

# Structures non linéairement élastiques

par **Jean COURBON**

*Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées*

*Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées*

<b>1. Poutre droite d'inertie constante comprimée et fléchie</b> .....	C 2 035 - 2
1.1 Poutre sur appuis simples comprimée et fléchie.....	— 2
1.1.1 Formules générales .....	— 2
1.1.2 Applications .....	— 2
1.1.3 Emploi des séries trigonométriques .....	— 3
1.2 Pylônes flexibles .....	— 3
<b>2. Ponts suspendus</b> .....	— 4
2.1 Généralités. Définitions et hypothèses .....	— 4
2.2 Calcul de $v$ , $M$ et $T$ connaissant la poussée complémentaire.....	— 4
2.2.1 Expressions générales de $v$ , $M$ et $T$ .....	— 4
2.2.2 Calcul des constantes $A$ et $B$ .....	— 5
2.2.3 Valeurs maximales ou minimales de $M$ et de $T$ dans un intervalle donné .....	— 6
2.3 Calcul de la poussée complémentaire .....	— 6
2.3.1 Relation des déplacements orthogonaux.....	— 6
2.3.2 Expressions de la longueur $L$ du câble et des longueurs $L_t$ et $L_s$ .....	— 7
2.3.3 Équation donnant la poussée complémentaire .....	— 7
2.4 Indications pour le calcul d'un pont suspendu symétrique à trois travées .....	— 9
<b>3. Équilibre d'un câble pesant fortement tendu</b> .....	— 10
3.1 Formules générales .....	— 10
3.2 Module d'élasticité apparent d'un câble fortement tendu .....	— 11
3.3 Applications .....	— 12
3.3.1 Déplacement horizontal relatif des extrémités d'un câble.....	— 12
3.3.2 Application aux câbles d'ancrage des ponts suspendus .....	— 12
3.3.3 Calcul des pylônes haubannés .....	— 12
<b>4. Ponts à haubans</b> .....	— 13
4.1 Définition des structures étudiées .....	— 13
4.2 Caractéristiques mécaniques de la structure .....	— 13
4.2.1 Haubans .....	— 13
4.2.2 Poutres du tablier .....	— 14
4.2.3 Pylône .....	— 14
4.3 Calcul de l'ouvrage .....	— 14
4.3.1 Effet des surcharges .....	— 14
4.3.2 Effet des variations de température.....	— 15
4.3.3 Vérification de l'élasticité apparente des haubans .....	— 15
<b>Références bibliographiques</b> .....	— 15

**D**ans cet article, nous traiterons des caractéristiques de résistance de structures non linéairement élastiques telles que les poutres droites, les ponts suspendus, les câbles pesants fortement tendus et les ponts à haubans.

# 1. Poutre droite d'inertie constante comprimée et fléchie

## 1.1 Poutre sur appuis simples comprimée et fléchie

### 1.1.1 Formules générales

Considérons (figure 1) une poutre sur appuis simples de longueur  $\ell$  soumise à un effort normal de compression  $N$  et à des charges transversales produisant un moment fléchissant  $\mu(x)$ . Si l'on tient compte de la flèche  $v(x)$ , comptée positivement vers le haut, le moment fléchissant  $M(x)$  dans la section d'abscisse  $x$  a pour valeur :

$$M(x) = \mu(x) - Nv(x) \quad (1)$$

Il en résulte que  $v(x)$  est l'intégrale de l'équation différentielle :

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = \mu(x) - Nv(x)$$

avec  $I$  inertie,

$E$  module d'élasticité.

En posant :

$$k^2 = \frac{N}{EI} \quad (2)$$

l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^2v}{dx^2} + k^2v = \frac{1}{EI} \mu(x) \quad (3)$$

Son intégrale générale est de la forme :

$$v(x) = A \cos kx + B \sin kx + \varphi(x)$$

avec  $\varphi(x)$  intégrale particulière que l'on détermine par la méthode de la variation des constantes :

$$\varphi(x) = \frac{k}{N} \int_0^x \mu(t) \sin k(x-t) dt \quad (4)$$

Les constantes  $A$  et  $B$  sont déterminées par les conditions aux limites :

$$v(0) = 0, \quad v(\ell) = 0$$

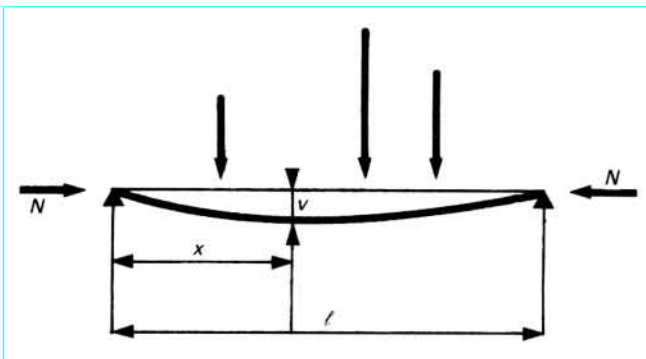


Figure 1 – Poutre sur appuis simples comprimée et fléchie

Nous obtenons ainsi la solution :

$$v(x) = \varphi(x) - \frac{\sin kx}{\sin k\ell} \varphi(x) \quad (5)$$

Le moment fléchissant est ensuite donné par la formule (1).

Lorsque la force de compression  $N$  est faible, on peut,  $k$  étant petit, remplacer dans les formules précédentes  $\sin k(x-t)$  par  $k(x-t)$ . On vérifie aisément, dans ce cas, que  $v(x)$  est la flèche que l'on calculerait en négligeant l'effort normal  $N$ .

Mais, si l'on fait croître  $N$  et par suite  $k$ , la flèche croît rapidement en valeur absolue dès que  $k\ell$  s'approche de  $\pi$ ; en effet, lorsque  $k\ell$  tend vers  $\pi$ , la flèche  $v(x)$  tend vers l'infini. La valeur de  $N$  correspondant à  $k\ell = \pi$  :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (6)$$

est la *force critique de flambement* (article *Stabilité de l'équilibre élastique* [C 2 040] dans ce traité). L'effort de compression  $N$  doit donc être inférieur à  $F_c$ .

### 1.1.2 Applications

#### 1.1.2.1 Principe de superposition

Soit  $v_1$  la flèche de la poutre due à un système de charges transversales  $\Sigma_1$  et à l'effort de compression  $N$ , et  $v_2$  la flèche due à un système de charges transversales  $\Sigma_2$  et au même effort de compression  $N$ . Il est immédiat de vérifier que  $v = v_1 + v_2$  est la flèche de la poutre due au système de charges transversales  $\Sigma_1 + \Sigma_2$  et à l'effort de compression  $N$  (et non  $2N$  comme l'exigerait le principe de superposition des états d'équilibre valable seulement en élasticité linéaire).

Cette remarque permet d'obtenir facilement la solution relative à des charges transversales quelconques par superposition.

#### 1.1.2.2 Charge concentrée $P$ appliquée dans la section d'abscisse $\alpha$

Nous avons dans ce cas :

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{P x(\ell - \alpha)}{\ell} & \text{si } x < \alpha \\ \frac{P \alpha(\ell - x)}{\ell} & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

et nous trouvons, en utilisant les formules (4) et (5) :

$$v(x) = \begin{cases} -\frac{P}{Nk} \frac{\sin kx \sin k(\ell - \alpha)}{\sin k\ell} + \frac{P}{N} \frac{x(\ell - \alpha)}{\ell} & \text{si } x < \alpha \\ -\frac{P}{Nk} \frac{\sin k\alpha \sin k(\ell - x)}{\sin k\ell} + \frac{P}{N} \frac{\alpha(\ell - x)}{\ell} & \text{si } x > \alpha \end{cases}$$

Supposons la charge  $P$  appliquée dans la section médiane ( $\alpha = \ell/2$ ) et posons :

$$u = \frac{k\ell}{2} = \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{N}{F_c}} \quad (7)$$

La flèche maximale, en valeur absolue, a lieu dans la section médiane :

$$v_{max} = -\frac{P\ell^3}{48EI} \frac{3(\operatorname{tg} u - u)}{u^3}$$

Il faut donc multiplier la flèche  $-\frac{P\ell^3}{48EI}$  due à la seule charge  $P$  par un facteur qui croît de 1 à  $\infty$  lorsque  $u$  varie de 0 à  $\pi/2$ , c'est-à-dire lorsque  $N$  varie de 0 à  $F_c$ .

Le moment fléchissant maximal a lieu dans la section médiane :

$$M_{max} = \frac{1}{4} P\ell - Nv_{max} = \frac{1}{4} P\ell \frac{\operatorname{tg} u}{u}$$

Il faut donc multiplier le moment fléchissant  $(1/4)P\ell$  dû à la seule charge  $P$  par un facteur qui croît de 1 à  $\infty$  lorsque  $u$  varie de 0 à  $\pi/2$ , c'est-à-dire lorsque  $N$  varie de 0 à  $F_c$ .

### 1.1.2.3 Charge répartie de densité constante $p$

Nous avons dans ce cas :

$$\mu(x) = p \frac{x(\ell-x)}{2}$$

et nous trouvons, en utilisant les formules (4) et (5),  $u$  étant toujours défini par (7) :

$$v(x) = \frac{p\ell^4}{16EIu^4} \left[ 1 - \frac{\cos \left[ u \left( 1 - \frac{2x}{\ell} \right) \right]}{\cos u} \right] + \frac{p\ell^2}{8EIu^2} x(\ell-x)$$

La flèche maximale en valeur absolue a lieu dans la section médiane :

$$v_{max} = -\frac{5}{384} \frac{p\ell^4}{EI} \frac{24(1-\cos u) - 12u^2 \cos u}{5u^4 \cos u}$$

Il faut donc multiplier la flèche  $-\frac{5}{384} \frac{p\ell^4}{EI}$  due à la seule densité de charge  $p$  par un facteur qui croît de 1 à  $\infty$  lorsque  $N$  croît de 0 à  $F_c$ .

