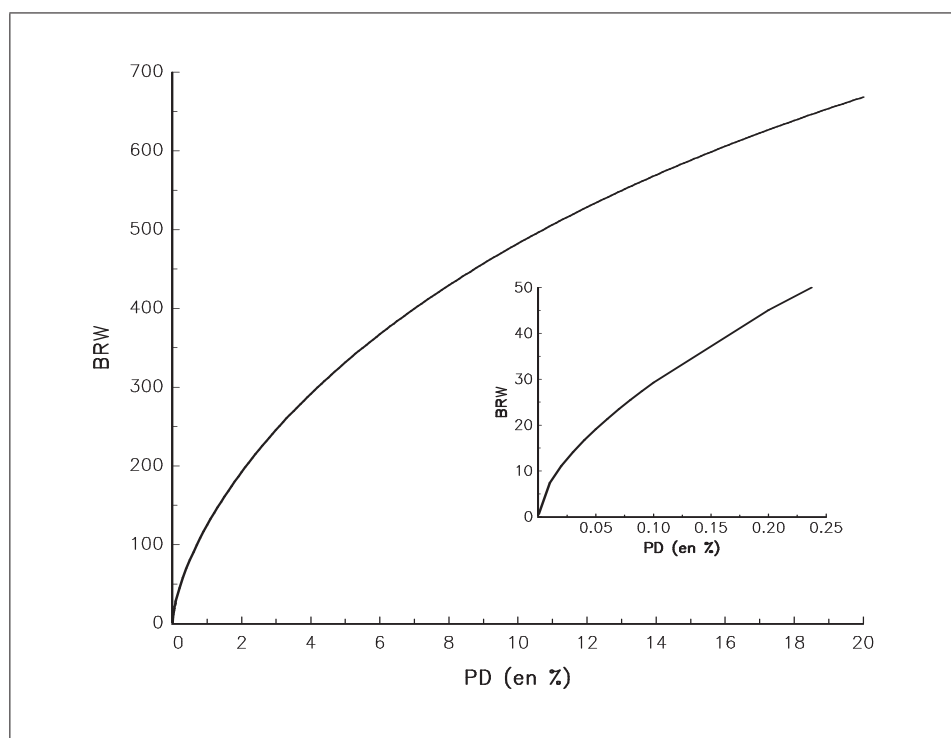
Le Comité de Bâle définit la fonction BRW de la façon suivante :

$$BRW (PD) = 976.5 \times \Phi (1.118 \times \Phi^{-1} (PD) + 1.288) \times \left(1 + 0.470 \times \frac{1 - PD}{PD^{0.44}} \right) \quad (10.5)$$

Dans cette formule, PD est exprimée en valeur décimale (par exemple, 1% correspond à 0.01). Le Comité de Bâle indique que cette fonction de référence (*Benchmark Risk Weight function*) est la résultante du produit de trois facteurs séparés :

- Le terme $\Phi(1.118 \times \Phi^{-1}(\text{PD}) + 1.288)$ représente la somme des pertes espérées et non espérées associée à un portefeuille infiniment granulaire de prêts de maturité 1 an et de perte en cas de défaillance égale à 100%. La calibration a été faite à partir d'un modèle de risque de crédit à la Merton avec un seul facteur de risque systématique. Le seuil de confiance et la corrélation moyenne des actifs ont été fixés respectivement à 99.5% et 20%.
- Le terme $(1 + 0.470 \times \frac{1-\text{PD}}{\text{PD}^{0.44}})$ est un coefficient d'ajustement qui reflète une maturité moyenne égale à 3 ans.
- Le facteur d'échelle 976.50 a été calibré pour des valeurs PD et LGD par défaut égales à 0.7% et 50%. Dans ce cas, la fonction BRW (PD) prend la valeur 100%.

Sur le graphique 10.1, nous avons représenté la fonction de référence BRW (PD) en fonction de la probabilité de défaillance. Nous remarquons que celle-ci croît très vite — voir le graphique 10.2 représentant la dérivée première $\partial \text{BRW}(\text{PD}) / \partial \text{PD}$. Afin de bien mesurer l'impact de l'ajustement de maturité $(1 + 0.470 \times \frac{1-\text{PD}}{\text{PD}^{0.44}})$ — c'est-à-dire la passage d'une maturité un an à une maturité trois ans, le graphique 10.3 montre le coefficient d'ajustement dans la formule BRW (PD). Enfin, nous avons reporté les valeurs des pondérations (en %) des actifs risqués dans les tables 10.2 à 10.4. Nous vérifions que la fonction de référence a bien été calibrée afin que la pondération soit approximativement 100% pour une probabilité de défaillance égale à 0.7% et une perte en cas de défaillance égale à 50%.



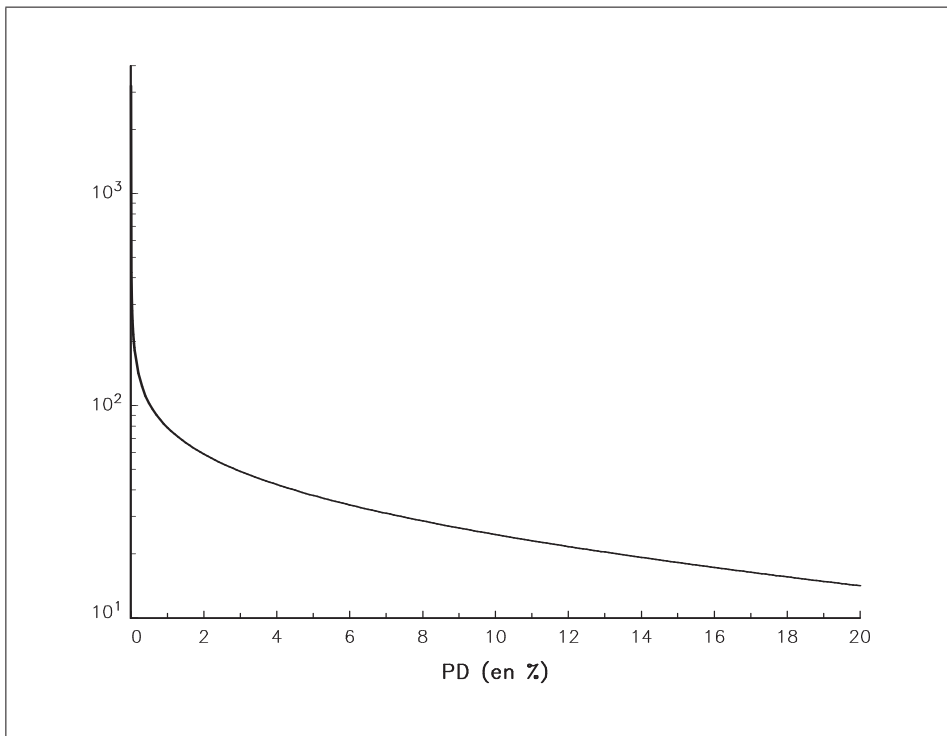
GRAPHIQUE 10.1. Fonction de référence BRW

Nous pouvons comparer la méthode SA avec la méthode IRB simple. La table 10.5 présente les valeurs implicites de PD et LGD pour une valeur RW donnée. La relation est bien sûr linéaire par rapport à la variable LGD.

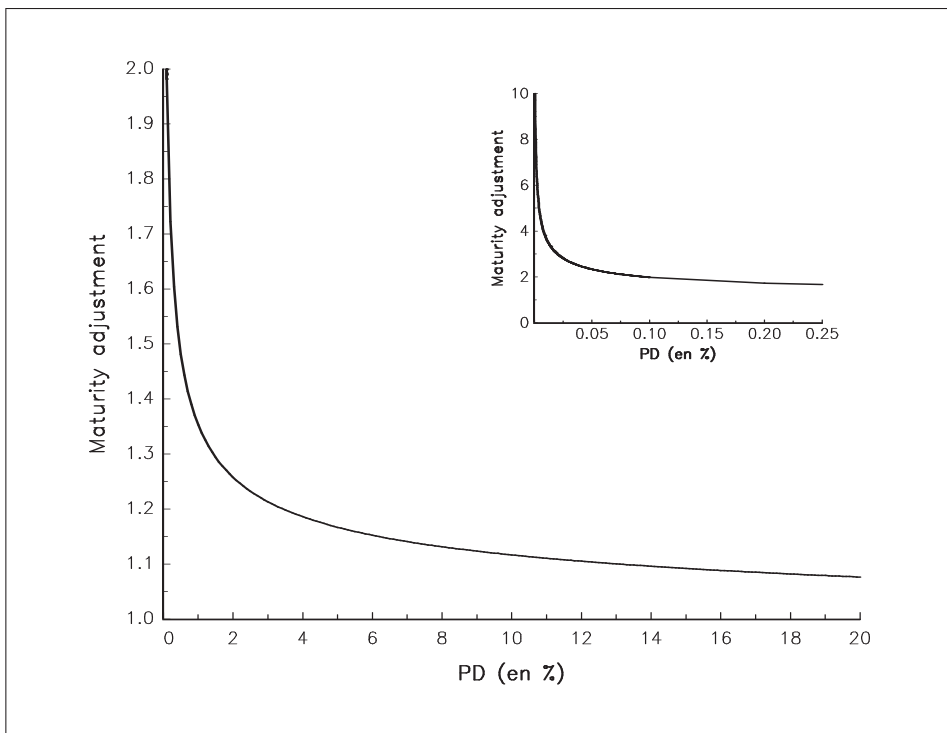
10.2.1.2 Dans l'approche IRB avancée

Cette approche diffère sensiblement de la méthode simple. En effet, les valeurs de perte en cas de défaillance ne sont plus fixées par le régulateur (50% et 75%), mais sont estimées par la banque. Ensuite, la maturité est explicitement prise en compte (elle peut l'être aussi dans la méthode simple). Dans ce cas, la valeur de la pondération devient

$$\text{RW} = \min \left(\frac{\text{LGD}}{50} \times \text{BRW}(\text{PD}) \times [1 + (M - 3) b(\text{PD})], 12.5 \times \text{LGD} \right) \quad (10.6)$$



GRAPHIQUE 10.2. Dérivée première de la fonction de référence BRW



GRAPHIQUE 10.3. Ajustement de la maturité $(1 + 0.470 \times \frac{1-PD}{PD^{0.44}})$

PD (en %)	BRW (PD)	Maturity Adjustment	RW (LGD)		
			25%	50%	100%
0.0001	0.60	21.52	0.30	0.60	1.19
0.01	7.43	3.70	3.71	7.43	14.85
0.02	11.09	2.99	5.55	11.09	22.18
0.03	14.09	2.67	7.04	14.09	28.18
0.04	16.73	2.47	8.36	16.73	33.46
0.05	19.14	2.33	9.57	19.14	38.27
0.06	21.38	2.23	10.69	21.38	42.75
0.07	23.49	2.15	11.74	23.49	46.97
0.08	25.49	2.08	12.75	25.49	50.98
0.09	27.41	2.03	13.70	27.41	54.82
0.10	29.25	1.98	14.63	29.25	58.51

TABLE 10.2. Pondération des actifs risqués (I)

PD (en %)	BRW (PD)	Maturity Adjustment	RW (LGD)		
			25%	50%	100%
0.10	29.25	1.98	14.63	29.25	58.51
0.20	45.10	1.72	22.55	45.10	90.21
0.30	58.27	1.60	29.14	58.27	116.55
0.40	69.94	1.53	34.97	69.94	139.88
0.50	80.59	1.48	40.30	80.59	161.18
0.60	90.48	1.44	45.24	90.48	180.97
0.70	99.78	1.41	49.89	99.78	199.55
0.80	108.58	1.39	54.29	108.58	217.16
0.90	116.97	1.37	58.48	116.97	233.94
1.00	125.00	1.35	62.50	125.00	250.01

TABLE 10.3. Pondération des actifs risqués (II)

PD (en %)	BRW (PD)	Maturity Adjustment	RW (LGD)		
			25%	50%	100%
1.00	125.00	1.35	62.50	125.00	250.01
2.00	192.43	1.26	96.22	192.43	384.87
3.00	245.97	1.21	122.99	245.97	491.95
4.00	291.45	1.19	145.73	291.45	582.90
5.00	331.38	1.17	165.69	331.38	662.76
6.00	367.14	1.15	183.57	367.14	734.28
7.00	399.60	1.14	199.80	399.60	799.21
8.00	429.36	1.13	214.68	429.36	858.73
9.00	456.85	1.12	228.42	456.85	913.70
10.00	482.38	1.12	241.19	482.38	964.76
15.00	588.04	1.09	294.02	588.04	1176.07
20.00	668.18	1.08	312.50	625.00	1250.00
50.00	908.00	1.03	312.50	625.00	1250.00

TABLE 10.4. Pondération des actifs risqués (III)

PD (en %)	RW			
	20%	50%	100%	150%
0.025	79.08	✓	✓	✓
0.05	52.25	✓	✓	✓
0.075	40.82	✓	✓	✓
0.10	34.19	85.46	✓	✓
0.25	19.26	48.15	96.30	✓
0.50	12.41	31.02	62.04	93.06
0.75	9.59	23.98	47.97	71.95
1.00	8.00	20.00	40.00	60.00
2.50	4.54	11.34	22.68	34.02
5.00	3.02	7.54	15.09	22.63
7.50	2.41	6.03	12.05	18.08
10.00	2.07	5.18	10.37	15.55
25.00	1.60	4.00	8.00	12.00
50.00	1.60	4.00	8.00	12.00

TABLE 10.5. Relation implicite entre la probabilité de défaillance et la perte en cas de défaut pour une valeur RW donnée

La fonction de référence ne change pas. Le terme $1 + (M - 3)b(\text{PD})$ intervient ici comme un facteur de diminution ($M < 3$) ou d'augmentation ($M > 3$) de la pondération.

La fonction $b(\text{PD})$ représente la sensibilité de la pondération par rapport à la maturité. Par exemple, si $b(\text{PD})$ est égal à zéro, la maturité M n'a pas d'influence sur la pondération. Notons que pour des raisons évidentes, nous devons vérifier que

$$1 + (M - 3)b(\text{PD}) > 0 \tag{10.7}$$

ou encore pour $M < 3$

$$b(\text{PD}) < \frac{1}{3 - M} \tag{10.8}$$

Pour l'instant, le Comité de Bâle n'a pas fixé définitivement la fonction $b(\text{PD})$. Les premiers travaux montrent que cette fonction dépend de l'approche considérée pour traiter le risque de crédit : approche **Mark-to-Market** ou approche **Default Mode**. Dans la première approche (**MtM**), la calibration du Comité de Bâle suggère cette fonction

$$b(\text{PD}) = \frac{0.0235 \times (1 - \text{PD})}{\text{PD}^{0.44} + 0.470 \times (1 - \text{PD})} \tag{10.9}$$

Dans ce cas, la valeur de la pondération devient

$$\begin{aligned} \text{RW}^* &= \frac{\text{LGD}}{50} \times \text{BRW}(\text{PD}) \times [1 + (M - 3)b(\text{PD})] \\ &= \frac{\text{LGD}}{50} \times 976.5 \times \Phi(1.118 \times \Phi^{-1}(\text{PD}) + 1.288) \times \left(1 + 0.470 \times \frac{1 - \text{PD}}{\text{PD}^{0.44}}\right) \times \\ &\quad \left[1 + (M - 3) \frac{0.0235 \times (1 - \text{PD})}{\text{PD}^{0.44} + 0.470 \times (1 - \text{PD})}\right] \\ &= \frac{\text{LGD}}{50} \times 976.5 \times \Phi(1.118 \times \Phi^{-1}(\text{PD}) + 1.288) \times \\ &\quad \left[1 + 0.470 \times \frac{1 - \text{PD}}{\text{PD}^{0.44}} + 0.0235 \times (M - 3) \times \frac{1 - \text{PD}}{\text{PD}^{0.44}}\right] \end{aligned} \tag{10.10}$$

Cela revient à définir une nouvelle fonction de référence :

$$\text{BRW}^*(\text{PD}) = 976.5 \times \Phi(1.118 \times \Phi^{-1}(\text{PD}) + 1.288) \times \left(1 + 0.470 \times \frac{1 - \text{PD}}{\text{PD}^{0.44}} + 0.0235 \times (M - 3) \times \frac{1 - \text{PD}}{\text{PD}^{0.44}}\right) \tag{10.11}$$

Nous remarquons que le coefficient d'ajustement de la maturité est maintenant plus complexe puisqu'il comprend deux termes :

PD (en %)	$\beta(\text{PD})$	$\beta^*(\text{PD}, M)$				
		$M = 0.5$	$M = 1$	$M = 3$	$M = 5$	$M = 7$
0.025	2.81	0.55	1.00	2.81	4.61	6.42
0.05	2.33	0.67	1.00	2.33	3.66	4.99
0.075	2.11	0.72	1.00	2.11	3.23	4.34
0.10	1.98	0.75	1.00	1.98	2.96	3.94
0.25	1.65	0.84	1.00	1.65	2.31	2.96
0.50	1.48	0.88	1.00	1.48	1.96	2.44
0.75	1.40	0.90	1.00	1.40	1.80	2.20
1.00	1.35	0.91	1.00	1.35	1.71	2.06
2.50	1.23	0.94	1.00	1.23	1.46	1.70
5.00	1.17	0.96	1.00	1.17	1.33	1.50
7.50	1.14	0.97	1.00	1.14	1.27	1.41
10.00	1.12	0.97	1.00	1.12	1.23	1.35
25.00	1.06	0.98	1.00	1.06	1.13	1.19
50.00	1.03	0.99	1.00	1.03	1.06	1.10

TABLE 10.6. Facteur d'ajustement de la maturité

1. Le premier terme $(1 + 0.470 \times \frac{1-\text{PD}}{\text{PD}^{0.44}})$ est le terme de correction pour passer d'une maturité 1 an à une maturité moyenne 3 ans. Il est strictement supérieur à 1 si la probabilité de défaillance est inférieure à 100%.
2. Le second terme $0.0235 \times (M - 3) \times \frac{1-\text{PD}}{\text{PD}^{0.44}}$ est le terme de correction qui prend en compte de façon explicite la maturité. Il peut être positif ou négatif.

Nous remarquons que si la maturité est égale à un an ($M = 1$), nous avons

$$\text{BRW}^*(\text{PD}) = 976.5 \times \Phi(1.118 \times \Phi^{-1}(\text{PD}) + 1.288) \quad (10.12)$$

Nous retrouvons bien la fonction de référence qui a été calibrée pour une maturité égale à un an. Si la maturité vaut trois ans, alors nous obtenons l'égalité $\text{BRW}^*(\text{PD}) = \text{BRW}(\text{PD})$. La table 10.6 présente les valeurs des facteurs d'ajustement de maturité

$$\beta(\text{PD}) = 1 + 0.470 \times \frac{1 - \text{PD}}{\text{PD}^{0.44}} \quad (10.13)$$

et

$$\beta^*(\text{PD}, M) = 1 + 0.470 \times \frac{1 - \text{PD}}{\text{PD}^{0.44}} + 0.0235 \times (M - 3) \times \frac{1 - \text{PD}}{\text{PD}^{0.44}} \quad (10.14)$$

L'incidence sur la valeur de la pondération est présentée dans la table 10.7.

Dans l'approche **DM**, la calibration du Comité de Bâle suggère une fonction polynomiale

$$b(\text{PD}) = (7.6752 \times \text{PD}^2 - 1.9211 \times \text{PD} + 0.0774)^+ \quad (10.15)$$

Dans ce cas, $b(\text{PD})$ prend systématiquement la valeur zéro si la probabilité de défaillance est supérieure à 5%. A titre de comparaison, l'incidence sur la pondération est présentée dans la table 10.8. Nous remarquons que la sensibilité de la pondération à la maturité est beaucoup moins forte dans l'approche **DM** que dans l'approche **MtM** (voir le graphique 10.4).

10.2.2 Justification de la méthode IRB

Dans ce paragraphe, nous suivons l'exposé de WILSON [2001a]. Considérons un portefeuille Π de I crédits. Notons LGD_i la perte **nominale** en cas de défaillance. LGD_i est une variable aléatoire de moyenne E_i et d'écart-type $E_i \cdot \sigma_i$. Nous supposons que la probabilité de défaillance du i -ième crédit dépend d'un modèle factoriel :

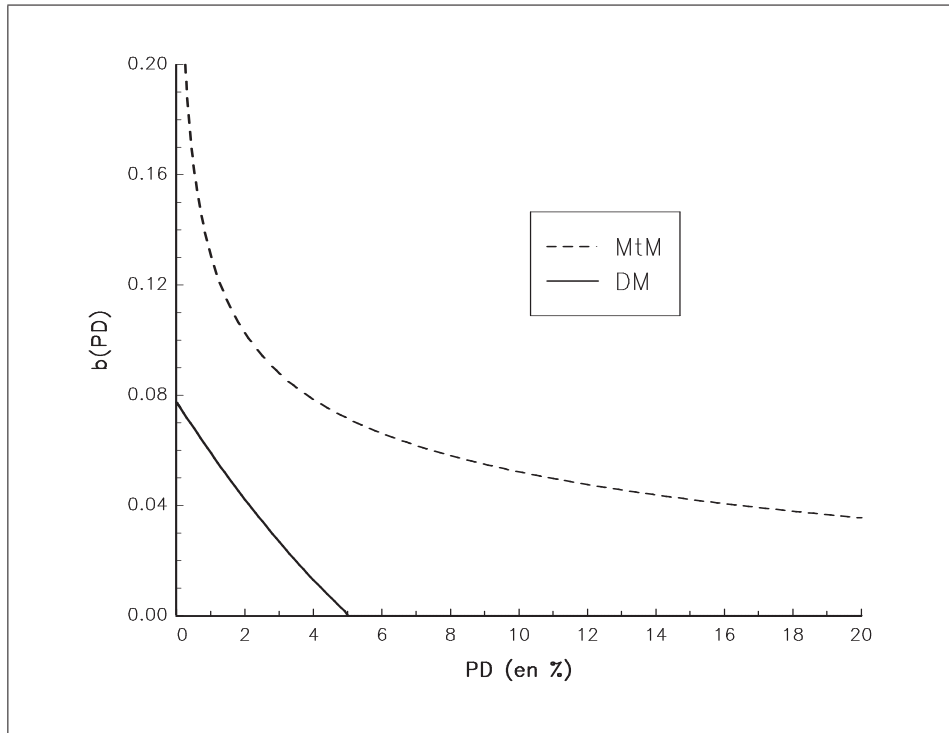
$$P_i = P_i(X_1, \dots, X_n) \quad (10.16)$$

PD (en %)	RW* / RW				
	M = 0.5	M = 1	M = 3	M = 5	M = 7
0.025	0.20	0.36	1.00	1.64	2.29
0.05	0.29	0.43	1.00	1.57	2.14
0.075	0.34	0.47	1.00	1.53	2.05
0.10	0.38	0.50	1.00	1.50	1.99
0.25	0.51	0.60	1.00	1.40	1.79
0.50	0.59	0.68	1.00	1.32	1.65
0.75	0.64	0.71	1.00	1.29	1.57
1.00	0.67	0.74	1.00	1.26	1.52
2.50	0.76	0.81	1.00	1.19	1.38
5.00	0.82	0.86	1.00	1.14	1.29
7.50	0.85	0.88	1.00	1.12	1.24
10.00	0.87	0.90	1.00	1.10	1.21
25.00	0.92	0.94	1.00	1.06	1.12
50.00	0.96	0.97	1.00	1.03	1.06

TABLE 10.7. Rapport entre la pondération ajustée et la pondération originale (approche **MtM**)

PD (en %)	RW* / RW				
	M = 0.5	M = 1	M = 3	M = 5	M = 7
0.03	0.81	0.85	1.00	1.15	1.31
0.05	0.81	0.85	1.00	1.15	1.31
0.07	0.81	0.85	1.00	1.15	1.30
0.10	0.81	0.85	1.00	1.15	1.30
0.25	0.82	0.85	1.00	1.15	1.29
0.50	0.83	0.86	1.00	1.14	1.27
0.75	0.84	0.87	1.00	1.13	1.25
1.00	0.85	0.88	1.00	1.12	1.24
2.50	0.91	0.93	1.00	1.07	1.14
5.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
7.50	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
10.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
25.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
50.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

TABLE 10.8. Rapport entre la pondération ajustée et la pondération originale (approche **DM**)


 GRAPHIQUE 10.4. Représentation graphique de la fonction $b(\text{PD})$

Le défaut D_i est alors une variable aléatoire dont la distribution est une loi de Bernoulli de paramètre P_i . Nous avons donc $\mathbb{E}[D_i] = P_i$ et $\sigma^2[D_i] = P_i(1 - P_i)$. La perte du portefeuille \mathbf{L} est aléatoire

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^I D_i \cdot \text{LGD}_i \quad (10.17)$$

Nous pouvons calculer les deux premiers moments sous l'hypothèse que les défauts et les pertes nominales sont indépendantes. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbf{L}] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^I D_i \cdot \text{LGD}_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^I \mathbb{E}[D_i \cdot \text{LGD}_i] \\ &= \sum_{i=1}^I \mathbb{E}[D_i] \mathbb{E}[\text{LGD}_i] \\ &= \sum_{i=1}^I E_i \cdot P_i \end{aligned} \quad (10.18)$$

et

$$\begin{aligned}
 \sigma^2[\mathbf{L}] &= \sigma^2 \left[\sum_{i=1}^I D_i \cdot \text{LGD}_i \right] \\
 &= \sum_{i=1}^I \sigma^2 [D_i \cdot \text{LGD}_i] \\
 &= \sum_{i=1}^I \mathbb{E} \left[(D_i \cdot \text{LGD}_i - \mathbb{E} [D_i \cdot \text{LGD}_i])^2 \right] \\
 &= \sum_{i=1}^I \mathbb{E} [D_i^2] \mathbb{E} [\text{LGD}_i^2] - \mathbb{E}^2 [D_i] \mathbb{E}^2 [\text{LGD}_i] \\
 &= \sum_{i=1}^I (\sigma^2 [D_i] + \mathbb{E}^2 [D_i]) (\sigma^2 [\text{LGD}_i] + \mathbb{E}^2 [\text{LGD}_i]) - \mathbb{E}^2 [D_i] \mathbb{E}^2 [\text{LGD}_i] \\
 &= \sum_{i=1}^I (P_i (1 - P_i) + P_i^2) (E_i^2 \sigma_i^2 + E_i^2) - P_i^2 E_i^2 \\
 &= \sum_{i=1}^I E_i^2 (P_i (1 - P_i) + \sigma_i^2 P_i)
 \end{aligned} \tag{10.19}$$

Notons que cette moyenne et cet écart-type sont des variables conditionnelles aux réalisations des facteurs X_1, \dots, X_n . Dans ce cadre d'analyse, WILSON [2001a] considère un portefeuille Π_M "équivalent" au portefeuille original Π . Ce nouveau portefeuille est construit en remplaçant chaque crédit par M crédits indépendants d'exposition E_i/M et de même probabilité de défaillance $P_i(X_1, \dots, X_n)$. Lorsque M tend vers l'infini, nous obtenons un portefeuille noté Π_∞ . C'est le portefeuille infiniment granulaire du Comité de Bâle (**infinitely fine-grained portfolio**). Notons \mathbf{L}_∞ la perte de ce portefeuille. Nous avons

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[\mathbf{L}_M] &= \sum_{i=1}^I \sum_{m=1}^M \frac{1}{M} E_i \cdot P_i \\
 &= \sum_{i=1}^I E_i \cdot P_i \\
 &= \mathbb{E}[\mathbf{L}]
 \end{aligned} \tag{10.20}$$

et

$$\begin{aligned}
 \sigma^2[\mathbf{L}_M] &= \sum_{i=1}^I \sum_{m=1}^M \frac{1}{M^2} E_i^2 (P_i (1 - P_i) + \sigma_i^2 P_i) \\
 &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^I E_i^2 (P_i (1 - P_i) + \sigma_i^2 P_i) \\
 &= \frac{1}{M} \sigma^2[\mathbf{L}]
 \end{aligned} \tag{10.21}$$

Nous en déduisons que $\mathbb{E}[\mathbf{L}_\infty] = \mathbb{E}[\mathbf{L}]$ et $\sigma^2[\mathbf{L}_\infty] = 0$. Conditionnellement aux réalisations des facteurs, la distribution de perte \mathbf{L}_∞ est une variable aléatoire sûre qui prend la valeur $\mathbb{E}[\mathbf{L}]$:

$$\Pr \{ \mathbf{L}_\infty = \mathbb{E}[\mathbf{L}] \} = 1 \tag{10.22}$$

L'aléa du portefeuille infiniment granulaire ne porte donc plus que sur les facteurs X_1, \dots, X_n . Si nous supposons un seul facteur X de distribution \mathbf{H} et si P_i est une fonction croissante du facteur, l'inverse de la distribution de la perte est donc

$$\mathbf{F}_\infty^{-1}(\alpha) := \sum_{i=1}^I E_i \cdot P_i(\mathbf{H}^{-1}(\alpha)) \tag{10.23}$$

La contribution du crédit i est donc $\text{SRC}_i = E_i \cdot P_i(\mathbf{H}^{-1}(\alpha))$.

