

# Stabilité de l'équilibre élastique

par **Jean COURBON**

Ingénieur Général Honoraire des Ponts et Chaussées  
Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

<b>1. Flambement des poutres droites de section constante.....</b>	<b>C 2 040 - 3</b>
1.1 Étude détaillée du flambement d'une poutre droite articulée à ses extrémités.....	— 3
1.2 Sécurité vis-à-vis du flambement.....	— 4
1.3 Poutre soumise à des liaisons diverses à ses extrémités.....	— 5
1.4 Influence de la déformation due à l'effort tranchant.....	— 7
1.5 Flambement d'une poutre droite en milieu élastique.....	— 7
1.6 Flambement d'un mât vertical sous son propre poids.....	— 8
<b>2. Flambement des poutres droites de section variable.....</b>	<b>— 9</b>
2.1 Étude d'une loi d'inertie permettant l'intégration formelle.....	— 9
2.2 Méthode inverse.....	— 10
2.3 Méthodes numériques de calcul des forces critiques.....	— 11
<b>3. Flambement des poutres circulaires de section constante.....</b>	<b>— 13</b>
3.1 Formules préliminaires.....	— 13
3.2 Flambement d'un anneau circulaire.....	— 14
3.3 Flambement d'un arc circulaire sous l'effet d'une pression uniforme ...	— 15
<b>4. Flambement des arcs de section quelconque.....</b>	<b>— 16</b>
4.1 Introduction.....	— 16
4.2 Étude géométrique des déformations de l'arc.....	— 16
4.3 Équation fondamentale vérifiée par le déplacement vertical.....	— 18
4.4 Méthode des approximations successives.....	— 19
4.5 Méthode de l'énergie.....	— 20
4.6 Application aux arcs paraboliques d'inertie réduite constante.....	— 21
<b>5. Déversement latéral des poutres droites.....</b>	<b>— 21</b>
5.1 Première méthode. Recherche de la déformation au moment du déversement.....	— 21
5.2 Méthode de l'énergie.....	— 23
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>— 25</b>

**L**orsque l'on tient compte des déplacements des points d'une structure pour écrire les équations d'équilibre, les déplacements ne sont plus des fonctions linéaires des forces appliquées. Il peut même arriver que les déplacements deviennent très grands sous l'action de forces extérieures finies. Il est indispensable, pour le constructeur, de connaître les conditions dans lesquelles l'équilibre élastique d'une structure est stable.

Pour bien faire comprendre les méthodes d'étude de la stabilité d'une structure, donnons un exemple très simple (figure A). Un poteau rigide OA, articulé à sa base O, est maintenu dans la position verticale par deux ressorts agissant au sommet A ; si l'on écarte le sommet de  $AA' = x$ , les ressorts exercent sur le sommet A une force horizontale  $-Kx$ , K étant une constante caractéristique des ressorts.

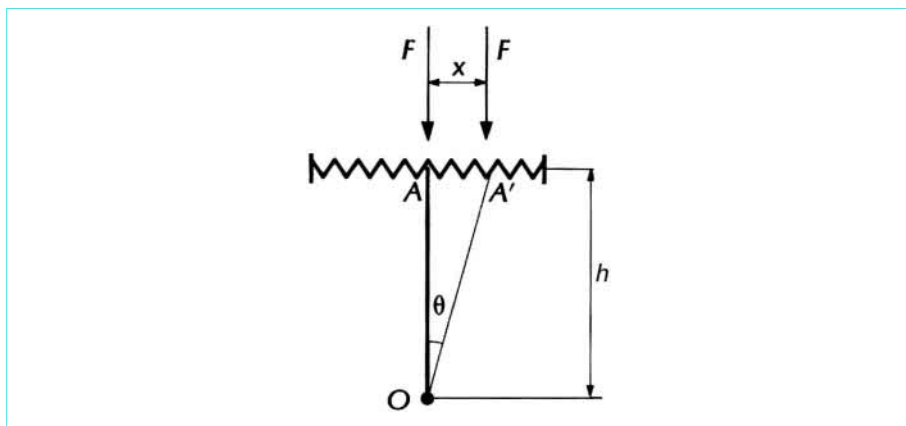


Figure A – Poteau rigide articulé en O et maintenu par deux ressorts en A

Nous nous proposons d'étudier la stabilité de cette structure lorsque le sommet du poteau est soumis à une force verticale  $F$ .