Le moment fléchissant maximal a lieu dans la section médiane :

$$M_{max} = \frac{1}{8} p\ell^2 - Nv_{max} = \frac{1}{8} p\ell^2 \frac{2(1-\cos u)}{u^2 \cos u}$$

Il faut donc multiplier le moment fléchissant  $(1/8)p\ell^2$  dû à la seule densité de charge  $p$  par un facteur qui croît de 1 à  $\infty$  lorsque  $N$  croît de 0 à  $F_c$ .

### 1.1.3 Emploi des séries trigonométriques

Pour intégrer l'équation différentielle (3), nous pouvons développer la fonction  $\mu(x)$ , nulle pour  $x=0$  et  $x=\ell$ , en série de sinus dans  $(0, \ell)$  :

$$\mu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

et rechercher la fonction  $v(x)$ , nulle pour  $x=0$  et  $x=\ell$ , sous la forme d'une série de sinus :

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin \frac{n\pi x}{\ell}$$

En reportant les développements précédents dans l'équation différentielle, nous trouvons :

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{N - n^2 F_c} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (8)$$

La formule (1) donne ensuite la valeur du moment fléchissant :

$$M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{1 - \frac{1}{n^2} \left( \frac{N}{F_c} \right)} \sin \frac{n\pi x}{\ell} \quad (9)$$

Cette expression montre que les coefficients du développement de  $M$  sont égaux aux coefficients du développement de  $\mu$  par des facteurs correctifs supérieurs à 1 et tendant rapidement vers 1 lorsque  $n$  augmente indéfiniment. Par exemple, si  $N = (1/4)F_c$  :

$$M = \frac{4}{3} \mu_1 \sin \frac{\pi x}{\ell} + \frac{16}{15} \mu_2 \sin \frac{2\pi x}{\ell} + \frac{36}{35} \mu_3 \sin \frac{3\pi x}{\ell} + \dots$$

## 1.2 Pylônes flexibles

Nous venons de voir que les flèches d'une poutre soumise à des charges transversales sont augmentées lorsque cette poutre est comprimée. Cette remarque permet souvent de supprimer les articulations à la base des pylônes des ponts suspendus, ou les appareils d'appui mobiles à leur sommet. Les pylônes encastrés à leur base peuvent subir sans dommage les déplacements imposés à leur sommet par les déformations de l'ouvrage dues aux surcharges et à la température parce qu'ils sont fortement comprimés.

Considérons donc (figure 2) un pylône  $OA$ , encastré à sa base  $O$  et soumis à un effort de compression  $N$  égal à la composante verticale de la réaction d'appui du câble. Nous allons, connaissant  $N$  et le déplacement transversal  $e$  imposé au sommet  $A$ , calculer la composante horizontale  $R$  de la réaction d'appui du câble et les moments fléchissants supportés par le pylône de hauteur  $h$  et d'inertie constante  $I$ .

Le moment fléchissant dans la section d'abscisse  $x$  a pour valeur :

$$M = N(e - v) + R(h - x)$$

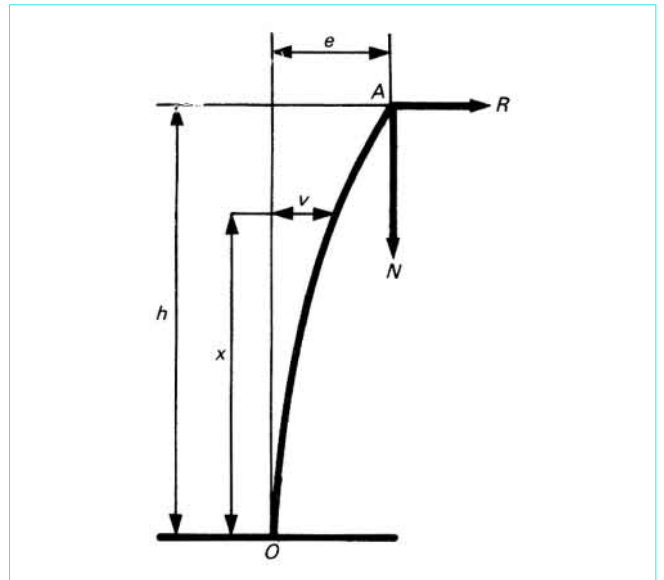


Figure 2 - Pylône flexible

En particulier, le moment d'encastrement en  $O$  a pour valeur :

$$M_0 = Ne + Rh$$

Le déplacement  $v$  est l'intégrale de l'équation différentielle :

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + Nv = Ne + R(h - x)$$

qui vérifie les conditions aux limites :

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v(h) = e$$

En posant  $k^2 = N/(EI)$ , l'intégrale générale de l'équation différentielle est :

$$v(x) = A \cos kx + B \sin kx + e + \frac{R}{N}(h - x)$$

Donc  $A$ ,  $B$  et  $R$  sont donnés par les conditions aux limites :

$$A + e + \frac{R}{N}h = 0, \quad Bk - \frac{R}{N} = 0, \quad A \cos u + B \sin u = 0$$

$u$  désignant la quantité sans dimension :

$$u = kh = h \sqrt{\frac{N}{EI}} \quad (10)$$

Un calcul facile montre que  $M_0$  et  $R$  sont donnés par les formules :

$$\frac{M_0}{\left(\frac{\operatorname{tg} u}{u}\right)} = Rh = \frac{Ne}{\left(\frac{\operatorname{tg} u}{u}\right) - 1} \quad (11)$$

On peut achever le calcul de  $v(x)$  en calculant les constantes  $A$  et  $B$  ; on aboutit ainsi à l'expression suivante du moment fléchissant :

$$M(x) = M_0 \frac{\sin k(h-x)}{\sin kh}$$

Les formules précédentes montrent que les moments fléchissants dans le pylône deviennent infinis lorsque  $u$  atteint la valeur  $u_1$  de la plus petite racine positive de l'équation  $\operatorname{tg} u = u$ , c'est-à-dire lorsque  $N$  atteint la valeur critique :

$$N_c = u_1^2 \frac{EI}{h^2} = 2,045 \ 76 \frac{\pi^2 EI}{h^2}$$

Nous verrons dans l'article *Stabilité de l'équilibre élastique* [C 2 040] du présent traité que  $N_c$  est la force critique de flambement d'une poutre d'inertie constante  $I$  et de longueur  $h$  encastree à une extrémité et articulée à l'autre.

## 2. Ponts suspendus

### 2.1 Généralités. Définitions et hypothèses

Les structures étudiées sont des ponts suspendus dans lesquels les câbles porteurs sont fixés à leurs extrémités sur des massifs d'ancrage. Ils comportent, en général, une ou trois travées suspendues ; dans ce dernier cas, la portée de la travée centrale est environ trois fois celle des travées extrêmes. Dans chaque travée, le câble porteur, appuyé au sommet des pylônes limitant la travée, supporte le tablier par l'intermédiaire de suspentes que nous supposons inextensibles et infiniment rapprochées. Le tablier est constitué d'une poutre de rigidité destinée à limiter les déformations.

Nous supposons les poutres de rigidité des différentes travées indépendantes et simplement appuyées à leurs extrémités. Nous négligerons les réactions horizontales exercées par le câble sur les pylônes soit que le câble repose sur les pylônes par l'intermédiaire de chariots mobiles, soit que le câble soit fixé au sommet des pylônes

articulés ou encastrés à leur base ; dans ce dernier cas, qui est celui des pylônes flexibles, les réactions horizontales dues à la flexion des pylônes sont du même ordre de grandeur que celles dues au roulement dans le cas de chariots mobiles.

Il résulte des hypothèses faites que la composante horizontale de l'effort de traction du câble appelée, par analogie avec les arcs, **poussée** est constante d'un massif d'ancrage à l'autre.

Le réglage de l'ouvrage est effectué de telle sorte qu'en l'absence de surcharges et à la température moyenne (température de réglage), la poutre de rigidité ne supporte aucun effort. Soit  $Q'$  la poussée au moment du réglage. Lorsque l'ouvrage est surchargé, ou lorsque la température est différente de la température de réglage, la poussée devient  $Q' + Q$ . Nous montrerons d'abord que la connaissance de la **poussée complémentaire**  $Q$  permet de calculer la flèche  $v$ , le moment fléchissant  $M$  et l'effort tranchant  $T$  dans la poutre de rigidité. Nous établirons ensuite l'équation donnant la poussée complémentaire.