Dans le paragraphe 172 du document [3], le Comité de Bâle explique que la formule de la fonction de référence BRW a été calibrée en utilisant un modèle à la Merton avec un seul facteur. Pour retrouver son expression, nous utilisons les résultats de FINGER [1999]. Soit Z_i la valeur de l'actif **normalisée**. Dans le modèle de Merton, la défaillance intervient si Z_i passe en dessous d'une barrière B_i :

$$D_i = 1 \Leftrightarrow Z_i < B_i \quad (10.24)$$

ou encore

$$\Phi(Z_i) < P_i \quad (10.25)$$

La valeur normalisée de l'actif est modélisée de la façon suivante

$$Z_i = \sqrt{\rho}X + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i \quad (10.26)$$

avec X le facteur de risque systématique et ε_i le facteur de risque individuel. Les variables aléatoires Z_i , Z et ε_i sont indépendantes de distribution $\mathcal{N}(0, 1)$. Pour interpréter le paramètre ρ , nous calculons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_i Z_j] &= \mathbb{E}\left[\rho X^2 + (1-\rho)\varepsilon_i \varepsilon_j + X\sqrt{\rho(1-\rho)}(\varepsilon_i + \varepsilon_j)\right] \\ &= \rho \end{aligned} \quad (10.27)$$

ρ est donc la corrélation (**constante**) des valeurs des actifs. Nous pouvons maintenant caractériser la probabilité de défaillance conditionnelle

$$\begin{aligned} P_i &= \Pr\{D_i = 1 \mid X\} \\ &= \Pr\{Z_i < B_i \mid X\} \\ &= \Pr\left\{\sqrt{\rho}X + \sqrt{1-\rho}\varepsilon_i < B_i\right\} \\ &= \Pr\left\{\varepsilon_i < \frac{B_i - \sqrt{\rho}X}{\sqrt{1-\rho}}\right\} \\ &= \Phi\left(\frac{B_i - \sqrt{\rho}X}{\sqrt{1-\rho}}\right) \end{aligned} \quad (10.28)$$

Notons p_i la probabilité de défaillance non conditionnelle. Nous remarquons que

$$p_i = \Pr\{Z_i < B_i\} = \Phi(B_i) \quad (10.29)$$

Nous en déduisons que

$$P_i = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho}X}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (10.30)$$

Une couverture au seuil de confiance α implique donc une contribution individuelle égale à¹

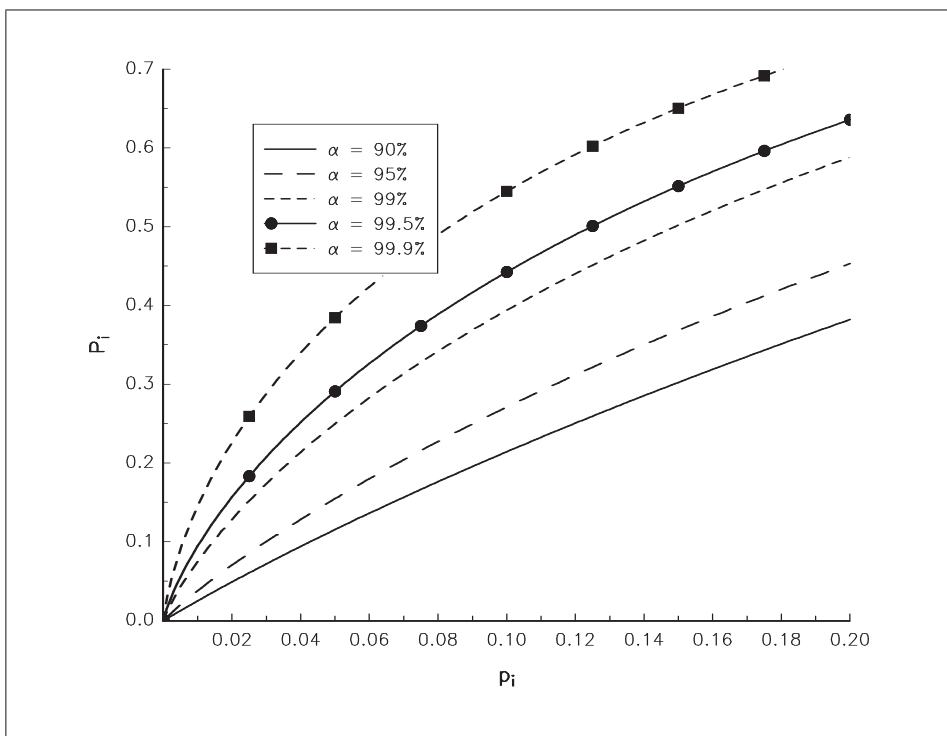
$$\text{SRC}_i = E_i \cdot P_i = E_i \cdot \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(1-\alpha)}{\sqrt{1-\rho}}\right) \quad (10.31)$$

Pour $\alpha = 99.5\%$ et $\rho = 20\%$ (valeurs présentées dans le paragraphe 172 du document [3]), nous obtenons

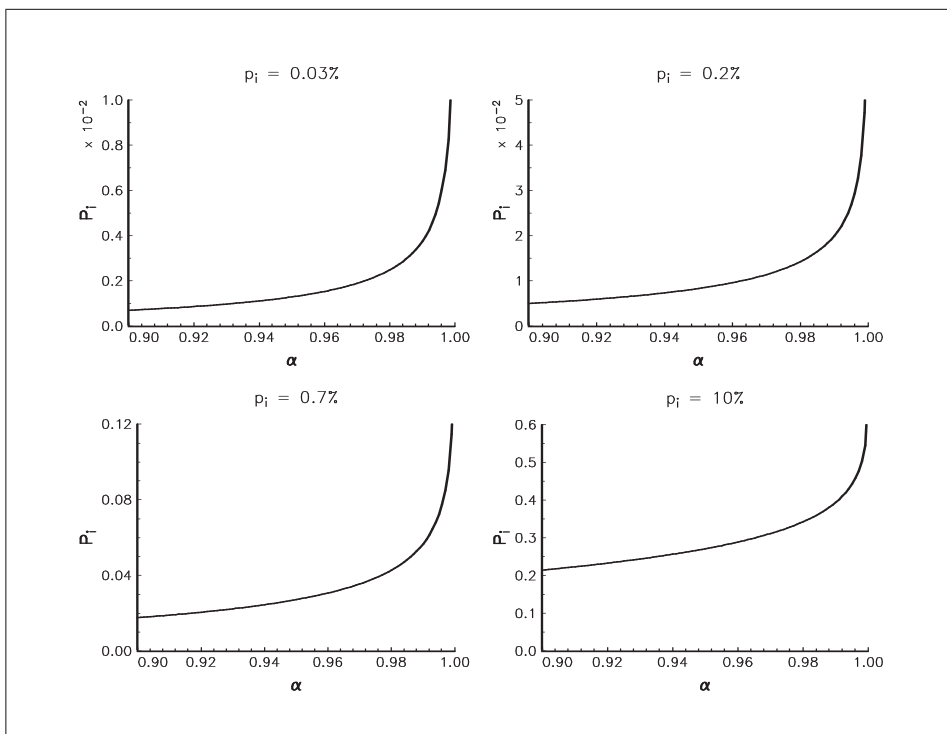
$$\text{SRC}_i = E_i \cdot \Phi(1.118\Phi^{-1}(p_i) + 1.288) \quad (10.32)$$

Nous pouvons noter que la probabilité conditionnelle P_i est extrêmement sensible au seuil de confiance α et à la corrélation ρ (voir les graphiques 10.5 à 10.8).

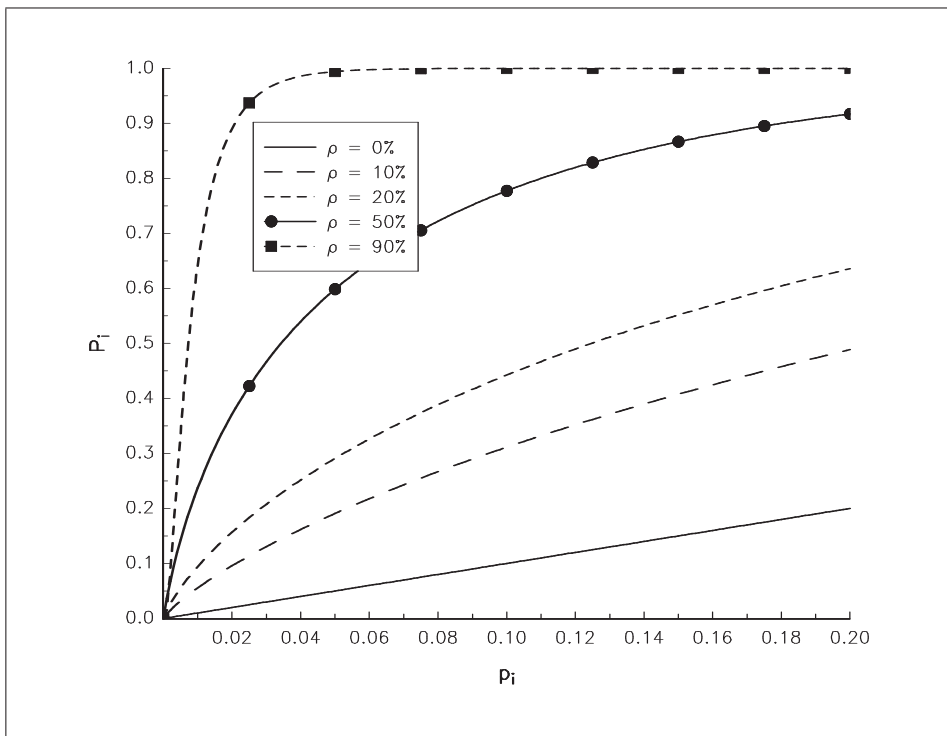
¹car la relation entre la probabilité de défaillance conditionnelle et le facteur X est décroissante.



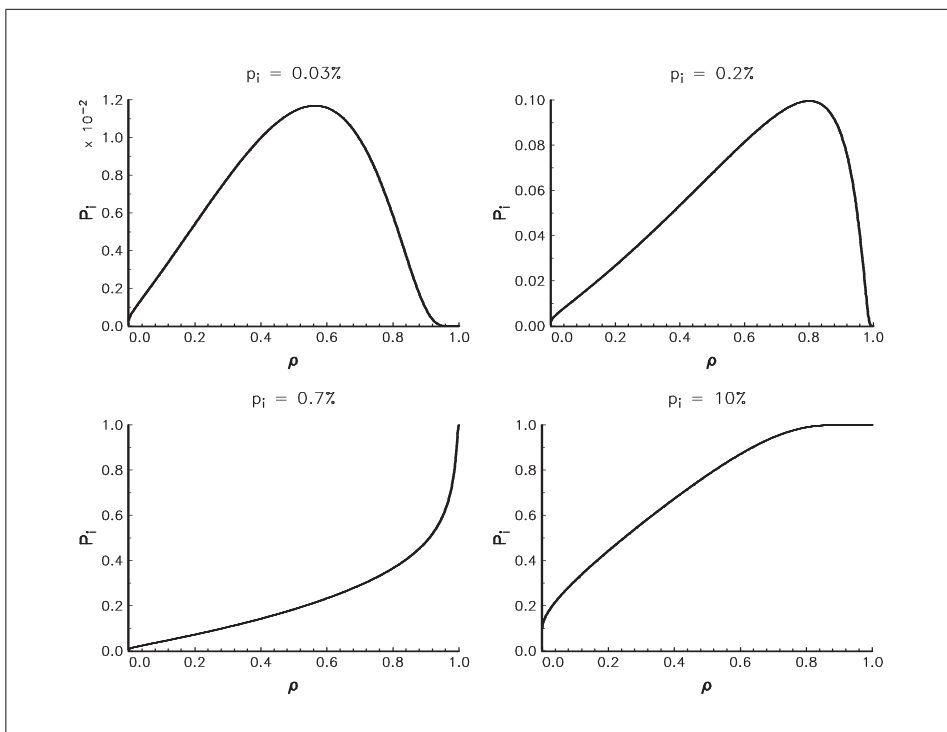
GRAPHIQUE 10.5. Influence du seuil α sur la probabilité de défaillance conditionnelle P_i ($\rho = 20\%$)



GRAPHIQUE 10.6. Influence du seuil α sur la probabilité de défaillance conditionnelle P_i pour des valeurs données de p_i ($\rho = 20\%$)



GRAPHIQUE 10.7. Influence de la corrélation ρ sur la probabilité de défaillance conditionnelle P_i ($\alpha = 99.5\%$)



GRAPHIQUE 10.8. Influence de la corrélation ρ sur la probabilité de défaillance conditionnelle P_i pour des valeurs données de p_i ($\alpha = 99.5\%$)

Remarque 15 Nous pouvons vérifier que p_i est bien la probabilité non conditionnelle² :

$$p_i = \mathbb{E}_X \left[\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho}X}{\sqrt{1-\rho}} \right) \right] \quad (10.40)$$

Remarque 16 Si ρ est égal à 0, alors la probabilité conditionnelle est égale à la probabilité non conditionnelle :

$$P_i = p_i$$

Si ρ est égal à 1, la probabilité conditionnelle vaut respectivement 0 si $p_i < 1 - \alpha$, $1/2$ si $p_i = 1 - \alpha$ et 1 si $p_i > 1 - \alpha$.

Concernant le terme représentant l'ajustement de maturité, nous pouvons penser qu'il a été obtenu par une méthode de calibration à partir d'une relation économétrique. Notons τ la maturité ou l'horizon du défaut et $D_i^{(\tau)}$ la variable aléatoire associée au défaut de maturité τ . Pour τ égal à 1 an, nous avons $D_i^{(\tau)} = D_i$ et

D_i		0	1
Probabilité		$1 - p_i$	p_i

Nous avons donc 2 états de la nature (0 ou 1) et nous pouvons représenter le système par une chaîne de Markov **stationnaire** dont la matrice des probabilités de transition π est

$$\pi := \pi_{\tau, \tau+1} = \begin{pmatrix} 1 - p_i & p_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.41)$$

²(preuve suggérée par Jean-Frédéric Jouanin).

Nous devons montrer que

$$p_i = \int \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho}x}{\sqrt{1-\rho}} \right) \phi(x) dx \quad (10.33)$$

Pour cela, nous posons

$$A(t) = \int \Phi \left(\frac{t - \sqrt{\rho}x}{\sqrt{1-\rho}} \right) \phi(x) dx \quad (10.34)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \partial_t A(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \int \phi \left(\frac{t - \sqrt{\rho}x}{\sqrt{1-\rho}} \right) \phi(x) dx \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho}} \int \exp \left(-\frac{x^2}{2} - \frac{(t - \sqrt{\rho}x)^2}{2(1-\rho)} \right) dx \end{aligned} \quad (10.35)$$

Nous mettons le trinôme du second degré en x sous forme canonique :

$$\frac{x^2}{2} + \frac{(t - \sqrt{\rho}x)^2}{2(1-\rho)} = \frac{t^2}{2} + \frac{(\sqrt{\rho}t - x)^2}{2(1-\rho)} \quad (10.36)$$

Finalement, nous obtenons

$$\partial_t A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) \int \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho)}} \exp \left(-\frac{(x - \sqrt{\rho}t)^2}{2(1-\rho)} \right) dx \quad (10.37)$$

En faisant le changement de variable $y = (1-\rho)^{-\frac{1}{2}}(x - \sqrt{\rho}t)$, l'expression de $\partial_t A(t)$ devient

$$\partial_t A(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{t^2}{2} \right) \quad (10.38)$$

Nous en déduisons que $A(t) = \Phi(t)$ et nous vérifions bien que

$$A(\Phi^{-1}(p_i)) = p_i \quad (10.39)$$

Un calcul rapide montre que

$$\pi^{(\tau)} := \underbrace{\pi \times \pi \times \dots \times \pi}_{\tau \text{ fois}} = \begin{pmatrix} (1-p_i)^\tau & 1 - (1-p_i)^\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (10.42)$$

Nous en déduisons que la distribution $D_i^{(\tau)}$ est une variable de Bernoulli avec

$$\begin{array}{c|cc} D_i^{(\tau)} & 0 & 1 \\ \hline \text{Probabilité} & (1-p_i)^\tau & 1 - (1-p_i)^\tau \end{array}$$

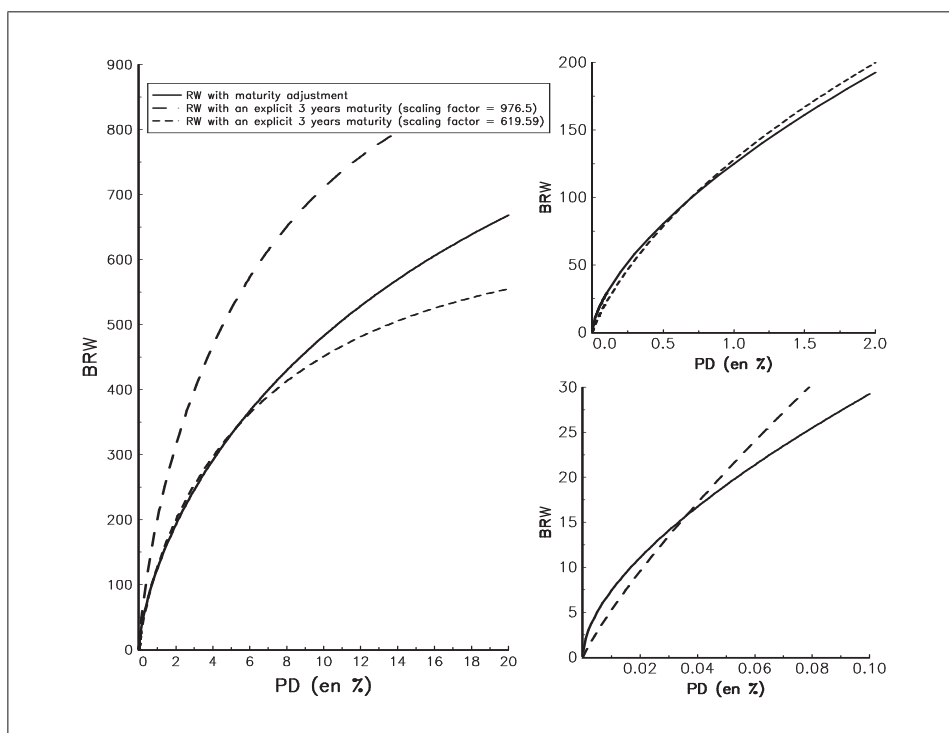
Le Comité de Bâle indique que la maturité implicite de la méthode IRB simple est 3 ans. Nous rappelons que

$$\text{BRW (PD)} = \underbrace{976.5}_{\text{scaling factor}} \times \underbrace{\Phi(1.118 \times \Phi^{-1}(\text{PD}) + 1.288)}_{\text{Probabilité conditionnelle de défaillance à 1 an}} \times \underbrace{\left(1 + 0.470 \times \frac{1 - \text{PD}}{\text{PD}^{0.44}}\right)}_{\text{Ajustement de maturité}} \quad (10.43)$$

En utilisant la distribution de $D_i^{(3)}$, nous en déduisons que la fonction de référence qui prend en compte de façon explicite la maturité 3 ans est

$$\text{BRW (PD)} = \underbrace{C}_{\text{scaling factor}} \times \underbrace{\Phi\left(1.118 \times \Phi^{-1}\left(1 - (1 - \text{PD})^3\right) + 1.288\right)}_{\text{Probabilité conditionnelle de défaillance à 3 ans}} \quad (10.44)$$

Nous pouvons comparer les pondérations en risque obtenues avec la formule (10.43) du Comité de Bâle avec celle donnée par l'équation (10.44) – voir le graphique 10.9. Si nous prenons C égal à 976.5, nous remarquons que l'ajustement proposé par le Comité de Bâle n'est pas très bons (sauf pour des probabilité de défaillance très faibles). Néanmoins, pour comparer les formules (10.43) et (10.44), il est nécessaire de fixer le facteur d'échelle C afin d'obtenir une pondération égale à 100% pour une probabilité de défaillance de 0.7% et une perte en cas de défaillance de 50%. Dans ce cas, C vaut 619.59 et l'ajustement est excellent (lorsque PD est inférieur à 10%).



GRAPHIQUE 10.9. Fonction de référence BRW (ajustement de maturité/formule exacte)

Enfin, la valeur 976.5 est le facteur d'échelle calibré afin que la pondération soit égale à 100% pour une probabilité de défaillance de 0.7% et une perte en cas de défaillance de 50%.

10.2.3 Paramètres de la fonction de pondération

10.2.3.1 La probabilité de défaillance

Si le crédit n'est pas protégé par une technique **CRM**, la probabilité de défaillance est celle associée à la note interne à laquelle l'emprunteur est affecté pour un horizon d'un an. Dans le cas d'une protection, nous devons distinguer l'approche IRB simple de l'approche IRB avancée :

- Dans la première approche, la probabilité de défaillance ajustée PD^* (qui est applicable uniquement à la partie couverte de l'exposition) est

$$PD^* = w \times PD + (1 - w) \times PD_G \quad (10.45)$$

où PD_G est la probabilité de défaillance de la garantie et w est le facteur de risque résiduel (0 ou 15%).

- Dans la deuxième approche, la probabilité de défaillance ajustée PD^* est celle de la garantie.

10.2.3.2 La perte en cas de défaillance

Nous rappelons que les pertes en cas de défaillance sont réglementaires (50% ou 75%) dans l'approche simple. Dans le cas d'existence de suretés, la perte en cas de défaillance ajustée LGD^* est

$$LGD^* = \max \left(\left[1 - (1 - w) \times \frac{C_A}{E} \right] \times LGD, w \times LGD \right) \quad (10.46)$$

où E est l'exposition et C_A la valeur ajustée des suretés. Si le colatéral est physique (une résidence par exemple), alors la perte en cas de défaillance ajustée LGD^* est donnée par le tableau suivant

Condition	LGD^*
$\frac{C}{E} \leq 30\%$	50%
$\frac{C}{E} > 140\%$	40%
$30\% < \frac{C}{E} \leq 140\%$	$\left[1 - \frac{1}{7} \times \frac{C}{E} \right] \times 50\%$

Dans l'approche avancée, les banques pourraient utiliser leurs propres estimations.

10.2.3.3 La maturité

Celle-ci n'intervient explicitement que dans le cas de l'approche avancée. La maturité correspond à la durée résiduelle maximum avec un plancher égal à un an.

10.2.3.4 L'exposition en cas de défaillance

C'est l'encours nominal du crédit.

10.2.4 Les exigences minimales d'éligibilité

Celles-ci sont nombreuses (voir les paragraphes 189 à 261 du document [3]). Elles concernent

- la notation,
- l'audit interne et externe,
- la surveillance du risque de crédit,
- la qualification du personnel,
- l'estimation des paramètres,
- le mapping vers des données externes,
- etc.

Prenons par exemple les normes minimales pour l'estimation de la probabilité de défaillance. Dans ce cas, la banque doit la calculer sur un an pour toutes ses catégories de notation interne. La probabilité de défaillance doit être une mesure «*prudente de la probabilité de défaillance moyenne à long terme*» et une mesure **prospective**. La longueur des séries historiques doit être d'**au moins cinq ans**. La fréquence des estimations est annuelle...

D'autres informations concernant la gestion du risque de crédit sont disponibles dans les documents [1] et [2].

10.3 Prolongements

Les travaux du Comité de Bâle sont loin d'être finis. Nous indiquons ici les principales différences qui existent par rapport au risque *corporate*.

10.3.1 Risque retail

Le Comité de Bâle propose d'utiliser la fonction de référence suivante :

$$\text{BRW (PD)} = 976.5 \times \Phi(1.043 \times \Phi^{-1}(\text{PD}) + 0.766) \times \left(1 + 0.470 \times \frac{1 - \text{PD}}{\text{PD}^{0.44}}\right) \quad (10.47)$$

Cela implique que la corrélation a été fixée à 8%, ce qui est beaucoup plus faible que pour le risque *corporate*.

La très grande différence avec le risque *corporate* est la notation, ou plus précisément la segmentation des clients. Celle-ci varie énormément d'une banque à une autre. De plus il n'existe pas de méthodologies externes qui pourraient aider à la construction d'une méthodologie standardisée ou fédératrice.

10.3.2 Risque souverain

Le Comité de Bâle propose de traiter le risque *sovereign* comme le risque *corporate*.

10.3.3 Risque banque

Le Comité de Bâle propose de traiter le risque *bank* comme le risque *corporate*.

10.3.4 Risque financement de projet

Les travaux sont en cours.

10.3.5 Risque equity

Les travaux sont en cours.

10.4 Granularité du portefeuille

L'analyse précédente n'est valide que pour des portefeuilles infiniment granulaires (**infinitely fine-grained portfolio**). Dans le cas où le portefeuille présente des concentrations, il convient d'ajuster les fonds propres pour tenir compte de ces risques. Cet ajustement est appelé l'ajustement de granularité (granularity adjustment) par le Comité de Bâle.

10.4.1 La méthodologie

Le Comité de Bâle définit une sensibilité au risque systématique de la façon suivante :

$$F = P_i - p_i \quad (10.48)$$

C'est la différence entre la probabilité de défaillance conditionnelle et la probabilité de défaillance non conditionnelle. Un autre expression de F est

$$F = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(1 - \alpha)}{\sqrt{1 - \rho}}\right) - p_i \quad (10.49)$$

ou encore

$$F = \Phi(\alpha_1 \Phi^{-1}(p_i) + \alpha_0) - p_i \quad (10.50)$$

avec

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} \quad (10.51)$$

et

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{\rho}{1-\rho}} \Phi^{-1}(\alpha) \quad (10.52)$$

Par exemple, pour le risque corporate³, nous obtenons $\alpha_1 = 1.118$ et $\alpha_0 = 1.288$.

Le Comité de Bâle propose de calculer l'ajustement de granularité en deux étapes :

1. Dans une première étape, le portefeuille actuel de la banque est transformé en un portefeuille hypothétique d'expositions homogènes. Quatre composantes **agrégées** de risque sont alors définies :
 - (a) une probabilité de défaillance agrégée PD_{AG} ,
 - (b) une perte en cas de défaillance agrégée LGD_{AG} ,
 - (c) une sensibilité au risque systématique F_{AG} ,
 - (d) et un nombre "effectif" de prêts n^* .
2. Dans une deuxième étape, on calcule l'ajustement par la formule suivante

$$G = \frac{TNRE \times GSF}{n^*} - 0.04 \times RWA_{NR} \quad (10.53)$$

où $TNRE$ est l'exposition totale hors retail, GSF est le coefficient d'ajustement de granularité et RWA_{NR} est la valeur des actifs pondérés hors retail. Le montant G est alors additionné aux actifs pondérés.