Une première méthode consiste à écarter le poteau de sa position d'équilibre verticale en donnant à A un déplacement  $x = AA'$ . Le moment  $-Fx$  de la force  $F$  par rapport à O tend à écarter le poteau de sa position d'équilibre, tandis que le moment  $Khx$  par rapport à O de la force  $-Kx$  exercée par les ressorts tend à ramener le poteau vers sa position d'équilibre. L'équilibre sera stable si  $Fx < Khx$ , donc si  $F$  est inférieure à une force critique  $F_c$  :

$$F < F_c \quad \text{avec} \quad F_c = Kh$$

Une seconde méthode d'étude de la stabilité est la suivante : lorsque l'on passe de la position d'équilibre OA à une position voisine OA', le travail de la force extérieure  $F$  a pour valeur :

$$\Delta \mathcal{C} = Fh(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} Fh\theta^2$$

tandis que l'énergie potentielle emmagasinée dans les ressorts a pour valeur :

$$\Delta W = \frac{1}{2} Kx^2 = \frac{1}{2} Kh^2\theta^2$$

L'équilibre sera stable si la variation  $\Delta W - \Delta \mathcal{C}$  de l'énergie totale de la structure entre la position d'équilibre OA et la position voisine OA' est positive (théorème de Lejeune-Dirichlet). L'équilibre est donc stable si  $\Delta W > \Delta \mathcal{C}$ . Compte tenu des valeurs de  $\Delta \mathcal{C}$  et de  $\Delta W$ , nous retrouvons le résultat obtenu par la première méthode.

# 1. Flambement des poutres droites de section constante

## 1.1 Étude détaillée du flambement d'une poutre droite articulée à ses extrémités

Considérons (figure 1) une poutre droite  $OA$  de section constante articulée à ses extrémités et soumise à un effort normal de compression  $F$ . Nous désignerons par  $\ell$  la longueur de la poutre et par  $I$  son moment d'inertie.

Pour étudier la stabilité de l'équilibre rectiligne de la poutre, donnons aux sections de la poutre un déplacement transversal  $v(x)$  petit ; la poutre supporte alors un moment fléchissant  $-Fv$ , donc le déplacement  $v(x)$  est l'intégrale de l'équation différentielle :

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + Fv = 0$$

qui s'annule pour  $x=0$  et  $x=\ell$ . Si l'on pose :

$$k^2 = \frac{F}{EI}$$

l'intégrale générale de l'équation différentielle a pour expression :

$$v = A \cos kx + B \sin kx$$

de sorte que les conditions aux limites s'écrivent :

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B \sin k\ell = 0$$

Si l'on fait croître  $F$ , donc  $k$ , on trouve  $B=0$  tant que  $k\ell < \pi$  ; l'équilibre rectiligne est donc stable tant que la force  $F$  est inférieure à la **force critique de flambement** :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (1)$$

La formule (1) est due à Euler.

Lorsque  $F$  dépasse  $F_c$ , nous ne pouvons plus assimiler la courbure  $1/\rho$  de la poutre à  $d^2v/dx^2$  ; nous avons l'équation différentielle :

$$\frac{EI}{\rho} = -Fv$$

soit en introduisant l'angle  $\theta$  de  $Ox$  et de la tangente à la fibre moyenne déformée :

$$EI \frac{d\theta}{ds} = -Fv$$

Dérivons l'équation précédente par rapport à l'abscisse curviligne  $s$  ; nous trouvons, compte tenu de  $dv/ds = \sin \theta$  :

$$EI \frac{d^2\theta}{ds^2} = -F \sin \theta \quad (2)$$

Multiplions les deux membres de l'équation (2), analogue à l'équation du mouvement d'un pendule, par  $2 \, d\theta/ds$ , et intégrons-la à partir de  $O$  ; nous obtenons,  $\alpha$  désignant l'angle de  $Ox$  et de la tangente en  $O$  (figure 2) :

$$EI \left( \frac{d\theta}{ds} \right)^2 = 2F(\cos \theta - \cos \alpha)$$

En posant :

$$k = \sqrt{\frac{F}{EI}} = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{F}{F_c}} \quad (3)$$

et en observant que  $d\theta/ds$  est négatif, nous avons :

$$ds = - \frac{d\theta}{k \sqrt{2(\cos \theta - \cos \alpha)}} = - \frac{d\theta}{2k \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Écrivons que la longueur de la poutre est  $\ell$  ; nous obtenons, compte tenu de la symétrie de la fibre moyenne déformée, la relation :

$$k\ell = \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Le changement de variable :

