

# Structures élastiques composées de poutres

par **Jean COURBON**

*Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées*

*Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées*

|  |             |
|--|-------------|
| <b>1. Structures planes composées de poutres droites</b> .....                     | C 2 030 - 2 |
| 1.1 Généralités .....  | — 2         |
| 1.2 Structures à plan moyen .....  | — 2         |
| 1.3 Structures planes se déformant normalement à leur plan .....                   | — 3         |
| <b>2. Structures composées de poutres quelconques</b> .....                        | — 5         |
| 2.1 Structures étudiées .....  | — 5         |
| 2.2 État de sollicitation et état de déplacement de la structure .....             | — 6         |
| 2.3 État de contrainte et état de déformation de la structure .....                | — 6         |
| 2.4 Correspondance entre l'état de sollicitation et l'état de contrainte .....     | — 7         |
| 2.5 Correspondance entre l'état de déplacement et l'état de déformation ..         | — 8         |
| 2.6 Théorème des travaux virtuels. Application .....                               | — 8         |
| 2.7 Structures élastiques .....  | — 9         |
| 2.8 Calcul des structures hyperstatiques élastiques .....                          | — 10        |
| <b>3. Matrices-transfert</b> .....   | — 11        |
| 3.1 Définition. Propriétés .....   | — 11        |
| 3.2 Détermination des matrices-transfert .....                                     | — 13        |
| 3.3 Application au calcul des poutres continues sur appuis élastiques .....        | — 14        |
| 3.4 Répartition des efforts dus au freinage dans un pont à plusieurs travées ..... | — 14        |
| <b>4. Structures hyperstatiques d'ordre infini</b> .....                           | — 16        |
| 4.1 Définition .....   | — 16        |
| 4.2 Opérateurs linéaires .....   | — 16        |
| 4.3 Généralités sur les structures du premier genre .....                          | — 18        |
| 4.4 Exemples de structures du premier genre .....                                  | — 19        |
| 4.5 Résolution numérique de l'équation de Fredholm .....                           | — 22        |
| 4.6 Structures du second genre .....   | — 23        |
| <b>Références bibliographiques</b> .....   | — 24        |

**D**ans cet article, nous traiterons des méthodes de calcul permettant d'apprécier la résistance de structures élastiques composées de poutres.

# 1. Structures planes composées de poutres droites

## 1.1 Généralités

Les structures considérées sont composées de poutres droites assemblées entre elles aux nœuds de la structure. Chaque poutre de la structure est une structure élémentaire, de sorte que la structure est constituée d'un nombre fini de structures élémentaires. Nous pourrions donc utiliser les méthodes générales (méthode des forces ou méthode des déplacements) exposées dans l'article *Méthodes de calcul des structures élastiques* [A 330] du traité Sciences fondamentales. Pour cela, nous devons, pour chaque structure élémentaire  $E^u$  qui est une poutre droite :

- définir les matrices colonnes  $C^u$  et  $D^u$  qui représentent respectivement l'état de contrainte et l'état de déformation de  $E^u$  ;
- calculer la matrice d'élasticité  $k^u$  et la matrice de rigidité  $r^u$  inverse de la matrice d'élasticité ; rappelons que :

$$D^u = k^u C^u \quad \text{et} \quad C^u = D^u r^u \quad (1)$$

- déterminer la matrice  $U^u$  qui, dans le repère général, permet de calculer l'état de sollicitation de l'élément en fonction de l'état de contrainte, et l'état de déformation de l'élément en fonction de l'état de déplacement, au moyen des formules :

$$F^u = U^u C^u \quad \text{et} \quad \Delta^u = (U^u)^t \Delta^u \quad (2)$$

$F^u$  et  $\Delta^u$  désignant les matrices colonnes qui représentent respectivement l'état de sollicitation et l'état de déplacement de l'élément  $E^u$ .

## 1.2 Structures à plan moyen

### 1.2.1 Définitions des matrices $C^u$ et $D^u$

Considérons (figure 1) l'élément  $E^u$  constitué par la poutre  $A_i A_j$  ; le repère général est  $Oxy$ , et le repère lié à l'élément est  $A_i x' y'$ , l'axe  $A_i x'$  étant dirigé suivant  $A_i A_j$ .

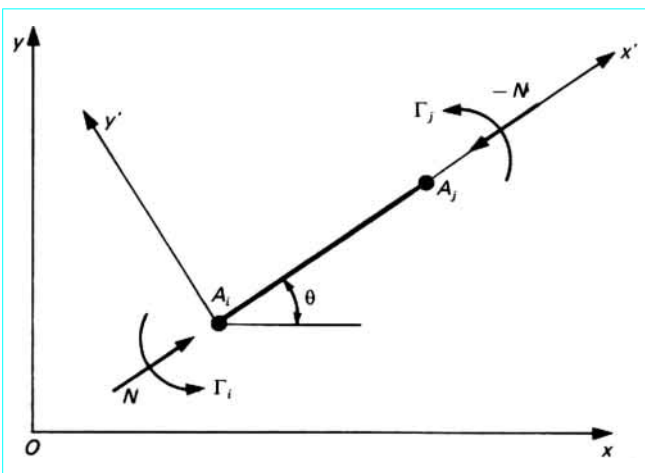


Figure 1 – Structure à plan moyen

Imposons à la poutre  $A_i A_j$  supposée isolée, une articulation fixe en  $A_j$  et une articulation mobile suivant  $A_i x'$  en  $A_i$ . Les éléments de la matrice  $C^u$  sont les couples  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_j$  qui s'exercent aux nœuds  $A_i$  et  $A_j$ , et la composante  $N$  (effort normal) suivant  $A_i x'$  de la force qui s'exerce au nœud  $A_i$ . Les éléments de la matrice  $D^u$  sont les rotations  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  des extrémités de la poutre, et le déplacement  $\Lambda$  (raccourcissement) du nœud  $A_j$  suivant  $A_i x'$ . Donc :

$$C^u = \begin{bmatrix} \Gamma_i \\ \Gamma_j \\ N \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D^u = \begin{bmatrix} \Omega_i \\ \Omega_j \\ \Lambda \end{bmatrix} \quad (3)$$

**Remarque :** les rotations  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  sont les rotations des extrémités de la poutre dans le repère lié à l'élément ; elles sont différentes des rotations  $\omega_i$  et  $\omega_j$  des nœuds  $A_i$  et  $A_j$  dans le repère général, en raison des déplacements des nœuds.

### 1.2.2 Matrice d'élasticité et matrice de rigidité

Désignons par  $a$ ,  $b$  et  $c$  les coefficients de souplesse de la poutre  $A_i A_j$  de longueur  $L$ , et par  $d$  le raccourcissement de la poutre soumise à un effort normal unité. Nous avons,  $I$ ,  $S$  et  $S_1$  désignant le moment d'inertie, la section et la section réduite relative à la déformation d'effort tranchant :

$$\begin{cases} a = \int_0^L \left(1 - \frac{x'}{L}\right)^2 \frac{dx'}{EI} + \frac{1}{L^2} \int_0^L \frac{dx'}{GS_1} \\ b = \int_0^L \frac{x'}{L} \left(1 - \frac{x'}{L}\right) \frac{dx'}{EI} - \frac{1}{L^2} \int_0^L \frac{dx'}{GS_1} \\ c = \int_0^L \left(\frac{x'}{L}\right)^2 \frac{dx'}{EI} + \frac{1}{L^2} \int_0^L \frac{dx'}{GS_1} \\ d = \int_0^L \frac{dx'}{ES} \end{cases}$$

Les formules classiques de la théorie des poutres nous donnent, puisque  $\Gamma_i$  est l'opposé du moment fléchissant en  $A_i$  et que  $\Gamma_j$  est égal au moment fléchissant en  $A_j$  :

$$\Omega_i = a\Gamma_i - b\Gamma_j \quad \Omega_j = -b\Gamma_i + c\Gamma_j \quad \Lambda = dN$$

Il en résulte que la matrice d'élasticité a pour expression :

$$k^u = \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ -b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \quad (4)$$

La matrice de rigidité est l'inverse de la matrice d'élasticité :

$$r^u = \frac{1}{ac - b^2} \begin{bmatrix} c & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ac - b^2}{d} \end{bmatrix}$$

Lorsque  $I$ ,  $S$  et  $S_1$  sont constants,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$  ont pour valeurs :

$$a = c = \frac{L}{3EI} + \frac{1}{GS_1 L}, \quad b = \frac{L}{6EI} - \frac{1}{GS_1 L}, \quad d = \frac{L}{ES}$$

En posant :

$$\alpha = \frac{6I}{S} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{6EI}{GS_1 L^2}$$

nous obtenons pour expression de la matrice d'élasticité :

$$k^\mu = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2+\beta & -1+\beta & 0 \\ -1+\beta & 2+\beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

et pour expression de la matrice de rigidité :

$$r^\mu = \frac{2EI}{L(1+2\beta)} \begin{bmatrix} 2+\beta & 1-\beta & 0 \\ 1-\beta & 2+\beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3(1+2\beta)}{\alpha} \end{bmatrix}$$

Lorsqu'on néglige les déformations dues à l'effort tranchant,  $\beta$  est nul.

Lorsqu'on néglige les déformations dues à l'effort normal,  $\Lambda$  est nul quel que soit  $N$ , et il suffit de définir l'état de contrainte et l'état de déformation par les matrices :

$$C^\mu = \begin{bmatrix} \Gamma_i \\ \Gamma_j \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D^\mu = \begin{bmatrix} \Omega_i \\ \Omega_j \end{bmatrix}$$

Les matrices  $k^\mu$  et  $r^\mu$  ont alors pour expressions :

$$k^\mu = \begin{bmatrix} a & -b \\ -b & c \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad r^\mu = \frac{1}{ac-b^2} \begin{bmatrix} c & b \\ b & a \end{bmatrix}$$

expressions qui se réduisent à :

$$k^\mu = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad r^\mu = \frac{2EI}{L} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

lorsque la poutre est de section constante et que l'on néglige les déformations dues à l'effort tranchant.

Lorsque la poutre  $A_i A_j$  est articulée à une extrémité,  $A_i$  par exemple,  $\Gamma_i$  est nul quel que soit  $\Omega_i$  et il suffit de définir l'état de contrainte et l'état de déformation par les matrices :

$$C^\mu = \begin{bmatrix} \Gamma_j \\ N \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D^\mu = \begin{bmatrix} \Omega_j \\ \Lambda \end{bmatrix}$$

Les matrices  $k^\mu$  et  $r^\mu$  ont alors pour expressions :

$$k^\mu = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad r^\mu = \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/d \end{bmatrix}$$

Enfin, lorsque la poutre est articulée à ses deux extrémités :

$$C^\mu = N, \quad D^\mu = \Lambda, \quad k^\mu = d, \quad r^\mu = 1/d$$

### 1.2.3 Détermination de la matrice $U^\mu$

Soit dans le repère général  $Oxy$  :  $X_i^\mu, Y_i^\mu$  les composantes de la force et  $\Gamma_i^\mu$  la composante du couple appliqués au nœud  $A_i$ ;  $X_j^\mu, Y_j^\mu$  les composantes de la force et  $\Gamma_j^\mu$  la composante du couple appliqués au nœud  $A_j$ . L'état de sollicitation de l'élément  $E^\mu$  constitué par la poutre  $A_i A_j$  est défini par la matrice colonne :

$$F^\mu = \begin{bmatrix} F_i^\mu \\ F_j^\mu \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad F_i^\mu = \begin{bmatrix} X_i^\mu \\ Y_i^\mu \\ \Gamma_i^\mu \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F_j^\mu = \begin{bmatrix} X_j^\mu \\ Y_j^\mu \\ \Gamma_j^\mu \end{bmatrix}$$

Les mêmes quantités seront accentuées dans le repère lié à l'élément. Dans ce repère, les équations d'équilibre de l'élément :

$$\begin{aligned} X_i'^\mu &= -X_j'^\mu = N & Y_i'^\mu &= -Y_j'^\mu = \frac{\Gamma_i + \Gamma_j}{L} \\ \Gamma_i'^\mu &= \Gamma_i & \Gamma_j'^\mu &= \Gamma_j \end{aligned}$$

sont équivalentes à l'équation matricielle :

$$F'^\mu = U'^\mu C^\mu \quad \text{avec} \quad U'^\mu = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ L^{-1} & L^{-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -L^{-1} & -L^{-1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Si nous désignons par  $\Sigma$  la matrice orthogonale ( $\Sigma^{-1} = \Sigma^t$ ) :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nous avons  $F_i'^\mu = \Sigma F_i^\mu$  et  $F_j'^\mu = \Sigma F_j^\mu$

Donc :

$$F^\mu = U^\mu C^\mu = \begin{bmatrix} \Sigma^t & 0 \\ 0 & \Sigma^t \end{bmatrix} F'^\mu = \begin{bmatrix} \Sigma^t & 0 \\ 0 & \Sigma^t \end{bmatrix} U'^\mu C^\mu$$

Il en résulte que :

$$U^\mu = \begin{bmatrix} \Sigma^t & 0 \\ 0 & \Sigma^t \end{bmatrix} U'^\mu = \begin{bmatrix} -L^{-1} \sin \theta & -L^{-1} \sin \theta & \cos \theta \\ L^{-1} \cos \theta & L^{-1} \cos \theta & \sin \theta \\ 1 & 0 & 0 \\ L^{-1} \sin \theta & L^{-1} \sin \theta & -\cos \theta \\ -L^{-1} \cos \theta & -L^{-1} \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Si l'on désigne, dans le repère général, par  $u$  et  $v$  les composantes du déplacement d'un nœud et par  $\omega$  la rotation d'un nœud, l'état de déplacement de l'élément  $A_i A_j$  est défini par la matrice colonne :

$$\Delta^\mu = \begin{bmatrix} \Delta_i^\mu \\ \Delta_j^\mu \end{bmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \Delta_i^\mu = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_j^\mu = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ \omega_j \end{bmatrix}$$

## 1.3 Structures planes se déformant normalement à leur plan

### 1.3.1 Définition des matrices $C^\mu$ et $D^\mu$

Les éléments de la structure sont des poutres droites assemblées entre elles aux nœuds. Les fibres moyennes des poutres sont contenues dans le plan  $Oxy$  qui coupe les sections des poutres suivant un axe central d'inertie. Les nœuds sont sollicités par des forces normales au plan  $Oxy$  et par des couples contenus dans le plan  $Oxy$ .

Considérons (figure 2) l'élément  $E^\mu$  constitué par la poutre  $A_i A_j$ ; le repère général est  $Oxy$ , et le repère lié à l'élément est  $A_i x' y'$ , l'axe  $A_i x'$  étant dirigé suivant  $A_i A_j$ .

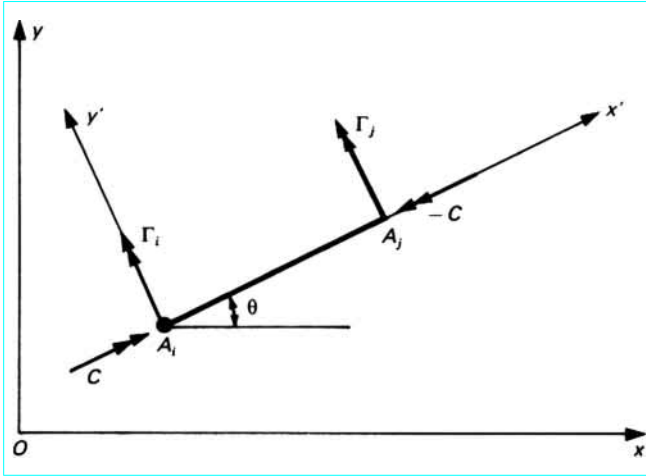


Figure 2 – Structure plane se déformant normalement à son plan

Imaginons la poutre  $A_i A_j$  isolée et soumise aux mêmes sollicitations que dans la structure ; supposons l'extrémité  $A_j$  articulée autour d'un axe parallèle à  $A_j y'$  et l'extrémité  $A_i$  simplement appuyée par l'intermédiaire d'une rotule mobile sur  $A_i x'$ .