Avant de définir le coefficient d'ajustement de granularité (**granularity scaling factor**), nous devons préciser les 4 composantes agrégées de risque. Nous notons \mathcal{C} une catégorie de risque. Notons $s_{\mathcal{C}}$ la part d'exposition au risque de la catégorie \mathcal{C} dans le risque total :

$$s_{\mathcal{C}} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{C}} EAD_i}{\sum_{\mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} EAD_i}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} PD_{AG} &= \sum_{\mathcal{C}} s_{\mathcal{C}} \cdot PD_{\mathcal{C}} \\ LGD_{AG} &= \frac{\sum_{\mathcal{C}} s_{\mathcal{C}} \cdot PD_{\mathcal{C}} \cdot LGD_{\mathcal{C}}}{PD_{AG}} \\ F_{AG} &= \sum_{\mathcal{C}} s_{\mathcal{C}} \cdot F_{\mathcal{C}} = \sum_{\mathcal{C}} s_{\mathcal{C}} \cdot (\Phi(\alpha_1 \Phi^{-1}(PD_{\mathcal{C}}) + \alpha_0) - PD_{\mathcal{C}}) \end{aligned} \quad (10.54)$$

avec $PD_{\mathcal{C}}$ la probabilité de défaillance de la catégorie \mathcal{C} et

$$LGD_{\mathcal{C}} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{C}} EAD_i \cdot LGD_i}{\sum_{i \in \mathcal{C}} EAD_i} \quad (10.55)$$

Le nombre "effectif" de prêts n^* est l'inverse de l'indice d'Herfindahl H^* . H^* est une mesure de la concentration du portefeuille. Nous avons

$$\begin{aligned} n^* &= \frac{1}{H^*} \\ &= \frac{1}{\sum_{\mathcal{C}} A_{\mathcal{C}} \cdot H_{\mathcal{C}} \cdot s_{\mathcal{C}}^2} \end{aligned} \quad (10.56)$$

³Nous rappelons que $\rho = 20\%$ et $\alpha = 99.5\%$.

avec

$$H_C = \frac{\sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i^2}{\left(\sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i\right)^2} \quad (10.57)$$

et

$$A_C = \frac{\text{LGD}_C^2 \cdot (\text{PD}_C \cdot (1 - \text{PD}_C) - 0.033 \cdot F_C^2) + 0.25 \cdot \text{PD}_C \cdot \text{LGD}_C \cdot (1 - \text{LGD}_C)}{\text{LGD}_{\text{AG}}^2 \cdot (\text{PD}_{\text{AG}} \cdot (1 - \text{PD}_{\text{AG}}) - 0.033 \cdot F_{\text{AG}}^2) + 0.25 \cdot \text{PD}_{\text{AG}} \cdot \text{LGD}_{\text{AG}} \cdot (1 - \text{LGD}_{\text{AG}})} \quad (10.58)$$

Le coefficient d'ajustement de la granularité correspond alors à

$$\text{GSF} = (0.6 + 1.8 \times \text{LGD}_{\text{AG}}) \times \left(9.5 + 13.75 \times \frac{\text{PD}_{\text{AG}}}{F_{\text{AG}}}\right) \quad (10.59)$$

Remarque 17 TNRE est l'exposition totale hors retail, c'est-à-dire la somme des expositions en cas de défaillance :

$$\text{TNRE} = \sum_C \sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i \quad (10.60)$$

10.4.2 Exemples

Afin de bien comprendre comment l'ajustement de granularité fonctionne en pratique, nous considérons le cas d'un portefeuille avec deux catégories de risque \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . La probabilité de défaillance de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 est notée respectivement PD_1 et PD_2 . Dans la première catégorie de risque \mathcal{C}_1 , nous avons N_1 crédits de même caractéristiques $\text{EAD}_{1,i}$ et $\text{LGD}_{1,i}$ et un crédit dont les caractéristiques sont $\text{EAD}_{1,0}$ et $\text{LGD}_{1,0}$. Dans la deuxième catégorie de risque \mathcal{C}_2 , nous avons N_2 crédits de même caractéristiques $\text{EAD}_{2,i}$ et $\text{LGD}_{2,i}$ et un crédit dont les caractéristiques sont $\text{EAD}_{2,0}$ et $\text{LGD}_{2,0}$. Les calculs sont présentés dans le tableau suivant. Afin de comprendre l'impact d'un coefficient, nous avons laissé les cases vides correspondant à des paramètres qui ne changent pas d'un exemple à un autre.

Exemple	#1	#2	#3	#4	#5
N_1	100	10000		100	
PD_1	0.7%				
$\text{EAD}_{1,0}$	1				
$\text{LGD}_{1,0}$	50%				
$\text{EAD}_{1,i}$	1				
$\text{LGD}_{1,i}$	50%				
N_2	100	10000		100	
PD_2	0.7%		5%		
$\text{EAD}_{2,0}$	1				1000
$\text{LGD}_{2,0}$	50%				
$\text{EAD}_{2,i}$	1			1000	1
$\text{LGD}_{2,i}$	50%				
PD_{AG}	0.7%		2.85%	4.99%	4.63%
LGD_{AG}	50%				
F_{AG}	0.065		0.153	0.240	0.226
n^*	202	20002	20432	100.12	1.344
GSF	16.46		18.09	18.53	18.48
TNRE	202	20002		100102	1201
RWA_{NR}	201.55	19957	43120	331484	3745.96
G	8.40	-781.83	-1707	5268.16	16361
$\text{RWA}_{\text{NR}} + G$	209.95	19175	41413	336752	20107

Remarque 18 Attention, la perte en cas de défaillance intervient en % dans le calcul du risque pondéré, alors qu'elle intervient en décimal dans le calcul de la granularité.

10.4.3 Dérivation du coefficient d'ajustement de granularité

Celle-ci est expliquée en détail dans l'article de GORDY [2001]. Une formalisation plus accessible est présentée dans WILSON [2001a,2001b]. Afin de bien comprendre comment l'ajustement est obtenu, nous reprenons les principaux points de ces articles.

10.4.3.1 La détermination du coefficient β

Notons D la variable aléatoire de Bernoulli représentant la défaillance, LGD la perte (relative) en cas de défaillance et EAD l'exposition en cas de défaillance. Considérons un portefeuille Π_n composé de n lignes de crédit. La perte \mathbf{L}_n du portefeuille Π_n est donc

$$\mathbf{L}_n = \sum_{i=1}^n D_i \cdot \text{LGD}_i \cdot \text{EAD}_i \quad (10.61)$$

GORDY [2001] définit \mathbf{L}_n^* comme le ratio de la perte du portefeuille sur le total des expositions :

$$\mathbf{L}_n^* = \frac{\sum_{i=1}^n D_i \cdot \text{LGD}_i \cdot \text{EAD}_i}{\sum_{i=1}^n \text{EAD}_i} \quad (10.62)$$

Nous rappelons que pour un portefeuille infiniment granulaire ou asymptotique, la perte du portefeuille Π_∞ est la perte systématique

$$\Pr \{ \mathbf{L}_\infty^* = \mathbb{E} [\mathbf{L}_\infty^*] \} = 1 \quad (10.63)$$

Afin de clarifier les notations, nous écrivons la perte espérée conditionnelle de la façon suivante :

$$\mathbb{E} [\mathbf{L}_n^*] := \mathbb{E} [\mathbf{L}_n^* | X] \quad (10.64)$$

avec X le facteur de risque systématique. Notons $\psi(X; \alpha)$ le quantile α de la variable aléatoire X . Michael Gordy donne une autre interprétation statistique de la notion de portefeuille infiniment granulaire (Proposition 5 de GORDY [2001]) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{ \mathbf{L}_n^* \leq \mathbb{E} [\mathbf{L}_n^* | \psi(X; \alpha)] \} = \alpha \quad (10.65)$$

Cela veut dire que la valeur en risque d'un portefeuille infiniment granulaire $\text{VaR} [\mathbf{L}_\infty; \alpha]$ est bien la perte espérée conditionnelle $\mathbb{E} [\mathbf{L}_\infty | \psi(X; \alpha)]$:

$$\text{VaR} [\mathbf{L}_\infty; \alpha] := \mathbb{E} [\mathbf{L}_\infty | \psi(X; \alpha)]$$

ou qu'une charge en capital égale à $\mathbb{E} [\mathbf{L}_\infty | \psi(X; \alpha)]$ correspond bien à une probabilité de solvabilité égale à α :

[...] for an infinitely fine-grained portfolio, the proposed portfolio-invariant capital rule provides a solvency probability of exactly α (GORDY [2001]).

Cela implique qu'une charge en capital égale à $\mathbb{E} [\mathbf{L}_n | \psi(X; \alpha)]$ ne permet pas nécessairement de couvrir le risque au seuil de confiance α dans le cas non asymptotique :

$$\text{VaR} [\mathbf{L}_n; \alpha] \neq \mathbb{E} [\mathbf{L}_n | \psi(X; \alpha)] \quad (10.66)$$

C'est pourquoi nous devons ajuster la perte espérée conditionnelle afin d'obtenir le bon degré de couverture :

$$\text{VaR} [\mathbf{L}_n; \alpha] = \mathbb{E} [\mathbf{L}_n | \psi(X; \alpha)] + \Delta \mathbf{L}_n \quad (10.67)$$

L'ajustement de granularité correspond tout simplement à $\Delta \mathbf{L}_n$.

La question principale est alors de caractériser cet ajustement $\Delta \mathbf{L}_n$. Pour cela, GORDY [2001] montre la proposition suivante :

Proposition 1 (Gordy [2001, Proposition 6, p. 12]) *If the portfolio is **statistically homogeneous**, the function $\mu(x) := \mathbb{E}[\mathbf{L}_n | X = x]$ is continuous, arbitrarily differentiable, and increasing, and the systematic risk factor X is drawn from an arbitrary differentiable continuous distribution, then VaR converges to its asymptotic limit at rate $1/n$, that is,*

$$\text{VaR}[\mathbf{L}_n; \alpha] = \mu(\psi(X; \alpha)) + O(n^{-1}) \quad (10.68)$$

L'interprétation de cette proposition est simple :

[...] it says that the difference between the VaR for a given homogeneous portfolio and its asymptotic approximation $E[\mathbf{L}_n | \psi(X; \alpha)]$ is proportional to $1/n$. This suggests that the accuracy of the asymptotic capital rule can be improved by introducing a “granularity add-on charge” that is inversely proportional to the number of obligors in the portfolio. To calibrate such add-on charge for a homogeneous portfolio, we need to find a constant of proportionality β such that $E[\mathbf{L}_n | \psi(X; \alpha)] + \beta/n$ is a good approximation to $\text{VaR}[\mathbf{L}_n; \alpha]$ (GORDY [2001]).

Nous en déduisons que

$$\Delta \mathbf{L}_n \simeq \beta/n \quad (10.69)$$

Voyons maintenant comment déterminer le coefficient β . Pour cela, nous utilisons les résultats de WILSON [2001b]. Michael Gordy dérive l'ajustement (10.69) sous l'hypothèse que le portefeuille est **statistiquement homogène**. Cela veut dire que les lignes de crédit ont la même exposition en cas de défaillance et la même perte espérée conditionnelle — ce qui implique la même probabilité de défaillance non conditionnelle et la même distribution de perte en cas de défaillance. Les portefeuilles Π_n de Gordy et Π_M de Wilson sont donc différents, mais nous pouvons construire le portefeuille Π_n à partir du portefeuille Π_M . Pour cela, il suffit de poser $I = 1$ et $M = n$ — voir le paragraphe 10.2.2. Reprenons les notations de ce même paragraphe. La perte du portefeuille (qui se réduit à la perte de la ligne de crédit puisque I est égal à 1) est notée \mathbf{L} . Les deux premiers moments de la perte conditionnelle sont $E[\mathbf{L} | X]$ et $\sigma^2[\mathbf{L} | X]$ — dans le paragraphe 10.2.2, nous avons utilisé l'écriture $E[\mathbf{L}]$ et $\sigma^2[\mathbf{L}]$ puisque le conditionnement était parfaitement explicite. Nous introduisons les fonctions $\mu(x)$ et $v(x)$ définies de la façon suivante :

$$\mu(x) := E[\mathbf{L} | X = x] \quad (10.70)$$

et

$$v(x) := \sigma^2[\mathbf{L} | X = x] \quad (10.71)$$

WILSON [2001b] montre alors que⁴

$$\text{VaR}[\mathbf{L}; \alpha] \simeq \mu(\psi(X; \alpha)) - \frac{1}{2h(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{h(x)v(x)}{\partial_x \mu(x)} \right) \Big|_{x=\psi(X; \alpha)} \quad (10.72)$$

avec h la densité de X . Reprenons la construction du portefeuille infiniment granulaire de la page 115. Nous avons

$$\text{VaR}[\mathbf{L}_M; \alpha] \simeq \mu(\psi(X; \alpha)) - \left(\frac{1}{2h(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{h(x)v(x)}{\partial_x \mu(x)} \right) \Big|_{x=\psi(X; \alpha)} \right) / M \quad (10.73)$$

puisque $E[\mathbf{L}_M | X = x] = E[\mathbf{L} | X = x]$ et $\sigma^2[\mathbf{L}_M | X = x] = \sigma^2[\mathbf{L} | X = x]/M$. Nous en déduisons que⁵

$$\text{VaR}[\mathbf{L}_n; \alpha] \simeq \text{VaR}[\mathbf{L}_\infty; \alpha] + \frac{\beta}{n} \quad (10.74)$$

⁴La démonstration n'est pas très technique, mais assez longue (pages 104 et 105 de WILSON [2001b]).

⁵puisque $M = n$ et $\text{VaR}[\mathbf{L}_\infty; \alpha] = E[\mathbf{L}_\infty | X = \psi(X; \alpha)] = \mu(\psi(X; \alpha))$.

avec

$$\begin{aligned}\beta &= - \frac{1}{2h(x)} \frac{d}{dx} \left(\frac{h(x)v(x)}{\partial_x \mu(x)} \right) \Big|_{x=\psi(X;\alpha)} \\ &= \frac{1}{2} \left(v(\psi(X;\alpha)) \frac{\partial_x^2 \mu(\psi(X;\alpha))}{[\partial_x \mu(\psi(X;\alpha))]^2} - v(\psi(X;\alpha)) \frac{\partial_x \ln h(\psi(X;\alpha))}{\partial_x \mu(\psi(X;\alpha))} - \frac{\partial_x v(\psi(X;\alpha))}{\partial_x \mu(\psi(X;\alpha))} \right)\end{aligned}\tag{10.75}$$

Le Comité de Bâle explique que la calibration du coefficient β a été faite à partir du modèle CreditRisk+ :

Calibration of the β coefficient inevitably depends on the choice of model and its calibration. IRB benchmark risk-weights have been calibrated within a CreditMetrics style model. For the purposes of designing a granularity adjustment, however, we use a generalised version of the CreditRisk+ model. The advantage is that the functional form of CreditRisk+ risk-weights allows the granularity adjustment to be assessed with minimal reporting and computational burden. The obvious disadvantage is the greater potential for inconsistency with CreditMetrics-based IRB exposure-level risk-weights. Fortunately, it is by now well-known that CreditRisk+ can be calibrated so that the tail of its loss distribution will align closely with the tail of the CreditMetrics loss distribution. So long as care is exercised in calibration, the discrepancy between our granularity adjustment and a full CreditMetrics-based estimate can be kept to a minimum (§444 du document [3]).

Dans le cas du modèle de type CreditMetrics (ou Merton), nous rappelons que la relation entre la probabilité de défaillance conditionnelle P_i et la probabilité de défaillance non conditionnelle p_i est

$$P_i = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) - \sqrt{\rho}X}{\sqrt{1-\rho}} \right)\tag{10.76}$$

Dans le cas du modèle de type CreditRisk+, nous avons⁶

$$P_i = p_i (1 + \varpi_i (X - 1))\tag{10.77}$$

avec ϖ_i la pondération factorielle — $\varpi_i \in [0, 1]$ — et X le facteur systématique de distribution $\Gamma(a, b)$ — $h(x) = (x/b)^{a-1} \exp(-x/b) / (b\Gamma(a))$. Dans ce cas, les expressions (10.18) et (10.19) deviennent

$$\begin{aligned}\mu(x) &= E[\mathbf{L} | X = x] \\ &= \mathbb{E}[\text{LGD}_1] P_1 \\ &= E_1 p_1 (1 + \varpi_1 (x - 1))\end{aligned}\tag{10.78}$$

et

$$\begin{aligned}v(x) &= \sigma^2 [\mathbf{L} | X = x] \\ &= \mathbb{E}^2[\text{LGD}_1] P_1 (1 - P_1) + \sigma^2 [\text{LGD}_1] P_1 \\ &= (\mathbb{E}^2[\text{LGD}_1] + \sigma^2 [\text{LGD}_1]) P_1 - \mathbb{E}^2[\text{LGD}_1] \underset{\approx 0}{P_1^2} \\ &\simeq (\mathbb{E}^2[\text{LGD}_1] + \sigma^2 [\text{LGD}_1]) P_1 \\ &= (E_1^2 + \sigma^2 [\text{LGD}_1]) p_1 (1 + \varpi_1 (x - 1))\end{aligned}\tag{10.79}$$

Le Comité de Bâle fait l'hypothèse suivante (§447 du document [3]) :

$$\sigma[\text{LGD}_1] = \frac{1}{2} \sqrt{E_1 (1 - E_1)}\tag{10.80}$$

⁶voir GORDY [2000].

Nous en déduisons que

$$v(x) = E_1 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} E_1 \right) p_1 (1 + \varpi_1 (x - 1)) \quad (10.81)$$

Le calcul des dérivées donne $\partial_x \mu(x) = E_1 p_1 \varpi_1$, $\partial_x^2 \mu(x) = 0$, $\partial_x v(x) = E_1 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} E_1 \right) p_1 \varpi_1$ et $\partial_x \ln h(\psi(X; \alpha)) = (a - 1)x^{-1} - b^{-1}$. Nous avons donc

$$\beta = \frac{1}{2} (0.25 + 0.75 E_1) \left(- \left(\frac{a-1}{x} - \frac{1}{b} \right) (\varpi_1^{-1} + (x-1)) - 1 \right) \quad (10.82)$$

Afin de maintenir une certaine cohérence entre la formulation des pondérations en risque et le facteur de granularité, le Comité de Bâle impose que les probabilités de défaillance conditionnelles **CreditMetrics** et **CreditRisk+** coïncident :

$$\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) + \sqrt{\rho} \Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}} \right) = p_i (1 + \varpi_i (x - 1)) \quad (10.83)$$

Dans ce cas, la pondération factorielle ϖ_i vaut

$$\varpi_i = \frac{1}{(x-1)} \frac{F_i}{p_i} \quad (10.84)$$

avec

$$F_i = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(p_i) + \sqrt{\rho} \Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho}} \right) - p_i \quad (10.85)$$

L'expression de β est donc

$$\beta = \frac{1}{2} (0.25 + 0.75 E_1) \left(A - 1 + A \frac{p_i}{F_i} \right) \quad (10.86)$$

avec

$$A = - \left(\frac{a-1}{x} - \frac{1}{b} \right) (x-1) \quad (10.87)$$

Pour achever la calibration, le Comité de Bâle indique que celle-ci a été faite sous l'hypothèse que $\mathbb{E}[X] = 1$ et $\sigma[X] = 2$ (§445 du document [3]). Les paramètres de la distribution **Gamma**⁷ implicite sont donc $a = 0.25$ et $b = 4$. Puisque α est égal à 99.5%, le quantile correspondant de la distribution **Gamma** $\Gamma(0.25, 4)$ est 12.007243 et la valeur prise par A est 3.4393485, ce qui donne

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} (0.25 + 0.75 E_1) \left(2.4393485 + 3.4393485 \frac{p_i}{F_i} \right) \\ &= (0.4 + 1.2 E_1) \left(0.76229640 + 1.0747964 \frac{p_i}{F_i} \right) \end{aligned} \quad (10.88)$$

Nous retrouvons (presque) la formule donnée par le Comité de Bâle (§456 du document [3]) :

$$\beta = (0.4 + 1.2 \times \text{LGD}) \left(0.76 + 1.10 \times \frac{\text{PD}}{F} \right) \quad (10.89)$$

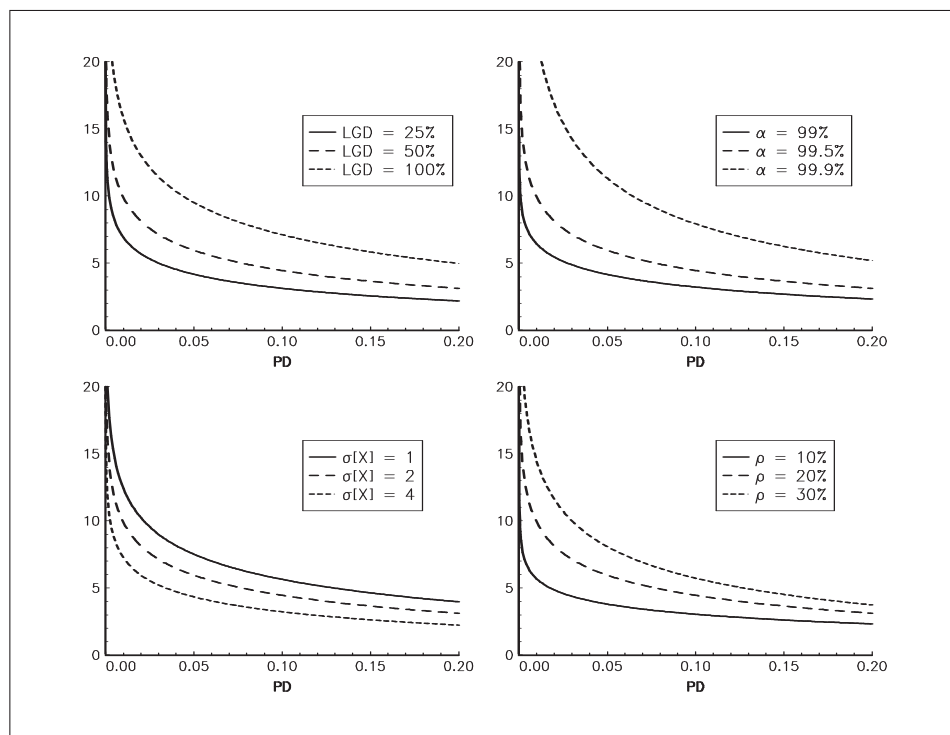
Pour retrouver exactement la formule du Comité de Bâle, nous ne devons pas utiliser l'approximation $P_1^2 \simeq 0$ pour calculer $v(x)$. Dans ce cas, nous avons $v(x) = E_1 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} E_1 \right) p_1 (1 + \varpi_1 (x - 1)) - E_1^2 p_1^2 (1 + \varpi_1 (x - 1))^2$ et $\partial_x v(x) = E_1 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4} E_1 \right) p_1 \varpi_1 - 2 E_1^2 p_1^2 \varpi_1 (1 + \varpi_1 (x - 1))$. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2} (0.25 + 0.75 E_1) \left(- \left(\frac{a-1}{x} - \frac{1}{b} \right) (\varpi_1^{-1} + (x-1)) - 1 \right) \\ &\quad + \underbrace{E_1 p_1 (1 + \varpi_1 (x - 1)) \left(1 + \frac{1}{2} \varpi_1^{-1} \left(\frac{a-1}{x} - \frac{1}{b} \right) \right)}_{\text{Terme de correction}} \end{aligned} \quad (10.90)$$

⁷Nous avons $\mathbb{E}[X] = ab$ et $\sigma[X] = \sqrt{ab}$.

Dans le cas où E_1 varie de 5% à 95%, PD de 0.10% à 15% and ρ de 10% à 30%, alors l'erreur relative entre la formule exacte (10.90) et la formule approchée (10.89) n'excède pas 1%.

A titre de remarque, il faut noter que le coefficient β est **extrêmement** sensible aux valeurs des paramètres : la perte en cas de défaillance LGD, la probabilité de défaillance PD, la corrélation des actifs ρ , le seuil de confiance α et la volatilité du facteur $\sigma[X] - \mathbb{E}[X]$ n'est pas un paramètre puisque nous avons l'équivalence suivante $\mathbb{E}[P_i] = p_i \Leftrightarrow \mathbb{E}[X] = 1$. Le graphique 10.10 illustre cette sensibilité.



GRAPHIQUE 10.10. Impact des paramètres sur le coefficient β (valeurs par défaut : LGD = 50%, $\alpha = 99.5\%$, $\rho = 20\%$ et $\sigma[X] = 2$)

10.4.3.2 Du coefficient β à l'ajustement de granularité du Comité de Bâle

Nous devons dans un premier temps 'transformer' le coefficient β en actifs pondérés. De plus, le Comité de Bâle indique qu'il a utilisé un facteur d'échelle c afin d'obtenir une pondération égale à 100% pour une probabilité de défaillance de 0.7%, une perte en cas de défaillance de 50% et une maturité de 3 ans. (§457 du document [3]). Dans le paragraphe 10.2.2, nous l'avons déjà calculé et obtenu $c \simeq 1.5$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \Delta RWA &= 1.5 \times \frac{\text{EAD} \times \beta}{n} \Big/ 8\% \\ &= \text{EAD} \times (0.6 + 1.8 \times \text{LGD}) \left(9.5 + 13.75 \times \frac{\text{PD}}{F} \right) \Big/ n \end{aligned} \quad (10.91)$$

Nous rappelons aussi que le coefficient β a été déterminé pour un portefeuille statistiquement homogène. Dans la pratique, les portefeuilles Π d'engagement des banques ne sont pas homogènes. Il faut donc pouvoir trouver un portefeuille homogène équivalent Π_{AG} pour calculer l'ajustement de granularité G , qui est exprimé en terme d'actifs pondérés. Le Comité de Bâle indique aussi que la calibration effectuée est telle que 4% du capital couvre déjà l'effet de granularité. Nous avons donc

$$G = \text{EAD}_{AG} \times (0.6 + 1.8 \times \text{LGD}_{AG}) \left(9.5 + 13.75 \times \frac{\text{PD}_{AG}}{F_{AG}} \right) \Big/ n_{AG} - 0.04 \times \text{RWA}_{NR} \quad (10.92)$$

En utilisant les notations du Comité de Bâle, nous retrouvons la formule

$$G = \frac{\text{TNRE} \times \text{GSF}}{n^*} - 0.04 \times \text{RWA}_{\text{NR}} \quad (10.93)$$

avec

$$\text{GSF} = (0.6 + 1.8 \times \text{LGD}_{\text{AG}}) \left(9.5 + 13.75 \times \frac{\text{PD}_{\text{AG}}}{F_{\text{AG}}} \right) \quad (10.94)$$

Il nous reste maintenant à justifier la construction du portefeuille homogène équivalent Π_{AG} . Celle-ci est présentée dans la section 4 de GORDY [2001]. Nous reprenons les notations précédentes en introduisant les classes de risques \mathcal{C} . Nous avons

$$\mathbf{L} = \sum_{\mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} D_i \cdot \text{LGD}_i \cdot \text{EAD}_i \quad (10.95)$$

Nous notons $p_{\mathcal{C}}$ la probabilité de défaillance non conditionnelle de la classe de risque \mathcal{C} et $s_{\mathcal{C}}$ la part d'exposition au risque de la classe \mathcal{C} dans le risque total :

$$s_{\mathcal{C}} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i}{\sum_{\mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i} \quad (10.96)$$

«Le but est alors de construire un portefeuille 'équivalent' Π_{AG} au portefeuille Π de taille n^* et de paramètres communs p^* , E^* , σ^* [LGD^*], EAD^* , etc. » (GORDY [2001]). Dans ce cas, l'expression de la perte est

$$\mathbf{L}_{\text{AG}} = D^* \cdot \text{LGD}^* \cdot \text{EAD}^* \quad (10.97)$$

L'idée sous-jacente est d'ajuster différents moments ou d'imposer des restrictions. Michael Gordy impose l'égalité des taux de défaillance et des pertes espérées (pondérés par les expositions). Nous avons donc

$$\mathbb{E}[D^* \cdot \text{EAD}^*] = \mathbb{E} \left[\sum_{\mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} D_i \cdot \text{EAD}_i \right] \quad (10.98)$$

Il est bien sûr naturel de prendre $\text{EAD}^* = \sum_{\mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i$ (même exposition dans le portefeuille Π_{AG} et le portefeuille Π), ce qui implique

$$\begin{aligned} p^* &= \frac{\sum_{\mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} p_{\mathcal{C}} \cdot \text{EAD}_i}{\sum_{\mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i} \\ &= \sum_{\mathcal{C}} s_{\mathcal{C}} \cdot p_{\mathcal{C}} \end{aligned} \quad (10.99)$$

Nous avons aussi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[D^* \cdot \text{LGD}^* \cdot \text{EAD}^*] &= \mathbb{E} \left[\sum_{\mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} E_i \cdot \text{LGD}_i \cdot \text{EAD}_i \right] \\ p^* \cdot E^* \cdot \left(\sum_{\mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i \right) &= \sum_{\mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} p_{\mathcal{C}} \cdot E_i \cdot \text{EAD}_i \\ &= \sum_{\mathcal{C}} p_{\mathcal{C}} \sum_{i \in \mathcal{C}} E_i \cdot \text{EAD}_i \end{aligned} \quad (10.100)$$

Introduisons la perte en cas de défaillance moyenne par classe de risque $E_{\mathcal{C}}$ définie par

$$E_{\mathcal{C}} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{C}} E_i \cdot \text{EAD}_i}{\sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i} \quad (10.101)$$

Nous en déduisons que

$$p^* \cdot E^* \cdot \left(\sum_c \sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i \right) = \sum_c p_c \cdot E_c \cdot \sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i \quad (10.102)$$

ou encore

$$\begin{aligned} E^* &= \sum_c \frac{p_c}{p^*} \cdot E_c \cdot \frac{\sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i}{\sum_c \sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i} \\ &= \sum_c \frac{s_c \cdot p_c}{\sum_c s_c \cdot p_c} \cdot E_c \end{aligned} \quad (10.103)$$

Rappelons que la variance conditionnelle de la distribution de perte est

$$\sigma^2 [\mathbf{L} | X] = \sum_c \sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i^2 \cdot (E_i^2 \cdot P_i \cdot (1 - P_i) + \sigma^2 [\text{LGD}_i] \cdot P_i) \quad (10.104)$$