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi \quad (4)$$

ramène l'intégrale elliptique à la forme canonique de Legendre  $F\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right)$  dont il existe des tables :

$$k\ell = \pi \sqrt{\frac{F}{F_c}} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi}} = 2F\left(\sin \frac{\alpha}{2}\right) \quad (5)$$

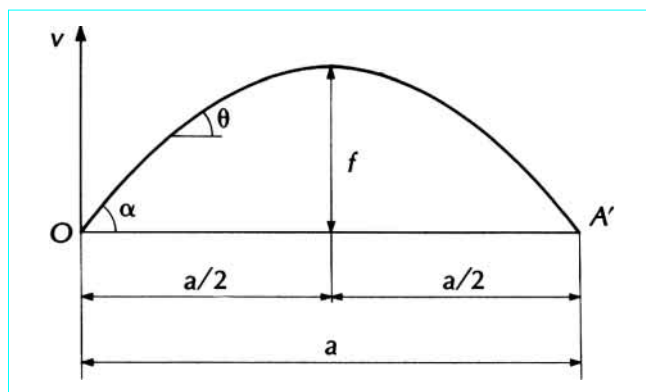


Figure 2 – Déplacement transversal à mi-portée de la poutre de la figure 1

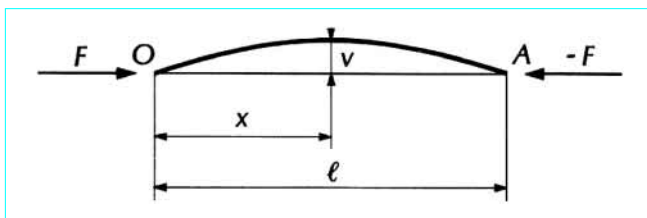


Figure 1 – Poutre droite, de section constante, articulée à ses extrémités

La formule (5) montre que l'équilibre déformé n'est possible que si  $F > F_c$ , car nous avons nécessairement :

$$k\ell > 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi, \quad \text{soit } k\ell > \pi$$

Calculons le déplacement transversal  $f$  à mi-portée ; nous avons :

$$dv = ds \sin \theta = \frac{-\sin \theta d\theta}{2k \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

donc, en intégrant de l'origine au milieu de la portée :

$$f = \frac{1}{2k} \int_0^{\alpha} \frac{\sin \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Le changement de variable (4) permet de calculer immédiatement cette intégrale ; nous trouvons :

$$f = \frac{2}{k} \sin \frac{\alpha}{2}$$

soit, compte tenu de la relation (5) :

$$\frac{f}{\ell} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{F \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right)} \quad (6)$$

Calculons également la distance  $a = OA'$  entre articulations après déformation ; nous avons :

$$dx = ds \cos \theta = -\frac{\cos \theta d\theta}{2k \sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

$$a = \frac{1}{k} \int_0^{\alpha} \frac{\cos \theta d\theta}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}}$$

Le changement de variable (4) permet encore de ramener cette intégrale elliptique aux formes canoniques de Legendre  $E \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right)$

et  $F \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right)$  :

$$a = \frac{4}{k} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi} d\varphi - \frac{2}{k} \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \varphi}}$$

$$\text{soit } a = \frac{2}{k} \left[ 2E \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right) - F \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$

Compte tenu de l'équation (5), nous obtenons ainsi la relation :

$$\frac{a}{\ell} = 2 \frac{E \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{F \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right)} - 1 \quad (7)$$

Le tableau 1 donne en fonction de  $\alpha$  les valeurs de  $F/F_c$ ,  $f/\ell$  et  $a/\ell$  calculées en utilisant les formules (5), (6) et (7).

Ainsi, si  $F$  dépasse  $F_c$  de 1,5 % seulement, la flèche de la poutre atteint 11 % de sa longueur. Les déformations deviennent donc considérables, et seules des tiges très élancées peuvent les supporter sans se rompre (figure 3).

