

# Structures élastiques planes chargées normalement à leur plan

par **Jean COURBON**

*Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées*

*Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées*

<b>1. Poutres planes se déformant normalement à leur plan.....</b>	<b>C 2 020 - 2</b>
1.1 Définition et sollicitation des structures étudiées.....	— 2
1.2 Système des forces extérieures relatif à une section .....	— 2
1.3 Formules de Bresse .....	— 3
1.4 Applications .....	— 4
1.4.1 Action du vent sur un arc symétrique.....	— 4
1.4.2 Anneau libre sollicité à la torsion.....	— 4
<b>2. Travée indépendante circulaire.....</b>	<b>— 5</b>
2.1 Généralités .....	— 5
2.2 Calcul des moments fléchissants .....	— 6
2.3 Calculs de l'effort tranchant et du couple de torsion.....	— 7
2.3.1 Application des formules de Bresse .....	— 7
2.3.2 Cas où la rigidité de torsion $K$ est constante.....	— 7
2.3.3 Cas où la rigidité de torsion $K$ est variable.....	— 8
2.4 Effet de l'excentricité des charges.....	— 8
2.4.1 Moment fléchissant .....	— 8
2.4.2 Effort tranchant et couple de torsion .....	— 9
2.5 Calcul des rotations d'extrémité.....	— 9
2.5.1 Cas général.....	— 9
2.5.2 Cas d'une poutre de section constante.....	— 10
2.6 Cas où la portée angulaire est faible.....	— 10
<b>3. Poutres circulaires continues.....</b>	<b>— 11</b>
3.1 Formules préliminaires. Coefficients de souplesse .....	— 11
3.1.1 Problème fondamental.....	— 11
3.1.2 Poutre de rigidité de torsion constante .....	— 11
3.1.3 Poutre de rigidité de torsion variable .....	— 12
3.2 Méthode de calcul des poutres continues circulaires .....	— 12
3.3 Cas exceptionnel d'une poutre continue circulaire fermée .....	— 13
<b>Pour en savoir plus.....</b>	<b>Doc. C 2 020</b>

**D**ans cet article, nous traiterons des caractéristiques de résistance des structures élastiques planes telles que les poutres planes, les travées indépendantes circulaires et les poutres circulaires continues.

# 1. Poutres planes se déformant normalement à leur plan

## 1.1 Définition et sollicitation des structures étudiées

Soit  $Oxyz$  trois axes rectangulaires de vecteurs unité  $\vec{I}, \vec{J}$  et  $\vec{K}$ . Les structures que nous considérons sont composées de poutres dont la fibre moyenne est contenue dans le plan  $Oxy$ ; en outre, l'intersection du plan  $Oxy$  et du plan d'une section quelconque d'une poutre de la structure est un axe central d'inertie de cette section.

En un point  $G$  de la fibre moyenne d'une poutre de la structure, la tangente orientée, la normale à la fibre moyenne et la normale au plan de la fibre moyenne forment un trièdre trirectangle direct dont les vecteurs unité sont désignés respectivement par  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$ ; le vecteur  $\vec{k}$  est équipollent au vecteur fixe  $\vec{K}$  (figure 1). Nous désignons par  $x$  et  $y$  les coordonnées de  $G$ , par  $s$  l'abscisse curviligne de  $G$  comptée à partir de  $G_0$  et par  $\theta$  l'angle ( $\vec{I}, \vec{i}$ ). Nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{I} \cdot \vec{i} &= \cos \theta = \frac{dx}{ds}, & \vec{J} \cdot \vec{i} &= \sin \theta = \frac{dy}{ds} \\ \vec{I} \cdot \vec{j} &= -\sin \theta, & \vec{J} \cdot \vec{j} &= \cos \theta \end{aligned}$$

Si  $r$  désigne le rayon de courbure de la fibre moyenne (nombre algébrique positif dans le cas de la figure), les formules de Frenet s'écrivent :

$$\frac{d\vec{i}}{ds} = \frac{\vec{j}}{r}, \quad \frac{d\vec{j}}{ds} = -\frac{\vec{i}}{r} \quad (1)$$

ou encore, puisque  $ds = r d\theta$  :

$$\frac{d\vec{i}}{d\theta} = \vec{j}, \quad \frac{d\vec{j}}{d\theta} = -\vec{i}$$

Les coordonnées  $x$  et  $y$  peuvent être considérées soit comme des fonctions de  $s$ , soit comme des fonctions de  $\theta$ .

Les poutres de la structure ne sont soumises qu'à des **forces normales au plan de la fibre moyenne et à des couples contenus dans le plan de la fibre moyenne**. Nous désignerons par :

$$\vec{F}_i = F_i \vec{K}$$

et 
$$\vec{\Gamma}_i = \Gamma_{ix} \vec{I} + \Gamma_{iy} \vec{J} = \Gamma_{it} \vec{i} + \Gamma_{in} \vec{j}$$

la force et le couple appliqués au point  $G_i$  de la fibre moyenne de coordonnées  $x_i$  et  $y_i$  et d'abscisse curviligne  $s_i$ , et par :

$$\vec{f} = f \vec{K}$$

et 
$$\vec{\gamma} = \gamma_x \vec{I} + \gamma_y \vec{J} = \gamma_t \vec{i} + \gamma_n \vec{j}$$

la densité de force et la densité de couple appliquées au point courant  $g$  de la fibre moyenne de coordonnées  $\xi$  et  $\eta$  et d'abscisse curviligne  $t$ ; les vecteurs  $\vec{f}$  et  $\vec{\gamma}$  sont des fonctions de  $t$ .

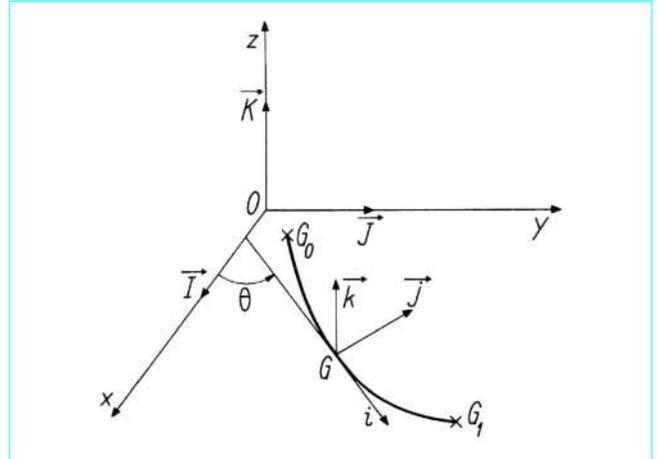


Figure 1 - Définition des structures

## 1.2 Système des forces extérieures relatif à une section

Le système des forces extérieures relatif à la section  $G$  de centre de gravité  $(x, y)$  et d'abscisse curviligne  $s$  est équivalent au système des forces appliquées aux points de la fibre moyenne d'abscisses curvilignes inférieures à  $s$ . En vertu des hypothèses faites sur les forces appliquées, ce système se réduit à une résultante générale  $\vec{R}$  parallèle à  $Oz$  et à un moment résultant  $\vec{L}$  contenu dans le plan  $Oxy$  :

$$\left. \begin{aligned} \vec{R} &= \sum_{s_i < s} \vec{F}_i + \int_0^s \vec{f}(t) dt \\ \vec{L} &= \sum_{s_i < s} (\vec{\Gamma}_i + \vec{F}_i \wedge \vec{G}_i \vec{G}) + \int_0^s [\vec{\gamma}(t) + \vec{f}(t) \wedge \vec{g} \vec{G}] dt \end{aligned} \right\} (2)$$

La projection de  $\vec{R}$  sur  $Oz$  est l'effort tranchant  $T$ ; la première formule (2) peut donc s'écrire :

$$T = \sum_{s_i < s} F_i + \int_0^s f(t) dt$$

Il en résulte que :

$$\frac{dT}{ds} = f \quad \text{ou} \quad \frac{dT}{d\theta} = rf \quad (3)$$

Les composantes de  $\vec{L}$  suivant les vecteurs mobiles  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  sont le **couple de torsion**  $C$  et le **moment fléchissant**  $M$ . Soit  $X$  et  $Y$  les composantes de  $\vec{L}$  suivant les vecteurs fixes  $\vec{I}$  et  $\vec{J}$  :

$$\vec{L} = C \vec{i} + M \vec{j} = X \vec{I} + Y \vec{J}$$

Pour calculer  $C$  et  $M$ , il est plus simple de calculer d'abord  $X$  et  $Y$ ; la seconde formule (2) est en effet équivalente aux formules :

$$X = \sum_{s_i < s} [\Gamma_{ix} - F_i (y - y_i)] + \int_0^s [\gamma_x(t) - f(t) (y - \eta)] dt$$

$$Y = \sum_{s_i < s} [\Gamma_{iy} + F_i (x - x_i)] + \int_0^s [\gamma_y(t) + f(t) (x - \xi)] dt$$

C et M sont ensuite donnés par les relations :

$$C = X \cos \theta + Y \sin \theta$$

$$M = -X \sin \theta + Y \cos \theta$$

Dérivons la seconde formule (2) par rapport à s ; compte tenu de ce que  $d\vec{G}/ds = \vec{i}$  et de la première formule (2), nous obtenons :

$$\frac{d\vec{L}}{ds} = \left[ \sum_{s_i < s} \vec{F}_i + \int_0^s \vec{F}(t) dt \right] \wedge \vec{i} + \vec{\gamma}(s) = \vec{R} \wedge \vec{i} + \vec{\gamma}$$

soit, puisque  $\vec{R} = T\vec{k}$  :

$$\frac{d\vec{L}}{ds} = T\vec{j} + \vec{\gamma}$$

Or, nous trouvons, en utilisant les formules (1) :

$$\frac{d\vec{L}}{ds} = \frac{d}{ds} (C\vec{i} + M\vec{j}) = \left( \frac{dC}{ds} - \frac{M}{r} \right) \vec{i} + \left( \frac{dM}{ds} + \frac{C}{r} \right) \vec{j}$$

Nous obtenons ainsi les **relations fondamentales** :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dC}{ds} - \frac{M}{r} &= \gamma_t \\ \frac{dM}{ds} + \frac{C}{r} &= T + \gamma_n \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

que l'on peut également écrire, en prenant  $\theta$  pour variable :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dC}{d\theta} - M &= r\gamma_t \\ \frac{dM}{d\theta} + C &= r(T + \gamma_n) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Dans le cas très fréquent où  $\vec{\gamma}$  est nul, les relations précédentes se simplifient :

$$M = \frac{dC}{d\theta} \quad \text{et} \quad \frac{dM}{d\theta} + C = rT \quad (6)$$

Nous déduisons des formules (3) et (6) la relation :

$$\frac{d^2M}{d\theta^2} + M = T \frac{dr}{d\theta} + fr^2 \quad (7)$$

Lorsque la fibre moyenne est circulaire, le second membre de la relation (7) se réduit à  $fr^2$ .