### 2.2 Calcul de $v$ , $M$ et $T$ connaissant la poussée complémentaire

#### 2.2.1 Expressions générales de $v$ , $M$ et $T$

Soit  $p'$  la densité de la charge permanente supposée constante. La figure d'équilibre du câble dans chaque travée de portée  $\ell$  est une parabole dont l'ordonnée comptée à partir de la corde  $O'A'$  (figure 3) est ( $f$  étant la flèche pour  $x = \ell/2$ ) :

$$y = \frac{4f}{\ell^2} x(\ell - x) \quad (12)$$

En effet, les réactions d'appui du câble en  $O'$  et  $A'$  comprennent les réactions  $\vec{R}_0$  et  $\vec{R}_1$  de la poutre sur appuis simples supportant la densité de charge  $p'$  et deux forces  $\vec{T}$  et  $-\vec{T}$  opposées. En écrivant que le moment fléchissant en tout point du câble est nul, nous avons,  $\mu'$  désignant le moment fléchissant dans la poutre sur appuis simples supportant la densité de charge  $p'$  :

$$\mu' - T y \cos \theta = \mu' - Q' = 0 \quad (13)$$

donc

$$y = \frac{\mu'}{Q'} = \frac{p' x(\ell - x)}{2}$$

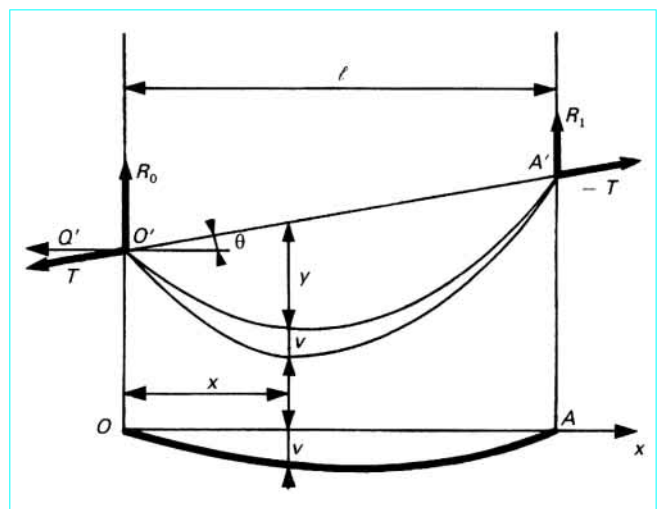


Figure 3 – Déformation d'une travée suspendue

Il en résulte que :

$$Q' = p' \frac{\ell^2}{8f} \quad (14)$$

Lorsque la température est différente de la température de réglage ou lorsque des surcharges sont appliquées au tablier, la poussée devient  $Q' + Q$  et le câble prend une nouvelle figure d'équilibre définie par l'ordonnée  $y + v$ . Désignons par  $\mu$  le moment fléchissant produit par les surcharges dans la poutre sur appuis simples et par  $m$  le moment fléchissant dans cette même poutre dû à la densité de charge transmise au câble par les suspentes. Nous avons l'équation, analogue à l'équation (13) :

$$\mu' + m - (Q' + Q)(y + v) = 0$$

Éliminons  $\mu'$  entre l'équation précédente et l'équation (13) ; nous trouvons :

$$m = (Q' + Q)v + Qy$$

Le moment fléchissant dans la poutre de rigidité a donc pour valeur :

$$M = \mu - m = \mu - (Q' + Q)v - Qy \quad (15)$$

La flèche  $v$  de la poutre de rigidité, d'inertie constante  $I$ , est alors une intégrale de l'équation différentielle,  $v$  étant compté positivement vers le bas :

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} = -M = -\mu + (Q' + Q)v + Qy$$

$$\text{soit} \quad \frac{d^2 v}{dx^2} - K^2 v = -\frac{K^2}{Q' + Q}(\mu - Qy) \quad (16)$$

$K^2$  étant défini par :

$$K^2 = \frac{Q' + Q}{EI} \quad (17)$$

Supposons que les surcharges comprennent des charges concentrées et des surcharges de densité constante. Nous pouvons diviser l'intervalle  $[0, \ell]$  en intervalles partiels dans lesquels le second membre de l'équation (16) est continu ainsi que ses deux premières dérivées ; les limites des intervalles partiels sont, outre les extrémités de la travée, les points d'application des charges concentrées et les extrémités des zones de surcharges réparties. À l'intérieur de l'un de ces intervalles, où la densité de surcharge constante est  $p$ , le second membre de l'équation (16) est un polynôme du second degré, et l'intégrale générale a pour expression :

$$v = \frac{Q}{Q' + Q} \left[ \frac{A}{K^2} \exp(Kx) + \frac{B}{K^2} \exp(-Kx) + \frac{\mu}{Q} - y + \frac{1}{K^2} \left( \frac{p'}{Q'} - \frac{p}{Q} \right) \right] \quad (18)$$

Il y a autant de couples de constantes que d'intervalles. On les détermine en écrivant que  $v$  est nul pour  $x = 0$  et  $x = \ell$  et que  $v$  et  $dv/dx$  sont continus aux limites communes à deux intervalles.

Connaissant  $v$ , l'équation (15) donne  $M$  :

$$M = -\frac{Q}{K^2} \left[ A \exp(Kx) + B \exp(-Kx) + \frac{p'}{Q'} - \frac{p}{Q} \right] \quad (19)$$

et l'effort tranchant  $T$  a pour valeur :

$$T = \frac{dM}{dx} = -\frac{Q}{K} \left[ A \exp(Kx) - B \exp(-Kx) \right] \quad (20)$$

## 2.2.2 Calcul des constantes A et B

Il est remarquable que l'on puisse calculer les constantes  $A$  et  $B$  par une méthode de superposition. Supposons que la surcharge soit la somme de  $n$  surcharges élémentaires ; nous avons :

$$\mu = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

Considérons les équations différentielles :

$$\frac{d^2 v_0}{dx^2} - K^2 v_0 = \frac{K^2 Q}{Q' + Q} y$$

$$\frac{d^2 v_j}{dx^2} - K^2 v_j = -\frac{K^2}{Q' + Q} \mu_j \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Soit  $v_0$  et  $v_j$  les intégrales de ces équations qui s'annulent pour  $x = 0$  et  $x = \ell$  et qui sont continues ainsi que leurs dérivées dans l'intervalle  $(0, \ell)$  ; il est immédiat de vérifier que :

$$v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

est l'intégrale de l'équation (16) qui s'annule pour  $x = 0$  et  $x = \ell$  et est continue, ainsi que sa dérivée, dans l'intervalle  $(0, \ell)$ .

On obtient ainsi une méthode de superposition permettant de déduire tout couple de constantes de l'expression de  $v_0$  :

$$v_0 = \frac{Q}{Q' + Q} \left[ \frac{a_0}{K^2} \exp(Kx) + \frac{b_0}{K^2} \exp(-Kx) - y + \frac{1}{K^2} \left( \frac{p'}{Q'} \right) \right]$$

avec :

$$a_0 = -\left( \frac{p'}{Q'} \right) \frac{1}{\exp(K\ell) + 1} \quad \text{et} \quad b_0 = -\left( \frac{p'}{Q'} \right) \frac{\exp(K\ell)}{\exp(K\ell) + 1}$$

et de l'expression de  $v_j$  relative aux deux cas de surcharges suivants.

■ **Charge concentrée  $P_j$  à l'abscisse  $x_j$ .** Dans ce cas :

$$v_j = \begin{cases} \frac{Q}{Q' + Q} \left[ \frac{a'_j}{K^2} \exp(Kx) + \frac{b'_j}{K^2} \exp(-Kx) + \frac{\mu_j}{Q} \right] & \text{pour } x < x_j \\ \frac{Q}{Q' + Q} \left[ \frac{a''_j}{K^2} \exp(Kx) + \frac{b''_j}{K^2} \exp(-Kx) + \frac{\mu_j}{Q} \right] & \text{pour } x > x_j \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} a'_j = -\frac{1}{2} P_j \frac{K}{Q} \frac{\exp[K(\ell - x_j)] - \exp[-K(\ell - x_j)]}{\exp(K\ell) - \exp(-K\ell)} \\ b'_j = \frac{1}{2} P_j \frac{K}{Q} \frac{\exp[K(\ell - x_j)] - \exp[-K(\ell - x_j)]}{\exp(K\ell) - \exp(-K\ell)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a''_j = \frac{1}{2} P_j \frac{K}{Q} \frac{\exp[-K(\ell - x_j)] - \exp[-K(\ell + x_j)]}{\exp(K\ell) - \exp(-K\ell)} \\ b''_j = -\frac{1}{2} P_j \frac{K}{Q} \frac{\exp[K(\ell + x_j)] - \exp[K(\ell - x_j)]}{\exp(K\ell) - \exp(-K\ell)} \end{cases}$$

Si l'on a  $n$  charges  $P_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), les constantes  $A$  et  $B$  relatives à l'intervalle partiel  $(x_j, x_{j+1})$  ont pour valeurs :

$$A = a_0 + a''_1 + a''_2 + \dots + a''_j + a'_{j+1} + a'_{j+2} + \dots + a'_n$$

$$B = b_0 + b''_1 + b''_2 + \dots + b''_j + b'_{j+1} + b'_{j+2} + \dots + b'_n$$

■ Charge répartie de densité  $p_j$  dans l'intervalle  $(x_{j-1}, x_j)$ . Dans ce cas :

$$v = \begin{cases} \frac{Q}{Q'+Q} \left[ \frac{a'_j}{K^2} \exp(Kx) + \frac{b'_j}{K^2} \exp(-Kx) + \frac{\mu_j}{Q} \right] & \text{pour } x < x_{j-1} \\ \frac{Q}{Q'+Q} \left[ \frac{a_j}{K^2} \exp(Kx) + \frac{b_j}{K^2} \exp(-Kx) + \frac{\mu_j}{Q} + \frac{1}{K^2} \left( \frac{p_j}{Q} \right) \right] & \text{pour } x_{j-1} < x < x_j \\ \frac{Q}{Q'+Q} \left[ \frac{a''_j}{K^2} \exp(Kx) + \frac{b''_j}{K^2} \exp(-Kx) + \frac{\mu_j}{Q} \right] & \text{pour } x > x_j \end{cases}$$

avec :