La variance non conditionnelle de la distribution de perte a donc pour expression⁸

$$\begin{aligned} \sigma^2 [\mathbf{L}] &= \sigma^2 [\mathbb{E}[\mathbf{L} | X]] + \mathbb{E}[\sigma^2 [\mathbf{L} | X]] \\ &= \underbrace{\sigma^2 \left[\sum_c \sum_{i \in \mathcal{C}} P_i \cdot E_i \cdot \text{EAD}_i \right]}_{\text{Contribution du risque systématique}} + \underbrace{\mathbb{E} \left[\sum_c \sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i^2 \cdot (E_i^2 \cdot P_i \cdot (1 - P_i) + \sigma^2 [\text{LGD}_i] \cdot P_i) \right]}_{\text{Contribution du risque idiosyncratique}} \\ &= \underbrace{\sigma^2 \left[\sum_c P_c \cdot E_c \cdot s_c \cdot \text{EAD}^* \right]}_{\text{Contribution du risque systématique}} + \underbrace{\sum_c (p_c \cdot (1 - p_c) - \sigma^2 [P_c]) \cdot \left(\sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i^2 \cdot E_i^2 \right)}_{\text{Contribution du risque de défaut idiosyncratique}} \\ &\quad + \underbrace{\sum_c p_c \left(\sum_{i \in \mathcal{C}} \text{EAD}_i^2 \cdot \sigma^2 [\text{LGD}_i] \right)}_{\text{Contribution du risque de recouvrement idiosyncratique}} \end{aligned} \quad (10.106)$$

Pour le portefeuille Π_{AG} , nous avons

$$\sigma^2 [\mathbf{L}_{\text{AG}}] = \sigma^2 [P^* \cdot E^* \cdot \text{EAD}^*] + \frac{\text{EAD}^{*2}}{n^*} \left(E^{*2} \cdot (p^* \cdot (1 - p^*) - \sigma^2 [P^*]) + p^* \cdot \sigma^2 [\text{LGD}^*] \right) \quad (10.107)$$

Pour déterminer n^* , nous allons calibrer les différentes contributions avec un modèle de type CreditRisk+ :

$$P_i = p_i (1 + \varpi_i (X - 1)) \quad (10.108)$$

Nous avons déjà utilisé le fait que $\mathbb{E}[P_i] = p_i$ — ce qui implique que $\mathbb{E}[X] = 1$. Pour la variance, nous avons

$$\sigma^2 [P_i] = p_i^2 \varpi_i^2 \sigma^2 [X] \quad (10.109)$$

La calibration du risque systématique implique que la pondération factorielle ϖ^* est

$$\begin{aligned} \varpi^* &= \frac{\sum_c p_c \varpi_c E_c s_c}{p^* E^*} \\ &= \frac{\sum_c p_c \varpi_c E_c s_c}{\sum_c s_c p_c E_c} \end{aligned} \quad (10.110)$$

⁸car nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[P_i \cdot (1 - P_i)] &= \mathbb{E}[P_i] - \mathbb{E}[P_i^2] \\ &= \mathbb{E}[P_i] - \sigma^2 [P_i^2] - \mathbb{E}^2 [P_i] \end{aligned} \quad (10.105)$$

Concernant la calibration du risque de défaut idiosyncratique, nous avons

$$n^* = \frac{E^{*2} p^* (1 - p^*) - (p^* \varpi^* \sigma [X])^2}{\sum_C E_c^2 \left(p_C (1 - p_C) - (p_C \varpi_C \sigma [X])^2 \right) \sum_{i \in C} (\text{EAD}_i E_i)^2 / (\text{EAD}^* E_c)^2} \quad (10.111)$$

Nous utilisons les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i \in C} (\text{EAD}_i E_i)^2}{(\text{EAD}^* E_c)^2} &= \frac{\sum_{i \in C} (\text{EAD}_i E_i)^2}{\left(\text{EAD}^* \frac{\sum_{i \in C} E_i \text{EAD}_i}{\sum_{i \in C} \text{EAD}_i} \right)^2} \\ &= \frac{\sum_{i \in C} (\text{EAD}_i E_i)^2}{\left(\sum_{i \in C} E_i \cdot \text{EAD}_i \right)^2} \left(\frac{\sum_{i \in C} \text{EAD}_i}{\sum_C \sum_{i \in C} \text{EAD}_i} \right)^2 \\ &= H_C s_C^2 \end{aligned}$$

avec H_C l'index d'Herfindahl défini par l'expression suivante

$$H_C = \frac{\sum_{i \in C} (\text{EAD}_i E_i)^2}{\left(\sum_{i \in C} E_i \cdot \text{EAD}_i \right)^2} \quad (10.112)$$

Remarque 19 Nous n'obtenons pas exactement les mêmes résultats que GORDY [2001], puisque celui-ci utilise l'expression suivante pour H_C :

$$H_C = \frac{\sum_{i \in C} \text{EAD}_i^2}{\left(\sum_{i \in C} \text{EAD}_i \right)^2} \quad (10.113)$$

Finalement, l'expression de n^* est

$$n^* = \frac{1}{\sum_C \Lambda_C H_C s_C^2} \quad (10.114)$$

avec

$$\Lambda_C = \frac{E_c^2 \left(p_C (1 - p_C) - (p_C \varpi_C \sigma [X])^2 \right)}{E^{*2} \left(p^* (1 - p^*) - (p^* \varpi^* \sigma [X])^2 \right)} \quad (10.115)$$

Nous retrouvons l'expression de n^* du Comité de Bâle (§445 du document [3]). Il existe néanmoins une différence fondamentale entre l'analyse de GORDY [2001] et la formulation proposée par le Comité de Bâle concernant Λ_c . Dans le document [3], la calibration de n^* ne se fait pas uniquement à partir du risque de défaut idiosyncratique, mais utilise aussi le risque de recouvrement idiosyncratique. Dans ce cas, nous avons

$$\Lambda_c = \frac{E_c^2 \left(p_C (1 - p_C) - (p_C \varpi_C \sigma [X])^2 \right) + p_C \sigma^2 [\text{LGD}_C]}{E^{*2} \left(p^* (1 - p^*) - (p^* \varpi^* \sigma [X])^2 \right) + p^* \sigma^2 [\text{LGD}^*]} \quad (10.116)$$

En reprenant les hypothèses du Comité de Bâle, nous avons

$$(p_i \varpi_i \sigma [X])^2 = \left(\frac{\sigma [X]}{(\psi(X; \alpha) - 1)} F_i \right)^2 \quad (10.117)$$

et

$$\sigma [\text{LGD}_i] = \frac{1}{2} \sqrt{E_i (1 - E_i)} \quad (10.118)$$

Puisque $X \sim \Gamma(0.25, 4)$, $\psi(X; 99.5\%)$ et $\sigma[X]$ prennent les valeurs 12.007243 et 2, et nous obtenons

$$(p_i \varpi_i \sigma [X])^2 = 0.033014360 \times F_i^2 \quad (10.119)$$

L'expression de Λ_c est bien celle du Comité de Bâle :

$$\Lambda_c = \frac{E_c^2 (p_c (1 - p_c) - 0.033 \cdot F_c^2) + 0.25 \cdot p_c E_c (1 - E_c)}{E^{*2} (p^* (1 - p^*) - 0.033 \cdot F^{*2}) + 0.25 \cdot p^* E^* (1 - E^*)} \quad (10.120)$$

avec

$$F_c = P_c - p_c \quad (10.121)$$

et

$$F^* = \sum_c s_c F_c \quad (10.122)$$

10.5 Les modifications du 5 novembre 2001

Le 5 novembre 2001, le Comité de Bâle publie deux documents. Le premier concerne les résultats du QIS2 (Second Quantitative Impact Study). 138 banques de 25 pays différents ont répondu. Parmi elles, 127 banques ont fourni des calculs complets pour la méthode SA, 55 pour la méthode IRB simple et 22 pour la méthode IRB avancée. La table 10.9 présente les résultats concernant les variations de charge en capital au titre du risque de crédit par rapport à la méthode SA actuelle (Accord de Bâle 1988). Nous remarquons que la méthode IRB simple pour les banque du **G10** conduit à une augmentation de 14%, alors que cette augmentation n'est que de 6% pour la méthode SA. Dans ce cas, il y a une faible incitation à utiliser la méthode IRB simple.

Méthode	SA	IRB simple	IRB avancée
G10	+6%	+14%	-5%
EU	+6%	+10%	-1%
autres	+5%		

TABLE 10.9. Résultat du QIS2

C'est pourquoi dans un second document, le Comité de Bâle propose une nouvelle formulation de la pondération en risque. Même si les nouvelles formules sont très différentes à première vue, elles sont en fait une modification des formules précédentes. Considérons le cas du risque *corporate*. La nouvelle pondération en risque du Comité de Bâle est

$$RW = 12.50 \times LGD \times \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho(PD)} \Phi^{-1}(99.9\%)}{\sqrt{1 - \rho(PD)}} \right) \times \left(1 + 0.470 \times \frac{1 - PD}{PD^{0.44}} \right) \quad (10.123)$$

avec

$$\rho(PD) = 0.10 \times \frac{1 - e^{-50 \times PD}}{1 - e^{-50}} + 0.20 \times \frac{1 - (1 - e^{-50 \times PD})}{1 - e^{-50}} \quad (10.124)$$

Une nouvelle écriture de RW est

$$RW = \frac{LGD}{50} \times \underbrace{\left(625 \times \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho(PD)} \Phi^{-1}(99.9\%)}{\sqrt{1 - \rho(PD)}} \right) \times \left(1 + 0.470 \times \frac{1 - PD}{PD^{0.44}} \right) \right)}_{\text{Nouvelle fonction de référence BRW}} \quad (10.125)$$

Nous voyons que cela revient à utiliser une nouvelle fonction de référence. Les différences sont les suivantes :

1. Le seuil de confiance n'est plus 99,5% mais 99,9%.
2. L'expression explicite de la probabilité conditionnelle P_i est utilisée car la corrélation n'est pas constante mais dépend de la probabilité de défaillance PD.

PD (en %)	Janvier 2001		Novembre 2001		
	<i>corporate</i>	<i>retail</i>	<i>corporate</i>	<i>retail</i>	<i>res. mortgage</i>
0.03	14.09	6.39	18.11	4.58	4.80
0.10	29.25	13.55	33.73	11.62	12.50
0.25	51.92	24.75	53.59	22.48	25.23
0.50	80.59	39.62	74.29	35.39	42.10
0.75	104.23	52.40	88.52	44.97	56.31
1.00	125.00	63.97	99.41	52.52	68.92
1.25	143.80	74.71	108.27	58.65	80.38
1.50	161.12	84.83	115.82	63.73	90.98
2.00	192.43	103.65	128.47	71.63	110.21
2.50	220.45	121.03	139.26	77.45	127.45
3.00	245.97	137.33	149.05	81.88	143.18
4.00	291.45	167.44	167.20	88.13	171.26
5.00	331.38	195.02	184.44	92.40	195.94
10.00	482.38	309.76	262.00	106.31	289.62
20.00	625.00	478.74	374.59	132.49	406.24

TABLE 10.10. Comparaison des pondérations Janvier 2001 et Novembre 2001

3. Enfin, il n'y a plus de référence à une calibration $\text{LGD} = 50\%$ et $\text{PD} = 0.7\%$, ce qui explique la disparition du facteur d'échelle 976,5.

Remarque 20 *L'ajustement de maturité existe toujours et n'a pas été modifié. Il y a ici une certaine incohérence puisque celui-ci avait été calibré sur les probabilités conditionnelles de défaillance à 3 ans de la forme*

$$P_i^{(3)} = \Phi \left(1.118 \times \Phi^{-1} \left(1 - (1 - \text{PD})^3 \right) + 1.288 \right) \quad (10.126)$$

Les hypothèses sous-jacentes étaient alors un seuil de confiance de 99,5% et une corrélation **constante** de 20%.

Pour le risque *retail*, le Comité de Bâle propose de distinguer les prêts hypothécaires (**résidentiel mortgage**) des autres crédits. Dans le premier cas, la formule de pondération en risque est

$$\text{RW} = 12.50 \times \text{LGD} \times \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\text{PD}) + \sqrt{\rho(\text{PD})} \Phi^{-1}(99.9\%)}{\sqrt{1 - \rho(\text{PD})}} \right)$$

avec une corrélation $\rho(\text{PD})$ constante et égale à 15%. Pour les autres crédits, nous avons

$$\text{RW} = 12.50 \times \text{LGD} \times \left[\Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(\text{PD}) + \sqrt{\rho(\text{PD})} \Phi^{-1}(99.9\%)}{\sqrt{1 - \rho(\text{PD})}} \right) - \text{PD} \right] \quad (10.127)$$

avec

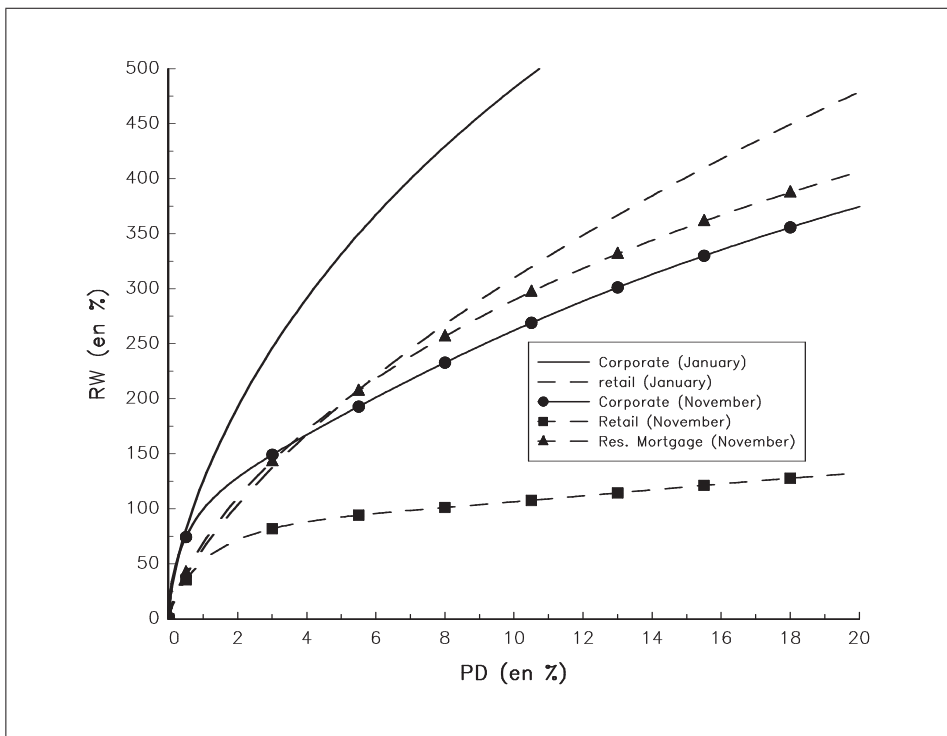
$$\rho(\text{PD}) = 0.04 \times \frac{1 - e^{-25 \times \text{PD}}}{1 - e^{-50}} + 0.15 \times \frac{1 - (1 - e^{-25 \times \text{PD}})}{1 - e^{-25}} \quad (10.128)$$

Outre les différences mentionnées plus haut, nous remarquons que **le facteur d'ajustement de maturité disparaît**.

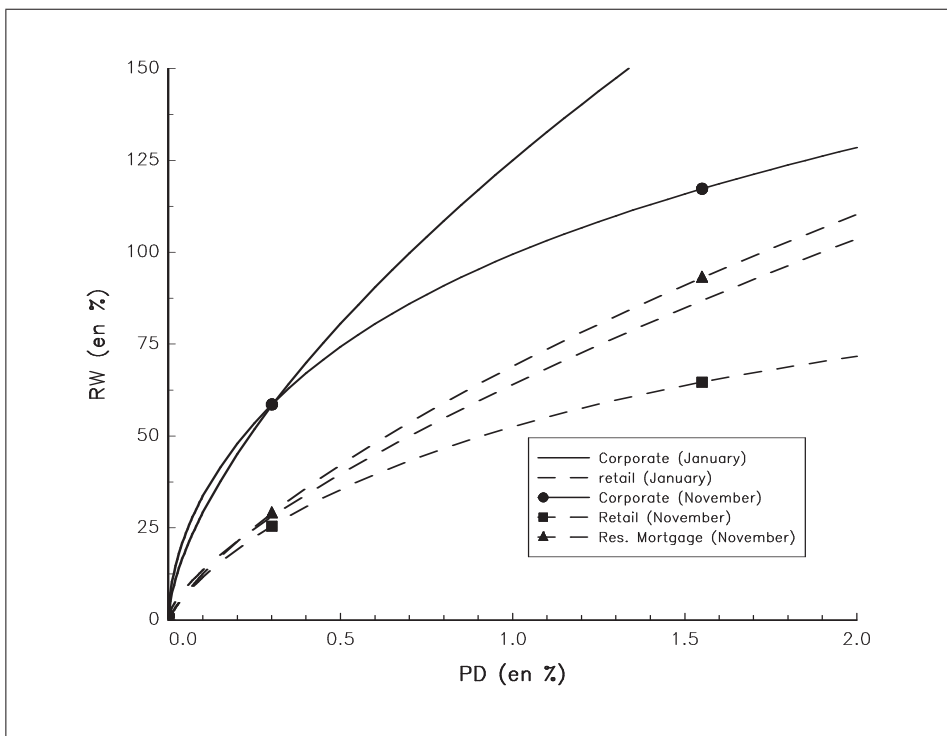
Afin de mesurer l'impact des nouvelles propositions, nous avons reporté dans la table 10.10 — voir aussi les graphiques 10.11 et 10.12 — les pondérations Janvier 2001 et Novembre 2001 pour une perte en cas de défaillance de 50%. Globalement, nous observons une diminution de la valeur des actifs pondérés pour les probabilités de défaillance élevées. Ceci s'explique par une corrélation entre les valeurs des actifs plus faible (voir le graphique 10.13).

Bibliographie

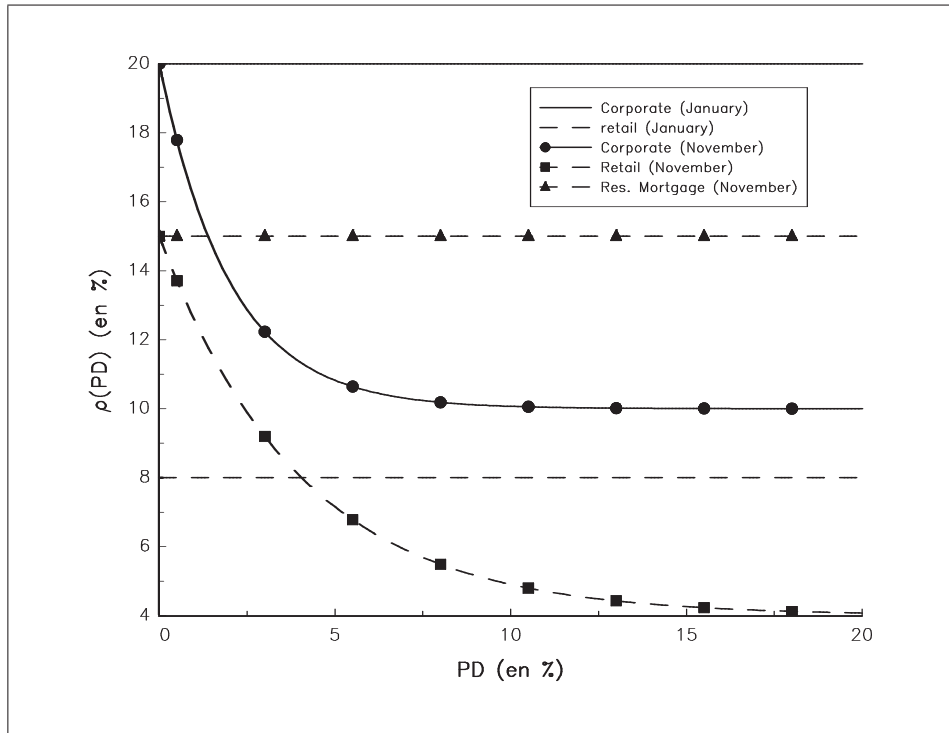
- [1] Basel Committee on Banking Supervision, Best Practices for Credit Risk Disclosure, **74**, September 2000



GRAPHIQUE 10.11. Impact des propositions du 5 Novembre 2001 sur les pondérations en risque (I)



GRAPHIQUE 10.12. Impact des propositions du 5 Novembre 2001 sur les pondérations en risque (II)



GRAPHIQUE 10.13. Impact des propositions du 5 Novembre 2001 sur les corrélations $\rho(PD)$

- [2] Basel Committee on Banking Supervision, Principles for the Management of Credit Risk, **75**, September 2000
- [3] Basel Committee on Banking Supervision, The Internal Ratings-Based Approach — Consultative Document, Supporting document to the New Basel Capital Accord, January 2001
- [4] Basel Committee on Banking Supervision, Results of the Second Quantitative Impact Study, 5 November 2001
- [5] Basel Committee on Banking Supervision, Potential Modifications to the Committee's Proposals, 5 November 2001
- [6] KOYLUOGLU, H.U. et A. HICKMAN [1998], Reconcilable differences, *Risk Magazine*, **11**, October, 56-62
- [7] FINGER, C.C. [1999], Conditional approaches for CreditMetrics portfolio distributions, *CreditMetrics Monitor*, **April**, 14-33
- [8] GORDY, M.B. [2000], A comparative anatomy of credit risk models, *Journal of Banking and Finance*, **24**, 119-149
- [9] GORDY, M.B. [2001], A risk-factor model foundation for ratings-based bank capital rules, Board of Governors of the Federal Reserve Systems, *Working Paper*
- [10] IEDA, A., K. MARUMO et T. YOSHIBA [2000], A simplified method for calculating the credit risk of lending portfolios, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan, *Discussion Paper*, **2000-E-10**
- [11] WILSON, T. [2001a], IRB approach explained, *Risk Magazine*, **14**, May, 87-90
- [12] WILSON, T. [2001b], Probing granularity, *Risk Magazine*, **14**, August, 103-106

Quatrième partie

Les modèles de risque de crédit

11

Introduction

Si le risque de marché est aujourd'hui plutôt bien contrôlé par les établissements bancaires, le risque de crédit demeure un phénomène difficile à appréhender. En effet, le risque de crédit diffère des risques de marché dans la mesure où il est étroitement lié à la performance individuelle et la structure capitalistique de l'emprunteur. La modélisation du risque de crédit nécessite donc la connaissance de *données structurelles* mais celles-ci sont inobservables pour la plupart des opérateurs financiers. La collecte des données constitue la limite majeure des premiers modèles de risque de crédit développés à partir des années 70.

Une deuxième approche plus mathématique a vu le jour au cours de années 90, qui cherche à contourner la difficulté en limitant les données nécessaires au calibrage des modèles à la seule information disponible sur les marchés de crédit. Si cette approche sous *forme réduite* est très séduisante *a priori*, elle présente néanmoins deux inconvénients importants.

- D'une part, les données de marché utilisables sont peu nombreuses. Les modèles sous forme réduite utilisent *les spreads de taux* comme paramètres permettant d'évaluer le risque de crédit. Si les spreads contiennent effectivement une composante liée au risque de crédit, ce dernier n'en est pas l'unique déterminant : les problèmes de liquidité ou de taxation jouent un rôle tout aussi important.
- D'autre part, contrairement aux marchés d'actions, les marchés d'obligations des grandes entreprises sont très peu liquides. Les données disponibles ne reflètent donc pas nécessairement les prix que l'on devrait observer sous les hypothèses d'absence d'opportunité d'arbitrage et de complétude des marchés.

12

Le modèle de la firme

L'approche structurelle du risque de crédit est fondée sur les méthodes d'évaluation des options mises en place par BLACK et SHOLES [1973] et MERTON [1974]. Il s'agit d'une approche relativement intuitive dans la mesure où le risque de crédit encouru par le détenteur d'une obligation est directement relié à la réalité économique de la firme : le défaut intervient dès que la valeur de marché de l'ensemble des actifs de la firme passe sous un certain seuil déterminé par le niveau global de la dette contractée. Il s'agit d'une vision optionnelle de la dette : l'émetteur reçoit le droit de faire défaut sur sa dette, droit qu'il exerce dès que la valeur de ses actifs ne permet plus de la couvrir.

Merton est le premier à proposer ce type de modèle. Il l'applique à la forme de dette la plus simple : l'obligation zéro coupon. Dans ce cadre, Merton obtient une formule fermée d'évaluation de la dette faisant apparaître le spread de taux comme une prime liée au risque de défaut de la firme. D'un point de vue théorique, ce modèle est très séduisant car il explicite directement les fondements économiques du risque obligataire :

- le taux sans risque ;
- la volatilité de la valeur de marché des actifs de l'entreprise, c'est-à-dire l'incertitude pesant sur le rendement de l'ensemble des actifs de la firme ;
- le levier, c'est-à-dire le rapport entre la valeur actualisée au taux sans risque de la dette, et la valeur initiale des actifs : plus le levier est important (i.e. plus la part de la dette dans le total des actifs, vu d'aujourd'hui, est importante) plus la dette est risquée.

Néanmoins, d'un point de vue pratique, la prise en compte de variables économiques propres à chaque entreprise limite le champ d'application du modèle de Merton. De façon générale, les modèles structurels s'avèrent difficiles à mettre œuvre parce qu'ils requièrent la connaissance de nombreux paramètres :

1. *la valeur des actifs, la structure financière de l'émetteur :*

Ces paramètres sont propres aux modèles structurels. Si l'on souhaite évaluer la dette d'un émetteur de façon précise, il convient d'avoir une très bonne connaissance de la valeur de marché totale de ses actifs et de la façon dont elle est susceptible d'évoluer au cours du temps. Cette valeur n'étant pas directement observable, il faut l'estimer le plus précisément possible. Une telle démarche nécessite une base de données particulièrement riche portant sur la structure financière de l'entreprise et sa valorisation boursière. L'exemple de *Credit Monitor*TM, outil de gestion du risque de crédit mis en place par K.M.V. (c.f. section 12.3), illustre la façon dont ces données peuvent être utilisées pour estimer les probabilités de défaut d'une entreprise. Cependant, d'un point de vue opérationnel, il est très difficile d'accéder à ce type d'information, ce qui limite la portée des modèles structurels pour la majorité des acteurs financiers engagés sur les marchés obligataires. Notons de plus qu'on ne peut contrôler la structure capitalistique d'une entreprise en temps continu dans la mesure où, la plupart du temps, les comptes sont publiés une fois par an.

2. *les conditions d'émission de la dette :*

Il s'agit ici de prendre en compte les termes du contrat fixant entre autres la maturité, les flux versés, les éventuelles options de conversion, les ordres de priorité en cas de défaut.

3. *La perte sachant le défaut :*

Une fois la faillite déclarée, une procédure de liquidation judiciaire est mise en place. Un liquidateur est alors nommé, dont le rôle est de réaliser les actifs de la firme afin de rembourser les créanciers suivant leur ordre de priorité. Notons que les modalités d'une telle procédure varient en fonction des réglementations propres à chaque pays et que le montant total recouvré par les créanciers dépend de la manière dont est menée la liquidation : par exemple, si la liquidation est rapide, les actifs risquent d'être bradés. Dans les différents modèles structurels, la partie de la dette recouvrée correspond à une fraction de la valeur de marché de la firme à l'instant de défaut (MERTON [1974], LELAND et TOFT [1996]). Il peut également s'agir d'une fonction de la valeur faciale de la dette, ou d'un processus stochastique.

4. *le processus du taux sans risque et la corrélation entre ce processus et le prix des actifs :*

Les spreads de taux peuvent difficilement être analysés indépendamment de la structure des taux sans risque. En effet, ce dernier dépend fortement du cycle économique, tout comme le risque de crédit. Par exemple, en période de forte activité, on peut s'attendre à ce que d'une part, l'écart entre taux court et taux long s'accroisse, et d'autre part à ce que la meilleure qualité du crédit conduise à une réduction des spreads (l'étude [4] menée par Duffee en 1998 met en évidence ce type de résultats). Pour pouvoir déterminer le prix des instruments de crédit, il faut donc connaître le lien entre la structure des taux sans risque et les probabilités de défaut des entreprises.