### 1.3 Formules de Bresse

Le déplacement relatif de la section  $\Sigma'$  d'abscisse curviligne  $t + dt$  par rapport à la section  $\Sigma$  d'abscisse curviligne  $t$  et de centre de gravité  $g$  se réduit à une rotation  $\delta\vec{\Omega} dt$  et à une translation  $\delta\vec{\Lambda} dt$  (article *Théorie des poutres* [C 2 010] dans ce traité) :

$$\delta\vec{\Omega} = - \frac{C}{GK} \vec{i}(t) - \frac{M}{EI} \vec{j}(t)$$

$$\delta\vec{\Lambda} = - \frac{T}{GS_1} \vec{k}$$

avec  $E$  module d'élasticité longitudinale (module d'Young),  
 $G$  module d'élasticité transversale,  
 $I$  moment d'inertie de la section autour de l'axe d'inertie horizontal,

$K$  moment de rigidité à la torsion,

$S_1$  section réduite relative à la déformation d'effort tranchant.

Le vecteur  $\delta\vec{\Omega}$  est contenu dans le plan  $Oxy$  et le vecteur  $\delta\vec{\Lambda}$  est normal au plan  $Oxy$ .

Soit  $\vec{\omega}_0$  la rotation (contenue dans le plan  $Oxy$ ) et  $\vec{\lambda}_0$  la translation (normale au plan  $Oxy$ ) de la section de centre de gravité  $G_0$ . Le déplacement de la section de centre de gravité  $G$  et d'abscisse curviligne  $s$  se réduit à une rotation  $\vec{\omega}$  contenue dans le plan  $Oxy$  et à une translation  $\vec{\lambda}$  normale au plan  $Oxy$  dont les valeurs sont données par les *formules de Bresse* :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\omega} &= \vec{\omega}_0 - \int_0^s \left( \frac{C}{GK} \vec{i} + \frac{M}{EI} \vec{j} \right) dt \\ \vec{\lambda} &= \vec{\lambda}_0 + \vec{\omega}_0 \wedge \vec{G}_0G - \int_0^s \left[ \frac{T}{GS_1} \vec{k} + \left( \frac{C}{GK} \vec{i} + \frac{M}{EI} \vec{j} \right) \wedge \vec{gG} \right] dt \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Nous poserons :

$$\vec{\omega} = \varphi \vec{i} + \omega \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{\lambda} = v \vec{k} \quad (9)$$

avec  $\varphi$  angle de rotation de torsion,

$\omega$  angle de rotation de flexion,

$v$  déplacement transversal ou flèche de la poutre.

Dans ces conditions, les formules de Bresse sont équivalentes aux trois relations scalaires :

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 \cos(\theta - \theta_0) + \omega_0 \sin(\theta - \theta_0) \\ &\quad - \int_0^s \frac{C}{GK} \cos(\theta - \alpha) dt - \int_0^s \frac{M}{EI} \sin(\theta - \alpha) dt \\ \omega &= -\varphi_0 \sin(\theta - \theta_0) + \omega_0 \cos(\theta - \theta_0) \\ &\quad + \int_0^s \frac{C}{GK} \sin(\theta - \alpha) dt - \int_0^s \frac{M}{EI} \cos(\theta - \alpha) dt \\ v &= v_0 + (\varphi_0 \cos \theta_0 - \omega_0 \sin \theta_0)(y - y_0) \\ &\quad - (\varphi_0 \sin \theta_0 + \omega_0 \cos \theta_0)(x - x_0) \\ &\quad - \int_0^s \frac{T}{GS_1} dt + \int_0^s \frac{C}{GK} [(x - \xi) \sin \alpha - (y - \eta) \cos \alpha] dt \\ &\quad + \int_0^s \frac{M}{EI} [(x - \xi) \cos \alpha + (y - \eta) \sin \alpha] dt \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Dans les formules (10),  $\theta_0$  désigne la valeur de l'angle  $\theta$  en  $G_0$ , et  $\alpha$  la valeur de l'angle  $\theta$  en  $g$  de coordonnées  $(\xi, \eta)$  et d'abscisse curviligne  $t$ .

On notera que, en raison du choix des axes, **les rotations de flexion  $\omega$  sont comptées en sens inverse du sens adopté pour les poutres droites.**

On obtient de très importantes relations en dérivant les formules de Bresse (8) par rapport à  $s$  :

$$\frac{d\vec{\omega}}{ds} = - \frac{C}{GK} \vec{i} - \frac{M}{EI} \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\lambda}}{ds} &= \left[ \vec{\omega}_0 - \int_0^s \left( \frac{C}{GK} \vec{i} + \frac{M}{EI} \vec{j} \right) dt \right] \wedge \vec{i} - \frac{T}{GS_1} \vec{k} \\ &= \vec{\omega} \wedge \vec{i} - \frac{T}{GS_1} \vec{k} \end{aligned}$$

En observant que :

$$\frac{d\vec{\omega}}{ds} = \frac{d}{ds} (\varphi \vec{i} + \omega \vec{j}) = \left( \frac{d\varphi}{ds} - \frac{\omega}{r} \right) \vec{i} + \left( \frac{d\omega}{ds} + \frac{\varphi}{r} \right) \vec{j}$$

nous obtenons, d'une part, la formule :

$$\frac{dv}{ds} = -\omega - \frac{T}{GS_1} \tag{11}$$

d'autre part, les formules :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{ds} - \frac{\omega}{r} &= -\frac{C}{GK} \\ \frac{d\omega}{ds} + \frac{\varphi}{r} &= -\frac{M}{EI} \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

Lorsqu'on néglige la déformation due à l'effort tranchant, ce qui est presque toujours le cas, nous avons :

$$\omega = -\frac{dv}{ds} \tag{13}$$

et les formules (12) peuvent s'écrire :

$$\left. \begin{aligned} C &= -GK \left( \frac{1}{r} \frac{dv}{ds} + \frac{d\varphi}{ds} \right) \\ M &= EI \left( \frac{d^2v}{ds^2} - \frac{\varphi}{r} \right) \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

Les formules (14) donnent le couple de torsion et le moment fléchissant, connaissant les deux fonctions  $v$  et  $\varphi$  qui caractérisent la déformation de la poutre ; la seconde formule (4) donne ensuite l'effort tranchant.

Si l'on prend  $\theta$  pour variable, les formules (11) et (12) s'écrivent :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dv}{d\theta} &= -r \left( \omega + \frac{T}{GS_1} \right) \\ \frac{d\varphi}{d\theta} - \omega &= -\frac{Cr}{GK} \\ \frac{d\omega}{d\theta} + \varphi &= -\frac{Mr}{EI} \end{aligned} \right.$$

## 1.4 Applications

### 1.4.1 Action du vent sur un arc symétrique

Soit l'arc  $ADB$  dont la fibre moyenne située dans le plan  $Oxy$  est symétrique par rapport à  $Oy$ . L'action d'un vent transversal sur l'arc se réduit à une densité de force  $V(s)$  comptée positivement sur  $Oz$  et fonction de l'abscisse curviligne  $s$  comptée à partir de la clef  $D$  (figure 2).

L'arc est encastré en  $A$  et  $B$  sous l'effet du vent, ce qui signifie que l'arc ne peut pas tourner en  $A$  et en  $B$  autour d'un axe situé dans le plan  $Oxy$  ; mais, vis-à-vis des forces situées dans le plan vertical  $Oxy$ , l'arc peut être encastré ou articulé à ses extrémités.

Sous l'effet du vent, l'arc supporte un effort tranchant  $T$ , un couple de torsion  $C$  et un moment fléchissant  $M$ . Par raison de symétrie,  $T$  et  $C$  sont nuls à la clef. On peut donc exprimer  $T$ ,  $C$  et  $M$  en tout point  $P$  de la fibre moyenne en fonction du moment fléchissant  $M_0$  à la clef et des forces appliquées. En désignant par  $x$ ,  $y$  et  $s$  les

coordonnées et l'abscisse curviligne du point  $P$  et par  $\xi$ ,  $\eta$  et  $t$  les coordonnées et l'abscisse curviligne d'un point courant de la fibre moyenne, nous obtenons :

$$\begin{cases} T = \int_0^s V(t) dt \\ C = M_0 \sin \theta - \cos \theta \int_0^s V(t) (y - \eta) dt - \sin \theta \int_0^s V(t) (x - \xi) dt \\ M = M_0 \cos \theta + \sin \theta \int_0^s V(t) (y - \eta) dt + \cos \theta \int_0^s V(t) (x - \xi) dt \end{cases}$$

Les deux dernières formules peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} C = M_0 \sin \theta + \mathcal{C}(s) \\ M = M_0 \cos \theta + \mathcal{M}(s) \end{cases}$$

$\mathcal{C}(s)$  et  $\mathcal{M}(s)$  sont deux fonctions connues dont la signification est évidente : ce sont les valeurs que prendraient  $C$  et  $M$  au point  $P$  si l'on rendait la structure isostatique en introduisant à la clef une articulation d'axe parallèle à  $Oy$ . La fonction  $\mathcal{C}(s)$  est impaire et la fonction  $\mathcal{M}(s)$  est paire.