$$\begin{cases} a'_j = \frac{1}{2} \left( \frac{p_j}{Q} \right) \left\{ \exp[K(\ell - x_j)] + \exp[-K(\ell - x_j)] \right. \\ \left. - \exp[K(\ell - x_{j-1})] - \exp[-K(\ell - x_{j-1})] \right\} / \left[ \exp(K\ell) - \exp(-K\ell) \right] \\ b'_j = -\frac{1}{2} \left( \frac{p_j}{Q} \right) \left\{ \exp[K(\ell - x_j)] + \exp[-K(\ell - x_j)] \right. \\ \left. - \exp[K(\ell - x_{j-1})] - \exp[-K(\ell - x_{j-1})] \right\} / \left[ \exp(K\ell) - \exp(-K\ell) \right] \\ a_j = \frac{1}{2} \left( \frac{p_j}{Q} \right) \left\{ \exp[K(\ell - x_j)] + \exp[-K(\ell - x_j)] \right. \\ \left. - \exp[-K(\ell + x_{j-1})] - \exp[-K(\ell - x_{j-1})] \right\} / \left[ \exp(K\ell) - \exp(-K\ell) \right] \\ b_j = -\frac{1}{2} \left( \frac{p_j}{Q} \right) \left\{ \exp[K(\ell - x_j)] + \exp[-K(\ell - x_j)] \right. \\ \left. - \exp[K(\ell + x_{j-1})] - \exp[K(\ell - x_{j-1})] \right\} / \left[ \exp(K\ell) - \exp(-K\ell) \right] \\ a''_j = \frac{1}{2} \left( \frac{p_j}{Q} \right) \left\{ \exp[-K(\ell + x_j)] + \exp[-K(\ell - x_j)] \right. \\ \left. - \exp[-K(\ell + x_{j-1})] - \exp[-K(\ell - x_{j-1})] \right\} / \left[ \exp(K\ell) - \exp(-K\ell) \right] \\ b''_j = -\frac{1}{2} \left( \frac{p_j}{Q} \right) \left\{ \exp[K(\ell + x_j)] + \exp[K(\ell - x_j)] \right. \\ \left. - \exp[K(\ell + x_{j-1})] - \exp[K(\ell - x_{j-1})] \right\} / \left[ \exp(K\ell) - \exp(-K\ell) \right] \end{cases}$$

Dans le cas général de surcharges représentées sur la figure 4, les constantes relatives à l'intervalle  $(x_{j-1}, x_j)$  ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} A &= a_0 + a''_1 + a''_2 + \dots + a''_{j-1} + a_j + a'_{j+1} + a'_{j+2} + \dots + a'_n \\ B &= b_0 + b''_1 + b''_2 + \dots + b''_{j-1} + b_j + b'_{j+1} + b'_{j+2} + \dots + b'_n \end{aligned}$$

On traiterait de la même façon un cas de surcharge mixte comportant des charges concentrées et des charges réparties de densité constante.

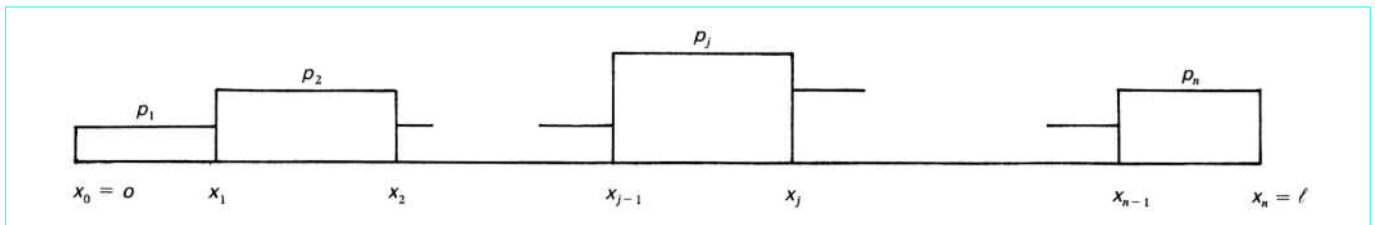


Figure 4 – Surcharges réparties sur une travée suspendue

### 2.2.3 Valeurs maximales ou minimales de M et de T dans un intervalle donné

D'après les expressions (19) et (20) de M et de T, il suffit de rechercher le maximum ou le minimum d'une fonction de la forme,  $\alpha$  et  $\beta$  étant deux constantes :

$$\varphi(x) = \alpha \exp(Kx) + \beta \exp(-Kx)$$

Si  $\alpha$  et  $\beta$  sont de signes contraires ( $\alpha\beta < 0$ ),  $\varphi(x)$  varie toujours dans le même sens, et le maximum ou le minimum de la fonction est atteint à l'une des extrémités de l'intervalle.

Si  $\alpha$  et  $\beta$  ont le même signe ( $\alpha\beta > 0$ ),  $\varphi(x)$  a un maximum si ce signe est  $-$ , et un minimum si ce signe est  $+$ , pour la valeur :

$$x_m = \frac{1}{2K} \ln \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)$$

Ce maximum (ou ce minimum) a pour valeur :

$$\varphi(x_m) = \pm 2\sqrt{\alpha\beta}$$

Le signe à prendre devant le radical étant le signe commun à  $\alpha$  et  $\beta$ . Le maximum ou le minimum de  $\varphi(x)$  dans l'intervalle considéré sera atteint soit aux bornes de l'intervalle si  $x_m$  est extérieur à l'intervalle, soit pour  $x_m$ .

Un cas particulier intéressant est celui où la travée supporte une charge répartie de densité  $p$  sur toute son étendue. Dans ce cas :

$$A = \left( \frac{p}{Q} - \frac{p'}{Q'} \right) \frac{1}{\exp(K\ell) + 1} \quad \text{et} \quad B = \left( \frac{p}{Q} - \frac{p'}{Q'} \right) \frac{\exp(K\ell)}{\exp(K\ell) + 1}$$

Le moment fléchissant maximal obtenu pour  $x = \ell/2$  a pour valeur :

$$M_{max} = \frac{Q}{K^2} \left( \frac{p}{Q} - \frac{p'}{Q'} \right) \left[ 1 - \frac{2\exp\left(\frac{K\ell}{2}\right)}{\exp(K\ell) + 1} \right]$$

Les valeurs extrêmes de l'effort tranchant ont lieu pour  $x = 0$  et  $x = \ell$  :

$$T(0) = -T(\ell) = \frac{Q}{K} \left( \frac{p}{Q} - \frac{p'}{Q'} \right) \frac{\exp(K\ell) - 1}{\exp(K\ell) + 1}$$

## 2.3 Calcul de la poussée complémentaire

### 2.3.1 Relation des déplacements orthogonaux

Cette relation donne le déplacement horizontal  $u_1$  du câble à l'extrémité de la travée, connaissant le déplacement horizontal  $u_0$  du câble à l'origine de la travée, la composante verticale  $v$  du déplacement d'un point du câble, la poussée complémentaire  $Q$  et la dilatation  $\epsilon$  due à la variation de température.

Nous supposons les déplacements du câble faibles. Soit  $x, y$  et  $s$  les coordonnées et l'abscisse curviligne d'un point du câble et  $(u, v)$  les composantes du déplacement de ce point. Un petit élément de longueur  $ds$  définie par :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

a, après déformation, une longueur  $ds + \delta ds$ ; nous avons :

$$ds + \delta ds = dx + \delta dx + dy + \delta dy = dx du + dy dv$$

car  $\delta dx = d\delta x = du$  et  $\delta dy = d\delta y = dv$

Donc 
$$\frac{du}{dx} = -\frac{dv}{dx} \frac{dy}{dx} + \frac{ds}{dx} \frac{\delta ds}{dx}$$

Or  $\delta ds$  résulte de l'allongement élastique dû à la variation de poussée  $Q$  et de l'allongement thermique dû à la dilatation  $\varepsilon$ . Donc,  $E'$  et  $S$  désignant le module et la section du câble, et en observant

que la variation de tension du câble est  $Q \frac{ds}{dx}$  :

$$\frac{\delta ds}{dx} = \left[ \frac{Q}{E'S} \left( \frac{ds}{dx} \right) + \varepsilon \right] \frac{ds}{dx}$$

il en résulte que :

$$\frac{du}{dx} = -\frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} + \frac{Q}{E'S} \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 + \varepsilon \left( \frac{ds}{dx} \right)^2$$

Intégrons l'équation précédente d'une extrémité à l'autre de la travée ; nous obtenons la **relation des déplacements orthogonaux** :

$$u_1 - u_0 = -\int_0^\ell \frac{dy}{dx} \frac{dv}{dx} dx + \frac{Q}{E'S} L_s + \varepsilon L_t \tag{21}$$

dans laquelle :

$$L_s = \int_0^\ell \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx \quad \text{et} \quad L_t = \int_0^\ell \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 dx$$

Intégrons par parties l'intégrale qui figure dans (21) ; en observant que  $v$  est nul pour  $x=0$  et  $x=\ell$  et que  $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{8f}{\ell^2}$ , nous pouvons mettre la relation des déplacements orthogonaux sous la forme :

$$u_1 - u_0 = -\frac{8f}{\ell^2} \int_0^\ell v dx + \frac{Q}{E'S} L_s + \varepsilon L_t \tag{22}$$

La relation (21) n'a été démontrée qu'en axes rectangulaires. Elle est cependant encore exacte lorsque l'on compte les ordonnées du câble à partir de la corde qui ne diffère des ordonnées comptées à partir d'un axe horizontal que par une fonction linéaire  $ax+b$ , car :

$$\int_0^\ell \frac{d(ax+b)}{dx} \frac{dv}{dx} dx = a \int_0^\ell \frac{dv}{dx} dx = a[v(\ell) - v(0)] = 0$$

### 2.3.2 Expressions de la longueur $L$ du câble et des longueurs $L_t$ et $L_s$

Il est facile, pour un câble parabolique de longueur  $L$ , de portée  $\ell$  et de flèche  $f$  dont la corde  $Q'A'$  fait l'angle  $\theta$  avec l'horizontale (figure 5), de calculer les intégrales :

$$L = \int_0^\ell \frac{ds}{dx} dx, \quad L_t = \int_0^\ell \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 dx, \quad L_s = \int_0^\ell \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx$$