Les éléments de la matrice  $C^\mu$  sont les couples  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_j$  d'axes parallèles à  $A_i y'$  qui s'exercent aux extrémités  $A_i$  et  $A_j$  et le couple  $C$  (couple de torsion) d'axe dirigé suivant  $A_i x'$  qui s'exerce à l'extrémité  $A_i$ . Les éléments de la matrice  $D^\mu$  sont les rotations  $\Omega_i$  et  $\Omega_j$  des extrémités  $A_i$  et  $A_j$  autour d'axes parallèles à  $A_i y'$ , et la rotation  $\Theta$  de l'extrémité  $A_i$  autour de  $A_i x'$ . Donc :

$$C^\mu = \begin{bmatrix} \Gamma_i \\ \Gamma_j \\ C \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D^\mu = \begin{bmatrix} \Omega_i \\ \Omega_j \\ \Theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

1.3.2 Matrice d'élasticité et matrice de rigidité

Désignons toujours par  $a, b$  et  $c$  les coefficients de souplesse de la poutre  $A_i A_j$  de longueur  $L$ , et par  $d$  la rotation de l'extrémité  $A_i$  sous l'effet d'un couple unité d'axe dirigé suivant  $A_i x'$ . Nous avons,  $EI$  désignant la rigidité de flexion,  $GS_1$  la rigidité à l'effort tranchant et  $GK$  la rigidité à la torsion :

$$\begin{cases} a = \int_0^L \left(1 - \frac{x'}{L}\right)^2 \frac{dx'}{EI} + \frac{1}{L^2} \int_0^L \frac{dx'}{GS_1} \\ b = \int_0^L \frac{x'}{L} \left(1 - \frac{x'}{L}\right) \frac{dx'}{EI} - \frac{1}{L^2} \int_0^L \frac{dx'}{GS_1} \\ c = \int_0^L \left(\frac{x'}{L}\right)^2 \frac{dx'}{EI} + \frac{1}{L^2} \int_0^L \frac{dx'}{GS_1} \\ d = \int_0^L \frac{dx'}{GK} \end{cases}$$

Les formules classiques de la théorie des poutres nous donnent les relations :

$$\Omega_i = a\Gamma_i - b\Gamma_j \quad \Omega_j = -b\Gamma_i + c\Gamma_j \quad \Theta = dC$$

qui montrent que la matrice d'élasticité de l'élément est la matrice :

$$k^\mu = \begin{bmatrix} a & -b & 0 \\ -b & c & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix} \quad (7)$$

La matrice de rigidité est l'inverse de la matrice d'élasticité :

$$r^\mu = \frac{1}{ac - b^2} \begin{bmatrix} c & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ac - b^2}{d} \end{bmatrix}$$

Lorsque  $I, S_1$  et  $K$  sont constants, en posant :

$$\alpha = \frac{6EI}{GK} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{6EI}{GS_1 L^2}$$

nous trouvons pour expression de la matrice d'élasticité :

$$k^\mu = \frac{L}{6EI} \begin{bmatrix} 2 + \beta & -1 + \beta & 0 \\ -1 + \beta & 2 + \beta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

et pour expression de la matrice de rigidité :

$$r^\mu = \frac{2EI}{L(1 + 2\beta)} \begin{bmatrix} 2 + \beta & 1 - \beta & 0 \\ 1 - \beta & 2 + \beta & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3(1 + 2\beta)}{\alpha} \end{bmatrix}$$

Il suffit de prendre  $\beta = 0$  lorsque l'on néglige les déformations dues à l'effort tranchant.

Lorsque la poutre  $A_i A_j$  est articulée à une extrémité,  $A_i$  par exemple, autour d'un axe parallèle à  $A_i y'$ ,  $\Gamma_i$  est nul quel que soit  $\Omega_i$ , et il suffit de définir l'état de contrainte et l'état de déformation par les matrices :

$$C^\mu = \begin{bmatrix} \Gamma_j \\ C \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D^\mu = \begin{bmatrix} \Omega_j \\ \Theta \end{bmatrix}$$

La matrice d'élasticité et la matrice de rigidité ont alors pour expressions :

$$k^\mu = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad r^\mu = \begin{bmatrix} 1/c & 0 \\ 0 & 1/d \end{bmatrix}$$

Enfin, lorsque la poutre  $A_i A_j$  est articulée à ses deux extrémités autour d'axes parallèles à  $A_i y'$ ,  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_j$  sont nuls, et nous avons :

$$C^\mu = C, \quad D^\mu = \Theta, \quad k^\mu = d, \quad r^\mu = 1/d$$

1.3.3 Détermination de la matrice  $U^\mu$

Soit dans le repère général  $Oxy$  :  $Z_i^\mu$  la composante de la force et  $P_i^\mu$  et  $Q_i^\mu$  les composantes du couple appliquées au nœud  $A_i$  ;  $Z_j^\mu$  la composante de la force et  $P_j^\mu$  et  $Q_j^\mu$  les composantes du couple appliqués au nœud  $A_j$ . L'état de sollicitation de l'élément  $E^\mu$  constitué par la poutre  $A_i A_j$  est défini par la matrice colonne :

$$F^\mu = \begin{bmatrix} F_i^\mu \\ F_j^\mu \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad F_i^\mu = \begin{bmatrix} Z_i^\mu \\ P_i^\mu \\ Q_i^\mu \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad F_j^\mu = \begin{bmatrix} Z_j^\mu \\ P_j^\mu \\ Q_j^\mu \end{bmatrix}$$

Les mêmes quantités seront accentuées dans le repère lié à l'élément. Dans ce repère, les équations d'équilibre de l'élément donnent les relations :

$$\begin{aligned} Z_i^\mu &= -\frac{\Gamma_i + \Gamma_j}{L}, & P_i^\mu &= C, & Q_i^\mu &= \Gamma_i \\ Z_j^\mu &= \frac{\Gamma_i + \Gamma_j}{L}, & P_j^\mu &= -C, & Q_j^\mu &= \Gamma_j \end{aligned}$$

équivalentes à l'équation matricielle :

$$F^\mu = U^\mu C^\mu \quad \text{avec} \quad U^\mu = \begin{bmatrix} -L^{-1} & -L^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ L^{-1} & L^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

En désignant toujours par  $\Sigma$  la matrice orthogonale ( $\Sigma^{-1} = \Sigma^t$ ) :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nous avons  $F_i^\mu = \Sigma F_i^\mu$  et  $F_j^\mu = \Sigma F_j^\mu$

$$\text{donc} \quad F^\mu = U^\mu C^\mu = \begin{bmatrix} \Sigma^t & 0 \\ 0 & \Sigma^t \end{bmatrix} F^\mu = \begin{bmatrix} \Sigma^t & 0 \\ 0 & \Sigma^t \end{bmatrix} U^\mu C^\mu$$

Il en résulte que :

$$U^\mu = \begin{bmatrix} \Sigma^t & 0 \\ 0 & \Sigma^t \end{bmatrix} U^\mu = \begin{bmatrix} -L^{-1} & -L^{-1} & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \\ \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ L^{-1} & L^{-1} & 0 \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

Si l'on désigne, dans le repère général, par  $w$  le déplacement et par  $p$  et  $q$  les composantes de la rotation d'un nœud, l'état de déplacement de l'élément  $A_i A_j$  est défini par la matrice colonne :

$$\Delta^\mu = \begin{bmatrix} \Delta_i^\mu \\ \Delta_j^\mu \end{bmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \Delta_i^\mu = \begin{bmatrix} w_j \\ p_j \\ q_j \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta_j^\mu = \begin{bmatrix} w_j \\ p_j \\ q_j \end{bmatrix}$$

## 2. Structures composées de poutres quelconques

### 2.1 Structures étudiées

#### 2.1.1 Définitions et hypothèses

Les structures étudiées sont composées de poutres à fibres moyennes quelconques (droites, planes ou gauches).

Nous supposons que les liaisons sont **invariables** et **sans frottement** dans le cas où un mouvement relatif est possible (articulation par exemple). En particulier, des appuis élastiques doivent être considérés comme faisant partie de la structure, et il est exclu que les déformations de la structure modifient les liaisons. Nous supposons également que les liaisons sont en nombre suffisant pour assurer la position de la structure dans l'espace.

La structure est définie dans un **repère fixe orthonormé**  $OX_1 X_2 X_3$  de vecteurs unités  $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$  si l'on connaît les fibres moyennes, l'orientation des sections et les caractéristiques géométriques des sections des poutres.

Nous appellerons **fibre moyenne de la structure** l'ensemble des fibres moyennes des poutres de la structure. Un point  $G$  de la fibre moyenne de la structure de coordonnées  $(X_1, X_2, X_3)$  est défini par l'abscisse curviligne  $s$  :

$$X_1 = X_1(s), \quad X_2 = X_2(s), \quad X_3 = X_3(s) \quad (9)$$

Lorsque  $G$  décrit la fibre moyenne de la structure,  $s$  varie de 0 à  $L$ ;  $L$  est la somme des longueurs des fibres moyennes des poutres de la structure.

L'orientation d'une section  $\Sigma$  de centre de gravité  $G$  est définie par le **repère mobile orthonormé**  $Gx_1 x_2 x_3$  lié à la section  $\Sigma$ ;  $Gx_1$  est la tangente à la fibre moyenne orientée dans le sens des  $s$  croissants,  $Gx_2$  et  $Gx_3$  sont les axes centraux d'inertie de la section. Relativement au repère fixe  $OX_1 X_2 X_3$  l'orientation du repère mobile  $Gx_1 x_2 x_3$  de vecteurs unités  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  est définie par la **matrice orthogonale**  $A$  :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad a_{ij} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \quad (10)$$

La matrice  $A$  est fonction de l'abscisse curviligne  $s$ .

#### 2.1.2 Formule fondamentale. Matrice $B$

Un même vecteur  $\vec{X}$  est défini par la matrice colonne  $\bar{X}$  dans le repère fixe  $OX_1 X_2 X_3$  et par la matrice colonne  $X$  dans le repère mobile  $Gx_1 x_2 x_3$ . Des relations :

$$\vec{X} = X_1 \vec{E}_1 + X_2 \vec{E}_2 + X_3 \vec{E}_3 = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

nous déduisons, en multipliant scalairement par  $\vec{E}_i$  ou par  $\vec{e}_i$  :

$$X_i = \sum_j a_{ij} X_j \quad \text{et} \quad x_i = \sum_j a_{ji} X_j$$

$$\text{soit} \quad \bar{X} = AX \quad \text{et} \quad X = A^t \bar{X} \quad (11)$$

Cherchons la matrice colonne  $X'$  qui représente le vecteur  $\vec{X}$  dans le repère  $G' x'_1 x'_2 x'_3$  lié à la section  $\Sigma'$  d'abscisse curviligne  $s + ds$ ; nous déduisons des formules (11) :

$$X' = \left( A^t + \frac{dA^t}{ds} ds \right) \bar{X} = \left( A^t + \frac{dA^t}{ds} ds \right) AX$$

Nous obtenons ainsi la formule fondamentale :

$$X' = (I + B ds) X \quad (12)$$

dans laquelle  $I$  est la matrice unité et  $B$  la **matrice antisymétrique** :

$$B = \frac{dA^t}{ds} A = -A^t \frac{dA}{ds} \quad (13)$$

En effet,  $A$  étant une matrice orthogonale, il suffit de dériver l'identité  $A^t A = I$  pour voir que  $B$  est une matrice antisymétrique. Les éléments  $b_{ij}$  de la matrice  $B$  ont pour valeurs :

$$b_{ij} = \sum_k \frac{da_{ki}}{ds} a_{kj} = \frac{d\vec{e}_i}{ds} \cdot \vec{e}_j$$

Si l'on désigne par  $\vec{b}$  le vecteur de composantes :

$$b_1 = b_{23} = -b_{32}, \quad b_2 = b_{31} = -b_{13}, \quad b_3 = b_{12} = -b_{21}$$

il est facile de montrer que l'on passe du repère  $Gx_1x_2x_3$  au repère voisin  $G'x'_1x'_2x'_3$  par une translation  $\vec{e}_1 ds$  et par une rotation  $\vec{b} ds$ .

### 2.1.3 Expression matricielle du produit vectoriel

Le produit vectoriel  $\vec{X} \wedge \vec{Y}$  de deux vecteurs  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  représentés par les matrices  $X$  et  $Y$  dans un repère orthonormé  $(R)$  est représenté par la matrice colonne :

$$[\vec{X} \wedge \vec{Y}] = H(Y)X - H(X)Y \quad (14)$$

$H$  désignant l'opérateur linéaire qui fait correspondre au vecteur  $\vec{X}$  de composantes  $(X_1, X_2, X_3)$  la matrice antisymétrique :

$$H(X) = \begin{bmatrix} 0 & X_3 & -X_2 \\ -X_3 & 0 & X_1 \\ X_2 & -X_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dans un autre repère orthonormé  $(R')$  les vecteurs  $\vec{X}$  et  $\vec{Y}$  sont représentés par les matrices  $X'$  et  $Y'$  telles que :

$$X = \Omega X' \quad \text{et} \quad Y = \Omega Y'$$

$\Omega$  désignant la matrice orthogonale ( $\Omega^{-1} = \Omega^t$ ) qui définit le changement de repère. Nous avons donc, quel que soit le vecteur  $\vec{Y}$  :

$$H(X')Y' = \Omega^t H(X)Y = \Omega^t H(X)\Omega Y'$$

donc  $H(X') = \Omega^t H(X)\Omega$

En particulier, si l'on prend pour  $(R)$  le repère fixe  $OX_1X_2X_3$  et pour  $(R')$  le repère mobile  $Gx_1x_2x_3$ , nous avons :

$$H(X) = A^t H(\vec{X})A \quad (15)$$

## 2.2 État de sollicitation et état de déplacement de la structure

### 2.2.1 État de sollicitation

L'état de sollicitation est défini par la densité de couple  $\vec{\gamma}(s)$  et par la densité de force  $\vec{p}(s)$  appliquées à la fibre moyenne. Nous désignerons par  $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  et par  $(p_1, p_2, p_3)$  les composantes des vecteurs  $\vec{\gamma}(s)$  et  $\vec{p}(s)$  dans le repère mobile  $Gx_1x_2x_3$ . L'état de sollicitation est donc défini par la matrice colonne  $f(s)$  :

$$f(s) = \begin{bmatrix} \gamma(s) \\ p(s) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma(s) = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad p(s) = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

Les couples ou les forces concentrées éventuelles peuvent être considérés comme des densités élevées appliquées à un petit arc de la fibre moyenne.

Nous considérerons des états particuliers de sollicitation constitués d'un ensemble fini de forces concentrées  $F_j$  (forces ou couples) agissant suivant les directions (lignes d'action des forces ou axe des couples) d'un ensemble.

$$J = \{G_j d_j; \quad j = 1, 2, \dots, m\}$$

Un tel état de sollicitation est défini par la matrice colonne  $F_J$  dont les éléments sont  $F_j$ .

### 2.2.2 État de déplacement

L'état de déplacement de la structure est défini par la rotation  $\vec{\theta}(s)$  et par la translation  $\vec{u}(s)$  subies par une section quelconque à partir de l'état initial. Nous désignerons par  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  et par  $(u_1, u_2, u_3)$  les composantes des vecteurs  $\vec{\theta}(s)$  et  $\vec{u}(s)$  dans le repère mobile  $Gx_1x_2x_3$ . Nous supposons la rotation et la translation très petites, de sorte que l'ordre de composition de la rotation et de la translation est indifférent. L'état de déplacement est donc défini par la matrice colonne  $\delta(s)$  :

$$\delta(s) = \begin{bmatrix} \theta(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta(s) = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u(s) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Nous considérerons plus particulièrement des ensembles finis de déplacements  $\Delta_k$  (translations ou rotations) suivant les directions (directions des translations ou axes des rotations) d'un ensemble :

$$K = \{G_k d_k; \quad k = 1, 2, \dots, n\}$$

Un tel ensemble de déplacements est défini par la matrice colonne  $\Delta_K$  dont les éléments sont  $\Delta_k$ .

### 2.2.3 Travail des forces extérieures

Le travail des forces extérieures  $f(s)$  pour le déplacement  $\delta(s)$  a pour valeur :

$$\overline{c}_e = \int_0^L f^t(s) \delta(s) ds \quad (16)$$

Le travail d'un ensemble de forces  $F_J$  a pour valeur :

$$\overline{c}_e = F_J^t \Delta_J$$

## 2.3 État de contrainte et état de déformation de la structure

### 2.3.1 État de contrainte

Le principe de Saint-Venant nous apprend que l'état de contrainte est défini par l'ensemble des systèmes des forces extérieures relatifs aux différentes sections de la structure. Le moment résultant  $\vec{M}(s)$  et la résultante générale  $\vec{T}(s)$  du système des forces extérieures relatif à la section  $\Sigma$  de centre de gravité  $G$  et d'abscisse curviligne  $s$  ont pour composantes  $(M_1, M_2, M_3)$  et  $(T_1, T_2, T_3)$  dans le repère mobile  $Gx_1x_2x_3$ ;  $M_1$  est le couple de torsion;  $M_2$  et  $M_3$  sont les

moments fléchissants ;  $T_1$  est l'effort normal ; enfin,  $T_2$  et  $T_3$  sont les efforts tranchants. L'état de contrainte de la structure est donc défini par la matrice colonne  $C(s)$  :

$$C(s) = \begin{bmatrix} M(s) \\ T(s) \end{bmatrix} \text{ avec } M(s) = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} \text{ et } T(s) = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$$

### 2.3.2 État de déformation

Le principe de Navier-Bernoulli généralisé permet de définir l'état de déformation de la structure. Avant déformation, on passe de la section  $\Sigma$  d'abscisse curviligne  $s$  à la section  $\Sigma'$  d'abscisse curviligne  $s + ds$  par une rotation  $\vec{\Omega} ds = \vec{b} ds$  et une translation  $\vec{\lambda} ds = \vec{e}_1 ds$ . La déformation amène  $\Sigma$  en  $\Sigma_1$  et  $\Sigma'$  en  $\Sigma'_1$ . On passe de  $\Sigma_1$  à  $\Sigma'_1$  par une rotation  $(\vec{\omega} + \vec{\lambda}') ds$  et une translation  $(\vec{\lambda} + \vec{\lambda}') ds$ . Nous désignerons par  $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  et  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  les composantes des vecteurs  $\vec{\omega}(s)$  et  $\vec{\lambda}(s)$  dans le repère mobile  $Gx_1x_2x_3$ . L'état de déformation de la structure est défini par la matrice colonne  $D(s)$  :

$$D(s) = - \begin{bmatrix} \omega(s) \\ \lambda(s) \end{bmatrix} \text{ avec } \omega(s) = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \text{ et } \lambda(s) = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

### 2.3.3 Travail des forces intérieures ou contraintes

Considérons un élément de la structure compris entre deux sections voisines  $\Sigma$  et  $\Sigma'$ . Cet élément est en équilibre sous l'action de  $\vec{M}$  et de  $\vec{T}$  appliqués à  $\Sigma$  et de  $-\vec{M}$  et  $-\vec{T}$  appliqués à  $\Sigma'$ . Si l'on fixe  $\Sigma$ , le déplacement de  $\Sigma'$  par rapport à  $\Sigma$  résulte d'une rotation  $\vec{\omega} ds$  et d'une translation  $\vec{\lambda} ds$ . Le travail des contraintes relatif à l'élément  $\Sigma\Sigma'$  a donc pour valeur :

$$d\mathcal{C}_i = - \vec{M} \cdot \vec{\omega} ds - \vec{T} \cdot \vec{\lambda} ds$$

Pour l'ensemble de la structure, le travail  $\mathcal{C}_i$  des forces intérieures a donc pour valeur :

$$\mathcal{C}_i = \int_0^L C^t(s) D(s) ds \tag{17}$$

## 2.4 Correspondance entre l'état de sollicitation et l'état de contrainte

Considérons une poutre de la structure, et soit  $\Sigma_0$  et  $\Sigma$  deux sections d'abscisses curvilignes  $s_0$  et  $s$ . Nous avons :

$$\left. \begin{aligned} \vec{M}(s) &= \vec{M}(s_0) + \vec{T}(s_0) \wedge \vec{G}_0 \vec{G} \\ &\quad + \int_{s_0}^s [\vec{\gamma}(t) + \vec{p}(t) \wedge \vec{g} \vec{G}] dt \\ T(s) &= T(s_0) + \int_{s_0}^s \vec{p}(t) dt \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

avec  $g$  centre de gravité de la section courante d'abscisse curviligne  $t$ .