12.1 Le modèle de MERTON [1974]

Nous présentons dans cette section les caractéristiques du modèle proposé par Merton en 1974 et les principaux résultats qui en découlent. Les quatre points abordés précédemment sont spécifiés de la façon suivante :

1. *Evolution de la valeur des actifs, Structure financière de l'émetteur :*

Merton utilise la dynamique suivante pour la valeur $V(t)$ des actifs de la firme :

$$dV(t) = (\alpha V(t) - C) dt + \sigma V(t) dW(t) \quad (12.1)$$

où α représente le taux de rendement instantané des actifs de la firme, C le montant des payouts (dividendes et intérêts) par unité de temps, et σ^2 la variance du processus de rendement. ($W(t), t \geq 0$) est un mouvement brownien standard.

Les avoirs de la firme sont divisés en deux classes : une classe unique et homogène de dette, le reste correspondant aux capitaux propres. De plus, la firme ne verse aucun dividende et ne peut procéder à aucun remboursement partiel de sa dette avant la maturité.

2. *Conditions d'émission de la dette :*

La firme promet de payer un montant B à la maturité T . De plus, elle ne peut ni émettre de nouvelle dette, ni rembourser une partie de sa dette avant la maturité. Compte tenu de ces conditions d'émission et de la structure financière de la firme, le paramètre C de l'équation (12.1) vaut 0 et la dynamique suivie par la valeur des actifs devient :

$$\frac{dV(t)}{V(t)} = \alpha dt + \sigma dW(t) \quad (12.2)$$

3. *Perte sachant le défaut :*

En cas de défaut, le détenteur de la dette devient propriétaire de la firme. Merton suppose que la firme fait défaut si la valeur $V(T)$ à la maturité T des actifs est inférieure à B . En cas de défaut, le détenteur de la dette reçoit donc $V(T)$, et il perd $B - V(T)$. Le payoff final peut dès lors s'écrire

$$D(T) = B - \max(B - V(T), 0) \quad (12.3)$$

La détention d'une dette risquée s'interprète alors comme une stratégie où l'on aurait acheté un zéro-coupon sans risque dont on aurait financé une partie du coût par la vente d'un put de sous-jacent V , de prix d'exercice B et de maturité T .

4. *Processus de taux sans risque :*

le taux d'intérêt sans risque demeure constant au cours du temps, égal à r . Les problèmes liés à la dynamique des taux ne sont pas abordés dans ce premier modèle.

La dette est valorisée en supposant que les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- il y a absence d'opportunité d'arbitrage : il est impossible de générer un profit presque sûr à partir d'un investissement nul ;
- les marchés sont complets : il est possible de répliquer tout produit dérivé à l'aide d'une stratégie dynamique fondée sur les actifs sous-jacents.

Ce sont deux hypothèses fortes qui, d'un point de vue pratique, assurent l'existence (absence d'opportunité d'arbitrage) et l'unicité (complétude des marchés) des prix de marché. Néanmoins, contrairement aux marchés d'actions, les marchés obligataires sont particulièrement peu liquides. Supposer dans ce cas précis l'existence d'arbitrageurs qui contraignent les prix à vérifier certaines relations ne semble donc pas très réaliste.

Par contre, si on considère que ces hypothèses sont vraies sur le marché des actions, la valorisation f de la firme sur le marché des actions (qui est connue) reflète les anticipations du marché concernant la valeur de la firme à la maturité et en utilisant l'identité vraie à chaque instant

$$F = V - f \tag{12.4}$$

on obtient la valeur F aujourd'hui de la dette contractée en fonction de f et de la valeur de marché V des actifs de la firme. Notons que le paramètre V n'étant pas accessible, il faut l'estimer. Comme nous le verrons à la section 12.3, une telle estimation peut être réalisée à partir de la valeur des actions f et de la valeur comptable de la dette B . Les prix obtenus par une telle méthode peuvent être qualifiés d'*implicites* : ce ne sont pas les prix observés sur le marché mais les prix que l'on devrait observer compte tenu de la valorisation boursière de la firme.

Dans le cadre de ces hypothèses, la valeur de la dette correspond à l'espérance des flux futurs actualisés qu'elle génère. Merton explicite alors le spread de taux par rapport au taux r du zéro-coupon certain, résultant du risque de défaut :

$$R(T) - r = -\frac{1}{T} \ln \left(\Phi(h_2(d, \sigma^2 T)) + \frac{1}{d} \Phi(h_1(d, \sigma^2 T)) \right) \tag{12.5}$$

où Φ représente la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite et

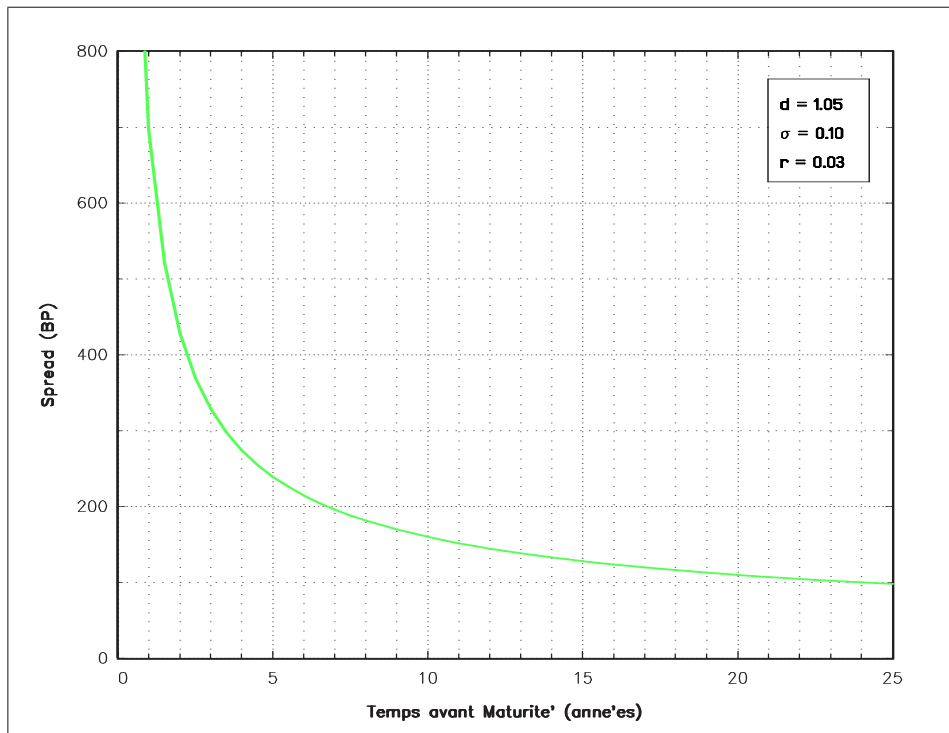
$$\begin{cases} d = \frac{B}{V(0)e^{rT}} \\ h_1(x, y) = -y^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}y - \ln x \right) \\ h_2(x, y) = -y^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}y + \ln x \right) \end{cases} \tag{12.6}$$

Pour une maturité T donnée, la prime de risque dépend uniquement de la volatilité σ^2 de la valeur des actifs et du levier d . Merton montre que $R(T) - r$ est une fonction croissante de ces deux paramètres, ce qui est conforme à l'intuition :

- La volatilité de la valeur de marché d'une firme reflète l'incertitude des opérateurs sur les rendements à venir de cette firme. Par conséquent, plus la volatilité est élevée, plus le risque encouru par le détenteur de la dette est important et plus la prime doit être conséquente.
- L'effet de levier permet aux propriétaires d'une entreprise (les actionnaires) d'accroître le niveau d'activité sans augmenter pour autant le montant de leurs engagements. Le risque supplémentaire lié au surplus d'activité est alors supporté par les créanciers, ce qui se traduit par une meilleure rémunération de leurs placements.

Les graphiques suivants illustrent la façon dont le levier influence la structure par terme des spreads de taux :

1. Dans le premier cas, $d > 1$: le spread est une fonction décroissante du temps restant avant maturité. La valeur anticipée (au taux sans risque) des actifs de la firme à la maturité T est inférieure au montant de ses engagements. Or, il est d'autant plus probable que la valeur anticipée des actifs se réalise que la date d'échéance se rapproche. Par conséquent, pour un niveau de levier $d > 1$, plus le temps avant maturité est court, plus le risque encouru par le détenteur de la dette est élevé et plus la prime qui en résulte est importante.
2. Dans le second cas, $d < 1$: la valeur anticipée des actifs de la firme est supérieure au montant de ses engagements. Par conséquent, dans le cas limite où la maturité de la dette est atteinte ($T = 0$), la firme peut entièrement rembourser ses créanciers, ce qui se traduit par un spread nul. Par contre, en s'éloignant de l'échéance, l'incertitude pesant sur l'évolution de la valeur des actifs ($\sigma = 10\%$) fait croître la probabilité de défaut et donc le spread (première partie de la courbe). Dans un second temps, on retrouve un effet similaire à celui observé sur la première courbe ($d > 1$) : l'éloignement de la maturité rend plus certain, pour un niveau de levier d fixé, le recouvrement de la dette, si bien que le spread diminue (seconde partie de la courbe).


 GRAPHIQUE 12.1. Effet de levier ($d > 1$)

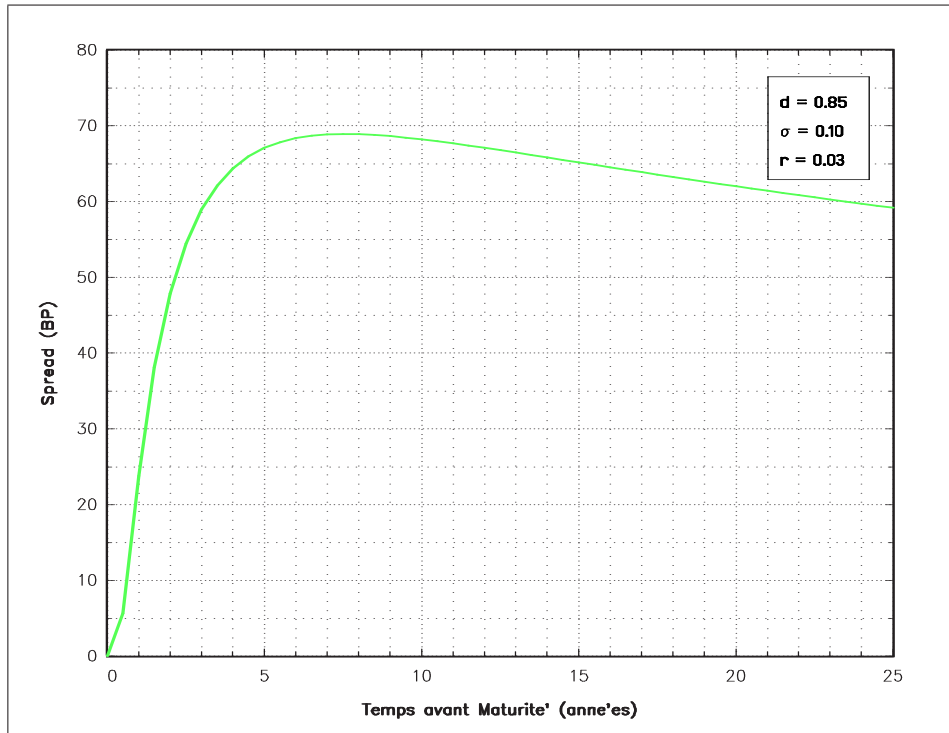
Notons que ces deux courbes font apparaître le défaut comme un événement parfaitement prévisible : le spread tend soit vers 0 soit vers l'infini lorsque l'on se rapproche de la maturité. Dans le premier cas, juste avant la maturité, le marché sait qu'il n'y aura pas de défaut et n'a donc aucune raison d'accorder une prime de risque. Dans le second cas, on observe le phénomène inverse.

12.2 Extensions du modèle de Merton

Les extensions du modèle de Merton ne conduisent pas à des résultats très différents de ceux que l'on vient de décrire. Ils cherchent à modéliser le défaut de façon plus réaliste.

12.2.1 Généralisation de la notion de défaut

Les extensions du modèle de Merton utilisent une vision moins simpliste du défaut. La faillite est en général déclarée bien avant l'échéance de la dette, sans attendre de constater que celle-ci ne pourra être remboursée. Un certain nombre de modèles cherchent donc à rendre compte de cette réalité.


 GRAPHIQUE 12.2. Effet de levier ($d < 1$)

L'extension la plus directe du modèle de Merton suppose que le défaut peut se produire à chaque date de paiement du principal ou des intérêts (modèle de GESKE [1977]). Les actionnaires disposent d'une option composée qu'ils peuvent exercer à chaque date de versement.

Un second type d'extension consiste à appréhender le défaut non plus de façon discrète mais en *temps continu* : la firme peut faire défaut à n'importe quelle date entre la date d'émission et la maturité, qu'il s'agisse ou non d'une date de paiement.

BLACK et COX [1976] reprennent le cadre d'analyse de Merton en supposant de plus que la firme peut-être mise en faillite dès que la valeur de marché $V(t)$ passe sous un seuil critique $K(t)$ tel que

$$K(t) = Ke^{-r(T-t)}, \quad 0 < K \leq B \quad (12.7)$$

Black et Cox définissent ainsi un levier maximal $\bar{d} = B/K \geq 1$ que les actionnaires ne peuvent franchir pour financer l'activité de leur entreprise. Notons que la barrière K est fixée de façon exogène : elle doit être définie de façon explicite dans le contrat de dette.

12.2.2 Introduction de sauts dans le processus de valorisation des actifs

Comme nous l'avons déjà remarqué, le modèle de Merton spécifie le défaut comme un phénomène parfaitement prévisible si bien que le spread tend vers zéro à mesure que l'on se rapproche de la maturité. Dans la pratique, on n'observe pas de tel phénomène : les spreads restent importants même pour des dates de maturité assez proches.

ZHOU [1997] propose une solution à ce problème tout en conservant un cadre d'analyse proche de celui de Merton : il intègre un processus de sauts au processus de valorisation des actifs, si bien que les trajectoires suivies par la valeur de marché de la firme ne sont plus nécessairement continues. Dans ce contexte, Zhou montre que les spreads demeurent significatifs même pour une dette risquée proche de la maturité : les investisseurs demandent une prime permettant de s'assurer contre le risque supplémentaire engendré par les sauts.

12.3 Méthodologie mise en place par K.M.V. Corporation

En introduction de la section 8.1, nous avons présenté les trois composantes du risque de crédit : le risque de défaut, l'incertitude pesant sur le taux de recouvrement, et le risque de dégradation de la qualité de la contrepartie. Ce paragraphe constitue une illustration de la façon dont le risque de défaut est appréhendé par K.M.V. Leur méthodologie se fonde sur le modèle de la firme : à partir de la valeur comptable de la dette d'une entreprise et de l'estimation de sa valeur de marché, K.M.V. calcule *la distance de la firme au défaut* et en déduit, pour un horizon donné, sa probabilité de défaut, notée EDF^{TM} (Expected Default Frequency).

Cette section se fonde essentiellement sur le document [3] de P. Crosbie, publié par K.M.V., consultable sur internet à l'adresse suivante :

<http://www.kmv.com>

12.3.1 Une mesure du risque de défaut : la distance au défaut

Le modèle de Merton laisse entendre qu'une mesure pertinente de la *valeur nette* d'une firme est sa valeur de *marché* moins la valeur *comptable* de sa dette, le défaut intervenant dès que la valeur nette s'annule :

- La valeur de marché des actifs rend compte de la rentabilité espérée de l'activité de l'entreprise. Il s'agit d'une mesure dynamique de sa valeur. Savoir si l'entreprise dispose du cash nécessaire pour faire face à ses engagements n'est dès lors pas fondamental. Si la valeur de marché des actifs est suffisante, l'entreprise peut toujours faire face au paiement de sa dette en vendant une partie de ses actifs. Ce qui compte est donc davantage la valeur espérée de l'entreprise reposant sur son activité future (valeur de marché), que la valeur de l'entreprise résultant de son activité passée (dernière ligne du bilan de l'entreprise).
- Il faut en revanche considérer la valeur comptable de la dette car elle correspond à ce que la firme devra effectivement payer.

Dans la pratique, le défaut peut se produire pour des valeurs nettes négatives. Ceci tient à la nature des engagements de l'entreprise, sa dette pouvant se décomposer en dette à long terme et dette à court terme. La présence d'une dette à long terme dans le bilan de l'entreprise apporte donc une certaine flexibilité. Le *point de défaut* se situe en général entre le montant total de la dette et le montant de la dette de court terme.

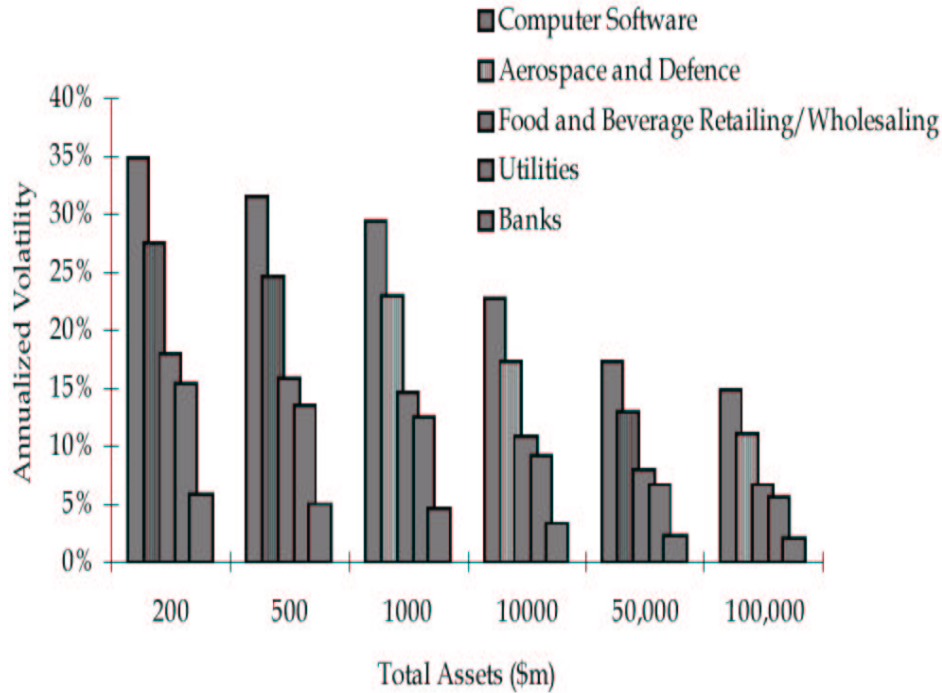
Pour évaluer le risque de défaut, la valeur nette ne peut être considérée indépendamment du risque lié à l'activité de l'entreprise. En effet, il n'est intéressant de connaître l'écart entre la valeur de marché des actifs et le point de défaut que si l'on sait dans quelle mesure il risque d'être comblé. La distance au point de défaut K définie par K.M.V. normalise donc la valeur nette de l'entreprise en la comparant à son écart-type :

$$DD = \frac{V_A - K}{\sigma_A V_A} \quad (12.8)$$

DD correspond au nombre d'écart-type séparant la valeur de marché des actifs du point de défaut. On peut remarquer que cette mesure fait la synthèse des facteurs de risque mis en évidence par le modèle de Merton : elle intègre à la fois le levier et la volatilité des actifs. Notons de plus que la distance au défaut prend en compte l'influence du secteur d'activité, de la zone géographique et de la taille de l'entreprise par l'intermédiaire de la volatilité des actifs. Le graphique 12.3 publié par K.M.V. met en évidence l'impact de deux de ces facteurs sur la volatilité.

- La volatilité des actifs est d'autant plus importante que la taille de l'entreprise est faible. Une grande entreprise peut donc s'endetter davantage qu'une petite entreprise pour financer son activité sans que le risque de crédit associé soit pour autant supérieur.
- De façon analogue, parmi les cinq secteurs d'activité présentés, le secteur bancaire est celui qui autorise les niveaux de levier les plus élevés, le rendement des actifs y étant moins incertain.

La connaissance de la distance au défaut et de la distribution de la valeur des actifs permet de calculer directement les probabilités de défaut.



GRAPHIQUE 12.3. Volatilité des actifs, secteur d'activité et taille de l'entreprise

12.3.2 Estimation de la distance au défaut

Valeur de marché et volatilité des actifs sont deux grandeurs inobservables. K.V.M utilise la vision optionnelle du passif de la firme pour estimer ces deux paramètres. La méthode s'apparente à celle utilisée par les traders de produits dérivés pour déterminer la volatilité implicite d'un sous-jacent à partir de l'observation du prix de marché d'une option.

Dans le modèle de Merton, les actionnaires reçoivent $\max(V_A - B, 0)$ à la maturité T . La valeur de la firme sur le marché des actions est donc le prix d'un call européen de sous-jacent la valeur de marché des actifs et de strike la valeur comptable B de la dette. En supposant, comme le fait Merton, que V_A évolue suivant un processus de diffusion log-normal, on explicite le système de deux équations à deux inconnues permettant d'estimer V_A et σ_A à partir de la valorisation boursière V_E :

$$\begin{cases} V_E = V_A \Phi(d_1) - e^{-rT} B \Phi(d_2) \\ \sigma_E = \frac{V_A}{V_E} \Phi(d_1) \sigma_A \end{cases} \quad (12.9)$$

avec

$$\begin{cases} d_1 = \frac{1}{\sigma_A \sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{V_A}{B}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_A^2\right) T \right) \\ d_2 = d_1 - \sigma_A \sqrt{T} \end{cases} \quad (12.10)$$

Dans la pratique, il convient de prendre en compte la plus grande complexité de la structure capitalistique de l'entreprise. K.M.V détermine donc deux fonctions f_1 et f_2 et résout un système analogue au système (12.9) afin d'estimer V_A et σ_A :

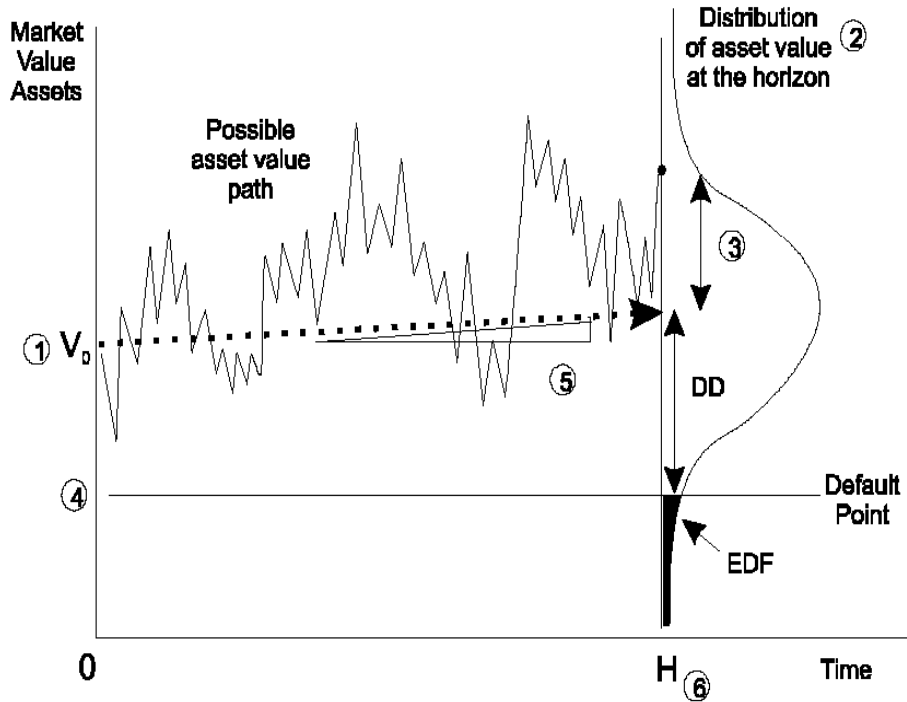
$$\begin{cases} V_E = f_1(V_A, \sigma_A, \text{Structure Capitalistique}, r) \\ \sigma_E = f_2(V_A, \sigma_A, \text{Structure Capitalistique}, r) \end{cases} \quad (12.11)$$

La valeur de marché et la volatilité des actifs ainsi obtenues sont les valeurs implicites déterminées par le marché des actions. Notons que l'on pourrait de façon analogue déterminer V_A et σ_A en utilisant la valorisation de la dette sur les marchés obligataires. Néanmoins, comme nous l'avons déjà souligné à la section 12.1, les marchés obligataires sont beaucoup moins efficaces que les marchés d'actions car les transactions y sont plus rares. L'information que l'on peut obtenir sur les marchés d'actions est donc plus pertinente.

12.3.3 Calcul de l'EDF

La probabilité de défaut pour un horizon H donné correspond à la probabilité que la valeur de marché des actifs de la firme à la date H passe sous le point de défaut. Comme le montre le graphique 12.4, le calcul de l'EDF requiert la connaissance de 5 paramètres :

1. la valeur de marché initiale des actifs ;
2. la fonction de répartition de la valeur des actifs à la maturité H ;
3. la volatilité future des actifs à la date H ;
4. le niveau du point de défaut K (c'est à dire le montant des engagements) à la date H ;
5. le rendement espéré des actifs.



GRAPHIQUE 12.4. Expected default frequency

Dans le modèle de Merton, le système d'équations (12.9) permet d'estimer V_A , la valeur de marché initiale des actifs, et $\sigma_A\sqrt{T}$, la volatilité des actifs à la maturité T . Le rendement espéré α des actifs est supposé connu et le niveau du point de défaut est égal à la valeur faciale B de la dette zéro-coupon. L'équation (12.2) spécifie le processus suivi par la valeur des actifs, si bien que la fonction de répartition des actifs à la maturité est connue :

$$\ln V_A(T) = \ln V_A + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma_A^2 \right) T + \sigma_A\sqrt{T}\varepsilon \text{ avec } \varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1) \quad (12.12)$$

La distance au défaut de la firme à la date T s'écrit donc

$$DD = \frac{\ln\left(\frac{V_A}{B}\right) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma_A^2\right) T}{\sigma_A\sqrt{T}} \quad (12.13)$$

et la probabilité de défaut $P(T)$ vaut

$$P(T) = \mathbb{P}(V_A(T) \leq B \mid V_A(0) = V_A) = \Phi(-DD) \quad (12.14)$$

Dans la pratique, la probabilité de défaut ne peut pas être calculée en supposant une distribution gaussienne de la valeur des actifs. La principale raison est que, contrairement à ce que l'on a supposé

jusqu'à présent, le point de défaut n'est pas déterministe : une firme proche d'une situation de défaut cherchera à ajuster le niveau de sa dette. En général, on observe que l'endettement des entreprises commerciales ou industrielles s'accroît lorsque la situation se détériore tandis que l'endettement des institutions financières diminue. Ceci est dû à la plus ou moins grande liquidité des actifs de l'entreprise : plus les actifs sont liquides plus il est facile pour une entreprise d'ajuster le niveau de son levier en cas de difficulté.

Par conséquent, K.M.V relie directement la distance au défaut à la probabilité de défaut en se fondant sur des données empiriques : leur base de données contient environ 100 000 entreprises et 2000 incidents de défaut par an. Ainsi, pour calculer la probabilité de défaut à 1 an d'une entreprise distante du point de défaut de 7 écarts-type, K.M.V calcule la proportion d'entreprises présentes dans leur base, distante du point de défaut de 7 écarts-type et ayant fait défaut sous un an.

Les graphiques suivants fournis par K.M.V illustrent dans deux cas différents la façon dont se comporte l'EDF, et son aptitude à anticiper le défaut. En particulier, ces deux exemples montrent bien l'importance des données de marché dans la calibration des modèles. Dans le cas de Bangkok Metropolitan Bank, l'EDF n'a cessé de croître depuis juillet 1993 jusqu'à janvier 1998, date de défaut de la banque. En revanche, dans le cas de Burns Philip, une entreprise australienne du secteur agro-alimentaire, l'EDF n'a pas su anticiper la dégradation de la situation de l'entreprise : le marché s'est laissé surprendre, il n'a pris conscience de la surévaluation de la firme qu'en juillet 1997.