Pour déterminer l'inconnue  $M_0$ , écrivons que la rotation  $\omega$  est nulle à la clef. La seconde formule (10) appliquée de  $A$  à  $D$  donne, puisque  $\varphi_0$  et  $\omega_0$  sont nuls en  $A$  et que  $\theta$  est nul en  $D$ , la condition de compatibilité :

$$\int_{-s_1}^0 \frac{C}{GK} \sin \alpha dt + \int_{-s_1}^0 \frac{M}{EI} \cos \alpha dt = 0$$

$-s_1$  désignant l'abscisse curviligne de  $A$ , et  $\alpha$  la valeur de l'angle  $\theta$  au point courant de la fibre moyenne ; on peut remplacer la limite d'intégration  $-s_1$  par  $s_1$  puisque les fonctions à intégrer sont paires. En remplaçant  $M$  et  $C$  par leurs expressions, nous trouvons  $M_0$  :

$$M_0 = -\frac{\int_0^{s_1} \left( \frac{\mathcal{C} \sin \alpha}{GK} + \frac{\mathcal{M} \cos \alpha}{EI} \right) dt}{\int_0^{s_1} \left( \frac{\sin^2 \alpha}{GK} + \frac{\cos^2 \alpha}{EI} \right) dt}$$

### 1.4.2 Anneau libre sollicité à la torsion

Considérons un anneau circulaire de section constante sollicité par une densité de couple uniforme  $\gamma_t = c$  (figure 3). Le déplacement vertical  $v$  est nul, et la rotation  $\varphi$  d'une section autour de la tangente à la fibre moyenne est constante. Les formules (14) s'écrivent donc :

$$C = 0, \quad M = -\frac{EI\varphi}{r}$$

et la première formule (4) se réduit à :

$$M = -r c$$

Il en résulte que  $\varphi$  se déduit de  $c$  par la formule :

$$\varphi = \frac{cr^2}{EI} \tag{15}$$

Cette formule n'est valable que lorsque les dimensions transversales de la section de l'anneau sont petites devant le rayon  $r$ . Considérons un anneau pour lequel cette hypothèse n'est pas vérifiée et supposons sa section symétrique par rapport au plan de la fibre moyenne ; la figure 4 représente une demi-section diamétrale passant par l'axe de révolution  $Oz$  de l'anneau.

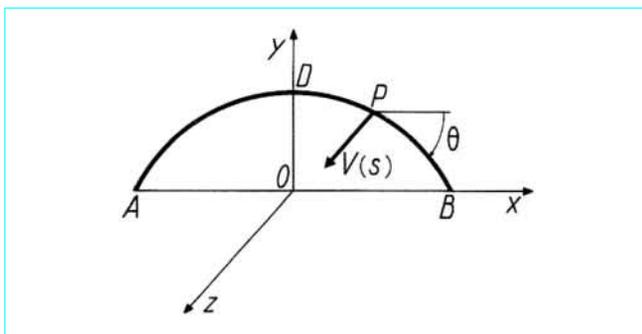


Figure 2 - Action du vent sur un arc symétrique

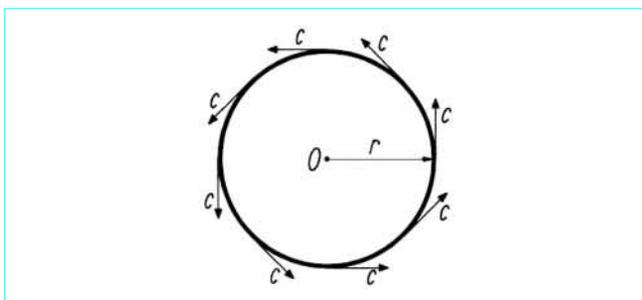


Figure 3 - Anneau libre sollicité à la torsion

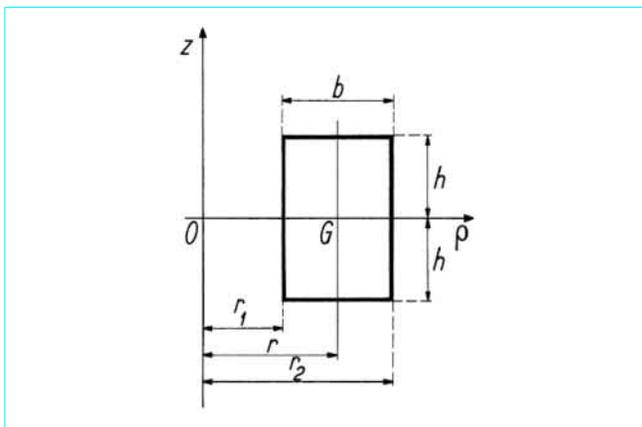


Figure 4 - Anneau rectangulaire sollicité à la torsion

Nous avons toujours  $M = -rc$  puisque cette formule découle des lois de la statique. Toutes les sections de l'anneau tournent d'un même angle  $\varphi$ ; au cours de cette rotation la fibre de rayon  $\rho$  et d'ordonnée  $z$  voit son rayon augmenter de  $\varphi z$ ; elle supporte donc une contrainte normale  $\sigma = -E\varphi \frac{z}{\rho}$  et le moment  $M$  a pour valeur :

$$M = -rc = -E\varphi \int \int_s \frac{z^2 d\rho dz}{\rho}$$

Si l'on suppose  $\rho$  constant et égal à  $r$ , on retrouve la formule (15); si l'on ne peut négliger les variations de  $\rho$  devant  $r$ , la formule (15) doit être remplacée par la formule :

$$\varphi = \frac{rc}{E \int \int_s \frac{z^2 d\rho dz}{\rho}} \tag{16}$$

Dans le cas de la section rectangulaire ( $b = r_2 - r_1, I = \frac{2bh^3}{3}$ ) représentée sur la figure 4, nous trouvons en calculant l'intégrale double :

$$\varphi = \frac{brc}{EI \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}$$

La correction apportée à la formule (15) est faible; par exemple, si  $r_2/r_1 = 2$ , on trouve :

$$\varphi = 0,962 \frac{cr^2}{EI}$$

## 2. Travée indépendante circulaire

### 2.1 Généralités

Nous étudierons des ponts à fibre moyenne circulaire comportant une ou plusieurs travées continues. Un appui d'un tel pont se décompose en deux appuis simples (figure 5) exerçant sur l'ouvrage deux réactions verticales  $R'$  et  $R''$ . La réaction de l'appui comprend donc une réaction verticale  $R$  :

$$R = R' + R''$$

et un couple  $\Gamma$  dirigé suivant la tangente à la fibre moyenne :

$$\Gamma = (R' - R'') d$$

Dans le cas d'un pont à une seule travée simplement appuyée à ses extrémités, nous choisissons les axes indiqués sur la figure 6, et nous repérons une section par son abscisse angulaire  $\theta$  comptée à partir de l'appui de gauche  $O$ , donc :

$$0 \leq \theta \leq \lambda$$

$\lambda$  désignant la portée angulaire de la travée; nous supposons  $\lambda \neq \pi$ .

Les coordonnées du centre de gravité de la section d'abscisse angulaire  $\theta$  sont :

$$x = r \sin \theta, \quad y = r(1 - \cos \theta)$$

$r$  désignant le rayon de la fibre moyenne; on observera que  $\theta$  est l'angle de  $Ox$  et de la tangente orientée à la fibre moyenne.

Comme il y a quatre réactions d'appui  $\Gamma_0$  et  $R_0$  en  $O$ ,  $\Gamma_1$  et  $R_1$  en  $A$ , la travée indépendante circulaire est une fois hyperstatique. Notons les valeurs de l'effort tranchant et du couple de torsion dans les sections extrêmes  $\theta = 0$  et  $\theta = \lambda$  de la travée :

$$T_0 = R_0, \quad C_0 = \Gamma_0, \quad T_1 = -R_1, \quad C_1 = -\Gamma_1$$

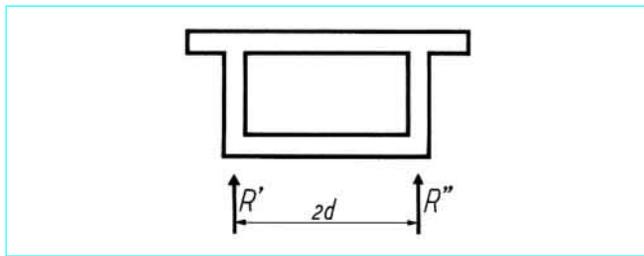


Figure 5 – Travée indépendante circulaire

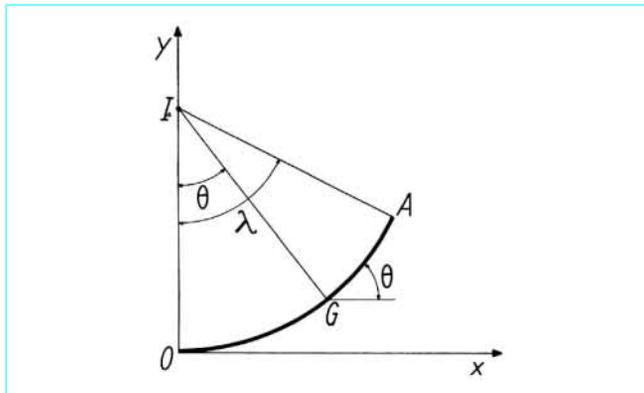


Figure 6 – Travée simplement appuyée à ses extrémités

## 2.2 Calcul des moments fléchissants

Supposons qu'une charge  $P$ , comptée positivement vers le bas, soit appliquée au centre de gravité de la section d'abscisse angulaire  $\alpha$ . En fonction de  $T_0$  et de  $C_0$  nous trouvons pour valeur de l'effort tranchant :

$$T(\theta) = \begin{cases} T_0 & \text{si } \theta < \alpha \\ T_0 - P & \text{si } \theta > \alpha \end{cases} \quad (17)$$

pour valeur du couple de torsion :

$$C(\theta) = \begin{cases} C_0 \cos \theta + T_0 r (1 - \cos \theta) & \text{si } \theta < \alpha \\ C_0 \cos \theta + T_0 r (1 - \cos \theta) - Pr [1 - \cos(\theta - \alpha)] & \text{si } \theta > \alpha \end{cases}$$

et pour valeur du moment fléchissant :

$$M(\theta) = \begin{cases} -C_0 \sin \theta + T_0 r \sin \theta & \text{si } \theta < \alpha \\ -C_0 \sin \theta + T_0 r \sin \theta - Pr \sin(\theta - \alpha) & \text{si } \theta > \alpha \end{cases}$$

En écrivant que  $M(\lambda)$  est nul, nous trouvons :

$$C_0 = T_0 r - Pr \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda}$$

de sorte que nous pouvons choisir  $T_0$  comme inconnue hyperstatique. En portant la valeur de  $C_0$  dans les expressions de  $C(\theta)$  et de  $M(\theta)$ , nous trouvons, d'une part :

$$C(\theta) = \begin{cases} -Pr \frac{\cos \theta \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} + T_0 r & \text{si } \theta < \alpha \\ Pr \frac{\sin \alpha \cos(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} + (T_0 - P) r & \text{si } \theta > \alpha \end{cases} \quad (18)$$

et, d'autre part :

$$M(\theta) = Pr \mathcal{M}(\alpha, \theta) \quad (19)$$

la fonction d'influence  $\mathcal{M}(\alpha, \theta)$  étant définie par :

$$\mathcal{M}(\alpha, \theta) = \begin{cases} \frac{\sin \theta \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} & \text{si } \theta < \alpha \\ \frac{\sin \alpha \sin(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} & \text{si } \theta > \alpha \end{cases} \quad (20)$$

La fonction  $\mathcal{M}(\alpha, \theta)$  est symétrique :

$$\mathcal{M}(\alpha, \theta) = \mathcal{M}(\theta, \alpha)$$

Dans le cas d'une densité de charge  $p(\alpha)$  par unité de longueur de fibre moyenne, nous avons pour valeur du moment fléchissant :

$$M(\theta) = r^2 \int_0^\lambda \mathcal{M}(\alpha, \theta) p(\alpha) d\alpha \quad (21)$$

Le calcul de l'intégrale (21) est simplifiée par la propriété suivante qu'il est aisé de vérifier :  **$M(\theta)$  est l'intégrale de l'équation différentielle :**

$$\frac{d^2 M}{d\theta^2} + M = -pr^2 \quad (22)$$

qui s'annule pour  $\theta = 0$  et pour  $\theta = \lambda$ . Cette propriété résulte de l'équation (7) dans laquelle  $f = -p$ .