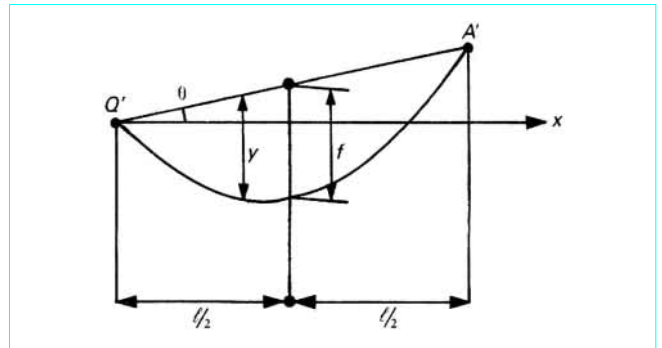


Figure 5 - Câble parabolique

En effet, l'équation de la ligne moyenne du câble en axes rectangulaires est :

$$Y = y - x \operatorname{tg} \theta = \frac{4f}{\ell^2} x(\ell - x) - x \operatorname{tg} \theta$$

et l'on trouve :

$$\cos^2 \theta \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 = 1 - \frac{8f}{\ell} \left( 1 - \frac{2x}{\ell} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{16f^2}{\ell^2} \left( 1 - \frac{2x}{\ell} \right)^2 \cos^2 \theta$$

On calcule donc facilement des développements en série de  $\left( \frac{ds}{dx} \right)^n$  et l'on trouve aisément les formules suivantes :

$$\begin{cases} L = \ell \left[ \frac{1}{\cos \theta} + \frac{8}{3} \left( \frac{f}{\ell} \right)^2 \cos^3 \theta - \frac{32}{5} \left( \frac{f}{\ell} \right)^4 \cos^5 \theta (1 - 5 \sin^2 \theta) + \dots \right] \\ L_t = \ell \left[ \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{16}{3} \left( \frac{f}{\ell} \right)^2 \right] \\ L_s = \ell \left[ \frac{1}{\cos^3 \theta} + 8 \left( \frac{f}{\ell} \right)^2 \frac{1 + \sin^2 \theta}{\cos \theta} + \frac{96}{5} \left( \frac{f}{\ell} \right)^4 \cos^5 \theta + \dots \right] \end{cases}$$

qui, lorsque  $\theta$  est nul se réduit à :

$$\begin{cases} L = \ell \left[ 1 + \frac{8}{3} \left( \frac{f}{\ell} \right)^2 - \frac{32}{5} \left( \frac{f}{\ell} \right)^4 + \dots \right] \\ L_t = \ell \left[ 1 + \frac{16}{3} \left( \frac{f}{\ell} \right)^2 \right] \\ L_s = \ell \left[ 1 + 8 \left( \frac{f}{\ell} \right)^2 + \frac{96}{5} \left( \frac{f}{\ell} \right)^4 + \dots \right] \end{cases}$$

Il est justifié,  $f/\ell$  étant au plus égal à  $1/8$ , de calculer  $L$  et  $L_s$  au moyen de développements limités au terme en  $(f/\ell)^4$ .

### 2.3.3 Équation donnant la poussée complémentaire

Considérons un pont suspendu à  $m$  travées (figure 6), et affectons de l'indice  $i$  les quantités :

$$\ell, f, y, v, p', p, I, K, L_s, L_t,$$

considérées précédemment relatives à la travée de rang  $i$ .

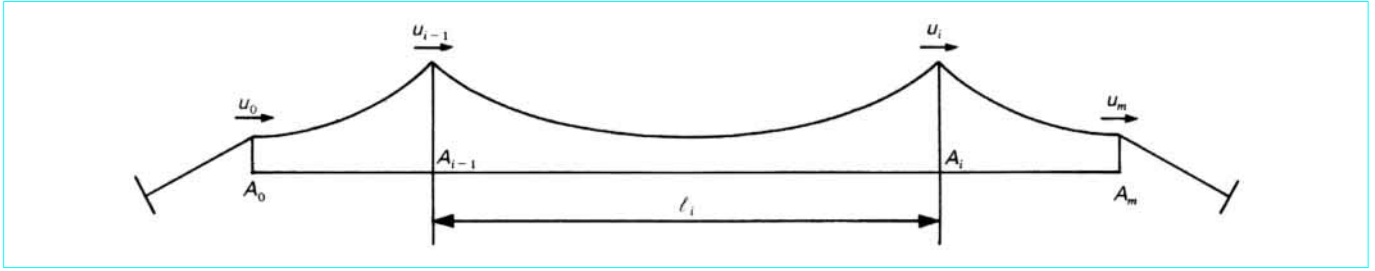


Figure 6 – Pont suspendu à plusieurs travées

Lorsque les travées sont surchargées, ou lorsque la température est différente de la température de réglage, la poussée devient  $Q' + Q$ . Si  $u_i$  désigne le déplacement horizontal du pylône  $P_i$ , nous avons, en vertu de la relation des déplacements orthogonaux (22) :

$$u_i - u_{i-1} = -\frac{8f_i}{\ell_i^2} \int_0^{\ell_i} v_i dx + \frac{Q}{E'S} L_{s_i} + \varepsilon L_{t_i} \quad (23)$$

Les déplacements  $u_0$  et  $u_m$  sont dus aux variations de longueur des câbles d'ancrage ; si ces derniers ont une tension initiale assez forte, ou s'ils sont suffisamment courts, nous avons  $L_{s_0}, L_{t_0}, L_{s_{m+1}}$  et  $L_{t_{m+1}}$  désignant les longueurs  $L_s$  et  $L_t$  relatives aux câbles d'ancrage :

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \frac{Q}{E'S} L_{s_0} + \varepsilon L_{t_0} \\ -u_m &= \frac{Q}{E'S} L_{s_{m+1}} + \varepsilon L_{t_{m+1}} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Ajoutons membre à membre les équations (23) et (24) pour éliminer les déplacements horizontaux  $u_i$  ; nous obtenons l'équation :

$$\frac{Q}{E'S} \mathcal{L}_s + \varepsilon \mathcal{L}_t = \sum_i \frac{8f_i}{\ell_i^2} \int_0^{\ell_i} v_i dx \quad (25)$$

dans laquelle :

$$\mathcal{L}_s = \int \left( \frac{ds}{dx} \right)^3 dx \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_t = \int \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 dx$$

les intégrales étant calculées d'un massif d'ancrage à l'autre.

En remplaçant dans l'équation (25) les flèches  $v_i$  par leurs expressions calculées dans le paragraphe 2.2 ( $v_i$  dépend de  $Q$ ), nous trouvons une équation qui permet de calculer  $Q$ . Nous devons donc

calculer l'intégrale  $\int_0^{\ell} v dx$  pour une travée quelconque ; pour cela, écrivons, comme nous l'avons fait pour déterminer les constantes  $A$  et  $B$  :

$$v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_j + \dots + v_n$$

De l'expression de  $v_0$  donnée au paragraphe 2.2.2 nous déduisons :

$$\int_0^{\ell} v_0 dx = -\frac{Q}{Q'+Q} \left[ \frac{2}{3} f\ell - \frac{8f}{K^2\ell} + \frac{16f}{K^3\ell^2} \frac{\exp(K\ell) - 1}{\exp(K\ell) + 1} \right]$$

Introduisons les variables sans dimensions :

$$\lambda = K\ell = \ell \sqrt{\frac{Q'+Q}{EI}} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{x}{\ell} \quad (26)$$

$\xi$  est l'abscisse relative d'une section, et  $\lambda$  caractérise la souplesse de la travée ;  $\lambda$  est d'autant plus petit que la travée est plus rigide.

En définissant la fonction sans dimensions :

$$\varphi(\lambda, \xi) = 3\xi^2 - 2\xi^3 - \frac{12\xi}{\lambda^2} + \frac{12}{\lambda^3} \frac{\exp(\lambda\xi) - \exp[\lambda(1-\xi)] + \exp\lambda - 1}{\exp\lambda + 1} \quad (27)$$

nous pouvons écrire :

$$\int_0^{\ell} v_0 dx = -\frac{2}{3} f\ell \frac{Q}{Q'+Q} \varphi(\lambda, 1)$$

De même, on vérifie aisément que l'on a,  $v_j$  étant la fonction donnée au paragraphe 2.2.2 relative à la densité de charge  $p_j$  régnant entre les abscisses  $x_{j-1} = \ell\xi_{j-1}$  et  $x_j = \ell\xi_j$  :

$$\int_0^{\ell} v_j dx = \frac{1}{Q'+Q} p_j \frac{\ell^3}{12} [\varphi(\lambda, \xi_j) - \varphi(\lambda, \xi_{j-1})]$$

Enfin, en définissant la fonction sans dimensions :

$$\psi(\lambda, \xi) = 6\xi(1-\xi) - \frac{12}{\lambda^2} + \frac{12}{\lambda^2} \frac{\exp(\lambda\xi) + \exp[\lambda(1-\xi)]}{\exp\lambda + 1} \quad (28)$$

on vérifie aisément que l'on a,  $v_j$  étant la fonction donnée au paragraphe 2.2.2 relative à la charge concentrée  $P_j$  appliquée à la section d'abscisse  $x_j = \ell\xi_j$  :

$$\int_0^{\ell} v_j dx = \frac{1}{Q'+Q} P_j \frac{\ell^2}{12} \psi(\lambda, \xi_j)$$

Les résultats qui précèdent permettent d'écrire l'équation (25) sous la forme :

$$Q = \frac{\sum_i \frac{2}{3} f_i \mathcal{F}_i - \varepsilon(Q'+Q) \mathcal{L}_t}{\sum_i \frac{16}{3} \frac{f_i^2}{\ell_i} \varphi(\lambda_i, 1) + \frac{Q'+Q}{E'S} \mathcal{L}_s} \quad (29)$$

dans laquelle pour une travée supportant des densités de charge  $p_j$  entre les abscisses relatives  $\xi_{j-1}$  et  $\xi_j$  :

$$\mathcal{F}_i = \ell_i \sum_j p_j [\varphi(\lambda_i, \xi_j) - \varphi(\lambda_i, \xi_{j-1})]$$

et pour une travée supportant des charges concentrées  $P_j$  aux abscisses relatives  $\xi_j$  :

$$\mathcal{F}_i = \sum_j P_j \psi(\lambda_i, \xi_j)$$



La fonction  $\psi(\lambda, \xi)$  est une **pseudo-fonction d'influence** qui dépend de  $\lambda$ , c'est-à-dire de l'état de charge de l'ouvrage. Dans les formules précédentes,  $\sum_i$  indique une sommation étendue à l'ensemble des travées et  $\sum_j$  une sommation dans chaque travée. Nous avons posé :

$$\lambda_i = \ell_i \sqrt{\frac{Q' + Q}{EI_i}}$$

L'équation (29), de la forme  $Q = F(Q)$ , permet de calculer rapidement  $Q$  par approximations successives ; la suite :

$$Q_1 = F(Q_0), Q_2 = F(Q_1), \dots, Q_p = F(Q_{p-1}), \dots$$

tend rapidement vers  $Q$ . Trois approximations sont toujours suffisantes.