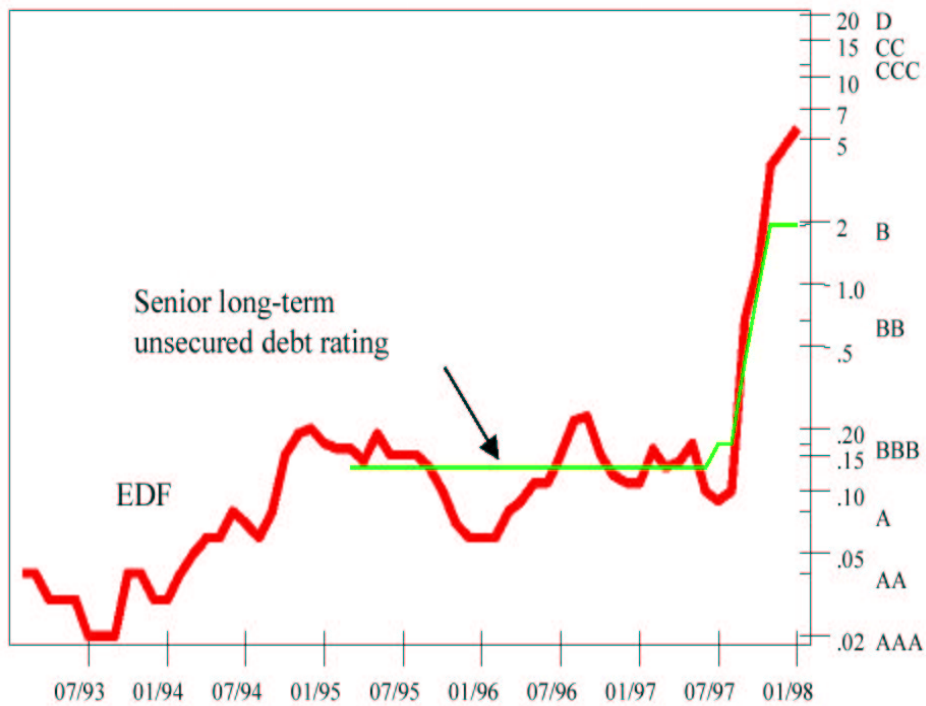


GRAPHIQUE 12.5. EDF de Bangkok Metropolitan Bank

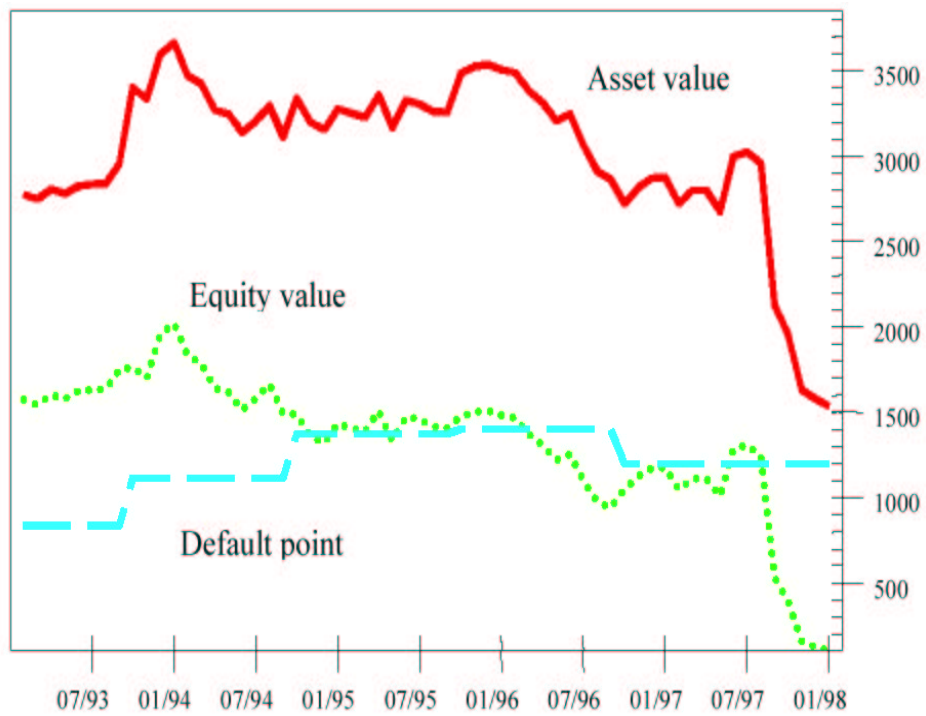
En résumé, l'approche structurelle du risque de crédit permet d'évaluer de façon assez performante le risque de défaut des entreprises pour deux raisons :

- la structure capitalistique de l'entreprise (levier) est prise en compte ;
- l'évaluation des probabilités de défaut est réalisée à partir de l'information de marché la plus pertinente : la valorisation boursière des entreprises.

Néanmoins cette approche est très difficile à implémenter car elle nécessite de nombreux paramètres en entrée qui sont soit inobservables, soit difficilement accessibles. C'est pourquoi, au cours des années 1990, un deuxième type de modèle est apparu, dont l'objectif principal est de limiter les inputs aux données observables sur les marchés.



GRAPHIQUE 12.6. EDF de Burns Philip



GRAPHIQUE 12.7. Valeur de marché de Burns Philip

12.4 Une application : le modèle CreditMetrics

Le modèle CreditMetrics sera développé dans le cours “Gestion des Risques Multiples”.

Bibliographie

- [1] BLACK, F. and M. SCHOLES [1973], The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, **81**, 637-659
- [2] BLACK, F. and J. COX [1976], Valuing corporate securities : some effects of bond indenture provisions, *Journal of Finance*, **31**, 351-367
- [3] CROSBIE, P. [1997], Modeling default risk, K.M.V., *Working Paper*
- [4] DUFFEE, G.R. [1998], The relation between treasury yields and corporate bond yield spreads, *Journal of Finance*, **53(6)**, 2225-2241
- [5] GESKE, R. [1977], The valuation of corporate liabilities as compound options, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, **12(4)**, 541-552
- [6] LELAND, H. [1994], Corporate debt value, bond covenants, and optimal capital structure, *Journal of Finance*, **49**, 1213-1252
- [7] LELAND, H. and K. TOFT [1996], Optimal capital structure, endogenous bankruptcy, and the term structure of credit spreads, *Journal of Finance*, **51**, 987-1019
- [8] MERTON, R.C. [1974], On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates, *Journal of Finance*, **29**, 449-470
- [9] ZHOU, C. [1997], A jump-diffusion approach to modeling credit risk and valuing defaultable securities, Federal Reserve Board, *Working Paper*

13

L'approche actuarielle de CreditRisk+

Ce modèle proposé par Credit Suisse Financial Product (CSFP) apparaît comme une alternative aux deux principales méthodologies rencontrées sur le marché, à savoir celles de J.P. Morgan et de KMV. Ce modèle est fondé sur une approche probabiliste du processus de défaut de paiement d'une contrepartie sans faire aucune hypothèse sur la cause du défaut. Le modèle CreditRisk+ considère le taux de défaut comme une variable aléatoire continue. La prise en compte d'une volatilité du taux de défaut associée à une analyse par secteur permettent de rendre compte à la fois de l'incertitude du niveau de défaut et des éventuelles corrélations existant entre plusieurs obligations. Ce choix s'explique d'après CSFP par l'instabilité des corrélations de défaut et par le manque de données empiriques pour suivre la démarche proposée par CreditMetrics.

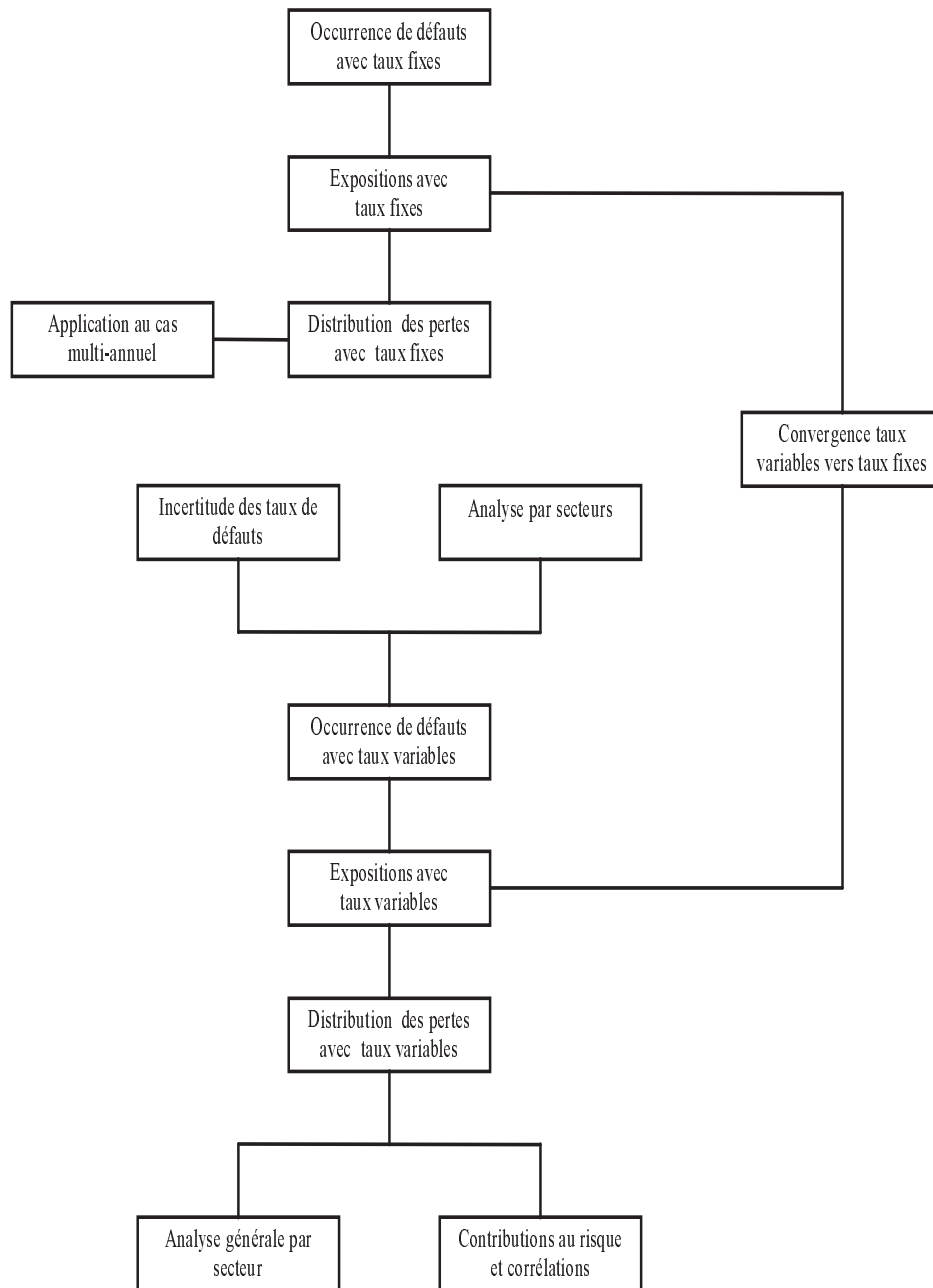
En appliquant des techniques mathématiques plus souvent rencontrées dans le domaine de l'assurance que dans celui de la finance, ce modèle cerne les caractéristiques essentielles de l'occurrence de défauts de paiement et permet un calcul explicite de la distribution des pertes d'un portefeuille comportant un risque de crédit.

13.1 La démarche

les concepts clés qui sont à la base de CreditRisk+ sont les suivants :

- Les taux de défaut sont stochastiques.
- Le niveau du taux de défaut a une incidence sur l'occurrence du défaut, mais il n'y a pas de relations causales entre ces occurrences.

Le modèle est alors structuré selon le schéma 13.1. La démarche suivie focalise tout d'abord son étude sur un modèle simplifié dans lequel la volatilité des taux de défaut n'est pas prise en compte. Une fois la distribution des pertes obtenue dans un cas simple, on intègre cette volatilité dans le processus, ce qui au vu des résultats correspond à une dimension aléatoire supplémentaire et donc à une simple composition de lois de probabilités. On montre alors l'existence de cas où le modèle à volatilité converge vers le cas simple. Finalement, on étend la première approche sectorielle à un cas plus complet. On est alors en mesure d'exploiter les résultats, notamment pour déterminer les différentes contributions au risque d'un portefeuille des émetteurs qui le composent ou les corrélations des taux de défaut entre ces mêmes émetteurs.



GRAPHIQUE 13.1. Organigramme de la démarche suivie par CreditRisk+

13.2 Modélisation à taux de défaut fixes

13.2.1 Occurrence de défauts

Les défauts de crédits ne peuvent pas être prévus ni dans leur date, ni dans leur nombre, si bien que CreditRisk+ tente de modéliser globalement le risque crédit d'un portefeuille.

Nous considérons un portefeuille composé de N obligations. Nous supposons dans cette partie que chacun de ces titres est sujet à une probabilité de défaut à un horizon de un an connue. Ainsi, nous avons

$$P_A = \text{Probabilité annuelle de défaut pour } A \quad (13.1)$$

On introduit alors la fonction génératrice associée au nombre D de défauts survenus parmi les obligations du portefeuille :

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(D = n) \cdot z^n \quad (13.2)$$

Or, chaque émetteur fait ou ne fait pas défaut ; la fonction génératrice d'un portefeuille composé d'une unique obligation s'obtient donc facilement :

$$F_A(z) = 1 - P_A + P_A \cdot z = 1 + P_A \cdot (z - 1) \quad (13.3)$$

De plus, les événements sont supposés indépendants, ce qui induit

$$F(z) = \prod_A F_A(z) = \prod_A (1 + P_A \cdot (z - 1)) \quad (13.4)$$

ce qui revient à écrire

$$\ln F(z) = \sum_A \ln(1 + P_A \cdot (z - 1)) \quad (13.5)$$

Or, nous pouvons raisonnablement penser que les probabilités sont suffisamment faibles pour approximer cette dernière expression par un développement limité au premier ordre, ce qui se traduit par :

$$F(z) = \exp\left(\sum_A P_A \cdot (z - 1)\right) = \exp(\mu \cdot (z - 1)) \quad (13.6)$$

avec

$$\mu = \sum_A P_A \quad (13.7)$$

μ représente en fait le nombre moyen de défauts attendus en un an parmi les émissions du portefeuille considéré. On remarque de plus que la dernière expression peut s'écrire sous une autre forme, grâce aux séries entières, ce qui donne une formule explicite de la répartition de la variable aléatoire D :

$$F(z) = \exp(\mu \cdot (z - 1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} z^n \quad (13.8)$$

d'où

$$P(D = n) = \frac{e^{-\mu} \mu^n}{n!} \quad (13.9)$$

Finalement, sous les hypothèses faites plus haut, le nombre de défaut à survenir suit une loi de Poisson de paramètre μ . Ce paramètre est l'unique inconnue du modèle, il ne dépend ni du nombre de titres présents dans le portefeuille ni des probabilités individuelles de défaut de chaque obligation, pourvu qu'elles soient suffisamment petites pour valider les approximations effectuées. Reste à noter, pour la suite, qu'une loi de Poisson de paramètre μ a pour moyenne μ et pour écart-type $\sqrt{\mu}$.

Evidemment, les hypothèses faites ne sont pas satisfaisantes et ne cadrent pas avec la réalité. Toutefois, ces résultats seront utiles pour la suite, notamment pour le passage à des taux variables et à l'introduction de volatilité des taux de défauts.

13.2.2 Pertes de défaut

L'objectif principal est de quantifier le risque de perte d'un portefeuille. Or, un même niveau de perte peut être obtenu par un seul "gros" défaut aussi bien que pour de nombreux "petits" défauts. Cette constatation a incité CSFP à regrouper les émissions contenues dans un portefeuille par tranche d'exposition. Ceci a pour effet de réduire considérablement le nombre de données à l'entrée pour l'implémentation. Cette approximation sera d'autant plus légitime que les tranches d'expositions seront nombreuses et étroites en comparaison avec l'exposition moyenne du portefeuille. Ainsi, ces approximations seront utiles sans pour autant modifier significativement les résultats.

On adopte les notations suivantes :

Référence	Notation
Émetteur	A
Exposition	L_A
Probabilité de défaut	P_A
Pertes attendues	λ_A

L'exposition et les pertes attendues sont exprimées en L , qui représente une unité arbitraire choisie, si bien que pour chaque émetteur A , on définit ε_A et ν_A de la manière suivante :

$$L_A = \nu_A \times L \quad (13.10)$$

et

$$\lambda_A = \varepsilon_A \times L \quad (13.11)$$

Le passage important est d'arrondir chaque ν_A à l'entier le plus proche. Ainsi, pour un gros portefeuille, un choix adapté de L permettra de réduire à un nombre relativement petit les valeurs ν_A partagées par plusieurs émissions. Le portefeuille se retrouve alors divisé en m tranches d'exposition, indexée par j , ce qui revient à ne retenir que les notations suivantes :

Référence	Notation
Exposition commune dans la tranche j en L	ν_j
Pertes attendues dans la tranche j en L	ε_j
Nombre de défaut attendu dans la tranche j	μ_j

De plus, ces trois variables sont reliées par la relation suivante

$$\varepsilon_j = \mu_j \times \nu_j \quad (13.12)$$

donc

$$\mu_j = \frac{\varepsilon_j}{\nu_j} = \sum_{A|\nu_A=\nu_j} \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} \quad (13.13)$$

Nous utiliserons aussi par la suite

$$\mu = \sum_{j=1}^m \mu_j = \sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j}{\nu_j} \quad (13.14)$$

13.2.2.1 Procédure de calcul et distribution des pertes

On adopte ici le même point de vue que pour le nombre de défauts ; on définit la distribution des pertes agrégées à travers sa fonction génératrice

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\text{Pertes agrégées} = n \times L) \cdot z^n \quad (13.15)$$

Nous faisons alors intervenir le fait que les titres ont été regroupés par niveau d'exposition, et que les tranches sont indépendantes entre elles, ce qui s'écrit de manière plus formalisée :

$$G(z) = \prod_{j=1}^m G_j(z) \quad (13.16)$$

On considère alors chaque tranche comme un portefeuille à part entière, et on applique le résultat suivant où on note D_j la variable aléatoire rendant compte du nombre de défaut à survenir dans la tranche j

$$G_j(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P(D_j = n) \cdot z^{n\nu_j} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu_j} \mu_j^n}{n!} z^{n\nu_j} = \exp(-\mu_j + \mu_j z^{\nu_j}) \quad (13.17)$$

et donc, en revenant au portefeuille global

$$G(z) = \exp\left(-\sum_{j=1}^m \mu_j + \sum_{j=1}^m \mu_j z^{\nu_j}\right) \quad (13.18)$$

C'est la formule désirée qui nous renseigne sur la distribution des risques crédits du portefeuille.

On remarque que si on pose $P(z)$ le polynôme

$$P(z) = \frac{1}{\mu} \sum_{j=1}^m \mu_j z^{\nu_j} = \frac{\sum_{j=1}^m \binom{\varepsilon_j}{\nu_j} z^{\nu_j}}{\sum_{j=1}^m \binom{\varepsilon_j}{\nu_j}} \quad (13.19)$$

la fonction génératrice des pertes agrégées se présente alors sous la forme

$$G(z) = \exp(\mu \cdot (P(z) - 1)) = F(P(z)) \quad (13.20)$$

$G(z)$ s'exprime alors comme la composée de deux sources d'incertitude : la loi de Poisson du nombre de défauts et la variabilité des montants d'exposition. On remarque également qu'elle ne dépend que de deux types de données ν et ε . Ainsi, les seules entrées nécessaires à la mesure du risque crédit d'un portefeuille sont la connaissance des différentes tailles d'exposition et les pertes attendues pour chaque taille. CSFP estime que cela représente peu d'efforts, même pour un portefeuille assez important.

Toutefois, la dernière expression de la fonction génératrice n'est pas très maniable et ne nous renseigne pas explicitement sur la distribution des pertes. Aussi, on est amené à déterminer les probabilités associées à une perte de $n \times L$ par un autre algorithme. En effet d'après l'expression (13.15), on a :

$$P(\text{Pertes agrégées} = n \times L) = \frac{1}{n!} \frac{d^n G}{dz^n}(0) = A_n \quad (13.21)$$

On applique alors successivement la formule de Leibnitz pour obtenir une formule de récurrence nous permettant de calculer A_n :

$$\begin{cases} A_0 &= G(0) = \exp(-\mu) = \exp\left(-\sum_{j=1}^m \frac{\varepsilon_j}{\nu_j}\right) \\ A_n &= \sum_{j|\nu_j \leq n} \frac{\varepsilon_j}{n} A_{n-\nu_j} \end{cases} \quad (13.22)$$

13.2.2.2 Application au cas multi-annuel

Il peut sembler plus intéressant de considérer l'étude du risque de crédit d'un portefeuille sur une période plus longue qu'une année. En effet, la maturité d'un portefeuille pourrait sembler être un horizon légitime. Dans cet optique, il faut être capable d'adapter les expressions précédentes à ce cas multi-annuel, moyennant la définition de notations plus adaptées :

Référence	Notation
Exposition commune dans la tranche j en L pendant l'année t	$\nu_j^{(t)}$
Pertes attendues dans la tranche j en L pendant l'année t	$\varepsilon_j^{(t)}$
Nombre de défaut attendu dans la tranche j pendant l'année t	$\mu_j^{(t)}$

Alors, en supposant les événements de différentes années indépendants, on applique les résultats obtenus précédemment, d'où

$$G(z) = \exp \left(\sum_{t,j} \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{\nu_j^{(t)}} (z^{\nu_j^{(t)}} - 1) \right) \quad (13.23)$$

ce qui implique une relation de récurrence semblable à la précédente :

$$\begin{cases} A_0 &= G(0) = \exp(-\mu) = \exp \left(- \sum_{j,t} \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{\nu_j^{(t)}} \right) \\ A_n &= \sum_{j,t | \nu_j^{(t)} \leq n} \frac{\varepsilon_j^{(t)}}{n} A_{n-\nu_j^{(t)}} \end{cases} \quad (13.24)$$

13.3 Passage à des taux de défaut aléatoires

13.3.1 Incertitude des taux de défaut

Jusqu'ici, nous n'avons considéré que des portefeuilles composés d'obligations dont le taux de défaut était connu et fixe. CreditRisk+ prend en compte le fait que ces taux sont difficiles à déterminer et sont sujets à une variabilité non négligeable pour des titres semblables. De plus, les statistiques publiées sur la fréquence des défauts montrent des variations assez importantes d'une année sur l'autre. La situation se résume alors en trois points :

- Les probabilités de défaut sont volatiles dans le temps, même pour des émetteurs de qualité crédit comparable.
- La variabilité des probabilités de défaut peut être expliquée par des variabilités sous-jacentes d'un petit nombre de variables liées à l'environnement économique.
- Un changement dans l'économie ou d'un autre facteur ayant de l'influence sur la variabilité des taux de défaut ne doit pas nécessairement induire un défaut. Le défaut d'une contrepartie est un événement rare.

13.3.2 Analyse par secteur

Le second point énoncé souligne l'existence de facteurs susceptibles d'agir sur la qualité crédit de plusieurs émissions à la fois. Pour mesurer cet effet, et donc être en mesure de quantifier l'impact des volatilités des taux de défaut individuelles au niveau du portefeuille, CSFP a eu recours à une analyse par secteur. L'économie est alors divisée en K secteurs, et CreditRisk+ suppose que chaque secteur peut être modélisé par un unique facteur sous-jacent. C'est ce facteur qui nous permettra d'expliquer la variabilité dans le temps du nombre total de défaut mesuré pour ce secteur.

Pour chaque secteur k , nous introduisons une variable aléatoire x_k qui représente le nombre moyen de défauts dans ce secteur. L'espérance de x_k sera notée μ_k , et l'écart-type σ_k .

Variable par secteur	Notation
Unité d'exposition au risque	L
Tranche d'exposition	$L_j^{(k)} = \nu_j^{(k)} \times L$ ($1 \leq k \leq K$ et $1 \leq j \leq m(k)$)
Pertes attendues dans chaque tranche d'exposition	$\lambda_j^{(k)} = \varepsilon_j^{(k)} \times L$ ($1 \leq k \leq K$ et $1 \leq j \leq m(k)$)

Sous ces nouvelles notations, on a donc :

$$\mu_k = \sum_{j=1}^{m(k)} \frac{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} = \sum_{A \in k} \frac{\varepsilon_A}{\nu_A} \quad (13.25)$$

où $\frac{\varepsilon_A}{\nu_A}$ est la probabilité de défaut sur la période de A . Pour obtenir une estimation semblable de l'écart-type du taux de défaut pour chaque secteur, on est contraint d'assigner un écart-type pour le taux de défaut de chaque émetteur du secteur considéré. Une manière pratique de faire cela revient à supposer que cet écart-type dépend de la qualité crédit de l'émetteur. On obtient donc σ_k à partir des σ_A , sachant que la probabilité de défaut de chaque émetteur appartenant au secteur k sera considérée comme proportionnelle à la variable aléatoire x_k , ce qui s'écrit :

$$x_A = \frac{\varepsilon_A x_k}{\nu_A \mu_k} \quad (13.26)$$

On peut noter que l'espérance de x_A vaut $\frac{\varepsilon_A}{\nu_A} = P_A$. Nous sommes alors en mesure de lier les σ_A à σ_k selon l'équation suivante :

$$\sum_{A \in k} \sigma_A = \sum_{A \in k} \frac{\varepsilon_A \sigma_k}{\nu_A \mu_k} = \sigma_k \quad (13.27)$$

Les statistiques montrent que le ratio $\frac{\sigma_A}{P_A}$ est de l'ordre de 1, si bien que l'écart-type du nombre de défauts parmi les émetteurs d'un même groupe de qualité crédit est du même ordre que le nombre moyen annuel de défauts. C'est la même chose à l'échelle du secteur, comme le montre la relation suivante :

$$\frac{\sigma_k}{\mu_k} = \frac{\sum_{A \in k} \sigma_A}{\sum_{A \in k} P_A} = \frac{\sum_{A \in k} P_A \left(\frac{\sigma_A}{P_A} \right)}{\sum_{A \in k} P_A} \quad (13.28)$$

Ainsi, en l'absence de données suffisamment détaillées, les estimations caractéristiques de chaque émetteur $\frac{\sigma_A}{P_A}$ peuvent être remplacés par un unique ratio ϖ_k pour le secteur, ce qui induit alors :

$$\sigma_k = \varpi_k \times \mu_k \quad (13.29)$$

Chercher à estimer σ_k est alors équivalent à estimer ϖ_k .

13.3.3 Occurrence de défauts

En suivant la même démarche que précédemment, et en incluant la volatilité du taux de défaut dans le modèle, on obtient une fonction génératrice du nombre de défauts du type :

$$F(z) = \prod_{k=1}^K F_k(z) = \prod_{k=1}^K \int_{x=0}^{\infty} \exp(x \cdot (z-1)) f_k(x) dx \quad (13.30)$$

où $f_k(x)$ est la densité de la variable x_k . Pour prolonger les calculs, il est alors nécessaire de donner une loi de distribution à x_k . CreditRisk+ conseille de choisir une loi Gamma de moyenne μ_k et d'écart-type σ_k . Sous ces hypothèses $f_k(x)$ est alors défini de la manière suivante :

$$P(x \leq x_k \leq x + dx) = f_k(x) dx = \frac{1}{\beta_k^{\alpha_k} \Gamma(\alpha_k)} \exp\left(-\frac{x}{\beta_k}\right) x^{\alpha_k-1} dx \quad (13.31)$$

où $\alpha_k = \frac{\mu_k^2}{\sigma_k^2}$, $\beta_k = \frac{\sigma_k^2}{\mu_k}$ et $\Gamma(\alpha) = \int_{x=0}^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx$.

Après simplification et en notant $p_k = \frac{\beta_k}{1+\beta_k}$, on obtient l'expression suivante :

$$F_k(z) = \left(\frac{1-p_k}{1-p_k z} \right)^{\alpha_k} = (1-p_k)^{\alpha_k} \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+\alpha_k-1}{n} p_k^n z^n \quad (13.32)$$

On en déduit que

$$P(D_k = n) = (1-p_k)^{\alpha_k} \binom{n+\alpha_k-1}{n} p_k^n \quad (13.33)$$

D_k qui est le nombre de défaut dans le secteur k suit donc une Loi Binomiale Négative.