Tableau 1 – Valeurs de  $F/F_c$ ,  $f/\ell$  et  $a/\ell$  en fonction de  $\alpha$  [formules (5), (6) et (7)]

$\alpha$ (degrés)	$F/F_c$	$f/\ell$	$a/\ell$
10	1,003 818	0,055 379	0,992 397
20	1,015 397	0,109 701	0,969 730
30	1,035 121	0,161 950	0,932 432
40	1,063 663	0,211 120	0,881 203
50	1,102 044	0,256 288	0,817 004
60	1,151 719	0,296 604	0,741 020
70	1,214 723	0,331 309	0,654 637
80	1,293 889	0,359 749	0,559 396
90	1,393 204	0,381 380	0,456 946
100	1,518 389	0,395 770	0,348 989
110	1,677 905	0,402 588	0,237 205
120	1,884 801	0,401 585	0,123 160
130	2,160 369	0,392 547	0,008 173
140	2,542 258	0,375 194	-0,106 923
150	3,105 362	0,348 954	-0,222 268
160	4,030 085	0,312 302	-0,340 319
170	5,950 490	0,259 985	-0,471 434

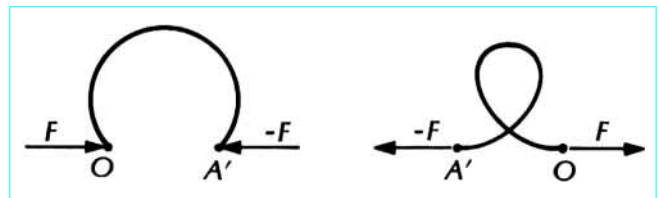


Figure 3 – Tiges très élancées

## 1.2 Sécurité vis-à-vis du flambement

La **contrainte critique de flambement**  $\sigma_c = F_c/S$  s'exprime d'après la formule (1) en fonction du rayon de giration  $r = \sqrt{I/S}$  de la section ; en définissant l'**élancement**  $\lambda = \ell/r$  de la poutre, nous avons :

$$\sigma_c = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (8)$$

Soit  $\sigma_e$  la limite élastique du matériau constitutif de la poutre et  $\lambda_c = \pi \sqrt{E/\sigma_e}$  l'élancement critique correspondant à  $\sigma_c = \sigma_e$ . Théoriquement :

- si  $\lambda < \lambda_c$ , donc  $\sigma_e < \sigma_c$ , la poutre périra par **écrasement** à la compression dès que  $F/S$  atteindra la valeur  $\sigma_e$  ;
- si  $\lambda > \lambda_c$ , donc  $\sigma_e > \sigma_c$ , la poutre périra par **flambement** dès que  $F/S$  atteindra la valeur  $\sigma_c$ .

Pour une poutre en acier ( $E = 210\,000$  MPa), l'élancement critique est 93 pour  $\sigma_e = 240$  MPa, et 76 pour  $\sigma_e = 360$  MPa.

Mais, en réalité, le phénomène du flambement n'est pas aussi simple parce qu'un défaut de rectitude de la poutre ou un défaut de centrage de la force de compression donnent une flexion à la poutre. La poutre est donc soumise à la flexion composée et la ruine se produit dès que la contrainte atteint, sur une fibre extrême, la limite élastique  $\sigma_e$ .

Examinons d'abord le cas d'un **défaut de rectitude** défini par un déplacement transversal initial :

$$v_0 = b \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

Après application de l'effort de compression  $F$ , le déplacement transversal devient  $v_0 + v$ , et  $v$  est l'intégrale de l'équation différentielle :

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv = -Fb \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

qui s'annule pour  $x = 0$  et  $x = \ell$ . Un calcul simple montre que :

$$v = \frac{bF}{F_c - F} \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

Le moment fléchissant est maximal en valeur absolue dans la section médiane :

$$M_{max} = -F(v_0 + v)_{max} = -\frac{Fb}{1 - \frac{F}{F_c}}$$

La contrainte maximale est atteinte sur une fibre extrême de la section médiane située à la distance  $y$  du centre de gravité :

$$\sigma_{max} = \frac{F}{S} + \frac{|M_{max}| y}{I} = \frac{F}{S} \left[ 1 + \frac{|M_{max}| S y}{F I} \right]$$