Écrivons les formules (18) sous forme matricielle dans le repère fixe  $OX_1X_2X_3$ . En posant :

$$H(s) = \begin{bmatrix} 0 & X_3(s) & -X_2(s) \\ -X_3(s) & 0 & X_1(s) \\ X_2(s) & -X_1(s) & 0 \end{bmatrix}$$

nous trouvons, en utilisant la formule (14) et en surlignant les matrices représentatives des vecteurs dans le repère fixe :

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{M}(s) &= \vec{M}(s_0) + [H(s) - H(s_0)] \vec{T}(s_0) \\ &\quad + \int_{s_0}^s [\vec{\gamma}(t) + [H(s) - H(t)] \vec{p}(t)] dt \\ \vec{T}(s) &= \vec{T}(s_0) + \int_{s_0}^s \vec{p}(t) dt \end{aligned} \right.$$

Dérivons les relations précédentes par rapport à  $s$  ; nous obtenons :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\vec{M}}{ds} &= \frac{dH}{ds} [\vec{T}(s_0) + \int_{s_0}^s \vec{p}(t) dt] + \vec{\gamma}(s) = \frac{dH}{ds} \vec{T}(s) + \vec{\gamma}(s) \\ \frac{d\vec{T}}{ds} &= \vec{p}(s) \end{aligned} \right.$$

soit, en introduisant grâce à l'équation (11) les matrices représentatives des vecteurs dans le repère mobile :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d(AM)}{ds} &= \frac{dH}{ds} AT + A\gamma \\ \frac{d(AT)}{ds} &= Ap \end{aligned} \right.$$

soit enfin, en effectuant les dérivations :

$$\left\{ \begin{aligned} A \frac{dM}{ds} + \frac{dA}{ds} M &= \frac{dH}{ds} AT + A\gamma \\ A \frac{dT}{ds} + \frac{dA}{ds} T &= Ap \end{aligned} \right.$$

Multiplions les équations précédentes à gauche par  $A^t$  ; nous obtenons, compte tenu de la définition (13) de la matrice  $B$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM}{ds} &= \gamma + BM + KT \\ \frac{dT}{ds} &= p + BT \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

$K$  désignant la matrice antisymétrique  $A^t \frac{dH}{ds} A$  que la formule (15) permet de calculer puisque  $\frac{dH}{ds} = H(\vec{e}_1)$  :

$$K = A^t H(\vec{e}_1) A = H(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Les relations (19) sont équivalentes à l'unique équation matricielle :

$$\frac{dC}{ds} = f + UC \text{ avec } U(s) = \begin{bmatrix} B & K \\ 0 & B \end{bmatrix} \tag{20}$$

appelée **équation d'équilibre**.

Tout état de contrainte vérifiant l'équation d'équilibre sera dit **statiquement admissible** et sera noté  $C'(s)$ .



Supposons l'état de sollicitation  $f(s)$  donné :

— s'il n'existe qu'un seul état de contrainte statiquement admissible, la structure est dite **statiquement déterminée** ou **isostatique** ;  
 — s'il existe plusieurs états distincts de contrainte statiquement admissibles, la structure est dite **statiquement indéterminée** ou **hyperstatique**. La différence entre deux états de contrainte statiquement admissibles est un état d'autocontrainte correspondant à une sollicitation nulle. L'ensemble des états d'autocontrainte est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des états de contrainte. Nous supposons que ce sous-espace a une dimension finie  $r$  appelée **degré d'indétermination statique** ou **degré d'hyperstaticité** de la structure.

### 2.5 Correspondance entre l'état de déplacement et l'état de déformation

Lorsqu'on connaît l'état de déformation de la structure défini par les vecteurs  $\vec{\omega}(s)$  et  $\vec{\lambda}(s)$ , il est possible de calculer le déplacement défini par les vecteurs  $\vec{\theta}(s)$  et  $\vec{u}(s)$  d'une section quelconque connaissant le déplacement d'une section  $\Sigma_0$  au moyen des formules de Navier-Bresse :

$$\left. \begin{aligned} \vec{\theta}(s) &= \vec{\theta}(s_0) + \int_{s_0}^s \vec{\omega}(t) dt \\ \vec{u}(s) &= \vec{u}(s_0) + \vec{\theta}(s_0) \wedge \overrightarrow{G_0 G} \\ &\quad + \int_{s_0}^s [\vec{\lambda}(t) + \vec{\omega}(t) \wedge \overrightarrow{gG}] dt \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

avec  $g$  centre de gravité de la section courante d'abscisse curviligne  $t$ ,  
 $G_0$  et  $G$  centres de gravité des sections  $\Sigma_0$  et  $\Sigma$ .

Nous pouvons, comme pour les équations (18), écrire les relations (21) sous forme matricielle dans le repère fixe  $OX_1 X_2 X_3$  :

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\theta}(s) &= \bar{\theta}(s_0) + \int_{s_0}^s \bar{\omega}(t) dt \\ \bar{u}(s) &= \bar{u}(s_0) + [H(s) - H(s_0)] \bar{\theta}(s_0) \\ &\quad + \int_{s_0}^s \{ \bar{\lambda}(t) + [H(s) - H(t)] \bar{\omega}(t) \} dt \end{aligned} \right.$$

Dérivons les équations précédentes par rapport à  $s$  ; nous obtenons :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\bar{\theta}}{ds} &= \bar{\omega}(s) \\ \frac{d\bar{u}}{ds} &= \frac{dH}{ds} \left[ \bar{\theta}(s_0) + \int_{s_0}^s \bar{\omega}(t) dt \right] + \bar{\lambda}(s) = \frac{dH}{ds} \bar{\theta}(s) + \bar{\lambda}(s) \end{aligned} \right.$$

soit, en se plaçant dans le repère mobile grâce à l'équation (11) :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d(A\theta)}{ds} &= A\omega \\ \frac{d(Au)}{ds} &= \frac{dH}{ds} A\theta + A\lambda \end{aligned} \right.$$

soit enfin, en effectuant les dérivations :

$$\left\{ \begin{aligned} A \frac{d\theta}{ds} + \frac{dA}{ds} \theta &= A\omega \\ A \frac{du}{ds} + \frac{dA}{ds} u &= \frac{dH}{ds} A\theta + A\lambda \end{aligned} \right.$$

Multiplions les équations précédentes à gauche par  $A^t$  ; nous obtenons, compte tenu de la définition des matrices  $B$  et  $K$  :

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &= \omega + B\theta \\ \frac{du}{ds} &= \lambda + Bu + K\theta \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Les deux équations précédentes, qui permettent de calculer l'état de déformation connaissant l'état de déplacement, peuvent être condensées en une seule équation, appelée équation de compatibilité :

$$\frac{d\delta}{ds} = -D(s) - U^t \delta \quad (23)$$

En effet :

$$\begin{bmatrix} B & 0 \\ K & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^t & K^t \\ 0 & B^t \end{bmatrix}^t = - \begin{bmatrix} B & K \\ 0 & B \end{bmatrix}^t = -U^t$$

Il n'existe pas, en général, d'état de déplacement  $\delta(s)$  correspondant à un état de déformation  $D(s)$  choisi arbitrairement. Un état de déformation pour lequel il existe un état de déplacement  $\delta(s)$  est dit **cinématiquement admissible** et sera noté  $D''(s)$ .

Un état de déformation cinématiquement admissible vérifie des conditions de compatibilité cinématique que les formules de Navier-Bresse permettraient d'écrire dans chaque cas particulier, compte tenu des liaisons imposées à la structure, et que nous établirons ultérieurement (§ 2.6.2) au moyen du théorème des forces virtuelles.

À tout état de déformation cinématiquement admissible, les formules de Navier-Bresse associent un état de déplacement unique. Il en résulte que **tout état de déformation d'une structure isostatique est cinématiquement admissible**.

**Remarque** : si l'on se donne seulement certaines composantes  $\Delta_k$  de déplacements, il existe une infinité d'états de déformation cinématiquement admissibles respectant les déplacements donnés  $\Delta_k$ .

### 2.6 Théorème des travaux virtuels. Application

#### 2.6.1 Théorème des travaux virtuels

Considérons un état de contrainte  $C'(s)$  statiquement admissible avec l'état de sollicitation  $f(s)$  de la structure. Donnons à la structure un état de déplacement virtuel arbitraire  $\delta(s)$  auquel correspond un état de déformation cinématiquement admissible  $D''(s)$ .

Le théorème des travaux virtuels s'énonce comme suit :

**Le travail virtuel des forces extérieures est égal au travail virtuel de contraintes statiquement admissibles avec les forces extérieures.**

Ce théorème se traduit par la relation :

$$\int_0^L f^t(s) \delta(s) ds = \int_0^s C'^t(s) D''(s) ds \quad (24)$$

Le lecteur trouvera la démonstration de ce théorème dans l'article *Déformations et contraintes dans un milieu continu* [A 303] du traité Sciences fondamentales. Signalons que la formule (24) peut aisément être démontrée à partir des équations (20) et (23).



Dans le cas particulier de forces concentrées  $F_j$ , éléments d'une matrice colonne  $F_J$ , le théorème des travaux virtuels s'écrit :

$$F_J^t \Delta_J = \int_0^L C'^t(s) D''(s) ds$$

avec  $C'(s)$  état de contrainte statiquement admissible avec les forces  $F_j$ ,  
 $D''(s)$  état de déformation cinématiquement admissible respectant les déplacements arbitraires  $\Delta_j$ .

## 2.6.2 Expression des déplacements (théorème des forces virtuelles)

Soit une structure soumise à une sollicitation quelconque. Proposons-nous de calculer les déplacements  $\Delta_k$ , éléments d'une matrice colonne  $\Delta_K$ , de cette structure suivant les directions d'un ensemble  $K$  :

$$K = \{G_k d_k; k = 1, 2, \dots, n\}$$

Appliquons le théorème des travaux virtuels dans les conditions suivantes.

a) L'état d'équilibre est celui de la structure soumise à une seule **force virtuelle unité** dans la direction  $G_k d_k$ ; soit  $C'_k$  un état de contrainte statiquement admissible avec cette force unité.

b) Nous prenons pour état de déplacement virtuel un état  $\delta(s)$  quelconque respectant les déplacements virtuels  $\Delta_k$ , et soit  $D''$  l'état de déformation cinématiquement admissible avec l'état de déplacement  $\delta(s)$  choisi.

Le théorème des travaux virtuels se traduit par la relation :

$$\Delta_k = \int_0^L C'_k{}^t D'' ds$$

et l'ensemble des formules précédentes ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) est équivalent à l'unique formule matricielle :

$$\Delta_K = \int_0^L C'_K{}^t D'' ds \quad (25)$$

$C'_K$  désignant la matrice obtenue en juxtaposant les matrices colonnes  $C'_k$  :

$$C'_K = [C'_1 \ C'_2 \ \dots \ C'_n]$$

## 2.7 Structures élastiques

### 2.7.1 Définition des structures élastiques

La structure est dite **élastique** lorsque pour toute section  $\Sigma$  d'abscisse curviligne  $s$  la matrice  $D(s)$  se déduit de la matrice  $C(s)$  par une relation de la forme :

$$D(s) = k(s) C(s) \quad (26)$$

avec  $k(s)$  matrice régulière symétrique appelée **matrice d'élasticité**.

En supposant la structure composée de poutres à section lentement variable, les formules classiques de la théorie des poutres :

$$\begin{cases} \omega_1 = -\frac{M_1}{GI_1} & \omega_2 = -\frac{M_2}{EI_2} & \omega_3 = -\frac{M_3}{EI_3} \\ \lambda_1 = -\frac{T_1}{ES_1} & \lambda_2 = -\frac{T_2}{GS_2} & \lambda_3 = -\frac{T_3}{GS_3} \end{cases}$$

dans lesquelles  $GI_1$  est la rigidité à la torsion,  $EI_2$  et  $EI_3$  les rigidités à la flexion,  $ES_1$  la rigidité à l'effort normal,  $GS_2$  et  $GS_3$  les rigidités aux efforts tranchants, nous montrent que  $k(s)$  est une **matrice diagonale** :

$$k(s) = \text{Diag} \left( \frac{1}{GI_1}, \frac{1}{EI_2}, \frac{1}{EI_3}, \frac{1}{ES_1}, \frac{1}{GS_2}, \frac{1}{GS_3} \right)$$

Il est possible de montrer, au moyen du théorème des travaux virtuels, que l'**énergie de déformation**  $W$  de la structure peut s'exprimer soit en fonction des contraintes :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L C^t k C ds$$

soit en fonction des forces extérieures :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^L f^t(s) \delta(s) ds$$

On établirait de même le théorème de réciprocité de Maxwell-Betti et les théorèmes de Castigliano. Mais nous n'utiliserons pas ces théorèmes.

### 2.7.2 Calcul des déplacements

La formule générale (25) est applicable aux structures élastiques ; en prenant pour état de déformation  $D''$  l'état réel de déformation  $D = kC$ , nous avons :

$$\Delta_K = \int_0^L C'_K{}^t k C ds \quad (27)$$

Rappelons que  $C'_K$  est la matrice obtenue en juxtaposant les matrices colonnes  $C'_k$  représentant un état de contrainte quelconque statiquement admissible de la structure soumise à une seule force unité agissant suivant la direction du déplacement  $\Delta_k$ . En particulier, on peut prendre pour  $C'_k$  l'état de contrainte  $C_{0k}$  d'une structure isostatique  $S_0$  associée à la structure  $S$  (§ 2.8.1) ; donc :

$$\Delta_K = \int_0^L C_{0K}{}^t k C ds = \int_0^L C_{0K}{}^t D ds \quad (28)$$

### 2.7.3 Matrices de souplesse

Supposons la structure  $S$  soumise aux forces concentrées  $F_j$  agissant suivant les directions d'un ensemble  $J$ . Cet ensemble de forces est représenté par la matrice colonne  $F_J$  et, en vertu de la définition de la matrice  $C_J$ , juxtaposition des matrices  $C_j$  représentatives des états de contrainte réels en équilibre avec la seule force  $F_j = 1$ , nous avons :

$$C = C_J F_J$$

En portant cette valeur dans la formule (27) nous obtenons :

$$\Delta_K = \mathcal{H}_{KJ} F_J \quad (29)$$

dans laquelle la matrice de souplesse de la structure, relativement aux ensembles  $J$  et  $K$  pris dans cet ordre, a pour expression :

$$\mathcal{H}_{KJ} = \int_0^L C'_K{}^t k C_J ds = \int_0^L C'_K{}^t k C_J ds \quad (30)$$

la seconde expression résultant de ce que l'on peut prendre pour  $C'_K$  la matrice  $C_K$  ; il en résulte que

$$\mathcal{H}_{KJ} = \mathcal{H}_{JK}^t$$

En particulier, la matrice  $\mathcal{H}_{JJ}$  est **symétrique** ; elle est en outre régulière, car l'énergie de déformation de la structure :

$$W = \frac{1}{2} F_J^t \Delta_J = \frac{1}{2} F_J^t \mathcal{H}_{JJ} F_J$$

est une forme quadratique définie positive.

## 2.8 Calcul des structures hyperstatiques élastiques

### 2.8.1 Définition et calcul des réactions hyperstatiques

Rappelons qu'une structure est isostatique lorsqu'on peut déterminer son état de contrainte connaissant son état de sollicitation au moyen des seules équations d'équilibre de la statique. Nous supposons que le déterminant des équations d'équilibre n'est pas nul, autrement dit que la structure n'est pas à **configuration critique**. Il n'existe alors qu'un seul état de contrainte statiquement admissible.

À toute structure hyperstatique  $S$  de degré  $r$ , nous pouvons associer au moins une structure isostatique  $S_0$  que l'on obtient en supprimant  $r$  liaisons de la structure  $S$ . L'état de contrainte de la structure  $S$  est identique à celui de la structure  $S_0$  soumise aux mêmes forces extérieures que  $S$ , et en outre aux forces  $X_i (i = 1, 2, \dots, r)$  qu'exerçaient dans  $S$  les liaisons supprimées. Les **réactions hyperstatiques**  $X_i$  agissent suivant les directions d'un ensemble :

$$I = \{G_i d_i ; i = 1, 2, \dots, r\}$$

Donc si  $C_{0F}$  est l'état de contrainte de  $S_0$  sous l'effet des forces extérieures, et si  $C_{0i}$  est l'état de contrainte de  $S_0$  soumise à la seule force unité  $X_i = 1$  agissant suivant la direction  $G_i d_i$ , l'état de contrainte de la structure  $S$  est de la forme :

$$C = C_{0F} + \sum_{i=1}^{i=r} C_{0i} X_i$$

soit :

$$C = C_{0F} + C_{0I} X \tag{31}$$

$X$  désignant la matrice colonne d'éléments  $X_i$  et  $C_{0I}$  la matrice :

$$C_{0I} = [C_{01} \ C_{02} \ \dots \ C_{0r}]$$

L'indice 0 caractérise des états de contrainte relatifs à la structure isostatique  $S_0$ .