**Remarque :** les fonctions  $\varphi(\lambda, \xi)$  et  $\psi(\lambda, \xi)$  vérifient les relations :

$$\begin{cases} \varphi(\lambda, \xi) + \varphi(\lambda, 1 - \xi) = \varphi(\lambda, 1) \\ \psi(\lambda, \xi) = \psi(\lambda, 1 - \xi) = \frac{\partial}{\partial \xi} \varphi(\lambda, \xi) \end{cases}$$

## 2.4 Indications pour le calcul d'un pont suspendu symétrique à trois travées

La méthode de calcul exposée ci-avant permet de calculer rapidement un pont suspendu symétrique à trois travées. Dans le cas où la travée centrale est environ trois fois plus longue que les travées de rive, les tableaux 1 et 2 indiquent comment doit être disposée une surcharge de densité constante pour obtenir les efforts maximaux dans la poutre de rigidité et les déformations maximales de l'ouvrage.

Les lignes enveloppes du moment fléchissant et de la valeur absolue de l'effort tranchant dans la poutre de rigidité ont la forme indiquée sur la figure 7.

Tableau 1 – Efforts maximaux dans les poutres de rigidité

Effet obtenu	Température	Disposition des surcharges		
		A	B	C
Moment fléchissant et effort tranchant maximaux en travée A	maximale			
Effort tranchant négatif minimal en travée A	minimale			
Moment fléchissant maximal en travée B	maximale			
Moment fléchissant maximal au milieu de la travée B	maximale			
Effort tranchant maximal dans la travée B	maximale			
Effort tranchant minimal dans la travée B	minimale			
Poussée maximale	minimale			

Tableau 2 – Déformations maximales de l'ouvrage				
Effet obtenu	Température	Disposition des surcharges		
		A	B	C
Flèche maximale vers le bas au milieu de la travée B	maximale		$\approx 0,10$	$\approx 0,90$
Flèche maximale vers le haut au milieu de la travée B	minimale			
Flèche maximale vers le bas au milieu de la travée A	maximale			
Flèche maximale vers le haut au milieu de la travée A	minimale			
Déplacement maximal vers la gauche en tête du pylône A/B	minimale			
Déplacement maximal vers la droite en tête du pylône A/B	maximale			

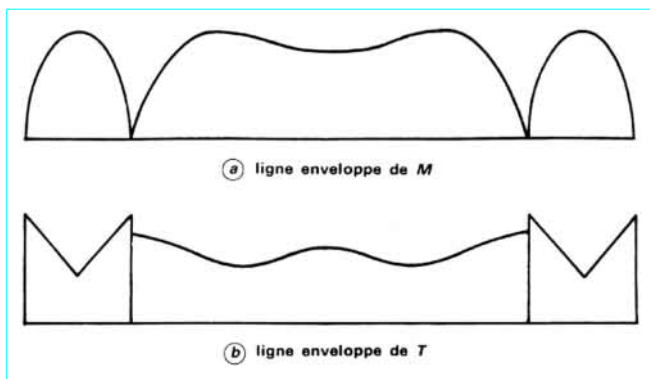


Figure 7 – Lignes enveloppes de  $M$  et  $T$  dans une poutre de rigidité

### 3. Équilibre d'un câble pesant fortement tendu

#### 3.1 Formules générales

Considérons (figure 8) un câble fortement tendu fixé en  $A$  et  $B$  et soumis à son poids  $\bar{\omega}$  par unité de longueur. La figure d'équilibre du câble est une chaînette que la forte tension du câble permet de confondre avec une parabole ; cette hypothèse revient à supposer que le poids du câble par mètre courant de projection horizontale peut être considéré comme constant et égal à  $\bar{\omega}/\cos \theta$ ,  $\theta$  étant l'angle de  $AB$  et de l'horizontale. En effet, le calcul fait pour établir la formule (12) montre que l'ordonnée  $y$  du câble compté à partir de sa corde  $a$  pour valeur :

$$y = \frac{4f}{\ell^2} x(\ell - x)$$

et que la composante horizontale  $Q$  de la traction du câble est constante et égale à :

$$Q = \frac{\bar{\omega}}{\cos \theta} \frac{\ell^2}{8f} = \frac{\Pi \ell}{8f} \tag{30}$$

$\Pi$  désignant le poids total du câble :

$$\Pi = \bar{\omega} \ell = \frac{\bar{\omega} \ell}{\cos \theta} \tag{31}$$

La tension moyenne  $T$  du câble à mi-portée, où la tangente à la parabole est parallèle à la corde  $AB$ , a pour valeur :

$$T = \frac{Q}{\cos \theta} = \frac{\Pi \ell}{8f} = \frac{\bar{\omega} \ell^2}{8f} \tag{32}$$

**Remarque :** les efforts dans une travée de rive peuvent être calculés avec une erreur inférieure à 1 % en prenant  $Q = 0$ . Nous obtenons ainsi pour valeurs approchées de  $M_{max}$  et de  $T_{max}$  dans la travée de rive de portée  $\ell'$  :

$$\begin{cases} M_{max} = \frac{p}{K^{12}} \left[ 1 - \frac{2 \exp\left(\frac{K' \ell'}{2}\right)}{\exp(K' \ell') + 1} \right] \\ T_{max} = \frac{p}{K'} \frac{\exp(K' \ell') - 1}{\exp(K' \ell') + 1} \end{cases}$$

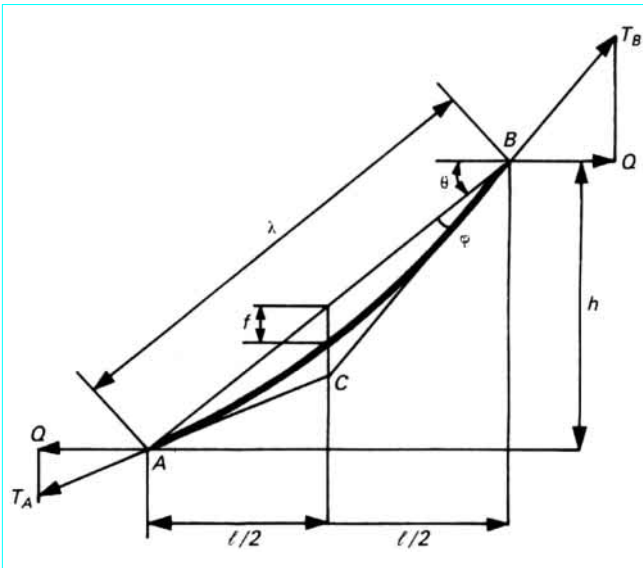


Figure 8 – Câble tendu entre A et B

La tension du câble est maximale au point haut B et minimale au point bas A ; en désignant par  $h$  la différence de niveaux des extrémités du câble, les tensions en A et B ont pour valeurs :

$$\begin{cases} T_A = T - \bar{w} \left( \frac{h}{2} - f \right) \\ T_B = T + \bar{w} \left( \frac{h}{2} - f \right) \end{cases} \quad (33)$$

Démontrons par exemple la seconde formule (33). Nous avons, avec les notations de la figure 8 :

$$T_B = \frac{Q}{\cos(\theta + \varphi)} = \frac{T \cos \theta}{\cos(\theta + \varphi)}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{h}{\ell} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg}(\theta + \varphi) = \frac{h + 4f}{\ell}$$

il en résulte que :

$$T_B = T \frac{\sqrt{1 + \left( \frac{h + 4f}{\ell} \right)^2}}{\sqrt{1 + \left( \frac{h}{\ell} \right)^2}} = T \sqrt{1 + \frac{16f \left( \frac{h}{2} + f \right)}{\ell^2 \left( 1 + \left( \frac{h}{\ell} \right)^2 \right)}}$$

Il suffit alors,  $f/\ell$  étant petit, d'effectuer un développement limité pour aboutir à la seconde formule (33).