Or  $\frac{I}{S y} = \frac{r^2}{y} = c$  est la distance du centre de gravité au bord du noyau central ; donc, compte tenu de la valeur de  $M_{max}$  :

$$\sigma_{max} = \frac{F}{S} \left[ 1 + \left( \frac{b}{c} \right) \frac{1}{1 - \frac{F}{F_c}} \right]$$

et puisque 
$$\frac{F}{F_c} = \left( \frac{F}{S} \right) \frac{1}{\sigma_e} = \left( \frac{F}{S} \right) \frac{\lambda^2}{\pi^2 E}$$

la ruine interviendra lorsque  $\sigma_{max} = \sigma_e$ . Donc l'équation :

$$\sigma_e = \frac{F}{S} \left[ 1 + \left( \frac{b}{c} \right) \frac{1}{1 - \left( \frac{F}{S} \right) \frac{\lambda^2}{\pi^2 E}} \right] \quad (9)$$

permet de calculer, en fonction de  $\lambda$  et du rapport  $b/c$ , la contrainte de compression  $F/S$  qui entraîne la ruine de la poutre. On obtient ainsi le réseau de courbes représenté sur la figure 4, chaque courbe correspondant à une valeur du rapport  $b/c$ .

Le cas d'un **défaut de centrage** de la force de compression conduit à des résultats analogues. Si  $e$  désigne l'excentricité de la force, le déplacement transversal  $v$  est l'intégrale de l'équation différentielle :

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv = Fe$$

qui s'annule pour  $x = 0$  et  $x = \ell$ . On trouve facilement que le moment fléchissant maximal a lieu dans la section médiane et a pour valeur :

$$M_{max} = \frac{Fe}{\cos \left( \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{F_c}} \right)}$$

Un calcul semblable à celui fait dans le cas du défaut de rectitude donne l'équation :

$$\sigma_e = \frac{F}{S} \left[ 1 + \left( \frac{e}{c} \right) \frac{1}{\cos \left[ \frac{\lambda}{2} \sqrt{\frac{1}{E} \left( \frac{F}{S} \right)} \right]} \right] \quad (10)$$

qui permet de calculer, en fonction de  $\lambda$  et du rapport  $e/c$ , la contrainte de compression  $F/S$  qui entraîne la ruine de la poutre. On obtient ainsi un réseau de courbes semblable à celui représenté sur la figure 4, chaque courbe correspondant à une valeur du rapport  $e/c$ .

## 1.3 Poutre soumise à des liaisons diverses à ses extrémités

### 1.3.1 Poutre console encastrée pour $x = 0$ et libre pour $x = \ell$

La figure 5 montre que la force critique est celle d'une poutre de longueur  $2\ell$  articulée à ses extrémités ; donc :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2}$$

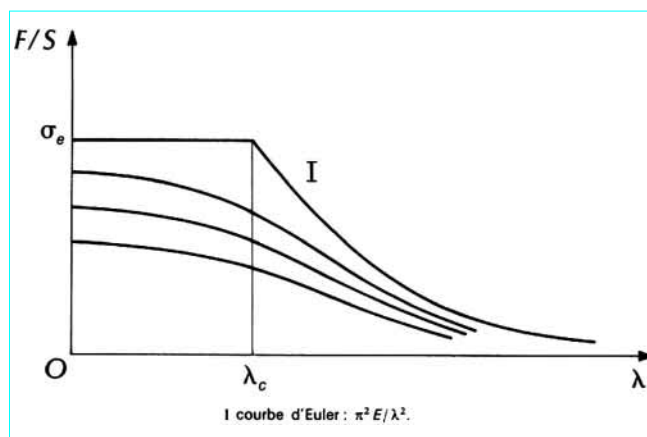


Figure 4 – Contrainte de compression  $F/S$  en fonction de l'élancement  $\lambda$

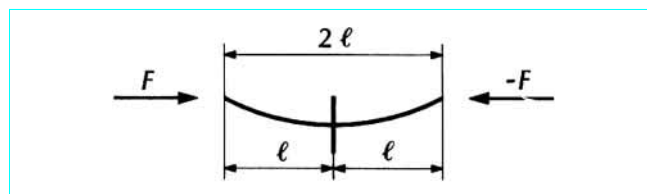


Figure 5 – Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre

### 1.3.2 Poutre encastree à ses extrémités $x = 0$ et $x = \ell$

$M_0$  et  $M_1$  désignant les moments d'encastrement pour  $x = 0$  et  $x = \ell$ , le déplacement transversal  $v$  est l'intégrale de l'équation différentielle :