Pour déterminer la matrice inconnue  $X$ , écrivons que les déplacements  $\Delta_i$  de la structure  $S_0$  suivant les directions de l'ensemble  $I$  sont nuls ; nous obtenons ainsi, en appliquant la formule (28), la condition :

$$\Delta_I = \int_0^L C_{0I}^t D \, ds = \int_0^L C_{0I}^t k C \, ds = 0$$

qui exprime que l'état de déformation  $D$  est cinématiquement admissible.

Remplaçons  $C$  par son expression (31) dans la condition précédente ; en définissant les matrices :

$$D_{IF} = \int_0^L C_{0I}^t k C_{0F} \, ds \quad \text{et} \quad D_{II} = \int_0^L C_{0I}^t k C_{0I} \, ds$$

nous obtenons l'équation :

$$D_{II} X + D_{IF} = 0 \tag{32}$$

La matrice  $D_{II}$  est une matrice carrée symétrique régulière d'ordre  $r$ , en effet  $\frac{1}{2} X^t D_{II} X$  est une forme quadratique définie positive égale à l'énergie de déformation de la structure  $S_0$  soumise aux forces  $X_i$ . On pourra donc résoudre l'équation (32) :

$$X = -D_{II}^{-1} D_{IF}$$

L'état de contrainte de la structure  $S$  est donc donné par la formule :

$$C = C_{0F} - C_{0I} D_{II}^{-1} D_{IF} \tag{33}$$

Examinons plus particulièrement le cas où les forces extérieures appliquées à la structure sont des forces concentrées  $F_j$  agissant suivant les directions d'un ensemble  $J$ . Nous avons alors :

$$C_{0F} = C_{0J} F_J$$

En désignant par  $D_{IJ}$  la matrice relative aux deux ensembles  $I$  et  $J$  pris dans cet ordre :

$$D_{IJ} = \int_0^L C_{0I}^t k C_{0J} \, ds \quad (D_{IJ} = D_{JI}^t) \tag{34}$$

nous voyons que  $D_{IF} = D_{IJ} F_J$  ; donc l'état de contrainte de la structure  $S$  est donné par la formule :

$$C = C_J F_J \quad \text{avec} \quad C_J = C_{0J} - C_{0I} D_{II}^{-1} D_{IJ} \tag{35}$$

La matrice  $C_J$  est la matrice des coefficients d'influence des forces de l'ensemble  $J$  sur les contraintes.

### 2.8.2 Calcul des déplacements de la structure $S$ connaissant les forces extérieures qui s'y appliquent

Le premier problème nous a donné l'état de contrainte de la structure. Pour calculer les déplacements  $\Delta_k$  suivant les directions de l'ensemble  $K$ , nous utilisons la formule (28) en choisissant pour structure isostatique associée la structure  $S_0$  qui a permis de définir les réactions hyperstatiques ; nous obtenons ainsi :

$$\Delta_K = \int_0^L C_{0K}^t k C \, ds$$

Dans le cas de forces extérieures quelconques,  $C$  est donné par la formule (33) ; nous trouvons donc la formule :

$$\Delta_K = D_{KF} - D_{KI} D_{II}^{-1} D_{IF} \tag{36}$$

dans laquelle :

$$D_{KF} = \int_0^L C_{0K}^t k C_{0F} \, ds \quad \text{et} \quad D_{KI} = \int_0^L C_{0K}^t k C_{0I} \, ds$$

Dans le cas où les forces extérieures sont des forces concentrées  $F_j$  agissant suivant les directions d'un ensemble  $J$ , l'état de contrainte est donné par la formule (35) ; nous trouvons ainsi la formule :

$$\Delta_K = \mathcal{H}_{KJ} F_J \tag{37}$$

la matrice de souplesse  $\mathcal{H}_{KJ}$  ayant pour expression :

$$\mathcal{H}_{KJ} = D_{KJ} - D_{KI} D_{II}^{-1} D_{IJ} \tag{38}$$

la matrice  $D_{KJ}$  étant la matrice (34) relative aux ensembles  $K$  et  $J$  pris dans cet ordre.

En particulier :

$$\mathcal{H}_{JJ} = D_{JJ} - D_{JI} D_{II}^{-1} D_{IJ}$$

Les expressions précédentes montrent que :

$$\mathcal{H}_{JK} = \mathcal{H}_{KJ}^t \text{ et } \mathcal{H}_{JJ} = \mathcal{H}_{JJ}^t$$

### 2.8.3 Forces appliquées à une structure S pour maintenir des déplacements imposés

Soit  $\Delta_K$  la matrice qui définit les déplacements imposés suivant les directions d'un ensemble  $K = \{G_k d_k; k = 1, 2, \dots, n\}$ . Pour maintenir ces déplacements en appliquant à la structure des forces  $F_j$ , éléments d'une colonne  $F_J$ , suivant les directions de l'ensemble  $J = \{G_j d_j; j = 1, 2, \dots, m\}$ , il faut que les  $m$  valeurs  $F_j$  vérifient le système de  $n$  équations :

$$\Delta_K = \mathcal{H}_{KJ} F_J$$

Il faut donc que  $m \geq n$ . Dans le cas général, le problème a donc une solution si  $m = n$ , et une infinité de solutions si  $m > n$ .

Si l'on cherche à maintenir les déplacements  $\Delta_K$  en appliquant des forces  $F_k$  suivant les directions de l'ensemble  $K$ , nous trouvons, puisque la matrice  $\mathcal{H}_{KK}$  est régulière :

$$F_K = \mathcal{H}_{KK}^{-1} \Delta_K$$

### 2.8.4 État de contrainte, état de déformation et déplacements d'une structure S soumise à une déformation imposée $\bar{D}$

Une déformation imposée peut résulter de phénomènes extérieurs tels que la dilatation thermique ou le retrait. Elle peut également résulter du mode de construction de la structure. Pour chaque élément de la structure compris entre deux sections voisines, la déformation  $\bar{D}$  est calculée en supposant l'élément libre : en somme, on impose la déformation  $\bar{D}$  aux éléments de la structure avant de les assembler pour constituer la structure.

La déformation imposée  $\bar{D}$  provoque un état d'autocontrainte  $C$  de la structure, donc un état de contrainte nul lorsque la structure est isostatique. Lorsque la structure est hyperstatique, l'état de contrainte et l'état de déformation sont de la forme :

$$C = C_{0I} X \text{ et } D = \bar{D} + kC = D + kC_{0I} X$$

La matrice inconnue  $X$  est déterminée par la condition :

$$\Delta_I = \int_0^L C_{0I}^t D ds = \int_0^L C_{0I}^t (\bar{D} + kC_{0I} X) ds = 0$$

Nous obtenons ainsi l'équation :

$$D_{II} X + \int_0^L C_{0I}^t \bar{D} ds = 0$$

L'état de contrainte et l'état de déformation ont donc pour expressions :

$$\left. \begin{aligned} C &= -C_{0I} D_{II}^{-1} \int_0^L C_{0I}^t \bar{D} ds \\ D &= \bar{D} - k C_{0I} D_{II}^{-1} \int_0^L C_{0I}^t \bar{D} ds \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

Nous voyons que, lorsque  $\bar{D}$  vérifie la condition :

$$\int_0^L C_{0I}^t \bar{D} ds = 0$$

qui exprime que l'état de déformation imposé est cinématiquement admissible, l'état de contrainte de la structure est nul.

Pour calculer les déplacements de la structure suivant les directions d'un ensemble  $K$ , nous utilisons la formule (28) :

$$\Delta_K = \int_0^L C_{0K}^t D ds$$

En remplaçant  $D$  par son expression (39), nous trouvons, compte tenu de la définition de la matrice  $D_{KI}$  :

$$\Delta_K = \int_0^L C_{0K}^t \bar{D} ds - D_{KI} D_{II}^{-1} \int_0^L C_{0I}^t \bar{D} ds$$

soit : 
$$\Delta_K = \int_0^L (C_{0K}^t - D_{KI} D_{II}^{-1} C_{0I}^t) \bar{D} ds$$

Or la matrice  $C_K$  des coefficients d'influence des forces de l'ensemble  $K$  sur les contraintes est, d'après l'équation (35) :

$$C_K = C_{0K} - C_{0I} D_{II}^{-1} D_{IK}$$

Il en résulte que  $\Delta_K$  est donné par la formule :

$$\Delta_K = \int_0^L C_K^t \bar{D} ds \quad (40)$$

On peut montrer que cette formule simple est une conséquence du théorème de réciprocité de Colonnetti (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales).

## 3. Matrices-transfert

### 3.1 Définition. Propriétés

#### 3.1.1 Vecteur d'état

Considérons (figure 3) une poutre droite soumise à des charges verticales. Une section  $A$  de cette poutre subit une translation  $v_A$  comptée positivement vers le haut et une rotation  $\omega_A$  comptée positivement dans le sens trigonométrique ; elle supporte un moment fléchissant  $M_A$  et un effort tranchant  $T_A$ .

Le **vecteur d'état** relatif à la section  $A$  est le vecteur représenté par la matrice colonne contenant cinq éléments :

$$\mathcal{E}^A = [v_A \omega_A M_A T_A 1]^t$$

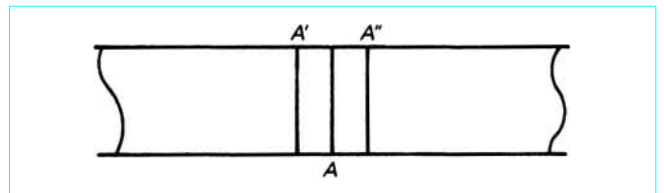


Figure 3 – Section d'une poutre droite soumise à des charges verticales

Il peut se faire qu'une ou plusieurs composantes du vecteur d'état subissent des discontinuités lorsqu'on traverse la section  $A$  de la gauche vers la droite. Dans ce cas, nous considérons deux sections distinctes, l'une  $A'$  infiniment voisine de  $A$  et située à gauche de  $A$ , l'autre  $A''$  infiniment voisine de  $A$  et située à droite de  $A$ . Nous avons donc deux vecteurs d'état :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{A'} &= [v_{A'} \omega_{A'} M_{A'} T_{A'} 1]^t \\ \mathcal{E}^{A''} &= [v_{A''} \omega_{A''} M_{A''} T_{A''} 1]^t \end{aligned}$$

La discontinuité de  $T_A$  résulte de l'application d'une charge concentrée dans la section  $A$ , celle de  $M_A$  de l'application d'un couple concentré dans la section  $A$ . Une articulation dans la section  $A$  introduit une discontinuité de  $\omega_A$ ; enfin, on peut imaginer une liaison par parallélogramme articulé (figure 4) introduisant une discontinuité de  $v_A$ .

### 3.1.2 Matrice-transfert d'un tronçon de poutre AB

Considérons deux sections distinctes  $A$  et  $B$  d'une poutre droite. Les formules classiques de la Résistance des matériaux montrent que  $v_B$ ,  $\omega_B$ ,  $M_B$  et  $T_B$  s'expriment linéairement en fonction de  $v_A$ ,  $\omega_A$ ,  $M_A$ ,  $T_A$  et des charges appliquées au tronçon  $AB$ ; les relations obtenues sont de la forme :

$$\begin{cases} v_B = v_A + a_{12} \omega_A + a_{13} M_A + a_{14} T_A + b_1 \\ \omega_B = \omega_A + a_{23} M_A + a_{24} T_A + b_2 \\ M_B = M_A + a_{34} T_A + b_3 \\ T_B = T_A + b_4 \end{cases}$$

Elles sont équivalentes à l'unique relation matricielle :

$$\mathcal{E}^B = \mathcal{T}_A^B \mathcal{E}^A \tag{41}$$

$\mathcal{T}_A^B$  désignant la matrice triangulaire supérieure appelée matrice-transfert du tronçon  $AB$  :

$$\mathcal{T}_A^B = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{42}$$

Les éléments  $a_{ij}$  de la matrice-transfert ne dépendent que des caractéristiques géométriques et mécaniques du tronçon  $AB$ ; seuls les éléments  $b_i$  dépendent des charges appliquées au tronçon  $AB$ .

### 3.1.3 Matrice-transfert relative à deux sections infiniment voisines

Lorsqu'on doit, pour les raisons indiquées précédemment, distinguer deux sections  $A'$  et  $A''$ , les relations les plus générales :

$$\begin{aligned} v_{A''} &= v_{A'} + \Delta v_A & M_{A''} &= M_{A'} + \Delta M_A \\ \omega_{A''} &= \omega_{A'} + \Delta \omega_A & T_{A''} &= T_{A'} + \Delta T_A \end{aligned}$$

sont équivalentes à l'unique relation matricielle :

$$\mathcal{E}^{A''} = \mathcal{T}_{A'}^{A''} \mathcal{E}^{A'}$$

dans laquelle la matrice-transfert a pour expression :

$$\mathcal{T}_{A'}^{A''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \Delta v_A \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \Delta \omega_A \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \Delta M_A \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta T_A \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.1.4 Propriétés fondamentales des matrices-transfert

#### 3.1.4.1 Composition des matrices-transfert

Soit à déterminer la matrice-transfert d'un tronçon de poutre  $AD$  (figure 5) connaissant les matrices-transfert des tronçons  $AB$ ,  $BC$  et  $CD$  successifs. Nous avons :

$$\mathcal{E}^B = \mathcal{T}_A^B \mathcal{E}^A \quad \mathcal{E}^C = \mathcal{T}_B^C \mathcal{E}^B \quad \mathcal{E}^D = \mathcal{T}_C^D \mathcal{E}^C$$

Il en résulte que :

$$\mathcal{E}^D = \mathcal{T}_C^D \mathcal{T}_B^C \mathcal{T}_A^B \mathcal{E}^A = \mathcal{T}_A^D \mathcal{E}^A$$

Nous obtenons donc la formule fondamentale :

$$\mathcal{T}_A^D = \mathcal{T}_C^D \mathcal{T}_B^C \mathcal{T}_A^B \tag{43}$$

#### 3.1.4.2 Inverse d'une matrice-transfert

La relation :

$$\mathcal{E}^B = \mathcal{T}_A^B \mathcal{E}^A$$

peut s'écrire

$$\mathcal{E}^A = (\mathcal{T}_A^B)^{-1} \mathcal{E}^B$$

Nous avons donc la seconde formule fondamentale :

$$\mathcal{T}_B^A = (\mathcal{T}_A^B)^{-1} \tag{44}$$

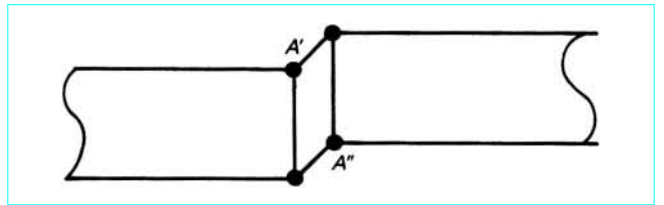


Figure 4 - Liaison donnant lieu à une discontinuité de la flèche

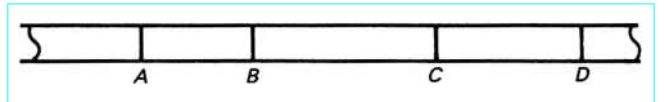


Figure 5 - Tronçon de poutre

## 3.2 Détermination des matrices-transfert

### 3.2.1 Poutres de section constante

#### 3.2.1.1 Tronçon de poutre uniformément chargé

Soit  $p$  la densité constante de charge appliquée au tronçon de poutre  $AB$  de longueur  $\ell$  et d'inertie  $I$ . Nous trouvons successivement,  $x$  étant l'abscisse comptée à partir de la section  $A$  :

$$\begin{cases} T(x) = T_A - px \\ M(x) = M_A + T_A x - \frac{1}{2} px^2 \\ EI\omega(x) = EI\omega_A + M_A x + \frac{1}{2} T_A x^2 - \frac{1}{6} px^3 \\ EIV(x) = EIV_A + EI\omega_A x + \frac{1}{2} M_A x^2 + \frac{1}{6} T_A x^3 - \frac{1}{24} px^4 \end{cases}$$

En faisant  $x = \ell$ , nous trouvons :

$$\begin{cases} EIV_B = EIV_A + EI\omega_A \ell + \frac{1}{2} \ell^2 M_A + \frac{1}{6} \ell^3 T_A - \frac{1}{24} p\ell^4 \\ EI\omega_B = EI\omega_A + \ell M_A + \frac{1}{2} \ell^2 T_A - \frac{1}{6} p\ell^3 \\ M_B = M_A + \ell T_A - \frac{1}{2} p\ell^2 \\ T_B = T_A - p\ell \end{cases}$$

Il en résulte que la matrice-transfert du tronçon a pour expression :

$$\mathcal{T}_A^B = \begin{bmatrix} 1 & \ell & \ell^2/2EI & \ell^3/6EI & -p\ell^4/24EI \\ 0 & 1 & \ell/EI & \ell^2/2EI & -p\ell^3/6EI \\ 0 & 0 & 1 & \ell & -\frac{1}{2}p\ell^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -p\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (45)$$

#### 3.2.1.2 Tronçon de poutre supportant une charge concentrée

La charge concentrée  $P$  est appliquée dans la section  $C$  d'abscisse  $\overline{AC} = \alpha$  (figure 6). Nous avons, en vertu de la loi de composition des matrices-transfert :

$$\mathcal{T}_A^B = \mathcal{T}_{C''}^B \mathcal{T}_{C'}^{C''} \mathcal{T}_A^{C'}$$

La matrice  $\mathcal{T}_A^{C'}$  est donnée par la formule (45) dans laquelle on prend  $\ell = \alpha$  et  $p = 0$ . La matrice  $\mathcal{T}_{C''}^B$  est donnée par la formule (45) dans laquelle on remplace  $\ell$  par  $\ell - \alpha$  et  $p$  par 0.