Par exemple, dans le cas où la densité de charge est constante, l'intégrale générale de l'équation (22) s'écrit :

$$M(\theta) = -pr^2 + A \cos \theta + B \sin \theta$$

$A$  et  $B$  étant deux constantes que l'on détermine par les conditions  $M(0) = 0$  et  $M(\lambda) = 0$ . Nous trouvons ainsi :

$$M(\theta) = 2pr^2 \frac{\sin \frac{\theta}{2} \sin \left( \frac{\lambda - \theta}{2} \right)}{\cos \frac{\lambda}{2}}$$

Ce moment fléchissant est maximal dans la section médiane  $\theta = \lambda/2$  :

$$M\left(\frac{\lambda}{2}\right) = pr^2 \frac{1 - \cos \frac{\lambda}{2}}{\cos \frac{\lambda}{2}}$$

Le moment fléchissant au droit d'une charge concentrée  $P$  appliquée au centre de gravité de la section d'abscisse angulaire  $\alpha$  a pour valeur :

$$M(\alpha) = Pr \frac{\sin \alpha \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda}$$

Ce moment fléchissant est maximal pour  $\alpha = \lambda/2$  :

$$M_{max} = \frac{1}{2} Pr \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}$$

### ■ Remarques

- Connaissant  $M$  et  $T$  la seconde formule (6) :

$$C = -\frac{dM}{d\theta} + rT \quad (23)$$

permet de calculer  $C$ . Nous pouvons ainsi déduire la formule (18) des formules (17) et (19).

- Le moment fléchissant ne dépend pas de l'inconnue hyperstatique  $T_0$ . Ce résultat peut être démontré au moyen du théorème des travaux virtuels. Nous pouvons en effet donner un déplacement virtuel au cours duquel les deux plans  $IGO$  et  $IGA$  restent plans et forment un dièdre d'arête  $IG$  (figure 6). Dans ce déplacement virtuel, seuls le moment fléchissant en  $G$  et la charge  $P$  travaillent ; le théorème des travaux virtuels permet ainsi de retrouver la formule (19).

## 2.3 Calculs de l'effort tranchant et du couple de torsion

### 2.3.1 Application des formules de Bresse

Négligeons les déformations dues à l'effort tranchant. En appliquant les formules de Bresse (10) d'une extrémité à l'autre de la travée, nous obtenons les trois équations suivantes, qui contiennent les rotations  $\omega_0$  et  $\omega_1$  aux extrémités de la travée :

$$\begin{cases} 0 = \omega_0 \sin \lambda - \int_0^\lambda \frac{Cr}{GK} \cos(\lambda - \theta) d\theta - \int_0^\lambda \frac{Mr}{EI} \sin(\lambda - \theta) d\theta \\ \omega_1 = \omega_0 \cos \lambda + \int_0^\lambda \frac{Cr}{GK} \sin(\lambda - \theta) d\theta - \int_0^\lambda \frac{Mr}{EI} \cos(\lambda - \theta) d\theta \\ 0 = -\omega_0 x_1 + \int_0^\lambda \frac{Cr}{GK} [(x_1 - x) \sin \theta - (y_1 - y) \cos \theta] d\theta \\ \quad + \int_0^\lambda \frac{Mr}{EI} [(x_1 - x) \cos \theta + (y_1 - y) \sin \theta] d\theta \end{cases}$$

Compte tenu de :

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta, & y &= r(1 - \cos \theta) \\ x_1 &= r \sin \lambda, & y_1 &= r(1 - \cos \lambda) \end{aligned}$$

la dernière équation devient :

$$0 = -\omega_0 \sin \lambda + \int_0^\lambda \frac{Cr}{GK} \cos(\lambda - \theta) d\theta + \int_0^\lambda \frac{Mr}{EI} \sin(\lambda - \theta) d\theta - \int_0^\lambda \frac{Cr}{GK} d\theta$$

En la comparant à la première équation, nous obtenons la condition de compatibilité des déformations :

$$\int_0^\lambda \frac{C}{GK} d\theta = 0 \quad (24)$$

Les deux autres équations permettent de calculer les rotations  $\omega_0$  et  $\omega_1$  :

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= \frac{r}{\sin \lambda} \left[ \int_0^\lambda \frac{C}{GK} \cos(\lambda - \theta) d\theta + \int_0^\lambda \frac{M}{EI} \sin(\lambda - \theta) d\theta \right] \\ \omega_1 &= \frac{r}{\sin \lambda} \left[ \int_0^\lambda \frac{C}{GK} \cos \theta d\theta - \int_0^\lambda \frac{M}{EI} \sin \theta d\theta \right] \end{aligned} \right\} (25)$$

La condition de compatibilité des déformations peut être retrouvée au moyen du théorème de Menabrea (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales) ; il suffit d'annuler la dérivée de l'énergie de déformation :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{C^2 r}{GK} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\lambda \frac{M^2 r}{EI} d\theta$$

par rapport à  $T_0$ , en observant que :

$$\frac{dM}{dT_0} = 0, \quad \frac{dC}{dT_0} = r$$

### 2.3.2 Cas où la rigidité de torsion $K$ est constante

Supposons une charge concentrée  $P$  appliquée au centre de gravité de la section d'abscisse angulaire  $\alpha$ . En portant l'expression (18) du couple de torsion dans la condition (24), nous trouvons :

$$T_0 = P \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} \right)$$

L'effort tranchant a donc pour valeur :

$$T(\theta) = P \varpi(\alpha, \theta) \quad (26)$$

la fonction d'influence  $\varpi(\alpha, \theta)$  étant définie par :

$$\varpi(\alpha, \theta) = \begin{cases} 1 - \frac{\alpha}{\lambda} & \text{si } \theta < \alpha \\ -\frac{\alpha}{\lambda} & \text{si } \theta > \alpha \end{cases} \quad (27)$$

En reportant la valeur de  $T_0$  dans la formule (18), nous obtenons la valeur du couple de torsion :

$$C(\theta) = Pr \mathcal{C}(\alpha, \theta) \quad (28)$$

la fonction d'influence  $\mathcal{C}(\alpha, \theta)$  étant définie par :

$$\mathcal{C}(\alpha, \theta) = \begin{cases} -\frac{\cos \theta \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} + 1 - \frac{\alpha}{\lambda} & \text{si } \theta < \alpha \\ \frac{\sin \alpha \cos(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} & \text{si } \theta > \alpha \end{cases} \quad (29)$$

Notons les valeurs  $C_0$  et  $C_1$  du couple de torsion aux extrémités de la poutre :

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= -Pr \left[ \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} - \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} \right] \\ C_1 &= Pr \left[ \frac{\sin \alpha}{\sin \lambda} - \frac{\alpha}{\lambda} \right] \end{aligned} \right\} (30)$$

Dans le cas d'une charge répartie, de densité  $p(\alpha)$  par unité de longueur de fibre moyenne, l'effort tranchant et le couple de torsion ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} T(\theta) &= r \int_0^\lambda \varpi(\alpha, \theta) p(\alpha) d\alpha \\ C(\theta) &= r^2 \int_0^\lambda \mathcal{C}(\alpha, \theta) p(\alpha) d\alpha \end{aligned}$$

La formule (26) montre que l'effort tranchant est égal à l'effort tranchant dans la poutre sur appuis simples dont la portée est égale à la longueur  $\ell = r\lambda$  de la fibre moyenne.

On peut calculer  $C(\theta)$  connaissant  $M(\theta)$  au moyen de la première formule (6) et de la condition de compatibilité (24) :

$$\frac{dC}{d\theta} = M, \quad \int_0^\lambda C d\theta = 0$$

Nous trouvons ainsi :

$$C(\theta) = \int_0^\theta M(\alpha) d\alpha - \int_0^\lambda M(\alpha) \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} \right) d\alpha$$

Dans le cas d'une densité de charge uniforme  $p$  répartie sur toute la travée, l'effort tranchant a pour valeur :

$$T = pr \left( \frac{\lambda}{2} - \theta \right)$$

La formule (23) donne ensuite le couple de torsion :

$$C = -pr^2 \left[ \frac{\sin \left( \frac{\lambda}{2} - \theta \right)}{\cos \frac{\lambda}{2}} - \left( \frac{\lambda}{2} - \theta \right) \right]$$

En particulier, les valeurs du couple de torsion aux extrémités sont :

$$C_0 = -C_1 = -pr^2 \left( \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} \right)$$

### 2.3.3 Cas où la rigidité de torsion $K$ est variable

Dans ce cas, en reportant l'expression (18) du couple de torsion dans la condition de compatibilité (24), nous trouvons :

$$T_0 = P[1 - \mathcal{C}(\alpha)] \quad (31)$$

la fonction  $\mathcal{C}(\alpha)$ , nulle pour  $\alpha = 0$  et égale à l'unité pour  $\alpha = \lambda$ , étant définie par :

$$\mathcal{C}(\alpha) \int_0^\lambda \frac{d\theta}{GK} = \int_0^\alpha \left[ 1 - \frac{\cos \theta \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} \right] \frac{d\theta}{GK} + \int_\alpha^\lambda \frac{\sin \alpha \cos(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} \frac{d\theta}{GK}$$