13.3.4 Distribution des pertes de défaut

13.3.4.1 Pertes de défaut

Nous reprenons l'approche définie dans le cas où les taux de défaut étaient fixes, et nous généralisons ce procédé en y incorporant la volatilité de ces taux de défauts. On obtient alors des expressions semblables à celles rencontrées plus haut :

$$G(z) = \prod_{k=1}^K G_k(z) = \prod_{k=1}^K F_k(P_k(z)) = \prod_{k=1}^K \int_{x=0}^{\infty} e^{x(P_k(z)-1)} f_k(x) dx \quad (13.34)$$

où

$$P_k(z) = \frac{\sum_{j=1}^{m(k)} \binom{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} z^{\nu_j^{(k)}}}{\sum_{j=1}^{m(k)} \binom{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}}} = \frac{1}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \binom{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} z^{\nu_j^{(k)}} \quad (13.35)$$

Et là encore les intégrales peuvent être calculées, ce qui abouti à l'expression analytique suivante :

$$G(z) = \prod_{k=1}^K \left(\frac{1 - p_k}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \binom{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} z^{\nu_j^{(k)}}} \right)^{\alpha_k} \quad (13.36)$$

13.3.4.2 Relation de récurrence

Pour être suffisamment exploitable, la fonction génératrice doit être mise sous forme de série entière où les probabilités associées aux pertes sont lues sans aucun effort. Or, pour arriver à cette forme, on est amené à traiter la dernière expression obtenue de $G(z)$ et mettre en évidence les coefficients A_n définis de la même manière que ceux rencontrés plus haut. Le fait que $G(z)$ se présente sous la forme de fractions rationnelles nous facilite la tâche. en effet, il existe de nombreuses méthodes pour transformer une fraction rationnelle et la présenter sous forme de polynôme de degré infini. Ces algorithmes sont plutôt techniques et ne méritent pas d'être détaillés ici. Ils semblent, en outre, ne pas poser de difficultés particulières. Il est en effet préférable de livrer le type de raisonnement suivi et la relation de récurrence à laquelle on aboutit après la mise en œuvre d'un de ces algorithmes. Ainsi, on cherche les A_n tels que :

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \quad (13.37)$$

Or, si $G(z)$ vérifie une relation du type :

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \frac{A(z)}{B(z)} \quad (13.38)$$

où $A(z)$ et $B(z)$ sont respectivement deux polynômes de la forme suivante :

$$\begin{aligned} A(z) &= a_0 + \dots + a_r z^r \\ B(z) &= b_0 + \dots + b_s z^s \end{aligned} \quad (13.39)$$

alors les coefficients A_n vérifient la relation de récurrence

$$A_{n+1} = \frac{1}{b_0(n+1)} \left(\sum_{i=0}^{\min(r,n)} a_i A_{n-i} - \sum_{l=0}^{\min(s-1,n-1)} b_{l+1} (n-l) A_{n-l} \right) \quad (13.40)$$

On applique alors cette relation, sachant que $G(z)$ vérifie la condition sur sa dérivé logarithmique. En effet, nous avons

$$\frac{G'(z)}{G(z)} = \sum_{k=1}^K \frac{\frac{p_k \alpha_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \varepsilon_j^{(k)} z^{\nu_j^{(k)} - 1}}{1 - \frac{p_k}{\mu_k} \sum_{j=1}^{m(k)} \binom{\varepsilon_j^{(k)}}{\nu_j^{(k)}} z^{\nu_j^{(k)}}} \quad (13.41)$$

On applique alors la relation de récurrence, après avoir réduit au même dénominateur la dernière expression. Evidemment, un choix judicieux de L , l'unité d'exposition, permettrait de réduire le degré du polynôme $B(z)$ de telle sorte que les calculs soient plus faciles à traiter. On se retrouve alors en possession de la forme explicite de la distribution des pertes du portefeuille.

13.4 Conclusion

Tout d'abord, notons que cette approche peut être généralisée en considérant l'éventuelle appartenance d'un émetteur à plusieurs secteurs. On fait alors intervenir des coefficients $\theta_{A,k}$ qui pour chaque émission A donne la proportion de l'influence de son taux de défaut par la variable x_k . En généralisant de la sorte, on accorde à tous les titres d'être dépendants de plusieurs secteurs. Cette hypothèse est traitée dans CreditRisk+, qui donne alors le processus et la nouvelle distribution des pertes encourus.

Remarquons, de plus, que la notion de corrélation n'apparaît pas explicitement dans le modèle, mais est pris en compte indirectement dans les volatilités de chaque secteur et éventuellement dans le profil des coefficients $\theta_{A,k}$. On peut toutefois calculer les contributions marginales de chacun des titres ainsi que les corrélations entre ces mêmes titres a posteriori. Les étapes nécessaires pour aboutir à ces corrélations et à ces contributions ne sont pas présentées ici mais le sont dans CreditRisk+.

Le principal reproche adressé à CSFP réside dans le fait que leur modèle ignore la possibilité d'un changement de spread des titres composant le portefeuille sans pour autant observer un quelconque défaut. Par analogie avec CreditMetrics, ce modèle ne tient pas compte de la perte ou du gain de valeur du portefeuille provoqués par des changements de rating. Ce modèle semble, en fait, s'adapter au cas de banques accordant des crédits, et cherchant à se couvrir contre un certain niveau de risque dû au défaut de paiement d'une contrepartie. Mais cet outil ne convient pas à une gestion de portefeuille qui a pour vocation d'être assez liquide et qui tire son rendement des spreads des titres qui le composent.

Bibliographie

- [1] Credit Suisse Financial Products [1997], CreditRisk+ : A credit Risk Management Framework, London

L'approche Intensité : une approche sous forme réduite

L'approche sous *forme réduite* ne s'intéresse pas aux raisons économiques du défaut : ce type d'approche envisage le défaut comme un évènement imprévisible. Le lien entre la structure de l'entreprise, la valorisation boursière et le risque de défaut n'est pas exhibé. Les modèles à intensité s'intéressent davantage aux données que l'on peut trouver sur les marchés de crédit : les spreads de taux en sont le principal input.

Comme nous l'avons déjà souligné, ce type de modèle est confronté au problème d'absence de liquidité sur le marché obligataire des grandes entreprises. Il est dès lors peu probable qu'une évaluation risque-neutre des actifs conduise à des prix correspondant aux prix observés sur le marché.

De plus, si les spreads observés sur le marché peuvent être utilisés pour calibrer les modèles, il convient néanmoins de déterminer la composante liée au risque de défaut : liquidité, taxation, risque de marché, zone géographique sont autant de facteurs pouvant intervenir dans la formation des spreads.

14.1 Cadre de l'analyse

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

- \mathbb{P} est une probabilité risque neutre pour laquelle les prix des actifs financiers sont égaux aux espérances de leurs payoffs futurs actualisés. Une telle hypothèse suppose l'absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché avec défaut.
- \mathbb{F} correspond à la filtration engendrée par les prix des actifs financiers (dont les spreads de taux) ; la tribu \mathcal{F}_t représente l'information disponible sur le marché à la date t .

Le taux d'intérêt non risqué à court terme est modélisé par un processus r \mathbb{F} -adapté. $B_t = \exp\left(\int_0^t r_u du\right)$ correspond au facteur de capitalisation.

Pour une maturité $T > 0$ donnée, on représente par une variable aléatoire X \mathcal{F}_T -mesurable le montant auquel a droit le détenteur d'un actif risqué à la date T , à condition que le défaut ne se soit pas produit. Le payoff en cas de défaut est modélisé par un processus Z \mathbb{F} -prévisible. Il s'agit donc du processus de recouvrement.

Notons que l'hypothèse faite ici est très forte et loin d'être vérifiée sur les marchés : supposer que Z est \mathbb{F} -prévisible revient à dire qu'il est possible de couvrir le risque lié au recouvrement à partir de produits disponibles sur le marché. Ceci n'est certainement pas le cas, notamment lorsqu'une procédure

de liquidation judiciaire est mise en place : le montant recouvré dépendra de la façon dont la procédure se déroulera.

L'instant avant défaut est modélisé par une variable aléatoire τ définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$. On introduit le processus de saut H associé à $\tau : H_t = \mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}, \forall t \in \mathbb{R}_+$, et on définit $\mathbb{H} = (\mathcal{H}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ comme la filtration engendrée par ce processus : $\mathcal{H}_t = \sigma(H_u, u \leq t), \forall t \in \mathbb{R}_+$.

L'observation des données de marché montre qu'il est impossible de dire avec certitude si le défaut est survenu ou non uniquement à partir de celles-ci. En effet, il se peut très bien qu'à une date donnée, deux obligations aient un prix identique alors même que l'un des deux émetteurs vient de faire défaut. Mathématiquement, cela signifie que $\mathcal{F}_t \not\subseteq \mathcal{H}_t : \tau$ n'est pas un \mathbb{F} -temps d'arrêt.

Si l'occurrence du défaut ne peut pas se lire dans les prix de marché, on peut néanmoins supposer que les opérateurs financiers disposent de cette information par un autre biais. Autrement dit, à une date t donnée, l'information disponible peut être modélisée par la tribu $\mathcal{G}_t = \sigma(\mathcal{F}_u, \mathcal{H}_u, u \leq t)$. On note $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{H}$ la filtration associée. Le temps de défaut est alors un \mathbb{G} -temps d'arrêt.

A la date t , les opérateurs financiers disposent de deux types d'information bien distincts :

- D'une part, ils savent si le défaut est survenu ou non. Cette information est contenue dans la tribu \mathcal{H}_t .
- D'autre part, ils ont accès à ce que l'on a appelé dans un premier temps l'information de marché (provenant des prix). Cette information, modélisée par \mathcal{F}_t , permet de formuler des hypothèses sur la qualité de l'émetteur de la dette. Il s'agit donc de l'information *utile*, si le défaut ne s'est pas encore produit, pour établir le prix de la dette risquée à la date t . Dès lors, \mathcal{F}_t ne se réduit pas forcément aux prix de marché, elle peut contenir toute information permettant une meilleure appréciation de la qualité de la contrepartie (notes de rating par exemple).

14.1.1 Définition de l'intensité de survie

La décomposition de \mathbb{G} en deux sous-filtrations \mathbb{F} et \mathbb{H} permet d'isoler l'information pertinente pour le calcul des probabilités de défaut. En particulier, on peut construire le processus $F_t = \mathbb{P}(\tau \leq t | \mathcal{F}_t), \forall t \in \mathbb{R}_+$: F est bien défini car τ n'est pas \mathbb{F} -adapté. Il s'agit d'une \mathbb{F} -sous-martingale positive bornée, que l'on peut par conséquent supposer continue à droite. F_t traduit les croyances du marché à la date t concernant la possible occurrence du défaut avant cette date. Notons que l'incertitude des marchés pesant sur l'apparition du défaut se traduit par $F_t < 1 \forall t \in \mathbb{R}_+$. On peut dès lors définir le *processus de hazard* Γ associé au temps de défaut $\tau : \Gamma_t = -\ln(1 - F_t), \forall t \in \mathbb{R}_+$.

A chaque instant, on sait si le défaut s'est produit ou non. Par contre, s'il ne s'est pas produit, les opérateurs financiers forment des hypothèses à partir des données de marché. Ceci se traduit de façon mathématique par la relation suivante :

$$\forall t < s, \mathbb{P}(\tau > s | \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{\Gamma_t - \Gamma_s} | \mathcal{F}_t) \quad (14.1)$$

Dans l'hypothèse où Γ est un processus *absolument continu*, il existe un processus \mathbb{F} -progressivement mesurable tel que $\Gamma_t = \int_0^t \gamma_u du$. La relation (14.1) peut donc se réécrire

$$\forall t < s, \mathbb{P}(\tau > s | \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(e^{-\int_t^s \gamma_u du} | \mathcal{F}_t\right) \quad (14.2)$$

La signification intuitive de γ apparaît ici : il s'agit de l'*intensité de survie* (ou encore *intensité de défaut*) sachant le flux d'information de marché $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Si de plus, on suppose que Γ est un processus *croissant* (i.e. $\gamma > 0$), alors le processus m défini par

$$m_t = H_t - \int_0^{t \wedge \tau} \gamma_u du, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (14.3)$$

est une \mathbb{G} -martingale. Cette propriété est particulièrement importante car elle permet d'établir une nouvelle représentation du prix de la dette risquée. De plus, historiquement, c'est à partir de cette propriété que l'intensité de défaut a été définie (cf. DUFFIE, SCHRODER et SKIADAS [1996]).

14.1.2 Une autre approche de l'intensité de défaut

La décomposition de la filtration \mathbb{G} en deux sous-filtrations \mathbb{F} et \mathbb{H} a permis de mettre en évidence le processus γ . Néanmoins, si l'on raisonne sans prendre en compte cette décomposition, on peut montrer¹ qu'il existe un processus λ positif \mathbb{G} -adapté tel que le processus M défini par

$$M_t = H_t - \int_0^{t \wedge \tau} \lambda_u du, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad (14.4)$$

est une \mathbb{G} -martingale.

En général, l'intensité de défaut est définie à partir de ce processus λ . Néanmoins, l'interprétation de λ reste difficile. En particulier on ne peut rien dire de la relation existant entre λ et l'intensité de survie γ . Il se peut par exemple que le processus λ soit défini sans que γ existe. De plus, la caractérisation du processus λ reste problématique dans la mesure où il n'est défini de façon unique que jusqu'à l'instant de défaut τ .

Compte tenu de ce que l'on a dit jusqu'ici, on sait que si Γ est un processus croissant absolument continu, alors $\lambda_{t \wedge \tau} = \gamma_{t \wedge \tau}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$. L'intérêt de la décomposition de \mathbb{G} en deux sous-filtrations \mathbb{F} et \mathbb{H} apparaît à nouveau ici : elle met en évidence de façon assez intuitive la signification de l'intensité de défaut λ , λ étant l'objet mathématique généralement introduit dans les modèles à intensité.

Par la suite, nous définirons l'intensité de défaut à partir de ce processus λ . Pour de plus amples développements concernant les liens entre les processus λ et γ , on pourra se référer à l'article [5] de Jeanblanc et Rutkowski.

14.2 Les différentes représentations du prix de la dette risquée

14.2.1 Premières représentations

Soit (X, Z, τ) une dette risquée. Notons D le processus des "dividendes" associé :

$$D_t = \int_{]0, t]} Z_u dH_u + X(1 - H_T) \mathbf{1}_{\{t=T\}} \quad (14.5)$$

A l'aide de ce processus, la valorisation riche-neutre de l'actif risqué à la date t s'écrit :

$$V_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\int_{]t, T]} B_u^{-1} dD_u \mid \mathcal{G}_t \right) \quad (14.6)$$

où bien, de façon équivalente :

$$V_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\int_{]t, T]} B_u^{-1} Z_u dH_u + B_T^{-1} X \mathbf{1}_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{G}_t \right) \quad (14.7)$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$V_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} (B_{\tau}^{-1} Z_{\tau} \mathbf{1}_{\{t < \tau \leq T\}} + B_T^{-1} X \mathbf{1}_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{G}_t) \quad (14.8)$$

En particulier, cette dernière relation implique que la valeur de la dette à la maturité est $V_T = X \mathbf{1}_{\{T < \tau\}}$. De plus on retrouve bien dans cette relation que la valeur de la dette après l'instant de défaut est nulle : on a supposé dans le modèle que le porteur de l'actif risqué est indemnisé à hauteur de Z dès que le défaut se produit.

En utilisant la relation (14.4) définissant le processus λ , on peut réécrire (14.7) de la façon suivante :

$$V_t = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\int_{]t, T]} B_u^{-1} Z_u \lambda_u \mathbf{1}_{\{u \leq \tau\}} du + B_T^{-1} X \mathbf{1}_{\{T < \tau\}} \mid \mathcal{G}_t \right) \quad (14.9)$$

¹La démonstration repose sur l'existence du \mathbb{G} -compensateur de H (décomposition de Doob-Meyer) et sur une hypothèse d'absolue continuité de ce processus.

14.2.2 Théorème de représentation du prix de la dette risquée

La représentation suivante du prix de la dette risquée est le résultat le plus intéressant, qui justifie le développement de l'approche à intensité. Il apparaît que le prix d'une dette risquée peut être calculé comme s'il s'agissait d'un actif sans risque de défaut à condition d'incorporer une prime de risque dans le facteur d'actualisation. Pour aboutir à un tel résultat, il convient de formuler les deux hypothèses suivantes :

- Il y a continuité de la valeur de marché de la dette risquée à l'instant de défaut. Autrement dit, la probabilité qu'un saut inattendu se produise à l'instant de défaut est nulle.
- Toute \mathbb{F} -martingale est une \mathbb{G} -martingale, ce qui peut être formulé de façon équivalente par la relation suivante :

$$\mathbb{P}(\tau \leq u \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(\tau \leq u \mid \mathcal{F}_\infty) \quad \forall 0 < u \leq t$$

Ainsi, si le défaut s'est produit avant la date t , l'évolution des prix sur le marché après cette date ne s'enrichira pas d'information nouvelle à ce sujet.

Compte tenu de ces deux hypothèses, la valeur V_t de la dette à la date t peut s'écrire :

$$V_t = \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} \tilde{B}_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\int_t^T \tilde{B}_u^{-1} Z_u \lambda_u du + \tilde{B}_T^{-1} X \mid \mathcal{F}_t \right) \quad (14.10)$$

où $\tilde{B}_t = \exp \left(\int_0^t (r_u + \lambda_u) du \right)$.

Notons que le conditionnement n'est plus effectué par rapport à la filtration \mathbb{G} : seule l'information de marché \mathbb{F} est prise en compte. On s'est donc ramené au cadre classique où la filtration considérée est la filtration brownienne des prix. Ceci permet d'intégrer les modèles à intensité dans une théorie plus générale (les modèles dérivés de la théorie de Black et Scholes ou bien encore les différents modèles de taux sont toujours spécifiés en considérant la filtration des prix).

14.3 Un exemple d'application : le modèle de JARROW et TURNBULL [1995]

Le modèle de Jarrow et Turnbull reprend l'ensemble des hypothèses formulées précédemment. Les hypothèses spécifiques au modèle sont les suivantes :

- L'émission considérée est une obligation zéro-coupon de maturité T , donnant droit au versement d'un dollar à la date T .
- En cas de défaut, l'entreprise ne versera qu'une fraction du paiement promis. Le taux de recouvrement δ de la dette est supposé constant². Mathématiquement, cette hypothèse s'écrit

$$Z_u = \frac{B_u}{B_T} \delta, \quad \forall u \in [0, T]$$

- Le processus de défaut (H_t) associé à l'instant de défaut τ correspond à un simple saut poissonien entre deux états. Autrement dit, l'intensité de défaut λ est supposée constante au cours du temps³.
- Le processus du taux sans risque est supposé indépendant du processus de défaut. Il s'agit ici d'une hypothèse simplificatrice et peu réaliste, que l'on retrouve dans la plupart des modèles à intensité.

² δ peut dépendre du niveau de priorité de l'obligation risquée au sein de l'ensemble de la dette émise par l'entreprise.

³Notons que JARROW, LANDO et TURNBULL [1997] proposent une extension de ce modèle dans laquelle le processus de défaut est associé à une chaîne de Markov dont les différents états sont les classes de rating des agences de notation. A chaque classe de rating correspond alors une intensité de défaut. Une telle modélisation permet de faire évoluer la valeur de la dette risquée en fonction de la note qui lui est associée.

Compte tenu de ces quatre hypothèses supplémentaires, l'équation (14.10) devient

$$V_t = \mathbf{1}_{\{t < \tau\}} p(t, T) \left[\delta \left(1 - e^{-\lambda(T-t)} \right) + e^{-\lambda(T-t)} \right] \quad (14.11)$$

où $p(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}} \left(\frac{B_t}{B_T} \mid \mathcal{F}_t \right)$ représente le prix à la date t d'un zéro-coupon sans risque de maturité T .

Cette dernière formule est très intuitive : le prix d'un zéro-coupon risqué est égal au prix du zéro-coupon sans risque multiplié par l'espérance du payoff à la maturité sous la probabilité risque-neutre.

Nous allons maintenant utiliser cette formule pour calculer le spread de taux entre le zéro-coupon sans risque et la dette risquée. Notons $F(t, T) = -\frac{\partial}{\partial T} \log V_t$ le taux forward d'un zéro-coupon risqué et $f(t, T)$ le taux forward d'un zéro-coupon sans risque. En utilisant l'équation (14.11), on obtient la relation suivante :

$$F(t, T) = f(t, T) + \frac{(1 - \delta) \lambda e^{-\lambda(T-t)}}{\delta (1 - e^{-\lambda(T-t)}) + e^{-\lambda(T-t)}} \quad (14.12)$$

En faisant tendre T vers t , on obtient la relation liant le taux spot risqué R au processus de taux sans risque r :

$$R(t) = r(t) + (1 - \delta) \lambda \quad (14.13)$$

Ce résultat intéressant montre que le spread de taux observé sur les marchés est dû au risque de crédit. En outre, il apparaît que ce spread dépend tout autant du processus de défaut que du processus de recouvrement. On retrouve ici un résultat analogue à celui obtenu par Duffie et Singleton de façon plus générale (cf. articles [1] et [3]).

Bibliographie

- [1] DUFFIE, D. et K. SINGLETON [1997], An econometric model of the term structure of interest rate swap yields, *Journal of Finance*, **52**, 1287-1321
- [2] DUFFIE, D., M. SCHRODER et C. SKIADAS [1996], Recursive valuation of defaultable securities and the timing of resolution of uncertainty, *Annals of Applied Probability*, **6**, 1075-1090
- [3] DUFFIE, D. et K. SINGLETON [1999], Modeling term structures of defaultable bonds, *Review of Financial Studies*, **12-4**, 687-720
- [4] JARROW, R., D. LANDO et S. TURNBULL [1997], A markov model for the term structure of credit risk spreads, *Review of Financial Studies*, **10-2**, 481-523
- [5] JEANBLANC, M. et M. RUTKOWSKI [1999], Modelling of default risk : an overview, *Working Paper*

Cinquième partie

Le risque opérationnel

La réglementation prudentielle

Les documents consultatifs du Comité de Bâle ouvrent la voie à une prise en compte explicite des risques opérationnels dans le calcul des fonds propres réglementaires bancaires, à l’instar de ce qui existe déjà sur les risques de crédit et de marché. Toutefois, sur le plan méthodologique, la mesure du risque opérationnel n’a pas encore la maturité qu’on constate sur les autres risques. En effet, sur ces derniers — risque de crédit et risque de marché — les banques ont consacré des ressources importantes et ont ainsi abouti à des modèles de type Value-At-Risk qui, même s’ils sont loin d’être parfaits, ont atteint un degré de sophistication et de robustesse remarquable.

Ce manque de maturité intellectuelle sur les risques opérationnels n’est évidemment pas appelé à durer : ce risque fera l’objet dans un avenir proche d’un traitement analogue aux autres, fondé sur la construction d’un modèle interne et l’évaluation d’un capital économique plus précis qu’un calcul forfaitaire. Cette évolution est dans le sens de l’histoire réglementaire. Elle résultera aussi d’une volonté des banques de piloter en interne la création de valeur (Value-based management) et, en l’occurrence, de réduire au minimum les destructions de valeur dues à des défauts de procédure ou à un manque de “best practices” que révèle la matérialisation des risques opérationnels. Réaliser ce pilotage imposera tôt ou tard de disposer de mesures des risques opérationnels fondées sur des calculs autres que des calculs forfaitaires.

Il convient de nuancer très fortement les réflexions précédentes. Lors de la sortie du document consultatif du 16 janvier 2001, il semblait qu’effectivement les banques étaient **largement** plus avancées sur la modélisation du risque de crédit que sur celle du risque opérationnel. La mise en place de Groupes de Travail (par exemple, WGOR — **Working Group on Operational Risk** — créé par l’Institute International Finance) a montré que **certaines banques** (mais le nombre est relativement faible) **sont tout à fait capables de mesurer le risque opérationnel avec un modèle interne**. Il est devenu évident aussi que **le risque de crédit est beaucoup plus difficile à modéliser que le risque opérationnel**. Au mois de septembre 2001, la situation est donc la suivante :

- le Comité de Bâle autorise l’utilisation d’un modèle interne LDA pour mesurer les risques opérationnels ;
- pour l’instant, seulement une dizaine (?) de banques au monde sont capables de mettre en place la méthode LDA ;
- il n’est pas sûr que ce nombre soit beaucoup plus important en 2005, lors de l’implémentation de l’Accord.

15.1 La définition du risque opérationnel

Rappelons que, selon le document consultatif [1] du comité de Bâle, les risques opérationnels se définissent comme les risques de pertes directes ou indirectes résultant de l’inadaptation ou de la défaillance

de procédures ou de personnes, de personnes ou de systèmes ou résultant d'événements extérieurs («*the risk of direct or indirect loss resulting from inadequate or failed internal processes, people and systems or from external events*»). Cette définition a été critiquée, car il est relativement difficile de calculer certaines pertes indirectes. Le 28 septembre 2001, le Comité de Bâle a donc proposé une seconde définition :

«*Les risques opérationnels se définissent comme le risque de pertes dues à une inadéquation ou à une défaillance des procédures, personnels, systèmes internes ou à des événements extérieurs*» (THORAVAL [2001]).

Il est nécessaire de préciser les types de perte que comprend cette définition. Dans le document [1], le Comité de Bâle avait retenu 6 types de pertes :

1. **Write-Downs** : «*direct reduction in value of assets due to theft, fraud, unauthorised activity or market and credit losses arising as a result of operational events*».
2. **Loss of Recourse** : «*payments or disbursements made to incorrect parties and not recovered*».
3. **Restitution** : «*payments to clients of principal and/or interest by way of restitution, or the cost of any other form of compensation paid to clients*».
4. **Legal Liability** : «*judgements, settlements and other legal costs*».
5. **Regulatory and Compliance** (incl. Taxation Penalties) : «*finances, or the direct cost of any other penalties, such as license revocations*».
6. **Loss of or Damage to Assets** : «*direct reduction in value of physical assets, including certificates, due to some kind of accident (e.g. neglect, accident, fire, earthquake)*».

Cette classification est relativement éloignée de celles qui avaient été mises en place par l'industrie bancaire. Par exemple, la base de données "Operational Risk Losses Database" de la BBA (**British Bankers' Association**) considère 4 types de perte :

1. **People**
2. **Process**
3. **Systems**
4. **External**

Finalement, le Comité de Bâle a adopté une nouvelle classification le 28 septembre 2001 :

1. **Internal Fraud** : «*losses due to acts of a type intended to defraud, misappropriate property or circumvent regulations, the law or company policy, excluding diversity/discrimination events, which involves at least one internal party*».
2. **External Fraud** : «*losses due to acts of a type intended to defraud, misappropriate property or circumvent the law, by a third party*».
3. **Employment Practices & Workplace Safety** : «*losses arising from acts inconsistent with employment, health or safety laws or agreements, from payment of personal injury claims, or from diversity/discrimination events*».
4. **Clients, Products & Business Practices** : «*losses arising from an unintentional or negligent failure to meet a professional obligation to specific clients (including fiduciary and suitability requirements), or from the nature or design of a product*».
5. **Damage to Physical Assets** : «*losses arising from loss or damage to physical assets from natural disaster or other events*».
6. **Business Disruption & System Failures** : «*losses arising from disruption of business or system failures*».
7. **Execution, Delivery & Process Management** : «*losses from failed transaction processing or process management, from relations with trade counterparties and vendors*».

Nous remarquons donc que les risques stratégiques et réputationnels sont exclus du périmètre des risques opérationnels.

Le Comité de Bâle considère un découpage matriciel de la banque. Celle-ci est donc divisée en différentes activités :

Business Units	Business Lines
Investment Banking	Corporate Finance
	Trading & Sales
Banking	Retail Banking Commercial Banking Payment & Settlement Agency Services & Custody
Others	Asset Management Retail Brokage

Toutefois, les typologies exactes des types de risque et des lignes de métier restent néanmoins imprécises. Même si le document consultatif donne beaucoup de précisions, la banque doit faire un travail de **mapping** important. En outre, l'existence d'un "double-comptage" n'est pas exclu. En effet, le capital réglementaire alloué au risque de crédit ou de marché est déjà censé couvrir une part du risque opérationnel. Il y a donc un risque d'allouer deux fois du capital pour le même risque.

15.2 Les approches forfaitaires

A la lecture du document [1], il n'est pas encore clair de savoir si les fonds propres réglementaires doivent couvrir les seules pertes exceptionnelles ("unexepected loss"), ou en plus les pertes moyennes ("expected loss"). En théorie, les fonds propres ne couvrent que les seules pertes exceptionnelles et non les pertes moyennes, ces dernières étant censées être couvertes par des provisions ou imputées sur le résultat courant. Toutefois, dans la mesure où les normes comptables de provisionnement diffèrent d'un pays à l'autre et d'un type de risque à un autre, les fonds propres au titre du risque opérationnel pourraient être amenés à jouer ce double rôle. D'après le document [2], la mesure du risque opérationnel semble correspondre au quantile, c'est-à-dire à la somme de l'expected loss et de l'unexepected loss.

S'agissant des méthodologies proposées par le document consultatif du Comité de Bâle, elles s'inspirent fortement de celles que ce même document envisage pour le risque de crédit. Il y a eu une volonté assez forte de mettre en parallèle le traitement de ces deux risques en proposant soit des méthodes dites standards (c'est-à-dire forfaitaires) soit des méthodes nécessitant des éléments rattachés directement aux risques eux-mêmes (probability of default/probability of event, Loss Given Default/Loss Given Event, etc.). Le Comité de Bâle utilisent le terme "**Advanced Measurement Approaches**" ou AMA pour définir ces approches non standards. Celles-ci seront exposées dans le chapitre suivant.