La matrice  $\mathcal{T}_{C'}^{C''}$  a pour expression, puisque  $\Delta T_C = -P$  :

$$\mathcal{T}_{C'}^{C''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

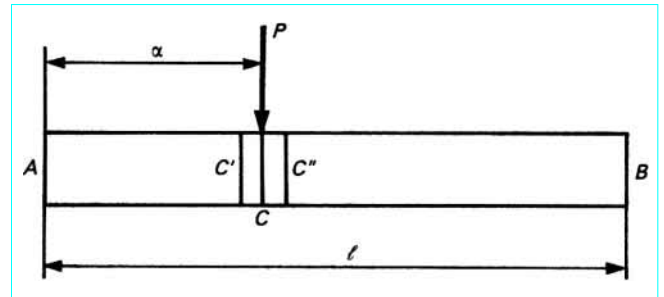


Figure 6 – Tronçon de poutre supportant une charge concentrée

En effectuant le produit des matrices dans l'ordre indiqué nous trouvons :

$$\mathcal{T}_A^B = \begin{bmatrix} 1 & \ell & \ell^2/2EI & \ell^3/6EI & -P(\ell-\alpha)^3/6EI \\ 0 & 1 & \ell/EI & \ell^2/2EI & -P(\ell-\alpha)^2/2EI \\ 0 & 0 & 1 & \ell & -P(\ell-\alpha) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -P \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 3.2.1.3 Tronçon de poutre supportant une densité de charge $p(x)$

L'abscisse  $x$  d'une section du tronçon  $AB$  de longueur  $\ell$  est comptée à partir de la section  $A$ . Bornons-nous à donner le résultat. Si l'on pose :

$$\begin{aligned} p_1(x) &= \int_0^x p(t) dt & p_2(x) &= \int_0^x p_1(t) dt \\ p_3(x) &= \int_0^x p_2(t) dt & p_4(x) &= \int_0^x p_3(t) dt \end{aligned}$$

la matrice-transfert du tronçon de poutre  $AB$  a pour expression :

$$\mathcal{T}_A^B = \begin{bmatrix} 1 & \ell & \ell^2/2EI & \ell^3/6EI & -p_4(\ell)/EI \\ 0 & 1 & \ell/EI & \ell^2/2EI & -p_3(\ell)/EI \\ 0 & 0 & 1 & \ell & -p_2(\ell) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -p_1(\ell) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En particulier, lorsque la densité de charge est une fonction linéaire :

$$p(x) = p_A \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + p_B \frac{x}{\ell}$$

nous trouvons :

$$\mathcal{T}_A^B = \begin{bmatrix} 1 & \ell & \ell^2/2EI & \ell^3/6EI & -(4p_A + p_B)\ell^4/120EI \\ 0 & 1 & \ell/EI & \ell^2/2EI & -(3p_A + p_B)\ell^3/24EI \\ 0 & 0 & 1 & \ell & -(2p_A + p_B)\ell^2/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -(p_A + p_B)\ell/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

L'intérêt du résultat précédent est le suivant. On peut, pour calculer la matrice-transfert  $\mathcal{T}_A^B$  d'un tronçon de poutre  $AB$  soumis à une densité de charge quelconque  $p(x)$ , diviser  $AB$  en  $n$  tronçons  $AC_1$ ,  $C_1C_2$ , ...,  $C_{n-1}B$  sur chacun desquels  $p(x)$  peut être assimilée à une

fonction linéaire. La formule précédente donne la matrice-transfert de chaque tronçon. Nous avons alors, en appliquant la loi de composition :

$$\mathcal{T}_A^B = \mathcal{T}_{C_{n-1}}^B \dots \mathcal{T}_{C_1}^{C_2} \mathcal{T}_A^{C_1}$$

### 3.2.2 Poutres d'inertie variable

Bornons-nous à donner la matrice-transfert d'un tronçon de poutre AB de longueur  $\ell$  et d'inertie  $I(x)$  soumis à une densité de charge  $p(x)$ . En définissant les fonctions ( $x$  est l'abscisse comptée à partir de A) :

$$f'(x) = - \int_0^x p(t) dt \quad f(x) = \int_0^x f'(t) dt$$

$$g'(x) = \int_0^x \frac{f(t) dt}{EI(t)} \quad g(x) = \int_0^x g'(t) dt$$

la matrice-transfert du tronçon a pour expression :

$$\mathcal{T}_A^B = \begin{bmatrix} 1 & \ell & (a+b)\ell & b\ell^2 & g(\ell) \\ 0 & 1 & a+2b+c & (b+c)\ell & g'(\ell) \\ 0 & 0 & 1 & \ell & f(\ell) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & f'(\ell) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$a, b$  et  $c$  désignant les coefficients de souplesse du tronçon :

$$a = \int_0^\ell \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^2 \frac{dx}{EI}, \quad b = \int_0^\ell \frac{x}{\ell} \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \frac{dx}{EI}, \quad c = \int_0^\ell \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \frac{dx}{EI}$$

## 3.3 Application au calcul des poutres continues sur appuis élastiques

### 3.3.1 Matrices-transfert relatives aux appuis

Un appui élastique exerce une réaction  $R_A$  (figure 7) proportionnelle à la flèche  $v_A$  :

$$R_A = -k_A v_A$$

avec  $k_A$  constante positive caractérisant la rigidité de l'appui.

Les relations :

$$\begin{cases} v_{A''} = v_{A'} = v_A \\ \omega_{A''} = \omega_{A'} = \omega_A \\ M_{A''} = M_{A'} = M_A \\ T_{A''} = T_{A'} + R_A = T_{A'} - k_A v_A \end{cases}$$

montrent que l'on déduit le vecteur d'état  $\mathcal{E}^{A''}$  du vecteur d'état  $\mathcal{E}^{A'}$  par la relation :

$$\mathcal{E}^{A''} = \mathcal{T}_{A'}^{A''} \mathcal{E}^{A'}$$

dans laquelle la **matrice-transfert de l'appui A** est la matrice :

$$\mathcal{T}_{A'}^{A''} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_A & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cette matrice n'est pas une matrice triangulaire supérieure.

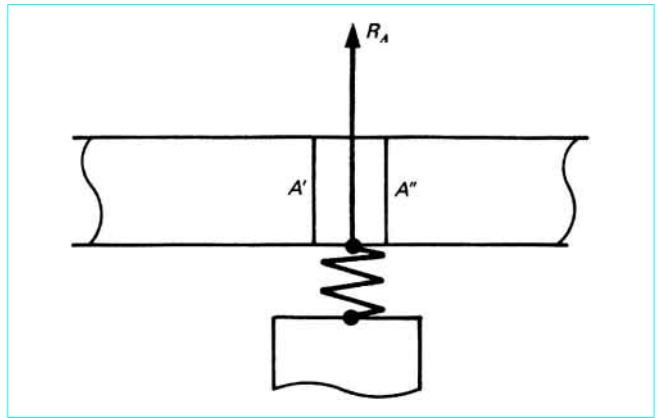


Figure 7 – Poutre continue sur appui élastique

### 3.3.2 Méthode de calcul des poutres continues sur appuis élastiques

Considérons une poutre continue reposant sur  $n + 1$  appuis élastiques  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ . Nous pouvons écrire les relations :

$$\begin{cases} \mathcal{E}^{A_1} = \mathcal{T}_{A_0}^{A_1} \mathcal{E}^{A_0}, & \mathcal{E}^{A_1'} = \mathcal{T}_{A_1'}^{A_1} \mathcal{E}^{A_1} \\ \mathcal{E}^{A_2} = \mathcal{T}_{A_1}^{A_2} \mathcal{E}^{A_1}, & \mathcal{E}^{A_2'} = \mathcal{T}_{A_2'}^{A_2} \mathcal{E}^{A_2} \\ \dots \\ \mathcal{E}^{A_n} = \mathcal{T}_{A_{n-1}}^{A_n} \mathcal{E}^{A_{n-1}} \end{cases}$$

Nous en déduisons que :

$$\mathcal{E}^{A_n} = \mathcal{T}_{A_0}^{A_n} \mathcal{E}^{A_0} \tag{46}$$

avec

$$\mathcal{T}_{A_0}^{A_n} = \mathcal{T}_{A_{n-1}}^{A_n} \dots \mathcal{T}_{A_2}^{A_3} \mathcal{T}_{A_1}^{A_2} \mathcal{T}_{A_0}^{A_1}$$

Nous savons donc calculer la matrice-transfert  $\mathcal{T}_{A_0}^{A_n}$ . La relation (46) donne quatre relations entre les huit composantes des vecteurs d'état  $\mathcal{E}^{A_0}$  et  $\mathcal{E}^{A_n}$ . Quatre autres relations sont fournies par les conditions aux limites aux extrémités  $A_0$  et  $A_n$  de la poutre :

$$\begin{cases} T_{A_0} = -k_{A_0} v_{A_0} & M_{A_0} = 0 \\ T_{A_n} = k_{A_n} v_{A_n} & M_{A_n} = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons ainsi déterminer le vecteur d'état  $\mathcal{E}^{A_0}$  ; on en déduit, par multiplication matricielle, le vecteur d'état d'une section quelconque.

## 3.4 Répartition des efforts dus au freinage dans un pont à plusieurs travées

### 3.4.1 Vecteurs d'état et matrices-transfert

Nous considérons un pont droit constitué de travées indépendantes ou continues reposant sur piles flexibles par l'intermédiaire d'appuis élastiques (plaques de néoprène par exemple) ; les culées peuvent être rigides ou flexibles. Le tablier étant soumis à des forces horizontales dues au freinage des véhicules, nous nous proposons de déterminer les forces horizontales transmises à chaque appui.

En un point de l'ouvrage, l'état de déplacement et l'état de contrainte sont définis par :

- le déplacement horizontal  $u$  compté positivement vers la droite ;
- l'effort horizontal  $N$  compté positivement vers la droite.

Par définition, le **vecteur d'état** au point  $A$  est représenté par la matrice colonne :

$$\mathcal{E}^A = [u_A \ N_A \ 1]^t$$

Nous allons montrer que les vecteurs d'état relatifs à deux points quelconques  $A$  et  $L$  de l'ouvrage sont liés par la relation fondamentale :

$$\mathcal{E}^L = \mathcal{T}_A^L \mathcal{E}^A \tag{47}$$

$\mathcal{T}_A^L$  est la **matrice-transfert** du tronçon  $AL$ . Si ce tronçon est constitué de tronçons successifs  $AB, BC, \dots, KL$ , la relation (47) entraîne que :

$$\mathcal{T}_A^L = \mathcal{T}_K^L \dots \mathcal{T}_B^C \mathcal{T}_A^B \tag{48}$$

Il suffit donc pour déterminer la matrice-transfert  $\mathcal{T}_A^L$  de calculer les matrices-transfert des différents tronçons qui constituent l'ouvrage.

### 3.4.2 Calcul des matrices-transfert

#### 3.4.2.1 Matrice-transfert d'une travée

Si l'on néglige le raccourcissement dû à l'effort normal, nous avons, en tenant compte d'une dilatation éventuelle  $\varepsilon$  due à la température ou au retrait, et en désignant par  $F$  l'effort de freinage appliqué à la travée (figure 8) :

$$u_B = u_A + \varepsilon \ell \quad \text{et} \quad N_B = N_A + F$$

Il en résulte que la matrice-transfert a pour expression :

$$\mathcal{T}_A^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \varepsilon \ell \\ 0 & 1 & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il est facile de tenir compte du raccourcissement élastique dû à l'effort normal. En supposant l'effort de freinage réparti le long de la travée, nous avons :

$$u_B = u_A - \frac{N_A \ell}{ES} + \varepsilon \ell - \frac{F \ell}{2ES} \quad \text{et} \quad N_B = N_A + F$$

de sorte que la matrice-transfert a pour expression :

$$\mathcal{T}_A^B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\ell}{ES} & \varepsilon \ell - \frac{F \ell}{2ES} \\ 0 & 1 & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

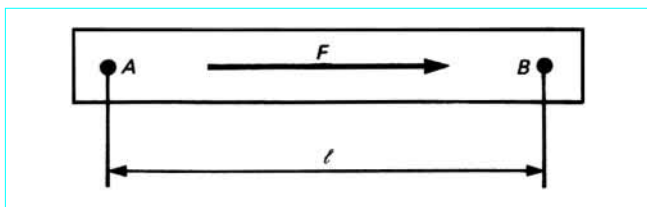


Figure 8 - Travée

#### 3.4.2.2 Matrice-transfert d'une plaque d'appui

La plaque d'appui (figure 9) introduit un déplacement relatif proportionnel à l'effort horizontal qu'elle transmet, donc :

$$u_B - u_A = -\lambda N_A \quad \text{et} \quad N_B = N_A$$

avec  $\lambda$  constante qui caractérise la rigidité de la plaque d'appui.

La matrice-transfert a donc pour expression :

$$\mathcal{T}_A^B = \begin{bmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 3.4.2.3 Matrice-transfert d'une pile

L'effort horizontal transmis à la pile (figure 10) est proportionnel à son déplacement, donc :

$$u_B = u_A \quad \text{et} \quad N_B - N_A = -k u_A$$

avec  $k$  constante qui caractérise la rigidité de la pile.

La matrice-transfert a donc pour expression :

$$\mathcal{T}_A^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 3.4.2.4 Matrice-transfert d'un appui continu

Désignons par  $K$  la constante qui caractérise la rigidité de l'ensemble formé par la pile et la plaque d'appui (figure 11) ; nous avons, la plaque d'appui et la pile étant soumises au même effort horizontal :

$$\frac{1}{K} = \lambda + \frac{1}{k}$$

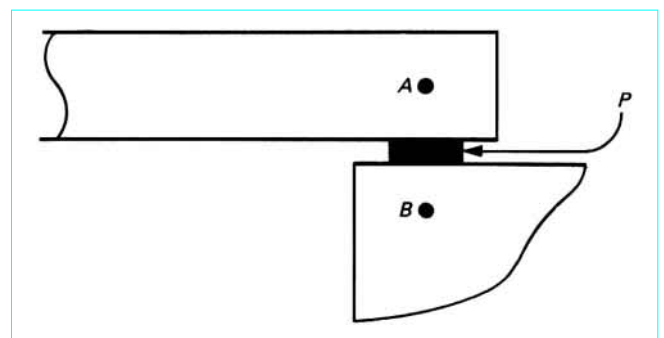


Figure 9 - Plaque d'appui  $P$

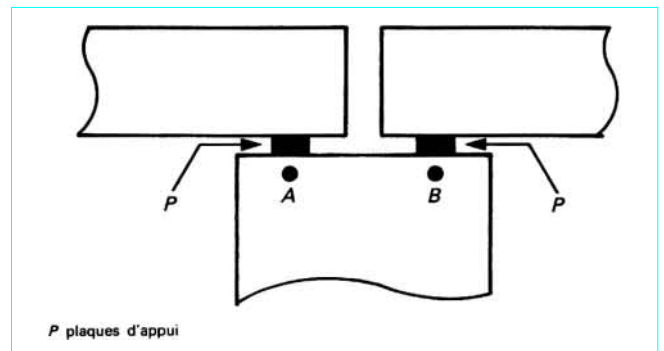


Figure 10 - Pile



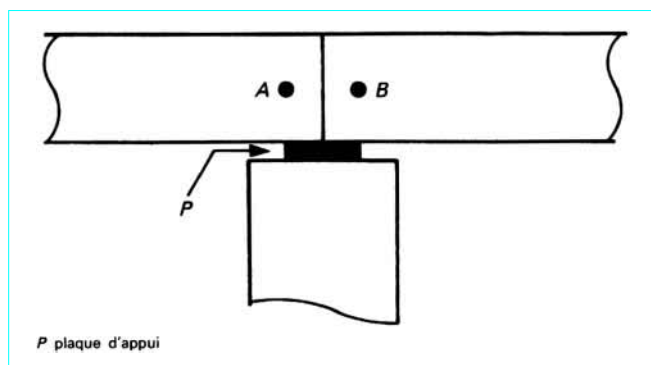


Figure 11 - Appui continu

Les relations :

$$u_B = u_A \quad \text{et} \quad N_B = N_A - Ku_A$$

montrent que la matrice-transfert a pour expression :

$$\mathcal{T}_A^B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -K & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

### 3.4.3 Application au calcul d'un ouvrage

Soit  $A$  et  $L$  les points liés aux appuis extrêmes de l'ouvrage. On détermine la matrice-transfert  $\mathcal{T}_A^L$ . La relation (47) fournit deux relations entre les composantes  $u_A$ ,  $N_A$ ,  $u_L$  et  $N_L$  des vecteurs  $\mathcal{E}^A$  et  $\mathcal{E}^L$ .

Les deux autres relations nécessaires pour déterminer ces quantités sont données par les conditions aux extrémités. Nous avons, en effet, une condition à chaque extrémité, par exemple :

- $u = 0$  dans le cas d'un appui rigide ;
- $N = 0$  dans le cas d'un appui mobile ;
- $u = \lambda N$  dans le cas d'un appui élastique.

Le calcul peut s'effectuer de la façon suivante : grâce à la condition à l'extrémité de gauche  $A$ , on peut exprimer les vecteurs d'état en tous les points de l'ouvrage en fonction d'une seule inconnue  $u_A$  ou  $N_A$  ; cette inconnue est déterminée par la relation entre  $u_L$  et  $N_L$  à l'extrémité de droite  $L$ . Le calcul est particulièrement simple dans le cas où l'appui de gauche est un appui rigide ( $u_A = 0$ ) ou un appui mobile ( $N_A = 0$ ).