Cette formule n'est pas très pratique pour calculer  $\mathcal{C}(\alpha)$  par intégration numérique. Mais elle permet de montrer que la fonction  $\mathcal{C}(\alpha)$  est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 \mathcal{C}}{d\alpha^2} + \mathcal{C} = \varphi(\alpha) = \frac{\int_0^\alpha \frac{d\theta}{GK}}{\int_0^\lambda \frac{d\theta}{GK}} \quad (32)$$

En utilisant la méthode de la variation des constantes, nous trouvons l'expression suivante de l'intégrale générale de l'équation (32) :

$$\mathcal{C}(\alpha) = A \cos \alpha + B \sin \alpha - \cos \alpha \int_0^\alpha \varphi(t) \sin t dt + \sin \alpha \int_0^\alpha \varphi(t) \cos t dt$$

En déterminant les constantes  $A$  et  $B$  par les conditions  $\mathcal{C}(0) = 0$  et  $\mathcal{C}(\lambda) = 1$ , nous obtenons l'expression suivante de la fonction  $\mathcal{C}(\alpha)$  :

$$\mathcal{C}(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{\sin \lambda} \left[ 1 + \cos \lambda \int_0^\lambda \varphi(t) \sin t dt \right] - \cos \alpha \int_0^\alpha \varphi(t) \sin t dt - \sin \alpha \int_\alpha^\lambda \varphi(t) \cos t dt$$

La détermination de la fonction  $\mathcal{C}(\alpha)$  exige donc le calcul numérique de trois primitives :

$$\int_0^\alpha \frac{d\theta}{GK}, \quad \int_0^\alpha \varphi(t) \sin t dt, \quad \int_0^\alpha \varphi(t) \cos t dt$$

Connaissant  $\mathcal{C}(\alpha)$ , la fonction d'influence de l'effort tranchant a pour expression :

$$\mathcal{C}(\alpha, \theta) = \begin{cases} 1 - \mathcal{C}(\alpha) & \text{si } \theta < \alpha \\ -\mathcal{C}(\alpha) & \text{si } \theta > \alpha \end{cases} \quad (33)$$

et la fonction d'influence du couple de torsion a pour expression :

$$\mathcal{C}(\alpha, \theta) = \begin{cases} -\frac{\cos \theta \sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda} + 1 - \mathcal{C}(\alpha) \\ \frac{\sin \alpha \cos(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} - \mathcal{C}(\alpha) \end{cases} \quad (34)$$

On peut encore calculer  $C(\theta)$  connaissant  $M(\theta)$  au moyen de la première formule (6) et de la condition de compatibilité (24) :

$$\frac{dC}{d\theta} = M \quad \text{et} \quad \int_0^\lambda \frac{C}{GK} d\theta = 0$$

Nous trouvons donc,  $M_1(\theta)$  étant une primitive de  $M(\theta)$  :

$$C(\theta) = M_1(\theta) + A$$

$A$  étant une constante définie par :

$$A \int_0^\lambda \frac{d\theta}{GK} = - \int_0^\lambda \frac{M_1(\theta)}{GK} d\theta$$

La formule (23) permet ensuite de calculer l'effort tranchant.

■ **Remarque** : la formule (23) montre qu'on a, entre les fonctions d'influence, la relation :

$$\mathcal{C}(\alpha, \theta) = -\frac{\partial \mathcal{M}(\alpha, \theta)}{\partial \theta} + \mathcal{C}(\alpha, \theta) \quad (35)$$

## 2.4 Effet de l'excentricité des charges

### 2.4.1 Moment fléchissant

Une charge  $P$  est appliquée, dans la section d'abscisse angulaire  $\alpha$ , à une distance  $d$  du centre de gravité de cette section ; l'excentricité  $d$  de la charge est comptée positivement du côté opposé au centre de courbure de la fibre moyenne. Nous avons donc, au centre de gravité de la section, une charge  $P$  et un couple  $\Gamma = Pd$  dont l'axe est tangent à la fibre moyenne. L'effet de la charge  $P$  a été étudié dans les paragraphes 2.2 et 2.3. Le couple  $\Gamma$  donne lieu à un effort tranchant :

$$T(\theta) = T_0$$

à un couple de torsion :

$$C(\theta) = \begin{cases} C_0 \cos \theta + T_0 r (1 - \cos \theta) & \text{si } \theta < \alpha \\ C_0 \cos \theta + T_0 r (1 - \cos \theta) + \Gamma \cos(\theta - \alpha) & \text{si } \theta > \alpha \end{cases} \quad (36)$$

et à un moment fléchissant :

$$M(\theta) = \begin{cases} -C_0 \sin \theta + T_0 r \sin \theta & \text{si } \theta < \alpha \\ -C_0 \sin \theta + T_0 r \sin \theta - \Gamma \sin(\theta - \alpha) & \text{si } \theta > \alpha \end{cases}$$

La condition  $M(\lambda) = 0$  nous donne la relation :

$$C_0 = T_0 r - \Gamma \frac{\sin(\lambda - \alpha)}{\sin \lambda}$$

Il en résulte que,  $\mathcal{M}(\alpha, \theta)$  étant la fonction d'influence (20) :

$$M(\theta) = \Gamma \mathcal{M}(\alpha, \theta) = Pd \mathcal{M}(\alpha, \theta)$$

Le moment fléchissant dû à la charge excentrée a donc pour valeur :

$$M(\theta) = Pr \left( 1 + \frac{d}{r} \right) \mathcal{M}(\alpha, \theta)$$

**Le moment fléchissant dû à une charge excentrée est donc égal au moment fléchissant dû à cette charge supposée centrée multiplié par le coefficient d'excentricité  $\Delta$  :**

$$\Delta = 1 + \frac{d}{r} \quad (37)$$

Ce résultat, qui permet de traiter par superposition le cas de charges quelconques, peut être retrouvé à partir des équations (5) dans le cas d'une charge répartie de densité  $p$  excentrée de  $d$ . Puisque  $\gamma_t = pd$  et  $\gamma_n = 0$ , nous avons :

$$\frac{dC}{d\theta} - M = prd \quad \text{et} \quad \frac{dM}{d\theta} + C = rT$$

et, compte tenu de  $dT/d\theta = pr$ , nous déduisons de ces relations l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 M}{d\theta^2} + M = -pr^2 \left( 1 + \frac{d}{r} \right)$$

qui n'est autre que l'équation (22), dans laquelle la densité de charge  $p$  est multipliée par le coefficient d'excentricité  $\Delta$  de l'équation (37).

## 2.4.2 Effort tranchant et couple de torsion

Pour calculer l'inconnue  $T_0$ , portons l'expression (36) de  $C(\theta)$  que l'on peut écrire sous la forme :

$$C(\theta) = -\Gamma \frac{\partial \mathcal{M}(\alpha, \theta)}{\partial \theta} + r T_0$$

dans la condition de compatibilité (24). Nous trouvons :

$$T_0 \int_0^\lambda \frac{d\theta}{GK} = \frac{\Gamma}{r} \int_0^\lambda \frac{\partial \mathcal{M}(\alpha, \theta)}{\partial \theta} \frac{d\theta}{GK} \quad (38)$$

ou, en intégrant par parties :

$$T_0 \int_0^\lambda \frac{d\theta}{GK} = -\frac{\Gamma}{r} \int_0^\lambda \mathcal{M}(\alpha, \theta) \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{GK} \right) d\theta$$

■ **Lorsque  $K$  est constant**,  $T_0$  est nul. L'effort tranchant n'est donc pas modifié par l'excentricité des charges. Le couple de torsion dû à la charge  $P$  excentrée a donc pour valeur :

$$C(\theta) = -Pr \left[ \left( 1 + \frac{d}{r} \right) \frac{\partial \mathcal{M}(\alpha, \theta)}{\partial \theta} - \mathcal{C}(\alpha, \theta) \right]$$

■ **Lorsque  $K$  est variable**,  $T_0$  est une fonction de  $\alpha$  définie par l'équation (38). En définissant la fonction  $\psi(\alpha)$  par :

$$\psi(\alpha) \int_0^\lambda \frac{d\theta}{GK} = \int_0^\lambda \frac{\partial \mathcal{M}(\alpha, \theta)}{\partial \theta} \frac{d\theta}{GK} = -\int_0^\lambda \mathcal{M}(\alpha, \theta) \frac{d}{d\theta} \left( \frac{1}{GK} \right) d\theta$$

nous avons :

$$T_0 = P \frac{d}{r} \psi(\alpha)$$

L'effort tranchant et le couple de torsion dus à la charge excentrée  $P$  ont donc pour valeurs :

$$T(\theta) = P \left[ \mathcal{C}(\alpha, \theta) + \frac{d}{r} \psi(\alpha) \right]$$

$$C(\theta) = -Pr \left[ \left( 1 + \frac{d}{r} \right) \frac{\partial \mathcal{M}(\alpha, \theta)}{\partial \theta} - \mathcal{C}(\alpha, \theta) - \frac{d}{r} \psi(\alpha) \right]$$

On notera qu'en raison de la symétrie de la fonction  $\mathcal{M}(\alpha, \theta)$  la fonction  $\psi(\alpha)$  est donnée par une intégrale du type (21).

En raison de l'influence du facteur  $d/r$ , l'effort tranchant  $T_0$  est toujours très petit et peut, en général, être négligé.

## 2.5 Calcul des rotations d'extrémité

### 2.5.1 Cas général

Pour calculer les rotations  $\omega_0(\alpha)$  et  $\omega_1(\alpha)$  des sections d'extrémité de la travée sous l'effet d'une charge  $P$  appliquée au centre de gravité de la section d'abscisse angulaire  $\alpha$ , il suffit de prendre, dans les formules (25) :

$$M = Pr \mathcal{M}(\alpha, \theta) \quad \text{et} \quad C = Pr \mathcal{C}(\alpha, \theta)$$

Le calcul, fort long, peut être simplifié on observant que l'on a à calculer des intégrales de la forme :

$$F(\alpha) = \int_0^\lambda \mathcal{M}(\alpha, \theta) f(\theta) d\theta \quad (39)$$

$$G(\alpha) = \int_0^\lambda \mathcal{C}(\alpha, \theta) g(\theta) d\theta \quad (40)$$

En raison de la symétrie de la fonction  $\mathcal{M}(\alpha, \theta)$ , l'intégrale (39) est du même type que l'intégrale (21) ; la fonction  $F(\alpha)$  est donc l'intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 F}{d\alpha^2} + F = -f(\alpha)$$

qui vérifie les conditions aux limites  $F(0) = 0$  et  $F(\lambda) = 0$ .