Le câble étant presque rectiligne, nous pouvons prendre pour longueur développée du câble, d'après la formule donnée au paragraphe 2.3.2 :

$$L = \ell \left[ \frac{1}{\cos \theta} + \frac{8}{3} \left( \frac{f}{\ell} \right)^2 \cos^3 \theta \right]$$

soit, compte tenu des formules (31) (32) et de  $\ell = \lambda \cos \theta$  :

$$L = \lambda \left[ 1 + \frac{\Pi^2 \cos^2 \theta}{24 T^2} \right] \quad (34)$$

Imaginons le **même** câble tendu entre deux points A' et B', et soit  $\lambda' = A'B'$  et  $\ell'$  la projection de A'B' sur l'horizontale ; nous avons, Q' désignant la composante horizontale de la traction du câble et T' la tension moyenne du câble :

$$\ell' = \lambda' \cos \theta', \quad Q' = \frac{\Pi \ell'}{8 f'}, \quad T' = \frac{\Pi \lambda'}{8 f'}$$

La nouvelle longueur développée du câble :

$$L' = \lambda' \left( 1 + \frac{\Pi^2 \cos^2 \theta'}{24 T'^2} \right) \quad (35)$$

ne diffère de L que par l'allongement élastique et par l'allongement thermique éventuel  $\varepsilon$ . Donc si E' et S désignent respectivement le module d'élasticité et la section du câble :

$$\frac{L' - L}{L} = \varepsilon + \frac{T' - T}{E' S}$$

Remplaçons dans l'équation précédente L et L' par leurs expressions (34) et (35) ; nous trouvons, en observant que  $\lambda$  et  $\lambda'$  diffèrent peu et en négligeant des quantités très petites, la formule fondamentale donnant l'allongement  $\delta\lambda = \lambda' - \lambda$  de la corde :

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} = \varepsilon + \frac{T' - T}{E' S} + \frac{\Pi^2}{24} \left( \frac{\cos^2 \theta}{T^2} - \frac{\cos^2 \theta'}{T'^2} \right) \quad (36)$$

Le premier terme du second membre de la formule (36) représente l'allongement thermique, le second l'allongement élastique et le troisième l'allongement géométrique dû à la modification de la figure d'équilibre.

### 3.2 Module d'élasticité apparent d'un câble fortement tendu

Reprenons le câble de la figure 8 et, l'extrémité A étant fixe, déplaçons le point B en un point B' de AB tel que  $BB' = \delta\lambda$  soit très petit. La tension moyenne du câble devient  $T + \delta T$ . En supposant  $\varepsilon = 0$ , nous avons, d'après la formule fondamentale (36) :

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta T}{E' S} + \frac{\Pi^2 \cos^2 \theta}{24} \left[ \frac{1}{T^2} - \frac{1}{(T + \delta T)^2} \right]$$

soit,  $\delta T$  étant très petit comme  $\delta\lambda$  :

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta T}{E' S} + \frac{\Pi^2 \cos^2 \theta}{12} \frac{\delta T}{T^3}$$

Définissons le **module d'élasticité apparent**  $E'_1$  du câble par la relation :

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\delta T}{E'_1 S}$$

nous avons

$$\frac{E'_1}{E'} = \frac{1}{1 + \frac{\Pi^2 E' S \cos^2 \theta}{12 T^3}}$$

En introduisant la contrainte moyenne de traction  $\sigma = T/S$  et le poids volumique  $\Delta$  du câble, nous trouvons, puisque  $\Pi = \Delta S \lambda$  :

$$\frac{E'_1}{E'} = \frac{1}{1 + \frac{E' \Delta^2 \ell^2}{12 \sigma^3}} \quad (37)$$

Le tableau 3 donne les valeurs du rapport  $E'_1/E'$  en fonction de  $\ell$  exprimé en mètres et de  $\sigma$  exprimé en MPa lorsque  $\Delta = 78\,500 \text{ N/m}^3$ ,  $E' = 160\,000 \text{ MPa}$ .

Tableau 3 – Valeurs du rapport  $E'_1/E'$  [formule (37)]

$\sigma$	$\ell$							
	50	100	150	200	250	300	350	400
200	0,975 0	0,906 9	0,812 3	0,708 8	0,609 1	0,519 7	0,442 8	0,378 3
250	0,987 0	0,950 0	0,894 2	0,826 2	0,752 6	0,678 8	0,608 2	0,543 1
300	0,992 4	0,970 5	0,935 9	0,891 5	0,840 2	0,785 0	0,728 4	0,672 5
350	0,995 2	0,981 2	0,958 7	0,928 8	0,893 0	0,852 9	0,809 9	0,765 3
400	0,996 8	0,987 3	0,971 9	0,951 2	0,925 7	0,896 4	0,864 1	0,829 6
450	0,997 8	0,991 1	0,980 1	0,965 2	0,946 7	0,924 9	0,900 5	0,873 9
500	0,998 4	0,993 5	0,985 4	0,974 4	0,960 5	0,944 1	0,925 5	0,904 8
550	0,998 8	0,995 1	0,989 0	0,980 6	0,970 1	0,957 4	0,943 0	0,926 8
600	0,999 0	0,996 2	0,991 5	0,985 0	0,976 8	0,966 9	0,955 5	0,942 6

### 3.3 Applications

#### 3.3.1 Déplacement horizontal relatif des extrémités d'un câble

Supposons que les extrémités du câble de la figure 8 subissent un déplacement relatif  $\delta\ell = u_1 - u_0$  ( $u_1$  déplacement horizontal de B et  $u_0$  déplacement horizontal de A). En différenciant la relation :

$$\lambda^2 = \ell^2 + h^2$$

nous trouvons :

$$\delta\ell = \frac{\lambda}{\ell} \delta\lambda \quad \text{soit} \quad u_1 - u_0 = \frac{\delta\lambda}{\cos\theta}$$

La formule fondamentale (36) nous donne alors :

$$u_1 - u_0 = \frac{\lambda\varepsilon}{\cos\theta} + \frac{\lambda(T' - T)}{E'S \cos\theta} + \frac{\Pi^2 \lambda \cos\theta}{24} \left( \frac{1}{T^2} - \frac{1}{T'^2} \right)$$

En tenant compte des relations :

$$\ell = \lambda \cos\theta \quad Q = T \cos\theta \quad Q' = T' \cos\theta$$

la formule précédente se met sous la forme :

$$u_1 - u_0 = \varepsilon L_t + \frac{Q' - Q}{E'S} L_s + \frac{\Pi^2 \ell \cos^2\theta}{24} \left( \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q'^2} \right) \quad (38)$$

avec 
$$L_t = \frac{\ell}{\cos^2\theta} \quad \text{et} \quad L_s = \frac{\ell}{\cos^3\theta}$$

#### 3.3.2 Application aux câbles d'ancrage des ponts suspendus

La formule (38) peut être appliquée aux câbles d'ancrage des ponts suspendus lorsqu'ils sont trop longs pour que leurs déformations géométriques puissent être négligées. Il suffit alors d'ajouter aux seconds membres des équations (24) les termes complémentaires :

$$\frac{\Pi_0^2 \ell_0 \cos^2\theta_0}{24} \left[ \frac{1}{Q'^2} - \frac{1}{(Q' + Q)^2} \right]$$

$$\text{et} \quad \frac{\Pi_{m+1}^2 \ell_{m+1} \cos^2\theta_{m+1}}{24} \left[ \frac{1}{Q'^2} - \frac{1}{(Q' + Q)^2} \right]$$

Il suffit alors de remplacer dans l'équation (29) donnant la poussée complémentaire  $\varepsilon L_t$  par  $\varepsilon L_t + R$ ,  $R$  désignant le terme très petit :

$$R = \frac{1}{24} \left[ \Pi_0^2 \ell_0 \cos^2\theta_0 + \Pi_{m+1}^2 \ell_{m+1} \cos^2\theta_{m+1} \right] \left[ \frac{1}{Q'^2} - \frac{1}{(Q' + Q)^2} \right]$$

#### 3.3.3 Calcul des pylônes haubannés

Considérons un pylône (figure 9) maintenu par une couronne de haubans disposés en éventail régulier. En l'absence de forces extérieures, dues au vent par exemple, les haubans tous identiques fixés au point B du pylône ont la même tension de composante horizontale Q.

Donnons un déplacement horizontal  $u$  au point B dans la direction OX, et soit  $\varphi_i$  l'angle (OX, OA<sub>i</sub>) ; le point de fixation B du hauban BA<sub>i</sub> subit dans son plan un déplacement horizontal  $u_i = u \cos\varphi_i$  et la composante horizontale Q<sub>i</sub> de sa tension est donnée par la formule (38) :

$$u_i = \varepsilon L_t + \frac{Q_i - Q}{E'S} L_s + \frac{\Pi^2 \ell \cos^2\theta}{24} \left( \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q_i^2} \right)$$

On calcule Q<sub>i</sub> en écrivant la formule précédente :

$$Q_i = f(Q_i) = Q + \frac{E'S}{L_s} \left[ u_i - \varepsilon L_t - \frac{\Pi^2 \ell \cos^2\theta}{24} \left( \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{Q_i^2} \right) \right]$$

et en utilisant la méthode des approximations successives ; la suite  $Q_i^{(p+1)} = f(Q_i^{(p)})$  tend rapidement vers Q<sub>i</sub>.

La réaction R exercée en B par l'ensemble des haubans dans la direction OX sur le pylône a pour valeur :

$$R = \sum_i Q_i \cos\varphi_i$$

On sait donc calculer R en fonction de  $u$  et de la dilatation thermique  $\varepsilon$ , et l'on peut vérifier que la réaction  $\sum_i Q_i \sin\varphi_i$  exercée par l'ensemble des haubans normalement à la direction OX est négligeable.