## 4. Structures hyperstatiques d'ordre infini

### 4.1 Définition

Les structures hyperstatiques  $S_n$  d'ordre fini  $n$  sont des structures dont l'état d'équilibre est déterminé par les équations de la statique dès que l'on connaît les valeurs de  $n$  réactions dites **réactions hyperstatiques**.

Le théorème de Menabrea (article *Théorie de l'élasticité* [A 305] dans le traité Sciences fondamentales) permet d'étudier les structures  $S_n$ . En supprimant  $p \leq n$  liaisons dans la structure  $S_n$ , on associe à cette structure une structure de référence  $S_{n-p}$  hyperstatique si  $p < n$ , isostatique si  $p = n$ . L'énergie de déformation de la structure de référence, soumise aux forces données et à  $p$  forces arbitraires

dirigées suivant les réactions exercées par les liaisons supprimées, est une fonction de ces  $p$  forces arbitraires qui est minimale lorsque ces  $p$  forces sont égales aux  $p$  réactions exercées par les liaisons supprimées.

Une structure hyperstatique est d'ordre infini lorsqu'il est nécessaire de connaître une infinité de réactions pour déterminer l'état d'équilibre de cette structure au moyen des équations de la statique. En supposant la structure de dimensions finies, l'ensemble des réactions comprend :

- nécessairement des densités de réaction qui sont des fonctions d'une variable si l'on se borne aux structures composées de poutres ;
- éventuellement un nombre fini de réactions concentrées.

Les structures hyperstatiques d'ordre infini peuvent être classées en deux genres.

Les **structures du premier genre** sont des structures qui restent stables lorsqu'on supprime les liaisons qui donnent naissance aux densités de réaction. Il est donc possible d'associer à toute structure du premier genre une structure de référence isostatique ou hyperstatique d'ordre fini.

Les **structures du second genre** sont des structures pour lesquelles les liaisons qui donnent naissance aux densités de réaction sont indispensables pour assurer la stabilité de la structure.

Par exemple, une poutre droite reposant sur des appuis élastiques infiniment rapprochés est une structure du second genre ; une poutre droite reposant sur des appuis élastiques infiniment rapprochés et sur au moins deux appuis donnant lieu à des réactions concentrées est une structure du premier genre.

Le calcul d'une structure hyperstatique d'ordre infini peut se ramener au calcul d'une structure hyperstatique d'ordre fini en remplaçant les densités de réaction par un nombre fini de réactions concentrées supposées équivalentes. Mais il est plus intéressant de montrer que les densités de réaction sont les solutions d'équations intégrales de Fredholm. Il est alors possible de calculer rapidement, grâce à l'outil puissant en précis qu'est l'intégration numérique, des tables de valeurs des densités de réactions inconnues.

## 4.2 Opérateurs linéaires

Rappelons brièvement quelques notions mathématiques indispensables pour l'étude des structures hyperstatiques d'ordre infini.

### 4.2.1 Définitions

Une fonction  $f(x)$  est dite **généralement continue** sur l'intervalle  $[0, \ell]$  s'il est possible de partager cet intervalle en un nombre fini d'intervalles partiels à l'intérieur de chacun desquels la fonction est continue, et sur le bord desquels elle prend des valeurs finies bien déterminées.

L'ensemble  $\mathcal{E}$  des fonctions généralement continues sur l'intervalle  $[0, \ell]$  est un **espace vectoriel**. Le **produit scalaire**  $(f, g)$  de deux fonctions appartenant à  $\mathcal{E}$  est défini par :

$$(f, g) = \int_0^\ell f(x) g(x) dx$$

La **norme**  $\|f\|$  d'une fonction  $f(x)$  de  $\mathcal{E}$  est le nombre :

$$\|f(x)\| = \sqrt{(f, f)} = \left( \int_0^\ell f^2(x) dx \right)^{1/2}$$

La **distance en moyenne** de deux fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  de  $\mathcal{E}$  est  $\|f-g\|$ . Étant donné une fonction  $f(x)$  de  $\mathcal{E}$ , il est toujours possible de trouver une fonction continue  $g(x)$  sur l'intervalle  $[0, \ell]$  telle que l'on ait  $\|f-g\| < \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  étant aussi petit que l'on veut.

Deux fonctions  $f(x)$  et  $g(x)$  de  $\mathcal{E}$  vérifient l'inégalité de Schwarz :

$$|(f, g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$$

Un **opérateur linéaire**  $L$  est une application linéaire qui associe à toute fonction  $f(x)$  de  $\mathcal{E}$  une fonction  $Lf(x)$  de  $\mathcal{E}$  ; elle vérifie donc les relations,  $c$  étant un nombre réel :

$$L(f_1 + f_2) = Lf_1 + Lf_2 \quad \text{et} \quad L(cf) = cLf$$

Nous désignerons les opérateurs linéaires par des lettres grasses.

Un opérateur linéaire est **borné**, s'il existe un nombre positif  $b$  tel que l'inégalité suivante soit vérifiée pour toute fonction  $f(x)$  de  $\mathcal{E}$  :

$$\|Lf\| \leq b\|f\|$$

La borne inférieure des nombres  $b$  est la norme  $\|L\|$  de l'opérateur.

Un opérateur linéaire  $L$  est **continu** pour  $f(x) = f_0(x)$  si à tout nombre positif  $\varepsilon$  on peut faire correspondre un nombre positif  $\eta$  tel que :

$$\|f - f_0\| \leq \eta \quad \text{entraîne} \quad \|Lf - Lf_0\| < \varepsilon$$

On démontre que :

- si un opérateur linéaire est continu pour  $f = f_0$ , il est continu pour toute fonction  $f = f_1$ , et cette continuité est uniforme ;
- pour qu'un opérateur linéaire soit continu, il faut et il suffit qu'il soit borné.

Un opérateur  $L$  est **défini positif** si, quelle que soit la fonction  $f(x)$  de norme non nulle, on a l'inégalité :

$$(f, Lf) > 0$$

Le plus simple des opérateurs linéaires est,  $k(x)$  étant une fonction de  $\mathcal{E}$ , l'opérateur  $k$  qui associe à la fonction  $f(x)$  la fonction  $g(x) = k(x)f(x)$  ; cet opérateur est borné, donc continu. La relation :

$$(f, kf) = \int_0^\ell k(x) f^2(x) dx$$

montre que l'opérateur  $k$  est défini positif lorsque  $k(x) > 0$ .

## 4.2.2 Opérateurs linéaires intégraux

### 4.2.2.1 Définition

Soit  $A(x, \alpha)$  une fonction généralement continue des variables  $x$  et  $\alpha$  sur le carré  $0 \leq x \leq \ell, 0 \leq \alpha \leq \ell$ . L'**opérateur intégral de noyau**  $A(x, \alpha)$  est l'opérateur  $A$  qui fait correspondre à la fonction  $f(x)$  appartenant à  $\mathcal{E}$  la fonction :

$$g(x) = Af = \int_0^\ell A(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha$$

Il est aisé de montrer que l'opérateur  $A$  est borné, donc continu.

L'opérateur  $A$  est défini positif si l'on a, quelle que soit la fonction  $f(x)$  de norme non nulle :

$$(f, Af) = \int_0^\ell \int_0^\ell A(x, \alpha) f(x) f(\alpha) dx d\alpha > 0$$

L'**opérateur transposé** de l'opérateur  $A$  est l'opérateur  $A^*$  de noyau  $A(\alpha, x)$ . Lorsque le noyau est une fonction symétrique :  $A(x, \alpha) = A(\alpha, x)$ , l'opérateur  $A = A^*$  est dit **symétrique**. Lorsque le noyau est une fonction antisymétrique :  $A(x, \alpha) = -A(\alpha, x)$ , l'opérateur  $A = -A^*$  est dit **antisymétrique**.

### 4.2.2.2 Composition des opérateurs linéaires intégraux

Considérons deux opérateurs  $A_1$  et  $A_2$  de noyaux respectifs  $A_1(x, \alpha)$  et  $A_2(x, \alpha)$ . Le premier fait correspondre à la fonction  $f(x)$  la fonction :

$$f_1(x) = A_1 f = \int_0^\ell A_1(x, \alpha) f(\alpha) d\alpha$$

et le second fait correspondre à la fonction  $f_1(x)$  la fonction :

$$f_2(x) = A_2 f_1 = \int_0^\ell A_2(x, \alpha) f_1(\alpha) d\alpha$$

Nous déduisons des deux relations précédentes :

$$f_2(x) = A_2 A_1 f = \int_0^\ell \int_0^\ell A_2(x, t) A_1(t, \alpha) f(\alpha) dt d\alpha$$

Donc, le produit  $B = A_2 A_1$  des opérateurs  $A_1$  et  $A_2$  est l'opérateur linéaire de noyau :

$$B(x, \alpha) = \int_0^\ell A_2(x, t) A_1(t, \alpha) dt$$

## 4.2.3 Exemples d'opérateurs linéaires intégraux

### 4.2.3.1 Calcul du moment fléchissant dans une poutre sur appuis simples

Considérons une poutre sur appuis simples de portée  $\ell$ , et désignons par  $\mu$  l'opérateur de noyau symétrique :

$$\mu(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{\alpha(\ell-x)}{\ell} & \text{pour } \alpha < x \\ \frac{x(\ell-\alpha)}{\ell} & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$

Le moment fléchissant  $M(x)$  dans la section d'abscisse  $x$  provoqué par une densité de charge  $p(x)$  a pour valeur :

$$M(x) = \int_0^\ell \mu(x, \alpha) p(\alpha) d\alpha = \mu p(x) \quad (49)$$

L'opérateur  $\mu$  est défini positif, car :

$$I = \int_0^\ell \int_0^\ell \mu(x, \alpha) p(x) p(\alpha) dx d\alpha = \int_0^\ell M(x) p(x) dx = - \int_0^\ell M(x) \frac{dT}{dx} dx$$

avec  $T(x)$  effort tranchant.

En intégrant par parties nous trouvons :

$$I = - |M(x) T(x)|_0^\ell + \int_0^\ell T^2(x) dx = \int_0^\ell T^2(x) dx > 0$$

### 4.2.3.2 Calcul des flèches d'une poutre droite quelconque

Considérons une poutre droite quelconque isostatique ou hyperstatique. Si  $K(x, \alpha)$  est la flèche de la section d'abscisse  $x$  due à une charge unité appliquée à la section d'abscisse  $\alpha$ , la flèche  $v(x)$  due à l'application d'une densité de charge  $p(x)$  a pour valeur :

$$v(x) = \int_0^\ell K(x, \alpha) p(\alpha) d\alpha = Kp(x) \quad (50)$$

avec  $K$  opérateur de noyau  $K(x, \alpha)$ .

Cet opérateur est symétrique, car  $K(x, \alpha) = K(\alpha, x)$  en vertu du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti.

Enfin l'opérateur  $\mathbf{K}$  est défini positif, car l'énergie de déformation de la poutre, essentiellement positive, a pour valeur :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^\ell p(x) v(x) dx = \frac{1}{2} (p, \mathbf{K}p)$$

**Remarque :** pour déterminer la fonction  $v(x) = \mathbf{K}p(x)$ , il est inutile de connaître le noyau  $K(x, \alpha)$ . On peut en effet calculer la flèche  $v(x)$  au moyen de quatre intégrations successives :

$$\frac{dT}{dx} = -p(x), \quad \frac{dM}{dx} = T(x), \quad \frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)}$$

les constantes d'intégration étant déterminées par les conditions aux limites ; nous avons supposé la flèche  $v(x)$  comptée positivement vers le bas.

#### 4.2.4 Équation intégrale de Fredholm

Étant donné une fonction  $K(x, \alpha)$  généralement continue sur le carré  $0 \leq x \leq \ell, 0 \leq \alpha \leq \ell$ , on appelle équation de Fredholm une équation de la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^\ell K(x, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha = f(x)$$

dans laquelle  $\lambda$  est un paramètre,  $f(x)$  une fonction donnée généralement continue sur  $[0, \ell]$  et  $\varphi(x)$  la fonction inconnue sur l'intervalle  $[0, \ell]$ .

Cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$\varphi(x) - \lambda \mathbf{K}\varphi(x) = f(x)$$

avec  $\mathbf{K}$  opérateur de noyau  $K(x, \alpha)$ .

L'équation homogène, obtenue en faisant  $f(x)$  identiquement nulle, n'a de solution non nulle que lorsque  $\lambda$  est égal à une valeur propre du noyau. Si  $\lambda$  n'est pas égal à une valeur propre du noyau  $K(x, \alpha)$ , l'équation de Fredholm a une solution et une seule. En particulier, si les valeurs propres du noyau sont réelles et positives, l'équation obtenue en prenant  $\lambda = -1$  :

$$\varphi(x) + \int_0^\ell K(x, \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha = f(x) \tag{51}$$

a une solution et une seule.

Voici deux cas particuliers où les valeurs propres du noyau sont réelles et positives :

- l'opérateur  $\mathbf{K}$  est symétrique et défini positif ;
- il existe un opérateur intégral  $\mathbf{S}$  symétrique et défini positif tel que l'opérateur  $\mathbf{SK}$  soit symétrique et défini positif.

### 4.3 Généralités sur les structures du premier genre

#### 4.3.1 Équation de Fredholm vérifiée par la densité de réaction

Considérons (figure 12) pour fixer les idées une poutre  $OA$  définie pour  $0 \leq x \leq \ell$  reposant sur un nombre fini d'appuis discrets et sur une infinité d'appuis élastiques infiniment rapprochés exerçant une densité de réaction  $R(x)$ , comptée positivement vers le haut, et proportionnelle à la flèche  $v(x)$ , comptée positivement vers le bas. Donc :

$$R(x) = k(x) v(x) \quad \text{ou} \quad v(x) = h(x) R(x)$$

la fonction  $h(x)$  étant l'inverse du module de réaction  $k(x)$ .

Si nous supprimons les appuis élastiques, nous obtenons, puisque la structure est du premier genre, une poutre de référence isostatique ou hyperstatique d'ordre fini dont la flèche, dans la section d'abscisse  $x$ , sous l'action d'une charge unité appliquée à la section d'abscisse  $\alpha$ , est  $K(x, \alpha)$  ;  $K(x, \alpha)$  est une fonction continue de  $x$  et de  $\alpha$ .

Désignons par  $F(x)$  la flèche de la poutre de référence sous l'action des charges appliquées à la poutre donnée. Quelle que soit la nature de ces charges (charges concentrées ou réparties, couples concentrés ou répartis), la fonction  $F(x)$  est continue sur l'intervalle  $[0, \ell]$ . La flèche  $v(x)$  de la poutre donnée est la somme de  $F(x)$  et de la flèche de la poutre de référence soumise à la densité de réaction  $R(x)$  :

$$v(x) = F(x) - \int_0^\ell K(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha$$

et, puisque  $v(x)$  est égale à  $h(x) R(x)$ , nous obtenons l'équation de Fredholm dont  $R(x)$  est la solution :

$$E(R) = h(x) R(x) + \int_0^\ell K(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha - F(x) = 0 \tag{52}$$

Cette équation a toujours une solution unique, car en posant

$R(x) = \frac{S(x)}{\sqrt{h(x)}}$  nous pouvons l'écrire sous la forme de l'équation (51) :

$$S(x) + \int_0^\ell \frac{K(x, \alpha)}{\sqrt{h(x)h(\alpha)}} S(\alpha) d\alpha = \frac{F(x)}{\sqrt{h(x)}}$$

et le noyau  $\frac{K(x, \alpha)}{\sqrt{h(x)h(\alpha)}}$  est symétrique et défini positif.

#### 4.3.2 Généralisation du théorème de Menabrea

L'énergie de déformation  $W_0$  de la structure soumise à la densité de charge  $p(x)$  est la somme de l'énergie de déformation des appuis élastiques exerçant la densité de réaction  $R(x)$  et de l'énergie de déformation de la poutre de référence soumise à la densité de charge  $p(x) - R(x)$ . Nous faisons ainsi correspondre à toute fonction  $R(x)$  le nombre  $W_0(R)$  positif :

$$W_0(R) = \frac{1}{2} \int_0^\ell h(x) R^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_0^\ell K(x, \alpha) [p(x) - R(x)] [p(\alpha) - R(\alpha)] dx d\alpha$$

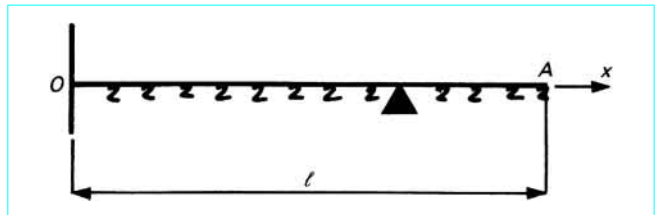


Figure 12 – Poutre reposant sur un nombre fini d'appuis discrets et sur une infinité d'appuis élastiques infiniment rapprochés

En désignant toujours par  $F(x)$  la flèche de la poutre de référence soumise à la densité de charge  $p(x)$ , nous avons, le noyau  $K(x, \alpha)$  étant symétrique :

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \int_0^\ell K(x, \alpha) p(x) R(\alpha) dx d\alpha \\ &= \int_0^\ell \int_0^\ell K(x, \alpha) p(\alpha) R(x) dx d\alpha = \int_0^\ell F(x) R(x) dx \end{aligned}$$

Nous pouvons donc mettre  $W_0(R)$  sous la forme :

$$W_0(R) = W(R) + \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_0^\ell K(x, \alpha) p(x) p(\alpha) dx d\alpha \quad (53)$$

en désignant par  $W(R)$  le nombre associé à  $R(x)$  défini par :

$$\begin{aligned} W(R) &= \frac{1}{2} \int_0^\ell h(x) R^2(x) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_0^\ell K(x, \alpha) R(x) R(\alpha) dx d\alpha - \int_0^\ell F(x) R(x) dx \end{aligned} \quad (54)$$

Nous avons alors le théorème fondamental qui généralise le théorème de Menabrea : **la solution  $R(x)$  de l'équation de Fredholm (52) rend minimal  $W_0(R)$  et, inversement, la fonction qui rend minimal  $W_0(R)$  est la solution de l'équation de Fredholm (52).**

On peut, dans l'énoncé précédent, remplacer  $W_0(R)$  par  $W(R)$  qui ne diffère de  $W_0(R)$  que par une constante.