En utilisant la relation (35), il est possible de montrer que la fonction  $G(\alpha)$  est l'intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 G}{d\alpha^2} + G = \int_0^\alpha g(\theta) d\theta - \varphi(\alpha) \int_0^\lambda g(\theta) d\theta$$

qui vérifie les conditions aux limites  $G(0) = 0$  et  $G(\lambda) = 0$  ;  $\varphi(\alpha)$  est la fonction qui figure dans l'équation (32) :

$$\varphi(\alpha) = \frac{\int_0^\alpha \frac{d\theta}{GK}}{\int_0^\lambda \frac{d\theta}{GK}}$$

Lorsque  $K$  est constant :

$$\varphi(\alpha) = \frac{\alpha}{\lambda}$$

Le calcul des intégrales (39) et (40) se fait, dans le cas le plus général, au moyen des formules d'intégration numérique données dans l'article *Structures élastiques à plan moyen* [C 2 015] du présent traité.

### 2.5.2 Cas d'une poutre de section constante

Lorsque  $I$  et  $K$  sont constants, la méthode précédente conduit aux formules :

$$\left. \begin{aligned} \omega_0(\alpha) &= \frac{Pr^2}{\sin \lambda} \left( \frac{1}{EI} + \frac{1}{GK} \right) \left[ \frac{\lambda \sin \alpha}{2 \sin \lambda} - \frac{\alpha}{2} \cos(\lambda - \alpha) \right] \\ &\quad - \frac{Pr^2}{\sin \lambda} \left( \frac{1}{GK} \right) \left[ \sin(\lambda - \alpha) - \frac{\lambda - \alpha}{\lambda} \sin \lambda \right] \\ \omega_1(\alpha) &= - \frac{Pr^2}{\sin \lambda} \left( \frac{1}{EI} + \frac{1}{GK} \right) \left[ \frac{\lambda \sin(\lambda - \alpha)}{2 \sin \lambda} - \frac{\lambda - \alpha}{2} \cos \alpha \right] \\ &\quad + \frac{Pr^2}{\sin \lambda} \left( \frac{1}{GK} \right) \left[ \sin \alpha - \frac{\alpha}{\lambda} \sin \lambda \right] \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Les rotations produites par une charge répartie de densité  $p(\alpha)$  par unité de longueur de fibre moyenne ont pour valeurs :

$$\omega_0 = r \int_0^\lambda \omega_0(\alpha) p(\alpha) d\alpha \quad \text{et} \quad \omega_1 = r \int_0^\lambda \omega_1(\alpha) p(\alpha) d\alpha$$

En particulier, lorsqu'une densité de charge constante  $p$  est appliquée sur toute la travée, on trouve :

$$\omega_0 = -\omega_1 = \frac{1}{2} Pr^2 \left( \frac{1}{EI} + \frac{1}{GK} \right) \frac{\lambda - \sin \lambda}{1 + \cos \lambda} - \frac{Pr^2}{GK} \left( \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2} \right) \quad (42)$$

### 2.6 Cas où la portée angulaire est faible

La plupart du temps, la portée angulaire  $\lambda$  est faible : une travée de 60 m de portée et de 300 m de rayon a une portée angulaire  $\lambda = 1/5$  rad. Dans ce cas, les calculs peuvent être simplifiés ; désignons par :

- $\ell = r\lambda$  la portée mesurée suivant la fibre moyenne ;
- $x = r\theta$  l'abscisse curviligne d'un point courant de la fibre moyenne ;
- $\beta = r\alpha$  l'abscisse curviligne de la section qui supporte la charge  $P$ .

Les angles  $\lambda, \theta$  est  $\alpha$  étant petits, nous pouvons remplacer leurs lignes trigonométriques par des développements limités.

Dans ces conditions, la formule (20) devient :

$$M(\beta, x) = \begin{cases} P \frac{x(\ell - \beta)}{\ell} \left( 1 + \frac{2\alpha\lambda - \alpha^2 - \theta^2}{6} \right) & \text{si } x < \beta \\ P \frac{\beta(\ell - x)}{\ell} \left( 1 + \frac{2\theta\lambda - \alpha^2 - \theta^2}{6} \right) & \text{si } x > \beta \end{cases}$$

La valeur maximale du moment fléchissant obtenu dans la section médiane est :

$$M = \frac{1}{4} P\ell \left( 1 + \frac{\lambda^2}{12} \right)$$

De même, le moment fléchissant maximal dans la section médiane, sous l'effet d'une charge uniforme de densité  $p$ , a pour valeur :

$$M = \frac{1}{8} p\ell^2 \left( 1 + \frac{5}{48} \lambda^2 \right)$$

Donc, en calculant les moments fléchissants comme dans une poutre droite sur appuis simples de portée  $\ell = r\lambda$ , on ne commet qu'une erreur relative par défaut inférieure à 0,5 % dès que  $\lambda$  est plus petit que 1/5 rad.

La formule (28) devient,  $K$  étant supposé constant :

$$C = \begin{cases} -Pr \left( 1 - \frac{\alpha}{\lambda} \right) \left[ \frac{\lambda^2 - (\lambda - \alpha)^2 - 3\theta^2}{6} \right] & \text{si } \theta < \alpha \\ Pr \frac{\alpha}{\lambda} \left[ \frac{\lambda^2 - \alpha^2 - 3(\lambda - \theta)^2}{6} \right] & \text{si } \theta > \alpha \end{cases}$$

En particulier, en prenant un terme de plus dans les développements limités, les couples de torsion aux extrémités de la poutre ont pour valeurs :

$$C_0 = -Pr \left[ \frac{\alpha(\lambda - \alpha)(2\lambda - \alpha)}{6\lambda} \right] \left[ 1 + \frac{7\lambda^2 - 3(\lambda - \alpha)^2}{60} \right]$$

$$C_1 = Pr \left[ \frac{\alpha(\lambda - \alpha)(\lambda + \alpha)}{6\lambda} \right] \left[ 1 + \frac{7\lambda^2 - 3\alpha^2}{60} \right]$$

Il en résulte qu'on peut calculer  $C_0$  et  $C_1$  avec une erreur relative inférieure à 0,5 % dès que  $\lambda < 1/5$  rad au moyen des formules :

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= -P \frac{\beta(\ell - \beta)(2\ell - \beta)}{6r\ell} \\ C_1 &= P \frac{\beta(\ell - \beta)(\ell + \beta)}{6r\ell} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Dans le cas d'une charge de densité constante  $p$  appliquée sur toute la travée, nous trouvons :

$$C = -pr^2 \left( \frac{\lambda}{2} - \theta \right) \left[ \frac{3\lambda^2 - (\lambda - 2\theta)^2}{24} \right]$$

$$C_0 = -C_1 = -\frac{p\ell^3}{24r} \left( 1 + \frac{\lambda^2}{10} \right)$$

En supposant  $I$  et  $K$  constants, les formules (41) deviennent :

$$\omega_0(\beta) = \frac{P}{EI} \frac{\beta(\ell - \beta)(2\ell - \beta)}{6\ell} \left[ 1 + \left( 2 + \frac{EI}{GK} \right) \frac{7\lambda^2 - 3(\lambda - \alpha)^2}{60} \right]$$

$$\omega_1(\beta) = -\frac{P}{EI} \frac{\beta(\ell - \beta)(\ell + \beta)}{6\ell} \left[ 1 + \left( 2 + \frac{EI}{GK} \right) \frac{7\lambda^2 - 3\alpha^2}{60} \right] \quad (44)$$

De même, la formule (42) donnant les rotations  $\omega_0$  et  $\omega_1$  dues à une charge de densité constante  $p$  devient :

$$\omega_0 = -\omega_1 = \frac{p\ell^3}{24EI} \left[ 1 + \left( 2 + \frac{EI}{GK} \right) \frac{\lambda^2}{10} \right] \quad (45)$$

Les formules (44) et (45) montrent que, lorsque les termes correctifs sont négligeables, les rotations  $\omega_0$  et  $\omega_1$  peuvent être assimilées aux rotations des extrémités d'une poutre droite sur appuis simples de portée  $\ell = \lambda r$ . C'est pratiquement toujours le cas lorsque la section de la poutre est tubulaire et que  $\lambda$  est petit. En effet, pour une section tubulaire, le rapport  $\frac{EI}{GK}$  est peu différent de l'unité. Par exemple, dans le cas d'un tube rectangulaire de hauteur  $h$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur faible  $e$ , nous avons :

$$I = \frac{1}{6} h^2 e (h + 3b) \quad \text{et} \quad K = \frac{4S^2 e}{L} = \frac{2h^2 b^2 e}{h + b}$$

donc, puisque  $E/G = 5/2$  :

$$\frac{EI}{GK} = \frac{5}{24} \left( 1 + \frac{h}{b} \right) \left( 3 + \frac{h}{b} \right)$$

Le rapport  $EI/GK$  est égal à 5/3 pour  $h/b = 1$ , et à 1 pour  $h/b \approx 0,408$ .

La comparaison des formules (43) et (44) montre que, lorsque les termes correctifs sont négligeables, on a les relations :

$$C_0 = -\frac{EI}{r} \omega_0 \quad \text{et} \quad C_1 = -\frac{EI}{r} \omega_1 \quad (46)$$

Les relations (46) sont valables pour n'importe quel cas de charge ; par contre, elles supposent  $K$  et  $I$  constants.

Dans le cas d'une section ouverte, le rapport  $EI/GK$  peut être assez grand pour que les termes correctifs ne puissent être négligés. On voit ainsi l'intérêt de prévoir des sections tubulaires pour les ponts courbes.

Lorsque la poutre est de section variable, les résultats précédents sont encore valables. En effet, la partie principale de la fonction  $\varpi(\alpha)$  est  $\alpha/\lambda$  lorsque  $\lambda$  est petit. Rien n'est donc changé dans le calcul des parties principales de l'effort tranchant et du couple de torsion. Dans les mêmes conditions, on peut montrer que les parties principales des rotations  $\omega_0$  et  $\omega_1$  sont :

$$\omega_0 = \int_0^\ell \frac{M}{EI} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) dx \quad \text{et} \quad \omega_1 = -\int_0^\ell \frac{M}{EI} \left(\frac{x}{\ell}\right) dx$$

donc égales aux rotations d'extrémité de la poutre droite sur appuis simples.