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + Fv = M_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + M_1 \frac{x}{\ell}$$

qui vérifie les conditions aux limites :

$$v(0) = 0, \quad v'(\ell) = 0, \quad v(\ell) = 0, \quad v'(0) = 0$$

On obtient ainsi quatre équations linéaires et homogènes entre les quatre inconnues :  $M_0$ ,  $M_1$  et les deux constantes d'intégration. Le flambement n'est possible que si le déterminant de ces équations est nul, sinon les inconnues seraient nulles et l'équilibre rectiligne stable. Nous trouvons ainsi l'équation en  $k\ell$  :

$$2(1 - \cos k\ell) - k\ell \sin k\ell = 0$$

dont la plus petite racine positive  $k\ell = 2\pi$  donne la force critique de flambement :

$$F_c = \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}$$

### 1.3.3 Poutre articulée pour $x = 0$ et encastree pour $x = \ell$

$M_1$  désignant le moment d'encastrement pour  $x = \ell$ , le déplacement transversal est l'intégrale de l'équation différentielle :

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} + Fv = M_1 \frac{x}{\ell}$$

qui vérifie les conditions aux limites :

$$v(0) = 0, \quad v(\ell) = 0, \quad v'(\ell) = 0$$

On obtient ainsi trois équations linéaires et homogènes entre les trois inconnues :  $M_1$  et les deux constantes d'intégration. Le

flambement n'est possible que si le déterminant de ces équations est nul. Nous trouvons ainsi l'équation en  $k\ell$  :

$$\sin k\ell - k\ell \cos k\ell = 0$$

dont la plus petite racine positive  $k\ell = 1,430\ 297\ \pi = 4,493\ 409$  donne la force critique de flambement :

$$F_c = 2,045\ 75 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \approx \frac{2\pi^2 EI}{\ell^2}$$

### 1.3.4 Poutre encastree élastiquement à ses extrémités

Dans ce cas les rotations d'extrémités  $\omega_0$  et  $\omega_1$  sont proportionnelles aux moments d'encastrement  $M_0$  et  $M_1$  :

$$\omega_0 = \beta_0 \frac{M_0 \ell}{EI} \quad \text{et} \quad \omega_1 = -\beta_1 \frac{M_1 \ell}{EI}$$

$\beta_0$  et  $\beta_1$  étant des constantes sans dimension caractéristiques des encastrements élastiques ;  $\beta = 0$  correspond à un encastrement parfait et  $\beta = \infty$  correspond à une articulation.

Il est aisé de montrer que le flambement correspond à la plus petite racine positive  $k\ell = u$  de l'équation :

$$\left[ \frac{6(u - \sin u)}{u^2 \sin u} \right]^2 - \left[ \frac{6(\sin u - u \cos u)}{u^2 \sin u} + \beta_0 \right] \left[ \frac{6(\sin u - u \cos u)}{u^2 \sin u} + \beta_1 \right] = 0$$

On obtient ainsi la force critique de flambement :

$$F_c = C(\beta_0, \beta_1) \frac{EI}{\ell^2}$$

$C(\beta_0, \beta_1)$  étant un coefficient fonction de  $\beta_0$  et de  $\beta_1$ .

Le tableau 2 donne quelques valeurs du coefficient  $C(\beta_0, \beta_1)$ .

Tableau 2 – Valeurs du coefficient  $C(\beta_0, \beta_1)$

$\beta_1$	$\beta_0$											
	0	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	20	50	100	$\infty$
0	39,478	38,199	37,004	33,981	30,550	26,958	23,452	21,933	21,092	20,559	20,376	20,191
0,1	38,199	36,981	35,841	32,950	29,647	26,166	22,745	21,257	20,431	19,907	19,728	19,546
0,2	37,004	35,841	34,752	31,984	28,804	25,429	22,092	20,635	19,825	19,311	19,134	18,955
0,5	33,981	32,950	31,984	29,517	26,648	23,554	20,495	19,073	18,307	17,819	17,652	17,482
1	30,550	29,647	28,804	26,648	24,121	21,353	18,521	17,250	16,545	16,091	15,935	15,777
2	26,958	26,166	25,429	23,554	21,353	18,916	16,382	15,236	14,589	14,174	14,031	13,886
5	23,542	22,745	22,092	20,495	18,521	16,382	14,134	13,107	12,523	12,148	12,019	11,887
10	21,933	21,257	20,635	19,073	17,250	15,236	13,107	12,130	11,574	11,217	11,093	10,967
20	21,092	20,431	19,825	18,307	16,545	14,589	12,523	11,574	11,034	10,686	10,566	10,443
50	20,559	19,907	19,311	17,819	16,091	14,174	12,148	11,217	10,686	10,344	10,226	10,105
100	20,376	19,728	19,134	17,652	15,935	14,031	12,019	11,093	10,566	10,226	10,108	9,989
$\infty$	20,191	19,546	18,955	17,482	15,777	13,886	11,887	10,967	10,443	10,105	9,989	9,870