Remplaçons dans la formule (54)  $R$  par  $R + \delta R$  ; nous trouvons :

$$W(R + \delta R) = W(R) + \delta W(R) + W_2(\delta R)$$

$W_2(R)$  désignant le nombre associé à  $R$  défini par :

$$W_2(R) = \frac{1}{2} \int_0^\ell h(x) R^2(x) dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_0^\ell K(x, \alpha) R(x) R(\alpha) dx d\alpha$$

et  $\delta W(R)$  la variation première de  $W(R)$  :

$$\begin{aligned} \delta W(R) &= \int_0^\ell h(x) R(x) \delta R(x) dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\ell \int_0^\ell K(x, \alpha) [R(x) \delta R(\alpha) + R(\alpha) \delta R(x)] dx d\alpha \\ &- \int_0^\ell F(x) \delta R(x) dx \end{aligned}$$

En tenant compte de la symétrie du noyau, nous trouvons :

$$\delta W(R) = \int_0^\ell \left[ h(x) R(x) + \int_0^\ell K(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha - F(x) \right] \delta R(x) dx$$

soit,  $E(R)$  désignant le premier membre de l'équation de Fredholm (52) :

$$\delta W(R) = \int_0^\ell E(R) \delta R(x) dx \quad (55)$$

Nous obtenons donc la formule :

$$W(R + \delta R) = W(R) + \int_0^\ell E(R) \delta R(x) dx + W_2(\delta R) \quad (56)$$

Si  $R_0(x)$  est la solution de l'équation de Fredholm (52), nous avons  $E(R_0) = 0$ , donc  $\delta W(R_0) = 0$  ; la formule (56) montre que  $W(R_0)$  est le minimum de  $W(R)$ , car,  $W_2(\delta R)$  étant toujours positif, nous avons  $W(R_0 + \delta R) > W(R_0)$ .

Inversement, la fonction  $R_0(x)$  qui rend minimal  $W(R)$  annule nécessairement  $\delta W(R_0)$  quel que soit  $\delta R(x)$ , donc, d'après la formule (55), est la solution de l'équation de Fredholm (52).

### 4.3.3 Comparaison avec la méthode classique

La flèche  $v(x)$  est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) + kv = p$$

qui résulte de l'élimination de  $R$  entre les équations :

$$R = kv \quad \text{et} \quad \frac{d^2}{dx^2} \left( EI \frac{d^2 v}{dx^2} \right) = p - R$$

Dans le cas où  $EI$  et  $k$  sont constants, il est possible d'intégrer formellement l'équation différentielle vérifiée par  $v(x)$  :

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + kv = p$$

Cette méthode d'intégration formelle, qui ne peut être appliquée que lorsque  $EI$  et  $k$  sont constants, conduit à des calculs extrêmement longs, car il faut partager l'intervalle  $[0, \ell]$  en intervalles partiels limités par les points de discontinuité de  $p(x)$ , par les points d'application des charges concentrées et par les appuis intermédiaires éventuels. Dans chaque intervalle partiel, l'intégrale dépend linéairement de quatre constantes, de sorte qu'on a finalement beaucoup de constantes à déterminer au moyen des conditions aux limites des intervalles.

Par contre, la recherche de la solution de l'équation de Fredholm, au moyen de l'une des méthodes données au paragraphe 4.5, évite les difficultés précédentes. En effet, le noyau  $K(x, \alpha)$  prend en compte toutes les liaisons de la poutre de référence, et la fonction  $F(x)$  continue tient compte de toutes les charges extérieures quelles qu'elles soient. Le fait que l'inertie de la poutre et le module de réaction soient des fonctions de  $x$  ne complique pas le calcul.

## 4.4 Exemples de structures du premier genre

### 4.4.1 Poutres associées

Considérons (figure 13) une structure constituée de deux poutres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  de même portée  $\ell$  reliées par des suspentes élastiques infiniment rapprochées. Désignons, en supposant les suspentes supprimées, par  $K_1(x, \alpha)$  et  $K_2(x, \alpha)$  les fonctions d'influence de la flèche des poutres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$ , et par  $F_1(x)$  et  $F_2(x)$  les flèches des poutres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  sous l'effet des charges qui leur sont appliquées.

Il suffit, pour déterminer les efforts dans les poutres, de connaître la densité de réaction transmise par les suspentes. En fonction de cette densité  $R(x)$ , les flèches  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  des poutres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  de la structure ont pour valeurs :

$$v_1(x) = F_1(x) - \mathbf{K}_1 R(x) \quad \text{et} \quad v_2(x) = F_2(x) + \mathbf{K}_2 R(x)$$

$\mathbf{K}_1$  et  $\mathbf{K}_2$  désignant les opérateurs intégraux de noyaux  $K_1(x, \alpha)$  et  $K_2(x, \alpha)$ .

En définissant la fonction  $F(x)$  et l'opérateur  $\mathbf{K}$  par :

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x) \quad \text{et} \quad \mathbf{K} = \mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2$$

l'allongement des suspentes a pour valeur :

$$v_1(x) - v_2(x) = F(x) - \mathbf{K} R(x)$$

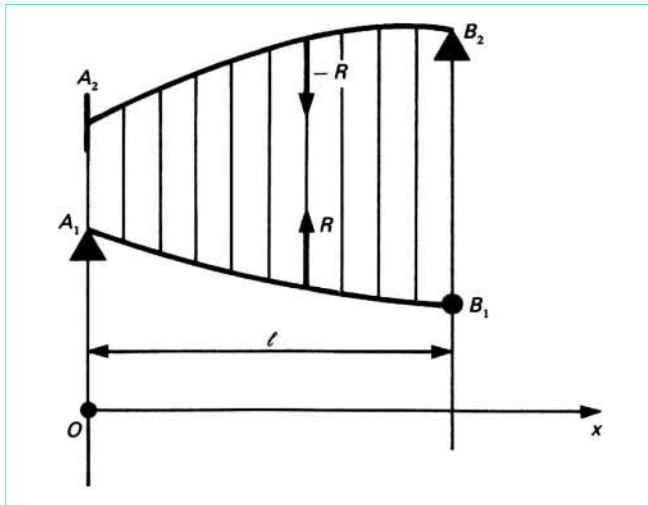


Figure 13 – Poutres associées

Mais, si nous désignons par  $b(x)$  la longueur des suspentes, par  $s(x)$  la section des suspentes par unité de longueur, et par  $E$  leur module d'élasticité, nous avons également :

$$v_1(x) - v_2(x) = \frac{b(x)}{Es(x)} R(x) = h(x) R(x)$$

La comparaison des deux formules précédentes montre que  $R(x)$  est la solution de l'équation de Fredholm, identique à l'équation (52) :

$$E(R) = h(x) R(x) + KR(x) - F(x) = 0$$

L'opérateur  $K$  de noyau  $K(x, \alpha) = K_1(x, \alpha) + K_2(x, \alpha)$  est symétrique et défini positif.

La figure 14 représente la coupe transversale d'un pont constitué de deux poutres  $P_1$  et  $P_2$ , infiniment rigides à la torsion, reliées par une dalle que nous assimilerons à une infinité de poutres transversales. Conservons pour les poutres  $P_1$  et  $P_2$  les notations  $F_1(x)$ ,  $F_2(x)$ ,  $K$ ,  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  définies pour les poutres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  de la figure 13.

Il suffit, pour déterminer les efforts dans les poutres  $P_1$  et  $P_2$ , de connaître la densité d'effort tranchant  $R(x)$  transmise par la dalle. Un calcul semblable à celui fait pour la structure précédente fournit une première expression de  $v_1(x) - v_2(x)$  :

$$v_1(x) - v_2(x) = F(x) - KR(x)$$

Mais, si nous désignons par  $2b$  la largeur de la dalle, par  $e$  son épaisseur et par  $E$  son module d'élasticité, nous avons, en observant que l'inertie de la dalle par unité de longueur est  $J = \frac{1}{12} e^3$  :

$$v_1(x) - v_2(x) = \frac{2b^3}{3EJ} R(x) = \frac{8}{E} \left(\frac{b}{e}\right)^3 R(x) = hR(x)$$

La comparaison des deux formules précédentes montre que  $R(x)$  est la solution de l'équation de Fredholm :

$$E(R) = hR(x) + KR(x) - F(x) = 0$$

Il est possible d'étendre les résultats précédents à des structures plus complexes. Considérons d'abord la structure représentée sur la figure 15, dans laquelle les appuis élastiques, de module  $k(x) = 1/h(x)$ , ne règnent que sur l'intervalle  $a \leq x \leq b$ .

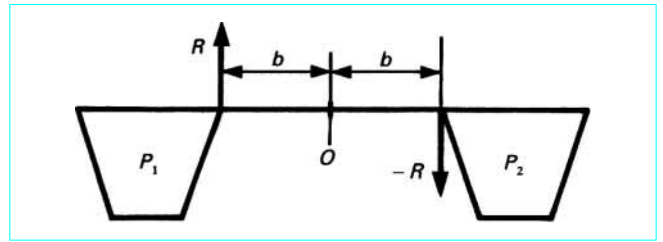


Figure 14 – Coupe transversale d'un pont constitué de deux poutres

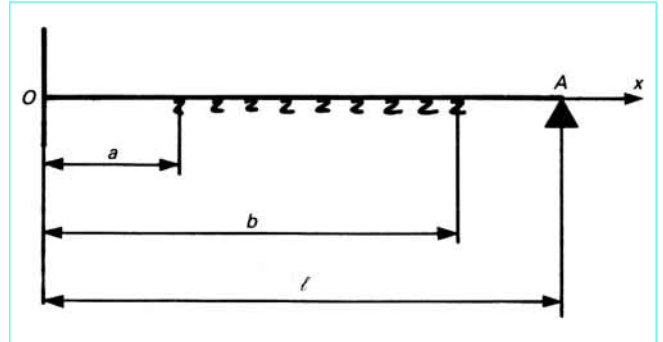


Figure 15 – Appuis élastiques limités à un intervalle de structure

La densité de réaction  $R(x)$  étant nulle en dehors de cet intervalle, la flèche de la poutre pour  $0 \leq x \leq l$  a pour valeur,  $F(x)$  désignant la flèche de la poutre de référence :

$$v(x) = F(x) - \int_a^b K(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha$$

Mais dans l'intervalle  $a \leq x \leq b$ , la flèche  $v(x)$  est égale à  $h(x) R(x)$  ; il en résulte que  $R(x)$  est la solution de l'équation de Fredholm :

$$E(R) = h(x) R(x) + \int_a^b K(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha - F(x) = 0$$

dont le noyau, défini sur le carré  $a \leq x \leq b$ ,  $a \leq \alpha \leq b$ , coïncide dans ce carré avec la fonction d'influence de la poutre de référence.

La structure représentée sur la figure 16, dans laquelle les deux poutres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  ne sont reliées par des suspentes que dans l'intervalle  $a \leq x \leq b$ , donne lieu à un calcul semblable. La densité de réaction  $R(x)$  transmise par les suspentes n'est définie que dans l'intervalle  $a \leq x \leq b$  ; dans cet intervalle, les flèches  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  des poutres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$  ont pour valeurs :

$$v_1(x) = F_1(x) - \int_a^b K_1(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha$$

$$v_2(x) = F_2(x) + \int_a^b K_2(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha$$

Mais, dans l'intervalle  $a \leq x \leq b$ , l'allongement des suspentes a pour valeur, en conservant les notations de la structure de la figure 13 :

$$v_1(x) - v_2(x) = \frac{b(x)}{Es(x)} R(x) = h(x) R(x)$$

En éliminant  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  entre les relations précédentes, nous obtenons l'équation de Fredholm dont  $R(x)$  est la solution :

$$E(R) = h(x) R(x) + KR(x) - F(x) = 0$$

dont le noyau  $K(x, \alpha)$  défini sur le carré  $a \leq x \leq b, a \leq \alpha \leq b$ , coïncide dans ce carré avec la somme des fonctions d'influence de la flèche des poutres  $A_1B_1$  et  $A_2B_2$ .

#### 4.4.2 Effet statique du vent sur une travée suspendue

Désignons par  $q_1(x)$  et  $q_2(x)$  les efforts exercés par le vent sur la poutre de rigidité et sur le câble par mètre de tablier, et par  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  les déplacements transversaux de la poutre de rigidité et du câble (figure 17).

À l'équilibre, les suspentes exercent, par mètre de tablier, l'effort transversal  $R(x)$  sur le câble et l'effort transversal  $-R(x)$  sur la poutre de rigidité ; l'équilibre des suspentes montre que :

$$\frac{v_1(x) - v_2(x)}{b(x)} = \frac{R(x)}{p(x)}$$

$b(x)$  désignant la longueur des suspentes, et  $p(x)$  l'effort vertical (poids du tablier) qu'elles transmettent par mètre de tablier ; nous avons donc :

$$v_1(x) - v_2(x) = \frac{b(x)}{p(x)} R(x) = h(x) R(x)$$

Calculons la flèche horizontale  $v_1(x)$  du tablier sous l'action de la densité de charge  $q_1 - R$  ; nous avons, en désignant par  $F_1(x)$  la flèche transversale due à  $q_1(x)$  et par  $K_1(x, \alpha)$  la fonction d'influence de la flèche de la poutre horizontale constituée par le tablier :

$$v_1(x) = F_1(x) - \int_0^\ell K_1(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha$$

Calculons maintenant le déplacement transversal  $v_2(x)$  du câble ; soit  $Q$  la composante horizontale de l'effort de traction du câble ; nous avons, en écrivant que le moment fléchissant dans le câble est nul :

$$\int_0^\ell \mu(x, \alpha) [q_1(\alpha) + R(\alpha)] d\alpha - Qv_2(x) = 0$$

nous obtenons ainsi :

$$v_2(x) = F_2(x) + \frac{1}{Q} \int_0^\ell \mu(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha$$

la fonction  $F_2(x)$  étant définie par :

$$F_2(x) = \frac{1}{Q} \int_0^\ell \mu(x, \alpha) q_2(\alpha) d\alpha$$

Il résulte des équations précédentes que la fonction  $R(x)$  est la solution de l'équation de Fredholm :

$$E(R) = h(x) R(x) + \int_0^\ell K(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha - F(x) = 0$$

dans laquelle :

$$F(x) = F_1(x) - F_2(x) \quad \text{et} \quad K(x, \alpha) = K_1(x, \alpha) + \frac{1}{Q} \mu(x, \alpha)$$

L'opérateur  $K$  de noyau  $K(x, \alpha)$  est symétrique et défini positif, comme les opérateurs  $K_1$  et  $\mu$ .

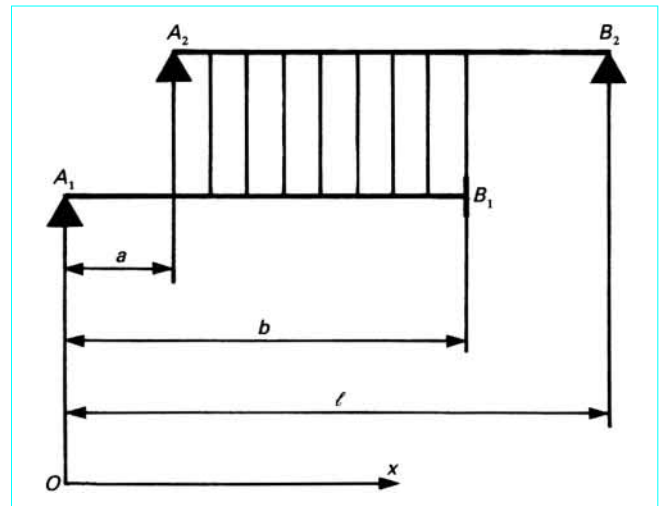


Figure 16 - Poutres reliées par suspentes

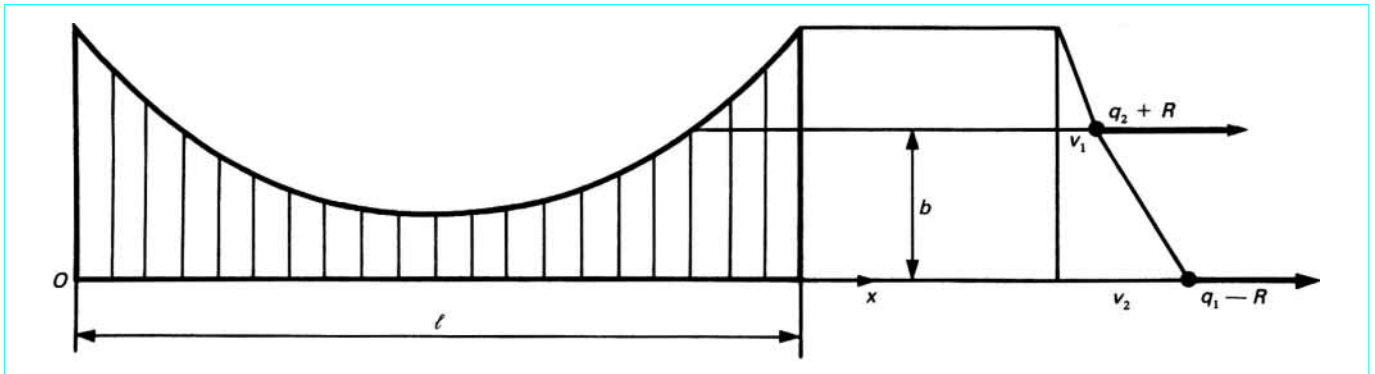


Figure 17 - Travée suspendue



## 4.5 Résolution numérique de l'équation de Fredholm

### 4.5.1 Méthode directe

Pour calculer les valeurs approchées  $R_i = R(x_i)$  de la fonction inconnue pour une suite de valeurs de  $x$  en progression arithmétique  $x_i = ih$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ), avec  $nh = \ell$ , on remplace dans l'équation de Fredholm vérifiée par  $R(x)$  :

$$E(R) = h(x) R(x) + \int_0^\ell K(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha - F(x) = 0$$

l'intégrale par une sommation finie. Nous obtenons ainsi pour déterminer les valeurs approchées  $R_i$  le système d'équations linéaires :

$$h(x_i) R_i + \sum_{j=0}^{j=n} C_j K(x_i, x_j) R_j = F(x_i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n) \quad (57)$$

dans lesquelles  $C_j$  sont les coefficients de la formule d'intégration numérique utilisée.