## 3. Poutres circulaires continues

### 3.1 Formules préliminaires. Coefficients de souplesse

#### 3.1.1 Problème fondamental

Appliquons aux extrémités d'une travée indépendante courbe des couples d'axes normaux à la fibre moyenne imposant un moment fléchissant  $M_0$  à la section  $\theta = 0$  et un moment fléchissant  $M_1$  à la section  $\theta = \lambda$  (figure 7). Nous nous proposons de calculer  $M$ ,  $T$  et  $C$  en tout point de la fibre moyenne et les rotations  $\omega_0$  et  $\omega_1$  des sections d'extrémité.

En fonction de  $C_0$  et de l'effort tranchant constant  $T = T_0$ , le moment fléchissant a pour valeur :

$$M(\theta) = -C_0 \sin \theta + M_0 \cos \theta + Tr \sin \theta$$

En particulier :

$$M_1 = M(\lambda) = -C_0 \sin \lambda + M_0 \cos \lambda + T_0 r \sin \lambda$$

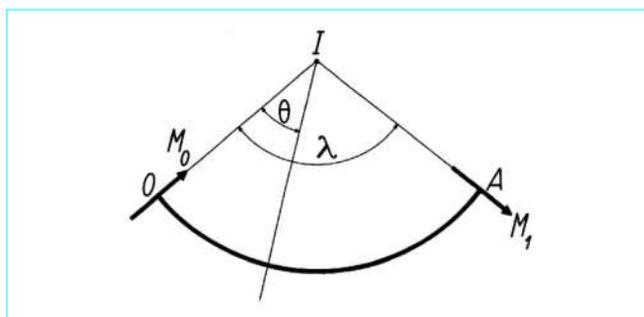


Figure 7 - Poutre circulaire continue

L'élimination de  $C_0 - Tr$  entre les deux équations précédentes donne l'expression de  $M(\theta)$  en fonction de  $M_0$  et de  $M_1$  :

$$M(\theta) = M_0 \frac{\sin(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} + M_1 \frac{\sin \theta}{\sin \lambda} \quad (47)$$

La formule (23) nous donne l'expression du couple de torsion :

$$C(\theta) = -\frac{dM}{d\theta} + Tr = M_0 \frac{\cos(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} - M_1 \frac{\cos \theta}{\sin \lambda} + Tr$$

Il reste à déterminer  $T$  au moyen de la condition de compatibilité (24).

#### 3.1.2 Poutre de rigidité de torsion constante

Nous trouvons immédiatement :

$$T = \frac{M_1 - M_0}{r\lambda} \quad (48)$$

Le couple de torsion a donc pour expression :

$$C(\theta) = -M_0 \left[ \frac{1}{\lambda} - \frac{\cos(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} \right] + M_1 \left[ \frac{1}{\lambda} - \frac{\cos \theta}{\sin \lambda} \right] \quad (49)$$

En particulier, les couples de torsion aux extrémités ont pour valeurs :

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= -M_0 \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\text{tg } \lambda} \right) - M_1 \left( \frac{1}{\sin \lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) \\ C_1 &= M_0 \left( \frac{1}{\sin \lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) + M_1 \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\text{tg } \lambda} \right) \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

En portant les expressions (47) et (49) dans les formules (25), nous obtenons pour les rotations d'extrémités  $\omega_0$  et  $\omega_1$  des expressions de la forme :

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= a M_0 + b M_1 \\ \omega_1 &= -b M_0 - c M_1 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

dans lesquelles les constantes  $a$ ,  $b$  et  $c$  sont, par définition, les **coefficients de souplesse** de la travée.

Dans le cas où  $I$  est constant, les coefficients de souplesse ont pour valeurs :

$$\left. \begin{aligned} a &= c = r \left( \frac{1}{EI} + \frac{1}{GK} \right) \frac{\lambda - \sin \lambda \cos \lambda}{2 \sin^2 \lambda} - \frac{r}{GK} \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\text{tg } \lambda} \right) \\ b &= r \left( \frac{1}{EI} + \frac{1}{GK} \right) \frac{\sin \lambda - \lambda \cos \lambda}{2 \sin^2 \lambda} - \frac{r}{GK} \left( \frac{1}{\sin \lambda} - \frac{1}{\lambda} \right) \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Lorsque la portée angulaire  $\lambda$  est faible, on peut remplacer les lignes trigonométriques par des développements limités. La formule (47) devient, en conservant les notations définies dans le paragraphe 2.6 :

$$M = M_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left[1 + \frac{\lambda^2 - (\lambda - \theta)^2}{6}\right] + M_1 \frac{x}{\ell} \left[1 + \frac{\lambda^2 - \theta^2}{6}\right]$$

soit, avec une approximation d'autant meilleure que  $\lambda$  est plus petit :

$$M = M_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_1 \frac{x}{\ell}$$

La formule (49) devient :

$$C = - M_0 \frac{3(\lambda - \theta)^2 - \lambda^2}{6\lambda} + M_1 \frac{3\theta^2 - \lambda^2}{6\lambda}$$

Les formules (50) deviennent :

$$\begin{cases} C_0 = - M_0 \frac{\lambda}{3} \left(1 + \frac{\lambda^2}{15}\right) - M_1 \frac{\lambda}{6} \left(1 + \frac{7\lambda^2}{60}\right) \\ C_1 = M_0 \frac{\lambda}{6} \left(1 + \frac{7\lambda^2}{60}\right) + M_1 \frac{\lambda}{3} \left(1 + \frac{\lambda^2}{15}\right) \end{cases}$$

Nous avons donc, avec une excellente approximation lorsque  $\lambda$  est petit :

$$\begin{cases} C_0 = - M_0 \frac{\ell}{3r} - M_1 \frac{\ell}{6r} \\ C_1 = M_0 \frac{\ell}{6r} + M_1 \frac{\ell}{3r} \end{cases}$$

Enfin, les coefficients de souplesse  $a$ ,  $b$  et  $c$  donnés par la formule (52) ont pour valeurs approchées lorsque  $\lambda$  est petit :

$$\begin{cases} a = c = \frac{\ell}{3EI} \left[1 + \left(2 + \frac{EI}{GK}\right) \frac{\lambda^2}{15}\right] \\ b = \frac{\ell}{6EI} \left[1 + \left(2 + \frac{EI}{GK}\right) \frac{7\lambda^2}{60}\right] \end{cases}$$

Donc, lorsque la portée angulaire est faible et que la rigidité à la torsion est suffisante, les coefficients de souplesse peuvent être assimilés à ceux d'une poutre droite d'inertie  $I$  et de portée  $\ell = r\lambda$ . On montrerait aisément qu'il en serait de même lorsque  $I$  est variable.

### 3.1.3 Poutre de rigidité de torsion variable

La condition de compatibilité (24) montre que  $T$  a pour valeur :

$$T = \frac{k'' M_1 - k' M_0}{r\lambda} \quad (53)$$

$k'$  et  $k''$  étant deux constantes sans dimensions définies par :

$$\left. \begin{aligned} k' \int_0^\lambda \frac{d\theta}{GK} &= \frac{\lambda}{\sin \lambda} \int_0^\lambda \frac{\cos(\lambda - \theta)}{GK} d\theta \\ k'' \int_0^\lambda \frac{d\theta}{GK} &= \frac{\lambda}{\sin \lambda} \int_0^\lambda \frac{\cos \theta}{GK} d\theta \end{aligned} \right\} \quad (54)$$

Dans le cas où la travée est symétrique,  $k' = k''$  et, lorsque  $K$  est constant,  $k' = k'' = 1$ .

Le couple de torsion a pour valeur :

$$C(\theta) = - M_0 \left[ \frac{k'}{\lambda} - \frac{\cos(\lambda - \theta)}{\sin \lambda} \right] + M_1 \left[ \frac{k''}{\lambda} - \frac{\cos \theta}{\sin \lambda} \right] \quad (55)$$

En portant dans les formules (25) les expressions (47) et (55) et en tenant compte de la définition (54) des constantes  $k'$  et  $k''$ , les rotations  $\omega_0$  et  $\omega_1$  sont encore données par les formules (51) dans lesquelles les coefficients de souplesse ont pour valeurs :

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{r}{\sin^2 \lambda} \left[ \int_0^\lambda \frac{\sin^2(\lambda - \theta)}{EI} d\theta + \int_0^\lambda \frac{\cos^2(\lambda - \theta)}{GK} d\theta \right] - \frac{k'^2 r}{\lambda^2} \int_0^\lambda \frac{d\theta}{GK} \\ b &= \frac{r}{\sin^2 \lambda} \left[ \int_0^\lambda \frac{\sin \theta \sin(\lambda - \theta)}{EI} d\theta - \int_0^\lambda \frac{\cos \theta \cos(\lambda - \theta)}{GK} d\theta \right] + \frac{k' k'' r}{\lambda^2} \int_0^\lambda \frac{d\theta}{GK} \\ c &= \frac{r}{\sin^2 \lambda} \left[ \int_0^\lambda \frac{\sin^2 \theta}{EI} d\theta + \int_0^\lambda \frac{\cos^2 \theta}{GK} d\theta \right] - \frac{k''^2 r}{\lambda^2} \int_0^\lambda \frac{d\theta}{GK} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Dans le cas où la travée est symétrique,  $a = c$ .

Lorsque la portée angulaire est faible et que  $GK$  est du même ordre de grandeur que  $EI$ , on peut montrer que les coefficients de souplesse ont pour valeurs approchées :

$$a = \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 \frac{dx}{EI}, \quad b = \int_0^\ell \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{dx}{EI}, \quad c = \int_0^\ell \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \frac{dx}{EI}$$

On peut donc encore, avec une excellente approximation, confondre les coefficients de souplesse de la travée circulaire avec ceux de la poutre droite de même inertie et de portée  $\ell = r\lambda$ .

## 3.2 Méthode de calcul des poutres continues circulaires

Une poutre continue à fibre moyenne circulaire comportant  $n$  travées et  $n + 1$  appuis  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$  (figure 8) est  $2(n + 1) - 3 = 2n - 1$  fois hyperstatique.

Pendant, si l'on connaît les valeurs des  $n - 1$  moments fléchissants  $M_i$  sur les appuis intermédiaires, on peut calculer les efforts dans chaque travée.