15.2.1 *Basic Indicator Approach (BIA)*

C'est une méthode forfaitaire où le calcul du capital se fait à partir d'un indicateur d'exposition EI. Le capital économique associé au risque opérationnel est donc relié aux résultats (par exemple, le PNB ou le revenu) mais pas au risque opérationnel réel ni à la qualité intrinsèque de la banque en terme de maîtrise de ces risques (qualité de l'audit interne par exemple). Ceci pose évidemment problème en pénalisant les banques profitables d'une part, et en n'incitant pas à la maîtrise des risques d'autre part.

Le Comité de Bâle propose de retenir le PNB — Gross Income — GI comme proxy. Les fonds propres FP se calcule alors très facilement à partir de la formule

$$FP = \alpha \times GI \quad (15.1)$$

où α est un coefficient fixé par les autorités réglementaires. Dans le document [1], un premier calcul du Comité de Bâle donnait α égal à 30%. D'après les résultats de QIS2, α est en fait proche de 20%. Notons que l'approche BIA sera calibrer afin d'obtenir une charge en capital pour la "**Banque Mondiale Moyenne**" égale à 20% de la charge totale en capital. Pour cette approche, aucun critère d'éligibilité n'est exigé.

15.2.2 *Standardised Approach (SA)*

C'est un prolongement plus fin de l'approche précédente en déclinant ce type de calcul par type d'activité. Selon l'activité, l'indicateur retenu ne serait pas le même. Ainsi, par exemple en gestion d'actifs, le capital économique pourrait être calculé sur la base du montant des fonds en gestion (voir document [1]). Néanmoins, le document du 28 septembre 2001 utilise le PNB comme indicateurs des 8 lignes de métiers. Dans cette approche, les fonds propres de la banque pour le risque opérationnel sont égaux à la somme des fonds propres de chaque ligne de métier. Nous avons

$$FP = \sum_i FP(i) = \sum_i \beta(i) \times FI(i) \quad (15.2)$$

avec FI l'indicateur financier de la ligne de métier i .

Si l'indicateur financier est le PNB, les résultats de QIS2 sont les suivants :

Ligne de métier	$\beta(i)$ médian	$\beta(i)$ moyen
Financement d'entreprises	0.131	0.236
Négociation et vente	0.171	0.241
Banque de détail	0.125	0.127
Banque commerciale	0.132	0.169
Paiements et règlements	0.208	0.203
Services d'agence	0.174	0.232
Gestion d'actifs	0.133	0.185
Courtage de détail	0.113	0.149

Dans cette approche, le Comité de Bâle indique que l'objectif de charge de capital est de 12% (et non de 20%). Les banques sont donc incitées à choisir cette méthode plutôt que celle de l'indicateur basique. Néanmoins, il y a des critères d'éligibilité concernant la qualité du système de gestion du risque et le suivi des données de perte :

- *«Effective risk management and control*
 - *The bank must have a well-documented, independent operational risk management and control process, which includes firm-level policies and procedures concerning operational risk and strategies for mitigating operational risk.*
 - *The board of directors and senior management must be actively involved in the oversight of the operational risk management process.*
 - *There must be regular reporting of relevant operational risk data to business unit management, senior management and the board of directors.*
 - *Internal auditors must regularly review the operational risk management processes. This review should include both the activities of the business units and the operational risk management and control process.*
- *Measurement and validation*
 - *The bank must have both appropriate risk reporting systems to generate data used in the calculation of a capital charge and the ability to construct management reporting based on the results.*
 - *The bank must begin to systematically track relevant operational risk data, including internal loss data, by business line.*
 - *The bank must develop specific, documented criteria for mapping current business lines and activities into the standardised framework. The criteria must be reviewed and adjusted for new or changing business activities and risks as appropriate».*

15.3 Annexe : composition du Risk Management Group (RMG) of the Basel Committee on Banking Supervision

- Chairman : Roger Cole Federal – Reserve Board, Washington, D.C.

- Banque Nationale de Belgique, Brussels : Dominique Gressens
- Commission Bancaire et Financière, Brussels : Jos Meuleman
- Office of the Superintendent of Financial Institutions, Ottawa : Jeff Miller
- Commission Bancaire, Paris Laurent Le Mouël
- Deutsche Bundesbank, Frankfurt am Main : Magdalene Heid et Karin Sagner
- Bundesaufsichtsamt für das Kreditwesen, Bonn : Jürgen Dreymann
- Banca d'Italia, Rome : Claudio Dauria et Sergio Sorrentino
- Bank of Japan, Tokyo : Eiji Harada
- Financial Services Agency, Tokyo : Hirokazu Matsushima
- Commission de Surveillance du Secteur Financier, Luxembourg : Davy Reinard
- De Nederlandsche Bank, Amsterdam : Klaas Knot
- Banco de España, Madrid : Juan Serrano
- Finansinspektionen, Stockholm : Jan Hedquist
- Sveriges Riksbank, Stockholm : Camilla Ferenius
- Eidgenössische Bankenkommission, Bern : Daniel Sigrist et Martin Sprenger
- Financial Services Authority, London : Helmut Bauer et Victor Dowd
- Bank of England, London : Alison Emblow
- Federal Deposit Insurance Corporation, Washington, D.C. : Mark Schmidt
- Federal Reserve Bank of New York : Beverly Hirtle et Stefan Walter
- Federal Reserve Board, Washington, D.C. : Kirk Odegard
- Office of the Comptroller of the Currency, Washington, D.C. : Kevin Bailey et Tanya Smith
- European Central Bank, Frankfurt am Main : Panagiotis Strouzas
- European Commission, Brussels : Michel Martino et Melania Savino
- Secretariat of the Basel Committee on Banking Supervision, Bank for International Settlements :
Ralph Nash

Bibliographie

- [1] Basel Committee on Banking Supervision, Operational Risk — Consultative Document, Supporting document to the New Basel Capital Accord, January 2001
- [2] Basel Committee on Banking Supervision, Working Paper on the Regulatory Treatment of Operational Risk, september 2001
- [3] Institute International Finance, Inc, Letter to Mr. Roger Cole, March 1, 2001
- [4] CESKE, R. et J.V. HERNÁNDEZ [1999], Where theory meets practice, *Risk Magazine (Operational Risk Report)*, **12**, November, 17-20
- [5] CESKE, R., J.V. HERNÁNDEZ et L.M. SÁNCHEZ [2000], Quantifying event risk : the next convergence, *The Journal of Risk Finance*, **1(3)**, 9-23
- [6] LASRY, J-M. [2001], Le calcul des fonds propres en face du risque opérationnel, Club Banque, Fédération des Banques Françaises, 1er mars 2001

16

Les méthodes AMA

Dans le document consultatif du 16 janvier 2001, le Comité de Bâle proposait une troisième méthode appelée **Internal Measurement Approach (IMA)**. Depuis le Comité de Bâle a modifié sa position et propose de remplacer IMA par un “spectre” de méthodes dites internes. En fait, cette décision a été prise suite aux recommandations (et aux pressions) de l’organisation professionnelle IIF (**Institute of International Finance**).

Pour pouvoir utiliser une méthode AMA, la banque devra satisfaire de nombreux critères (voir l’annexe 1 du document [2]). Notons aussi que la charge en capital calculée avec une méthode AMA ne peut être inférieure à celle donnée par la méthode SA de plus de 25% :

$$FP_{AMA} \geq \frac{3}{4} FP_{SA}$$

C’est la notion du **Floor**. Enfin, les assurances ne seront prises en compte que pour la méthode LDA uniquement.

16.1 L’approche IMA

La méthode **Internal Measurement Approach (IMA)** fait l’objet du paragraphe VI de la section B du document [1]. Nous notons UL la perte exceptionnelle. Celle-ci est calculée à partir de la formule suivante :

$$UL = EL \times \gamma \times RPI \tag{16.1}$$

où EL est la perte espérée, γ le facteur d’échelle et RPI l’indice de profil de risque. Cette charge en capital est calculée pour chaque business line et chaque type de risque :

business line \ Type de risque	1	2	...	j	...	Total
1	UL (1, 1)	UL (1, 2)				UL (1, ·)
2	UL (2, 1)	UL (2, 2)				UL (2, ·)
⋮						
i				UL (i, j)		UL (i, \cdot)
⋮						
Total	UL (·, 1)	UL (·, 2)				$\sum_{i,j} UL (i, j)$

Pour une business line i et un type de risque j , nous avons

$$UL(i, j) = EL(i, j) \times \gamma(i, j) \times RPI(i, j) \quad (16.2)$$

La charge en capital au titre du risque opérationnel est calculée en faisant la somme des différentes charges en capital $UL(i, j)$.

Nous détaillons maintenant les différentes composantes de $UL(i, j)$:

- $EL(i, j)$ est la perte espérée. Dans le document [1], le Comité de Bâle propose qu'elle soit calculée à partir de la formule suivante :

$$EL(i, j) = EI(i, j) \times PE(i, j) \times LGE(i, j) \quad (16.3)$$

Détaillons ces différents paramètres :

- $EI(i, j)$ est l'indicateur d'exposition.
- $PE(i, j)$ est la probabilité d'occurrence d'une perte unitaire.
- $LGE(i, j)$ est le montant de la perte unitaire.
- $\gamma(i, j)$ est le facteur d'échelle. **La valeur de celui-ci est déterminée par les autorités réglementaires.** C'est d'ailleurs le seul coefficient qui n'est pas propre à l'établissement financier.
- $RPI(i, j)$ est l'indice de profil de risque. Pour l'instant, le Comité de Bâle n'a proposé aucune formule pour le calculer. Le but de cet indice est de prendre en compte les propriétés leptokurtiques de la distribution réelle des pertes de la banque. Il permet de convertir le facteur d'échelle exogène en un facteur d'échelle propre à la business line et au type de risque de la banque. Nous avons

$$\begin{aligned} UL(i, j) &= EL(i, j) \times \underbrace{\gamma(i, j)}_{\text{Facteur d'échelle réglementaire}} \times RPI(i, j) \\ &= EL(i, j) \times \underbrace{\gamma^*(i, j)}_{\text{Facteur d'échelle "interne"}} \end{aligned} \quad (16.4)$$

Il apparait clairement que $\gamma(i, j)$ représente la valeur du benchmark, c'est-à-dire la valeur pour la **Banque Mondiale Moyenne** (le comité de Bâle emploie le terme de "scaling factor based on the industry wide loss distribution") et $RPI(i, j)$ sert à prendre en compte les caractéristiques de la banque par rapport à la **Banque Mondiale Moyenne**.

Nous remarquons que ces paramètres (EI , PE , LGE , γ , RPI) sont différents pour chaque business line et chaque type de risque. D'autres choix pourraient être possibles. Par exemple,

$$UL(i, j) = EI(i, j) \times PE(i, j) \times LGE(j) \times \gamma(j) \times RPI(i, j) \quad (16.5)$$

Dans ce cas, les paramètres LGE et γ dépendent uniquement du type de risque opérationnel. Dans le document [3], il ressort qu'en général les membres du Groupe de Travail sur le Risque Opérationnel (WGOR) ont du mal à distinguer l'indicateur d'exposition en fonction du type de risque. Dans ce cas, nous avons

$$UL(i, j) = EI(i) \times PE(i, j) \times LGE(i, j) \times \gamma(i, j) \times RPI(i, j) \quad (16.6)$$

Cela veut dire que l'indicateur d'exposition est propre à la business line, et ne dépend pas du type de risque.

Pour conclure, nous faisons deux remarques :

1. Dans le document [2], le Comité de Bâle retient un découpage de la banque en 8 business lines. Avec 7 types de risque, nous obtenons donc **un découpage matriciel de 56 cellules. Ce qui veut dire aussi plus de 250 paramètres pour calculer la charge en capital. On peut penser que des problèmes de robustesse vont se poser. En particulier, on voit mal comment les autorités réglementaires vont être capables de calculer les 56 paramètres de facteur d'échelle.**

2. Dans la pratique, le double indiçage sera difficile à mettre en place, par manque de données. Des approximations seront donc faites du type

$$\text{LGE}(i, j) = \text{LGE}(j) \quad \text{quelque que soit la business line}$$

On le voit d'ailleurs avec l'étude WGOR sur les indicateurs d'exposition qui sont presque toujours les mêmes. On risque finalement d'aboutir à l'utilisation de très peu d'indicateurs (moins d'une dizaine). Il nous semble que la méthode IMA devrait être simplifiée :

- en réduisant le double indiçage ;
- en réduisant le nombre de variables ; Par exemple, pourquoi ne pas adopter une définition plus **naturelle** de la perte espérée à partir du nombre de pertes NE :

$$\text{EL}(i, j) = \text{NE}(i, j) \times \text{LGE}(i, j) \tag{16.7}$$

16.2 L'approche LDA

Cette approche est exposée dans le document de travail de FRACHOT, GEORGES et RONCALLI [2001]. C'est une approche actuarielle très ancienne largement utilisée en assurances (KLUGMAN, PANJER et WILLMOT [1998]). Des trois méthodes AMA, nous pouvons considérer que c'est véritablement la méthode de référence pour le calcul de risque avec un modèle interne. Nous donnons ici quelques éléments, mais l'exposé oral du cours s'appuiera sur le document [8].

16.2.1 Présentation de la méthode statistique

L'idée générale est de modéliser la perte liée au risque opérationnel pour une période donnée (par exemple, un an) et d'en déduire la valeur en risque. La difficulté provient du fait que cette perte ne correspond pas forcément à une seule occurrence. Pendant une année, la perte totale est en fait le résultat de plusieurs pertes successives. La perte totale est donc une perte agrégée (**aggregate loss distribution**). Celle-ci se définit par

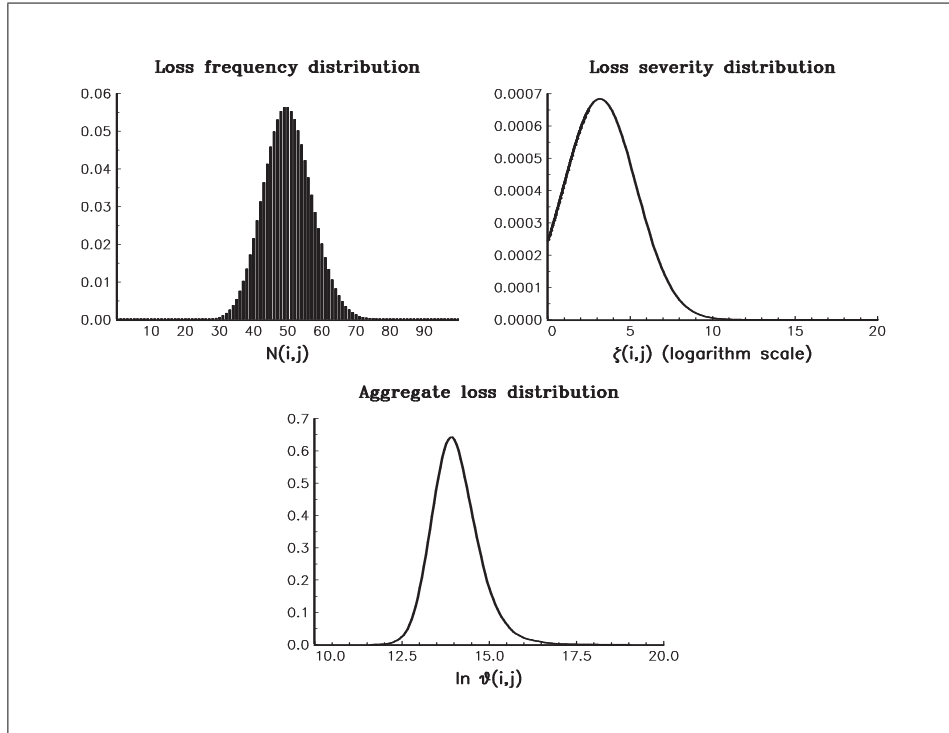
1. le nombre de pertes individuelles,
2. et le montant de chaque pertes individuelles.

Dans le cadre d'un modèle probabiliste, le nombre de pertes est aléatoire. A priori, nous ne savons pas combien de fraudes "carte bleue" vont avoir lieu pour l'année 2002. Nous allons donc modéliser ce nombre de pertes par un processus de comptage, et la distribution de ce nombre de pertes est appelée la distribution de la fréquence des pertes (**loss frequency distribution**). Nous supposons alors que les pertes individuelles sont indépendantes et identiquement distribuées. La distribution du montant d'une perte individuelle est appelée la distribution de la sévérité des pertes (**loss severity distribution**). Dans ce cas là, la perte agrégée est la somme **aléatoire** des pertes individuelles. La distribution de la perte agrégée est donc une distribution composée (**compound distribution**).

La formulation mathématique est donc la suivante. Nous considérons différentes lignes de métier ($i = 1, \dots, I$) et différents types de risque ($j = 1, \dots, J$). $\zeta(i, j)$ est la variable aléatoire représentant le montant d'une perte pour la ligne de métier i et le type de risque j . La distribution de la sévérité des pertes est notée $\mathbf{F}_{i,j}$. Nous supposons que le nombre d'occurrences entre les dates t et $t + \tau$ est aléatoire. La variable aléatoire de comptage $N(i, j)$ a une fonction de probabilité $p_{i,j}$. La distribution de la fréquences des pertes $\mathbf{P}_{i,j}$ correspond alors à $\mathbf{P}_{i,j}(n) = \sum_{k=0}^n p_{i,j}(k)$. La perte pour la ligne de métier i et le type de risque j entre les dates t et $t + \tau$ est donc $\vartheta(i, j) = \sum_{n=0}^{N(i,j)} \zeta_n(i, j)$. Soit $\mathbf{G}_{i,j}$ la distribution de probabilité de $\vartheta(i, j)$. $\mathbf{G}_{i,j}$ est la distribution composée suivante :

$$\mathbf{G}_{i,j}(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} p_{i,j}(n) \mathbf{F}_{i,j}^{n*}(x) & x > 0 \\ p_{i,j}(0) & x = 0 \end{cases} \tag{16.8}$$

Le graphique (16.1) présente un exemple de calcul de la distribution de la perte agrégée. Dans de nombreux cas, il n'est pas possible d'obtenir une formulation analytique de $\mathbf{G}_{i,j}$. Dans ce cas, nous pouvons


 GRAPHIQUE 16.1. Distribution agrégée avec $\zeta(i, j) \sim \mathcal{LN}(8, 2.2)$ et $N(i, j) \sim \mathcal{P}(50)$

approximer cette distribution en utilisant la méthode de Monte Carlo ou d'autres méthodes (la plus célèbre est l'algorithme de Panjer).

La charge en capital pour la ligne de métier i et le type de risque j correspond alors au quantile α de $\mathbf{G}_{i,j}$:

$$\text{CaR}(i, j; \alpha) = \mathbf{G}_{i,j}^{-1}(\alpha) = \inf \{x \mid \mathbf{G}_{i,j}(x) \geq \alpha\} \quad (16.9)$$

La charge en capital pour la banque est alors la somme de toutes les charges en capital $\text{CaR}(i, j; \alpha)$:

$$\text{CaR}(\alpha) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \text{CaR}(i, j; \alpha) \quad (16.10)$$

Cela implique une dépendance positive parfaite des différentes pertes $\vartheta(i, j)$. En janvier 2001, le Comité de Bâle suggérait α égal à 99.9%. Maintenant, α est fixé à 99%.

16.2.2 Robustesse de l'approche LDA

Certaines banques ont l'intention de fonder leur modèle interne sur la théorie des extrêmes et non sur l'approche LDA. Suite à l'attaque terroriste sur le World Trade Center, il semblerait (tout cela est à prendre au conditionnel) que Roger Cole soit de plus en plus favorable à la théorie des extrêmes. Je pense que c'est une mauvaise vision des choses pour différentes raisons :

- La théorie des extrêmes est mathématiquement séduisante. En pratique, elle nécessite une expertise importante et un certain recul pour "*lui faire dire quelque chose*".
- L'obstacle majeur à la mise en place d'une méthode basée sur la théorie des extrêmes est la disponibilité de données.
- Enfin, je crois qu'il y a confusion entre "théorie des extrêmes" et "modélisation des queues épaisses".

Dans le document [8], nous présentons différents éléments pour bien implémenter la méthode LDA. Le calcul des charges en capital par la méthode LDA doit se faire en concertation avec le risk manager et son

N	τ	1 million	10 millions	100 millions	1 milliard	5 milliards
100	1 an	99.8	51.4	3.7	0.08	0.00
200	2 ans	99.9	76.4	7.2	0.17	0.00
300	3 ans	100.0	88.5	10.7	0.26	0.01
400	4 ans	100.0	94.4	14.0	0.35	0.01
500	5 ans	100.0	97.3	17.2	0.44	0.02
1000	10 ans	100.0	99.9	31.4	0.89	0.04
5000	50 ans	100.0	100.0	84.9	4.38	0.20

TABLE 16.1. $\mu = 10$ and $\sigma = 2.50$

N	τ	1 million	10 millions	100 millions	1 milliard	5 milliards
100	1 an	99.9	73.1	10.4	0.48	0.03
200	2 ans	100.0	92.7	19.7	0.95	0.07
300	3 ans	100.0	98.0	28.1	1.43	0.10
400	4 ans	100.0	99.4	35.5	1.91	0.14
500	5 ans	100.0	99.8	42.2	2.38	0.18
1000	10 ans	100.0	99.9	66.7	4.70	0.36
5000	50 ans	100.0	100.0	99.5	21.42	1.80

TABLE 16.2. $\mu = 10$ and $\sigma = 2.75$

équipe. Il est nécessaire de comprendre les chiffres, de les interpréter et de les comparer. Le statisticien apporte une aide technique, et doit proposer des outils pour aider le risk manager à juger la pertinence des résultats. Prenons un exemple. Nous pouvons calculer la fonction de survie du maximum de N pertes de loi de probabilité $\mathbf{G}_{i,j}$. Nous avons

$$p_{\max} := \Pr \{ \max(\vartheta_1(i, j), \dots, \vartheta_N(i, j)) \geq x \} = 1 - [\mathbf{G}_{i,j}(x)]^N \quad (16.11)$$

Cette probabilité a une interprétation très intuitive. Supposons que N pertes surviennent. p_{\max} est la probabilité que la perte maximale soit supérieure au montant x . Le Risk Management a des idées (ou des benchmarks internes et externes) sur la perte maximale à un an, deux ans, etc. Il peut donc confronter ces propres croyances avec les résultats donnés par le modèle. Supposons que 100 pertes surviennent en moyenne par an. Supposons aussi que la distribution de la sévérité est une distribution log-normale $\mathcal{LN}(\mu, \sigma)$. Une première estimation à partir des données historiques donne $\mu = 10$ et $\sigma = 2,50$. Sur la table 16.1, nous avons reporté les valeurs correspondantes de p_{\max} pour différentes valeurs de N et x . Par exemple, la probabilité que nous observons une perte maximale sur 5 ans supérieure à 100 millions est de 17,2%. Si l'estimation a été faite avec un historique de 5 ans, et que nous observons dans la base de données plusieurs pertes supérieures à 100 millions, nous pouvons penser que cette distribution sous-estime largement les pertes exceptionnelles. Si $\mu = 10$ et $\sigma = 2,50$, nous obtenons la table 16.2. Dans ce cas, la probabilité est égale à 42,2%. **C'est ce genre d'outils que le statisticien doit fournir au risk manager, car une mesure de risque ne veut rien dire en elle-même, c'est sa compréhension et son interprétation qui comptent.**

16.3 Le mapping IMA/LDA

Je présenterai cette section en cours de façon plus détaillée, car les travaux sur ce sujet évoluent très rapidement. Le mapping IMA/LDA consiste à définir de façon quantitative la méthode IMA à partir de la méthode LDA (FRACHOT, GEORGES et RONCALLI [2001]). On peut penser en effet que l'IMA a été conçue comme une version simplifiée, praticable et standardisée d'une approche de type LDA plus complète et plus satisfaisante mais plus compliquée à mettre en œuvre. Au mois de septembre 2001, la situation sur le sujet est la suivante :

- Proposition d'une méthodologie par Sakura Bank au mois de Février 2001.
- Prolongement de cette méthodologie par l'I.I.F. Taskforce on "technical" I.M.A. issues.

La dernière proposition de l'IIF est de définir l'indice de profil de risque par

$$\text{RPI} = \left(\frac{\text{EI}_{\text{Industry}} \cdot \text{PE}_{\text{Industry}}}{\text{EI}_{\text{Bank}} \cdot \text{PE}_{\text{Bank}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

On peut justifier cette formulation en utilisant une approximation du quantile α de la distribution composée (FRACHOT, GEORGES et RONCALLI [2001]).

16.4 L'approche Scorecard

Cette approche a été intégrée dans le dernier document de Bâle. Comme il est difficile de comprendre cette méthode, voici la définition donnée dans le document [2] :

«In this approach, banks determine an initial level of operational risk capital at the firm or business line level, and then modify these amounts over time on the basis of scorecards that attempt to capture the underlying risk profile and risk control environment of the various business lines. These scorecards are intended to bring a forward-looking component to the capital calculations, that is, to reflect improvements in the risk control environment that will reduce both the frequency and severity of future operational risk losses. The scorecards may be based on actual measures of risk, but more usually identify a number of indicators as proxies for particular risk types within business units/lines. The scorecard will normally be completed by line personnel at regular intervals, often annually, and subject to review by a central risk function.»

In order to qualify for the AMA, a scorecard approach must have a sound quantitative basis, with the overall size of the capital charge being based on a rigorous analysis of internal and external loss data. In some cases, scorecard approaches are based on initial estimation methods that are similar to those used in internal measurement or loss distribution approaches. Where the scorecard approach differs from these approaches is that it relies less exclusively on historical loss data in determining capital amounts. Instead, once the size of the capital charge has been determined, its overall size and its allocation across business lines may be modified on a qualitative basis. Nevertheless, historical loss data must be used to validate the results of scorecards, with adjustments to capital size or allocation based upon such results.

At present, a range of scorecard approaches are in development with some banks already operating a system of economic capital allocation based on such an approach. However, as with the other approaches, no industry standards has emerged.»

En fait, c'est sous la pression de certaines banques de l'IIF (notamment les banques anglaises) que cette méthode a été intégrée par le Comité de Bâle. Pour mieux comprendre l'approche, voici la formule¹ proposée par l'IIF :

$$\text{CaR} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \text{EI}(i, j) \cdot \omega(i, j) \cdot \text{RS}(i, j) \quad (16.12)$$

avec EI l'indicateur d'exposition (**Exposure Indicator**), RS le score de risque (**Risk Score**) et ω le facteur d'échelle.

Bibliographie

- [1] Basel Committee on Banking Supervision, Operational Risk — Consultative Document, Supporting document to the New Basel Capital Accord, January 2001

¹Dans la formule originale, c'est la racine carée de l'indicateur d'exposition et non directement l'indicateur d'exposition qui est utilisée. A l'époque, l'IIF travaillait sur la nature non-linéaire du risque opérationnel. Mais le Comité de Bâle n'a pas suivi les recommandations de l'IIF sur ce sujet pour l'instant.

- [2] Basel Committee on Banking Supervision, Working Paper on the Regulatory Treatment of Operational Risk, september 2001
- [3] Institute International Finance, Inc, Letter to Mr. Roger Cole, March 1, 2001
- [4] Institute International Finance, Inc, Report of the Working Group on Operational Risk, June 4 & 5, 2001 (Washington, D.C.)
- [5] I.I.F. Taskforce on “technical” I.M.A. issues, March 2001
- [6] Sakura Bank Ltd, Derivation of the IMA formula — RPI calculation, February 2001
- [7] MORI, T. et E. HARADA [2001], Internal Measurement Approach to operational risk capital charge, Bank of Japan, *Discussion Paper*
- [8] FRACHOT, A., P. GEORGES et T. RONCALLI [2001], Loss Distribution Approach for operational risk, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, *Working Paper*
- [9] KLUGMAN, S.A., H.H. PANJER et G.E. WILLMOT [1998], Loss Models : From Data to Decisions, *Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics*, John Wiley & Sons, New York
- [10] THORAVAL, P-Y. [2001], Le risque opérationnel, Club Banque, Fédération des Banques Françaises, 27 septembre 2001

Conclusion générale

Le but de ce cours est d'introduire les principales notions de gestion des risques. Pour cela, il me semble que la réglementation est le meilleur support possible pour développer les idées essentielles. Bâle II occupe donc une place importante. Néanmoins, les méthodologies ne sont pas figées. Il est donc important de suivre les développements récents dans différents domaines, par exemple :

- le risque optionnel,
- le risque de modèle,
- le risque de taux dans le bilan,
- la modélisation du risque de crédit,
- et le backtesting dans le risque opérationnel.

Enfin, j'ai très peu abordé un problème qui est fondamental dans la gestion des risques : celui de la dépendance stochastique. Ce problème fera l'objet du cours "Gestion des risques multiples".