Par exemple, si l'on utilise la formule des trapèzes :

$$C_0 = C_n = \frac{\ell}{2n}, \quad C_1 = C_2 = \dots = C_{n-1} = \frac{\ell}{n}$$

Si l'on utilise la formule de Simpson,  $n$  doit être pair et :

$$C_0 = C_n = \frac{\ell}{6n}, \quad C_1 = C_3 = \dots = C_{n-1} = \frac{4\ell}{6n}$$

$$C_2 = C_4 = \dots = C_{n-2} = \frac{2\ell}{6n}$$

### 4.5.2 Première méthode d'itération

Soit  $R^k(x)$  une valeur approchée de la solution de l'équation de Fredholm :

$$E(R) = h(x) R(x) + \int_0^\ell K(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha - F(x) = 0$$

et proposons-nous de déterminer une fonction  $S^k(x)$  et un nombre positif  $t$  de façon que la fonction :

$$R^{k+1}(x) = R^k(x) + tS^k(x)$$

soit telle que  $W_0(R^{k+1}) < W_0(R^k)$ . La formule (56), qui est aussi vérifiée par  $W_0(R)$ , nous donne, en prenant  $R = R^k$  et  $\delta R = tS^k$  :

$$W_0(R^{k+1}) = W_0(R^k) + t \int_0^\ell E_k(x) S^k(x) dx + t^2 W_2(S^k)$$

Nous avons posé  $E(R^k) = E_k(x)$ .

$W_0(R^{k+1})$  sera certainement inférieur à  $W_0(R^k)$  si,  $t$  étant un nombre positif assez petit, nous prenons  $S^k(x) = -E_k(x)$ . Dans ces conditions, où  $R^{k+1} = R^k - tE_k$ , le trinôme en  $t$  :

$$W_0(R^{k+1}) = W_0(R^k) - \int_0^\ell E_k^2(x) dx + t^2 W_2(E_k)$$

a un minimum inférieur à  $W_0(R^k)$  obtenu pour  $t = t_k$  :

$$t_k = \frac{1}{2W_2(E_k)} \int_0^\ell E_k^2(x) dx$$

Nous obtenons ainsi la formule d'itération :

$$R^{k+1}(x) = R^k(x) - \frac{E_k(x)}{2W_2(E_k)} \int_0^\ell E_k^2(x) dx \quad (58)$$

Nous pourrions donc déterminer, à partir d'une fonction initiale  $R^0(x)$ , par exemple  $R^0(x) = \frac{F(x)}{h(x)}$ , une suite de valeurs approchées :

$$R^0(x), R^1(x), R^2(x), \dots, R^p(x), \dots$$

telles que :

$$W_0(R^0) > W_0(R^1) > W_0(R^2) > \dots > W_0(R^p) > \dots$$

La suite positive décroissante  $W_0(R^p)$  a une limite  $W_0(R)$  ; la fonction  $R(x)$  correspondante est telle que l'on ne peut plus continuer le procédé d'itération ; donc, si  $R^k = R$ , on doit avoir  $R^{k+1} = R$ , ce qui ne peut avoir lieu d'après la formule (58) que si  $E_k(x)$  est identiquement nul. La suite  $R^p(x)$  converge donc vers la solution de l'équation de Fredholm, quelle que soit la fonction initiale choisie.

### 4.5.3 Seconde méthode d'itération

On pourrait songer, pour trouver la solution de l'équation :

$$h(x) R(x) + KR(x) = F(x)$$

à partir d'une valeur approchée  $R^0(x)$ , par exemple  $R^0(x) = F(x)/h(x)$ , à utiliser la formule d'itération :

$$R^{k+1} = \frac{F - KR^k}{h(x)} \quad (59)$$

Malheureusement cette méthode simple ne converge pas.

On peut tourner la difficulté de la manière suivante : nous partons de la fonction initiale  $R^0(x) = F(x)/h(x)$  et, connaissant une valeur approchée  $R^k(x)$ , nous cherchons une nouvelle valeur approchée de la forme  $R^{k+1}(x) = \beta_k(x) R^k(x)$  ; en reportant cette valeur dans l'équation de Fredholm et en prenant pour valeur approchée de  $K(\beta_k R^k)$  la valeur  $\beta_k KR^k$ , nous trouvons :

$$\beta_k = \frac{F}{hR^k + KR^k}$$

Nous obtenons ainsi la formule d'itération :

$$R^{k+1} = \frac{FR^k}{hR^k + KR^k} \quad (60)$$

qui conduit à une suite de fonctions  $R^p(x)$  convergeant vers la solution de l'équation de Fredholm.

L'expérience montre qu'on accélère beaucoup la convergence en utilisant alternativement les formules d'itération (59) et (60) ; on obtient ainsi la suite d'approximations :

$$\left. \begin{aligned} R^0 &= \frac{F}{h} & R^1 &= \frac{FR^0}{hR^0 + KR^0} \\ R^2 &= \frac{F - KR^1}{h} & R^3 &= \frac{FR^2}{hR^2 + KR^2} \\ \dots & & \dots & \\ R^{2p} &= \frac{F - KR^{2p-1}}{h} & R^{2p+1} &= \frac{FR^{2p}}{hR^{2p} + KR^{2p}} \\ \dots & & \dots & \end{aligned} \right\} \quad (61)$$



Les méthodes d'itération définies par les formules (60) et (61) sont très pratiques lorsqu'on calcule une table de valeurs de la fonction  $Kf$  à partir d'une table de valeurs de la fonction  $f$  au moyen d'intégrations numériques. La méthode définie par les formules (61) est rapide, car l'approximation  $R^3$  est en général suffisante.

#### 4.5.4 Exemple numérique

##### 4.5.4.1 Énoncé du problème

Considérons (figure 18) deux poutres identiques sur appuis simples reliées par des suspentes infiniment rapprochées de longueur  $b$  et de section  $s$  par unité de longueur. L'inertie des poutres en béton est  $I = 1 \text{ m}^4$ , et les suspentes en acier ont un module d'élasticité  $E'$  égal à dix fois le module d'élasticité  $E$  du béton. La portée des poutres est  $2a = 36 \text{ m}$ , et seule la poutre  $A_1B_1$  est soumise à une charge concentrée  $P = 24 \text{ tf} = 240\,000 \text{ N}$  appliquée dans sa section médiane.

En choisissant l'origine de l'axe  $Ox$  dans la section médiane, on montre facilement que la densité de réaction  $R(x)$  exercée par les suspentes est la solution de l'équation de Fredholm :

$$hR(x) + \int_0^\ell K(x, \alpha) R(\alpha) d\alpha = F(x)$$

dans laquelle, en prenant pour unités la tonne-force et le mètre :

$$K(x, \alpha) = \begin{cases} \frac{(18+x)(18-\alpha)}{216} [(18+\alpha)(54-\alpha) - (18+x)^2] & \text{pour } x < \alpha \\ \frac{(18+\alpha)(18-x)}{216} [(18+x)(54-x) - (18+\alpha)^2] & \text{pour } x > \alpha \end{cases}$$

$$F(x) = (18-x)(648 + 36x - x^2)$$

$$h = \frac{EIb}{2E's} = \frac{b}{20s}$$

Nous supposons  $h = 10\,000$  ; cette valeur correspond à  $b = 200\,000 \text{ s}$ , par exemple  $s = 1 \text{ cm}^2$  et  $b = 20 \text{ m}$ .

En raison de la symétrie, nous pouvons nous borner à l'intervalle  $0 \leq x \leq 18$ . Pour les intégrations numériques, nous divisons cet intervalle en intervalles partiels de 3 m, et nous calculerons les valeurs :

$$R_0 = R(0), \quad R_1 = R(3), \quad R_2 = R(6), \quad R_3 = R(9), \quad R_4 = R(12), \\ R_5 = R(15)$$

$R_6 = R(18)$  étant nul. Nous utilisons la méthode de Simpson pour le calcul numérique des intégrales.

L'intérêt de cet exemple est qu'il est possible de trouver la solution exacte. Il permet donc d'apprécier la précision des méthodes numériques de résolution de l'équation intégrale.

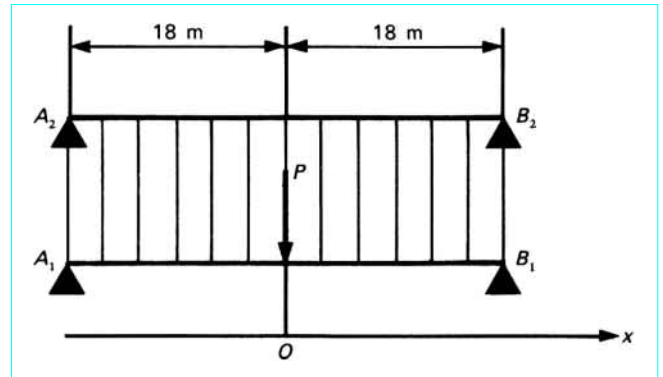


Figure 18 – Poutres identiques sur appuis simples reliées par des suspentes infiniment rapprochées

##### 4.5.4.2 Résultats

Le tableau ci-dessous donne les résultats obtenus par la méthode directe (article *Structures élastiques à plan moyen* [C 2 015], dans ce traité).

|       | Valeurs approchées | Valeurs exactes |
|-------|--------------------|-----------------|
| $R_0$ | 0,438 58           | 0,438 53        |
| $R_1$ | 0,417 51           | 0,417 51        |
| $R_2$ | 0,363 55           | 0,363 51        |
| $R_3$ | 0,287 64           | 0,287 64        |
| $R_4$ | 0,198 13           | 0,198 11        |
| $R_5$ | 0,100 80           | 0,100 80        |

Le tableau suivant donne la suite des premières approximations obtenues en utilisant les formules d'itération de l'équation (61).

**Remarque :** dans le cas étudié, la méthode d'itération est un peu moins précise que la méthode directe, parce que nous avons utilisé les valeurs exactes de  $K(x, \alpha)$  ; il n'en serait plus de même si nous avions dû déterminer les valeurs  $K(x_i, x_j)$  au moyen d'intégrations numériques successives pour écrire le système d'équations (57).

## 4.6 Structures du second genre

Nous choisirons comme exemple de structure du second genre une poutre  $OA$  de longueur  $\ell$ , soumise à une densité de charge  $p(x)$ , et reposant sur des appuis élastiques infiniment rapprochés (figure 19).

|       | $R^0$   | $R^1$    | $R^2$    | $R^3$    | $R^4$    | $R^5$    | Valeurs exactes |
|-------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------------|
| $R_0$ | 1,166 4 | 0,432 15 | 0,438 64 | 0,438 64 | 0,438 57 | 0,438 57 | 0,438 53        |
| $R_1$ | 1,120 5 | 0,413 77 | 0,417 72 | 0,417 74 | 0,417 69 | 0,417 69 | 0,417 51        |
| $R_2$ | 0,993 6 | 0,364 35 | 0,363 50 | 0,363 54 | 0,363 54 | 0,363 54 | 0,363 51        |
| $R_3$ | 0,801 9 | 0,291 95 | 0,287 65 | 0,287 71 | 0,287 76 | 0,287 76 | 0,287 64        |
| $R_4$ | 0,561 6 | 0,203 21 | 0,197 98 | 0,198 05 | 0,198 12 | 0,198 12 | 0,198 11        |
| $R_5$ | 0,288 9 | 0,104 14 | 0,100 75 | 0,100 78 | 0,100 84 | 0,100 83 | 0,100 80        |

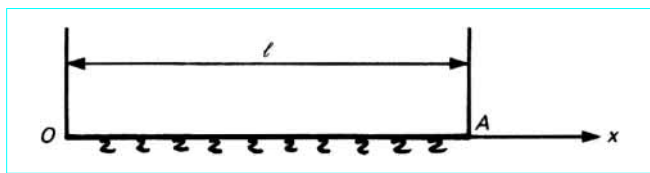


Figure 19 – Poutre reposant sur appuis élastiques infiniment rapprochés

La densité de réaction exercée par les appuis élastiques est proportionnelle à la flèche de la poutre comptée positivement vers le bas ; nous avons donc les deux relations équivalentes :

$$R(x) = k(x) v(x) \quad \text{et} \quad v(x) = h(x) R(x) \quad (62)$$

$k(x)$  désignant le module de réaction et  $h(x)$  son inverse.

La poutre est en équilibre sous l'action des charges extérieures qui lui sont appliquées et de la densité de réaction  $R(x)$  ; la fonction  $R(x)$  doit donc vérifier les deux équations d'équilibre :

$$\int_0^l R(x) dx = \Phi \quad \text{et} \quad \int_0^l xR(x) dx = \Gamma \quad (63)$$

$\Phi$  et  $\Gamma$  désignant la résultante générale et le moment résultant par rapport à l'origine  $O$  des charges extérieures appliquées à la poutre.

Sous l'action de la densité de charge  $p - R$ , la flèche  $v(x)$  de la poutre ne diffère de la flèche d'une **poutre isostatique associée** de même longueur et de même inertie que par un déplacement d'ensemble. Donc,  $G$  désignant l'opérateur dont le noyau est la fonction d'influence de la flèche de la poutre isostatique associée :

$$v(x) = G(p - R) + A''x + B''$$

Les constantes  $A''$  et  $B''$  sont déterminées par les équations d'équilibre (63). Pour cela, posons :

$$A'' = A + A' \quad \text{et} \quad B'' = B + B'$$

La densité de réaction :

$$R(x) = k(x) [Gp + A'x + B' - GR + Ax + B] \quad (64)$$

vérifiera les équations d'équilibre (63) si nous calculons les constantes  $A'$  et  $B'$  au moyen des équations :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l k(x) [Gp + A'x + B'] dx &= \Phi \\ \int_0^l xk(x) [Gp + A'x + B'] dx &= \Gamma \end{aligned} \right\} \quad (65)$$

et les constantes  $A$  et  $B$  au moyen des équations :

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l k(x) [-GR + Ax + B] dx &= 0 \\ \int_0^l xk(x) [-GR + Ax + B] dx &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (66)$$

Les constantes étant ainsi déterminées, nous désignons par  $F(x)$  la fonction :

$$F(x) = k(x) [Gp + A'x + B'] \quad (67)$$

et par  $K$  l'opérateur linéaire qui fait correspondre à la fonction  $R(x)$  la fonction :

$$KR = k(x) [GR - (Ax + B)] \quad (68)$$

Il résulte alors de la relation (64) que  $R(x)$  est la solution de l'équation de Fredholm :

$$R(x) + KR(x) = F(x) \quad (69)$$

La méthode s'applique à des charges extérieures quelconques ; il suffit en effet de remarquer que  $Gp$  est la flèche  $V(x)$  de la poutre isostatique associée due aux charges extérieures, donc de remplacer  $Gp$  par  $V(x)$  dans les équations précédentes.

Nous pourrions donc résoudre numériquement l'équation (69) en utilisant l'une des méthodes d'itération exposées dans le paragraphe 4.5. Il est en effet inutile de connaître le noyau de l'opérateur  $K$  pour calculer une table de valeurs de la fonction  $KR$ . Il suffit pour cela :

- de calculer une table de valeurs de la fonction  $GR$ , ce qui exige quatre intégrations numériques successives ;
- de calculer les constantes  $A$  et  $B$ , ce qui exige le calcul des intégrales définies :

$$a = \int_0^l k(x) dx, \quad b = \int_0^l xk(x) dx, \quad c = \int_0^l x^2k(x) dx$$

qui sont des constantes caractéristiques calculées une fois pour toutes, et le calcul des intégrales définies :

$$\int_0^l k(x) GR dx \quad \text{et} \quad \int_0^l xk(x) GR dx$$

**Remarque :** il est possible de montrer qu'il existe un opérateur symétrique défini positif  $S$  tel que  $SK = G$ . Il en résulte (§ 4.2.4) que,  $G$  étant symétrique défini positif, l'équation (69) a toujours une solution et une seule.

## Références bibliographiques

- |   |   |  |
|---|---|--|
| <p>[1] ALBIGES (M.), COIN (A.) et JOURNEL (H.). – <i>Étude des structures par les méthodes matricielles</i>. Eyrolles (1969).</p> | <p>[2] MASSONNET (Ch.), DEPREZ (G.), MAQUOI (R.), MULLER (R.) et FONDER (G.). – <i>Calcul des structures sur ordinateur</i>. 2 vol., Masson (1972).</p> | <p>[3] COURBON (J.). – <i>Calcul des structures</i>. Dunod (1972).</p> <p>[4] COURBON (J.). – <i>Structures hyperstatiques d'ordre infini</i>. Annales ITBTP (1975).</p> |
|---|---|--|