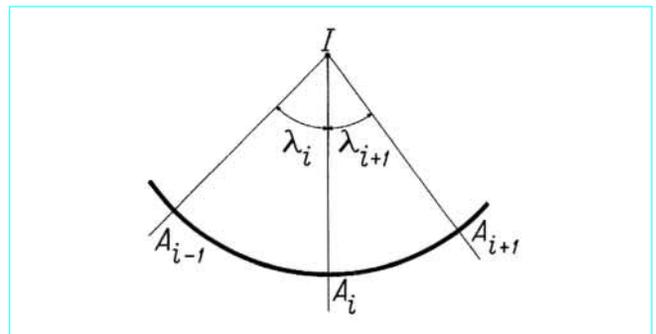


Figure 8 – Poutre continue circulaire à  $n$  travées et  $n + 1$  appuis

Considérons, en effet, la  $i^{\text{e}}$  travée  $A_{i-1} A_i$ ; le moment fléchissant dans cette travée s'exprime en fonction du moment  $M_i(\theta)$  dans la travée supposée indépendante et des moments sur appuis :

$$m_i(\theta) = M_i(\theta) + M_{i-1} \frac{\sin(\lambda_i - \theta)}{\sin \lambda_i} + M_i \frac{\sin \theta}{\sin \lambda_i} \quad (57)$$

$\lambda_i$  désignant la portée angulaire de la travée, et  $\theta$  l'abscisse angulaire d'une section comptée à partir de l'appui de gauche  $A_{i-1}$ .

Notons que les rayons des fibres moyennes des travées peuvent être différents.

De même, si  $\mathcal{C}_i(\theta)$  et  $\mathcal{C}_i(\theta)$  désignent l'effort tranchant et le couple de torsion dans la travée  $A_{i-1} A_i$  supposée indépendante, l'effort tranchant  $T_i(\theta)$  et le couple de torsion  $C_i(\theta)$  dans la travée  $A_{i-1} A_i$  de la poutre continue ont pour expressions :

$$T_i(\theta) = \mathcal{C}_i(\theta) + \frac{k_i'' M_i - k_i' M_{i-1}}{r_i \lambda_i}$$

$$C_i(\theta) = \mathcal{C}_i(\theta) - M_{i-1} \left[ \frac{k_i'}{\lambda_i} - \frac{\cos(\lambda_i - \theta)}{\sin \lambda_i} \right] + M_i \left( \frac{k_i''}{\lambda_i} - \frac{\cos \theta}{\sin \lambda_i} \right)$$

Nous nous sommes placés dans le cas le plus général où la rigidité de torsion  $K_i$  est variable ;  $k_i'$  et  $k_i''$  sont donnés par les formules (54) dans lesquelles  $\lambda = \lambda_i$  et  $K = K_i$ . Lorsque  $K_i$  est constant, nous avons  $k_i' = k_i'' = 1$ .

Les réactions  $R_i$  et  $\Gamma_i$  exercées par l'appui  $A_i$  sur la poutre sont :

$$R_i = T_{i+1}(0) - T_i(\lambda_i)$$

$$\Gamma_i = C_{i+1}(0) - C_i(\lambda_i)$$

Il suffit donc de calculer les moments fléchissants  $M_i$  sur les appuis. Désignons par  $\omega_i'$  et  $\omega_i''$  les rotations des extrémités de la  $i^{\text{e}}$  travée  $A_{i-1} A_i$  supposée indépendante sous l'effet des charges qui lui sont appliquées ; il résulte de (51) que les rotations  $\omega_{i-1}$  et  $\omega_i$  sur les appuis  $A_{i-1}$  et  $A_i$  de la poutre continue ont pour valeurs,  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  désignant les coefficients de souplesse de la  $i^{\text{e}}$  travée :

$$\begin{cases} \omega_{i-1} = \omega_i' + a_i M_{i-1} + b_i M_i \\ \omega_i = \omega_i'' - b_i M_{i-1} + c_i M_i \end{cases}$$

Nous pouvons également calculer  $\omega_i$  en considérant la travée  $A_i A_{i+1}$  :

$$\omega_i = \omega_{i+1}' + a_{i+1} M_i + b_{i+1} M_{i+1}$$

En égalant les deux valeurs précédentes de  $\omega_i$ , nous obtenons la **relation des trois moments** :

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \omega_i'' - \omega_{i+1}' \quad (58)$$

Le calcul des moments fléchissants sur appuis se fait donc comme pour une poutre droite continue. On peut ainsi, comme dans le cas des poutres droites, introduire les rapports focaux  $\varphi_i$  et  $\varphi_i'$  pour faciliter la résolution du système linéaire constitué par les relations des trois moments. Les rotations  $\omega_i'$  et  $\omega_i''$  (comptées positivement en sens inverse du sens adopté pour les poutres droites) sont données par les formules (25) :

$$\begin{cases} \omega_i' = \frac{r_i}{\sin \lambda_i} \left[ \int_0^{\lambda_i} \frac{\mathcal{C}_i}{GK_i} \cos(\lambda_i - \theta) d\theta + \int_0^{\lambda_i} \frac{M_i}{EI_i} \sin(\lambda_i - \theta) d\theta \right] \\ \omega_i'' = \frac{r_i}{\sin \lambda_i} \left[ \int_0^{\lambda_i} \frac{\mathcal{C}_i}{GK_i} \cos \theta d\theta - \int_0^{\lambda_i} \frac{M_i}{EI_i} \sin \theta d\theta \right] \end{cases}$$

Le calcul des rotations  $\omega_i'$  et  $\omega_i''$  se fait par intégration numérique lorsque  $K_i$  et  $I_i$  sont variables, et à partir des formules (41) lorsque  $K_i$  et  $I_i$  sont constants.

Lorsque les portées angulaires  $\lambda_i$  des travées sont faibles, par exemple inférieures à 1/5 rad, les calculs faits précédemment dans les paragraphes 2.6 et 3.1 montrent que les moments fléchissants dans la poutre continue circulaire peuvent être assimilés aux moments fléchissants dans la poutre droite continue de même inertie et de portées  $\ell_i = r_i \lambda_i$  avec une erreur relative inférieure à 0,5 %.

### 3.3 Cas exceptionnel d'une poutre continue circulaire fermée

Prenons l'exemple (figure 9) d'une poutre circulaire fermée comportant  $n$  travées identiques et symétriques d'ouverture angulaire  $\lambda = 2\pi/n$ , et supposons que seule la travée  $A_n A_1$  est chargée.

Soit  $\omega'$  et  $\omega''$  les rotations à l'appui  $A_n$  et à l'appui  $A_1$  de cette travée supposée indépendante. Les travées ont les mêmes coefficients de souplesse  $a = c$ , et  $b$ . En appliquant  $n$  fois la relation des trois moments et en désignant par  $\rho$  le rapport  $a/b$ , nous obtenons, d'une part, les deux équations avec second membre :

$$\begin{cases} M_{n-1} + 2\rho M_n + M_1 = -\frac{\omega'}{b} \\ M_n + 2\rho M_1 + M_2 = \frac{\omega''}{b} \end{cases}$$

et, d'autre part, les  $n-2$  équations sans second membre :

$$\begin{cases} M_1 + 2\rho M_2 + M_3 = 0 \\ M_2 + 2\rho M_3 + M_4 = 0 \\ \dots \\ M_{n-2} + 2\rho M_{n-1} + M_n = 0 \end{cases}$$

Les équations sans second membre montrent que, si l'on désigne par  $s$  et  $1/s$  les racines de l'équation du second degré :

$$S^2 + 2\rho S + 1 = 0$$

$M_i$  est une combinaison linéaire des puissances de ces racines :

$$M_i = A s^i + B s^{-i}$$

$A$  et  $B$  étant deux constantes que l'on détermine en reportant l'expression précédente dans les deux équations avec second membre ; on trouve ainsi :

$$A = \frac{1}{b} \frac{-\omega'' + s\omega'}{(1-s^2)(1-s^n)}, \quad B = \frac{1}{b} \frac{\omega' - s\omega''}{(1-s^2)(1-s^n)} s^{n+1}$$

Les moments fléchissants sur appuis ont donc pour valeurs :

$$M_i = \frac{\omega'}{b} \frac{s^{i+1} + s^{n+1-i}}{(1-s^2)(1-s^n)} - \frac{\omega''}{b} \frac{s^i + s^{n+2-i}}{(1-s^2)(1-s^n)}$$

En particulier, en faisant  $i=1$  et  $i=n$ , on trouve :

$$M_1 = \frac{\omega'}{b} \frac{s^2 + s^n}{(1-s^2)(1-s^n)} - \frac{\omega''}{b} \frac{s + s^{n+1}}{(1-s^2)(1-s^n)}$$

$$M_n = \frac{\omega'}{b} \frac{s + s^{n+1}}{(1-s^2)(1-s^n)} - \frac{\omega''}{b} \frac{s^2 + s^n}{(1-s^2)(1-s^n)}$$

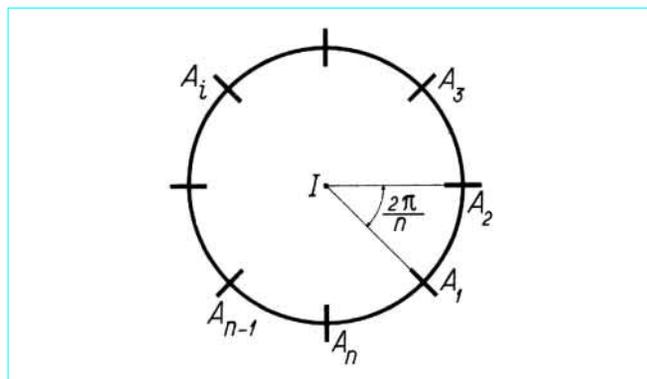


Figure 9 – Poutre continue circulaire fermée

Dans les expressions précédentes,  $s$  désigne l'une ou l'autre des racines de l'équation du second degré ; elles ne changent pas si l'on remplace  $s$  par  $1/s$ . Pour le calcul numérique, on a intérêt à choisir la racine dont la valeur absolue est inférieure à l'unité, soit :

$$s = -(\rho - \sqrt{\rho^2 - 1})$$

Lorsque  $n$  est très grand, on retrouve les résultats relatifs à une poutre droite continue composée d'une infinité de travées identiques :

$$M_1 = \frac{1}{b} \frac{\omega' s^2 - \omega'' s}{1 - s^2} \quad \text{et} \quad M_n = \frac{1}{b} \frac{\omega' s - \omega'' s^2}{1 - s^2}$$

# Structures élastiques planes chargées normalement à leur plan



par **Jean COURBON**

*Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées*

*Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées*

## Bibliographie

COURBON (J.). – *Théorie des ponts courbes*. Annales des Ponts et Chaussées, sept.-oct. 1961.

COURBON (J.). – *Résistance des Matériaux*. Tome II, Dunod (1971).

---