Lorsqu'il y a plusieurs couronnes de haubans, le pylône est une poutre continue reposant sur des appuis d'élasticité variable. La théorie des poutres continues montre que les réactions d'appui  $R_k$  sont des fonctions de la densité de charge  $p$  appliquée et des déplacements  $u_k$  des appuis :

$$R_k = F_k(p, u_k)$$

Par ailleurs, l'élasticité des appuis est définie par une fonction  $\varphi_k$  que l'on sait calculer :

$$u_k = \varphi_k(R_k)$$



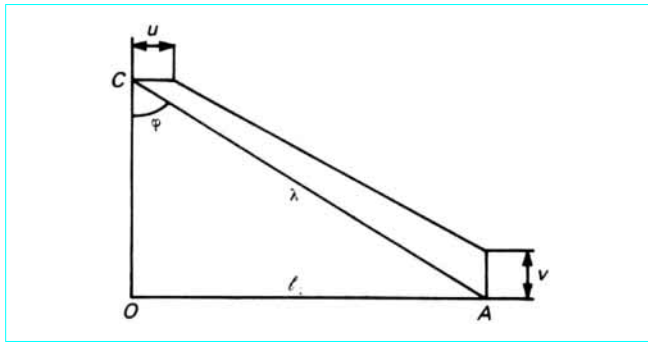


Figure 11 – Variation de longueur des haubans

En supposant que la température n’ait pas changé, la variation  $F$  de la tension du hauban a pour valeur,  $S$  désignant la section du hauban :

$$F = E_1' S \frac{\delta \lambda}{\lambda} = K \delta \lambda = -K(u \sin \varphi + v \cos \varphi)$$

avec  $K$  constante mécanique du hauban définie par :

$$K = \frac{E_1' S}{\lambda} \tag{39}$$

La composante verticale  $R$  et la composante horizontale  $Q$  de la variation de tension du hauban ont pour valeurs :

$$R = F \cos \varphi = -Ku \sin \varphi \cos \varphi - Kv \cos^2 \varphi$$

$$Q = F \sin \varphi = -Ku \sin^2 \varphi - Kv \sin \varphi \cos \varphi$$

Nous écrivons la première des formules précédentes sous la forme :

$$v = -\frac{R}{K \cos^2 \varphi} - u \operatorname{tg} \varphi \tag{40}$$

### 4.2.2 Poutres du tablier

Considérons la poutre  $OB$  encastree en  $O$  et simplement appuyée en  $B$ . Si l’on applique aux points  $A_i$  des forces verticales  $R_i$ , comptées positivement vers le haut, ces points subissent des déplacements verticaux  $v_i$ , comptés positivement vers le haut :

$$v_i = \sum_k a_{ik} R_k \tag{41}$$

Les coefficients  $a_{ij}$ , calculés une fois pour toutes, sont les éléments d’une matrice symétrique ( $a_{ij} = a_{ji}$ ) en vertu du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti.

### 4.2.3 Pylône

Le pylône est une console verticale encastree en  $O$  (figure 12). Si nous appliquons aux points  $C_i$  des forces horizontales  $H_i$ , comptées positivement vers la droite, ces points subissent des déplacements horizontaux  $u_i$ , comptés positivement vers la droite :

$$u_i = \sum_k b_{ik} H_k \tag{42}$$

Les coefficients  $b_{ij}$ , calculés une fois pour toutes, sont les éléments d’une matrice symétrique ( $b_{ij} = b_{ji}$ ) en vertu du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti.

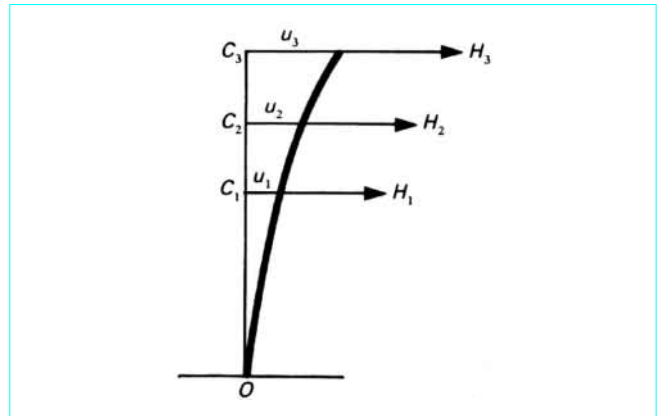


Figure 12 – Déformation du pylône

## 4.3 Calcul de l’ouvrage

### 4.3.1 Effet des surcharges

Si les haubans étaient supprimés, les surcharges appliquées au tablier donneraient des déplacements verticaux  $V_i$  aux points  $A_i$  et  $V'_i$  aux points  $A'_i$ . Désignons par  $R_i$  les composantes verticales des variations des tensions des haubans  $C_i A_i$  et par  $R'_i$  les composantes verticales des variations des tensions des haubans  $C_i A'_i$ . Il suffit de connaître  $R_i$  et  $R'_i$  pour pouvoir calculer tous les efforts dans l’ouvrage.

En utilisant la formule (41) nous voyons que les déplacements verticaux  $v_i$  et  $v'_i$  des points  $A_i$  et  $A'_i$  ont pour valeurs :

$$\begin{cases} v_i = V_i + \sum_k A_{ik} R_k \\ v'_i = V'_i + \sum_k A'_{ik} R'_k \end{cases}$$

Mais, si  $u_i$  désigne le déplacement horizontal du point  $C_i$ , nous avons également, en utilisant la formule (40) :

$$\begin{cases} v_i = -\frac{R_i}{K_i \cos^2 \varphi_i} - u_i \operatorname{tg} \varphi_i \\ v'_i = -\frac{R'_i}{K_i \cos^2 \varphi_i} + u_i \operatorname{tg} \varphi_i \end{cases}$$

La comparaison des formules précédentes nous donne les équations :

$$\begin{cases} \frac{R_i}{K_i \cos^2 \varphi_i} + \sum_k a_{ik} R_k = -V_i - u_i \operatorname{tg} \varphi_i \\ \frac{R'_i}{K_i \cos^2 \varphi_i} + \sum_k a'_{ik} R'_k = -V'_i + u_i \operatorname{tg} \varphi_i \end{cases} \tag{43}$$

De plus, l’effort exercé en  $C_i$  sur le pylône a pour valeur :

$$H_i = Q_i - Q'_i = (R_i - R'_i) \operatorname{tg} \varphi_i$$

La formule (42) nous donne alors les équations :

$$u_i = \sum_k b_{ik} (R_k - R'_k) \operatorname{tg} \varphi_k \tag{44}$$

Les équations (43) et (44) permettent de calculer les inconnues  $R_i$ ,  $R'_i$  et  $u_i$ . En ajoutant membre à membre les équations (43), nous obtenons les équations suivantes qui permettent de calculer  $R_i + R'_i$  :

$$\frac{R_i + R'_i}{K_i \cos^2 \varphi_i} + \sum_k a_{ik} (R_k + R'_k) = -(V_i + V'_i)$$

En retranchant membre à membre les équations (43), et en tenant compte de l'équation (44), nous obtenons les équations suivantes qui permettent de calculer  $R_i - R'_i$  :

$$\frac{R_i - R'_i}{K_i \cos^2 \varphi_i} + \sum_k (a_{ik} + 2b_{ik} \operatorname{tg} \varphi_i \operatorname{tg} \varphi_k) (R_k - R'_k) = -(V_i - V'_i)$$

### 4.3.2 Effet des variations de température

Soit  $\varepsilon$  la dilatation due à la variation de température. Les haubans s'allongent de  $\varepsilon \lambda_i$ . L'ouvrage étant symétrique, les déplacements  $u_i$  sont nuls et  $R_i = R'_i$ . Négligeons la dilatation thermique du pylône et du tablier ; cette hypothèse est justifiée parce que les haubans qui ont une faible inertie thermique s'échauffent avant le pylône et le tablier. Soit  $\delta \lambda_i$  l'allongement des haubans et  $v_i$  le déplacement vertical des points  $A_i$  et  $A'_i$  ; nous avons :

$$\delta \lambda_i + \varepsilon \lambda_i = -v_i \cos \varphi_i$$

et par suite  $F_i = K_i \delta \lambda_i = -K_i (\varepsilon \lambda_i + v_i \cos \varphi_i)$

La relation  $R_i = F_i \cos \varphi_i$  conduit à l'expression suivante de  $v_i$  :

$$v_i = -\frac{R_i}{K_i \cos^2 \varphi_i} - \frac{\varepsilon \lambda_i}{\cos \varphi_i}$$

Mais nous avons aussi, aucune surcharge n'étant appliquée au tablier :

$$v_i = \sum_k a_{ik} R_k$$

Il en résulte que les inconnues  $R_i$  sont données par les équations :

$$\frac{R_i}{K_i \cos^2 \varphi_i} + \sum_k a_{ik} R_k = -\frac{\varepsilon \lambda_i}{\cos \varphi_i} \quad (45)$$

### 4.3.3 Vérification de l'élasticité apparente des haubans

Les calculs qui précèdent sont effectués avec un module d'élasticité  $E'_1(\sigma_i)$  apparent pour chaque hauban qui dépend de sa contrainte initiale  $\sigma_i$ . Mais le calcul donne une contrainte finale  $\sigma'_i$  à laquelle correspond un module d'élasticité apparent  $E'_1(\sigma'_i)$  différent de  $E'_1(\sigma_i)$ .

Le calcul peut être considéré comme suffisamment approché si  $E'_1(\sigma_i)$  et  $E'_1(\sigma'_i)$  sont peu différents. S'il n'en est pas ainsi, il faut, pour obtenir des résultats précis, reprendre le calcul en adoptant pour chaque hauban un module d'élasticité apparent moyen, par exemple :

$$\frac{1}{2} [E'_1(\sigma_i) + E'_1(\sigma'_i)], \text{ ou encore } E'_1\left(\frac{\sigma_i + \sigma'_i}{2}\right)$$

## Références bibliographiques

- [1] COURBON (J.). – *Résistance des matériaux*. Tomes I et II. Dunod (1971).
- [2] COURBON (J.). – *Ponts suspendus à poutres de rigidité : tables facilitant le calcul de la poussée*. Annales des Ponts et Chaussées (1948).