### 1.4 Influence de la déformation due à l'effort tranchant

Considérons une poutre soumise à des liaisons quelconques à ses extrémités. L'équation (article *Théorie des poutres* [C 2 010] dans ce traité) dans laquelle  $S_1$  est la section relative à la déformation d'effort tranchant et  $G$  le module d'élasticité transversale :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M}{EI} - \frac{d}{dx} \left( \frac{T}{GS_1} \right)$$

conduit, compte tenu des relations :

$$\begin{cases} M = -Fv + M_0 \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) + M_1 \frac{x}{\ell} \\ T = \frac{dM}{dx} = -F \frac{dv}{dx} + \frac{M_1 - M_0}{\ell} \end{cases}$$

à l'équation différentielle :

$$\left( 1 - \frac{F}{GS_1} \right) \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{F}{EI} v = \frac{M_0}{EI} \left( 1 - \frac{x}{\ell} \right) + \frac{M_1}{EI} \frac{x}{\ell}$$

Il en résulte que tous les calculs faits précédemment sont encore valables, à condition de remplacer  $k^2$  par :

$$k'^2 = \frac{\frac{F}{EI}}{1 - \frac{F}{GS_1}}$$

Donc, si  $F'_c$  est la force critique d'Euler, calculée en négligeant la déformation due à l'effort tranchant :

$$F'_c = k^2 EI = m \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

$m$  étant un coefficient qui dépend des liaisons aux extrémités, la force critique de flambement  $F_c$  compte tenu de la déformation due à l'effort tranchant s'obtient en remplaçant  $k^2$  par  $k'^2$  ; nous trouvons ainsi :

$$F_c = \frac{F'_c}{1 + \frac{F'_c}{GS_1}} = \frac{m \pi^2 EI}{\ell^2} \frac{1}{1 + \frac{m \pi^2 EI}{\ell^2} \cdot \frac{1}{GS_1}} \quad (11)$$

On notera que la réduction de la force critique due à l'effort tranchant est d'autant plus élevée que  $m$  est plus grand.

L'influence de l'effort tranchant est négligeable pour les poutres à âme pleine. Mais il est important pour les poutres triangulées et encore plus pour les poutres échelles.

Les formules données dans l'article *Structures élastiques à plan moyen* [C 2 015] du présent traité montrent que la force critique de flambement d'une poutre Warren (figure 6) a pour valeur :

$$F_c = \frac{m \pi^2 EI}{\ell^2} \frac{1}{1 + \frac{m \pi^2 EI}{\ell^2} \left( \frac{1}{ES \sin \theta \cos^2 \theta} \right)}$$

et que la force critique de flambement d'une poutre Pratt (figure 7) a pour valeur :

$$F_c = \frac{m \pi^2 EI}{\ell^2} \frac{1}{1 + \frac{m \pi^2 EI}{\ell^2} \left( \frac{1}{ES \sin \theta \cos^2 \theta} + \frac{1}{E\omega \tan \theta} \right)}$$

La formule donnée dans l'article *Structures élastiques à plan moyen* [C 2 015] montre que la force critique de flambement d'une poutre échelle (figure 8) a pour valeur :

$$F_c = \frac{m \pi^2 EI}{\ell^2} \frac{1}{1 + \frac{m \pi^2 EI}{\ell^2} \left( \frac{a^2}{24 EJ} + \frac{ah}{12 EJ'} \right)}$$

Cette force critique peut être inférieure à la moitié de la force critique d'Euler.

### 1.5 Flambement d'une poutre droite en milieu élastique

Supposons la poutre articulée à ses extrémités (figure 9). Le milieu élastique exerce une densité de charge proportionnelle au déplacement transversal  $v$  :

$$r = \varepsilon v$$

avec  $\varepsilon$  coefficient caractéristique de l'élasticité du milieu.

Le moment fléchissant  $\mu$  produit par la densité de charge  $r$  est tel que :

$$\frac{d^2\mu}{dx^2} = -r = -\varepsilon v$$

Le moment fléchissant total  $M$  a donc pour valeur :

$$M = -Fv + \mu = EI \frac{d^2v}{dx^2}$$

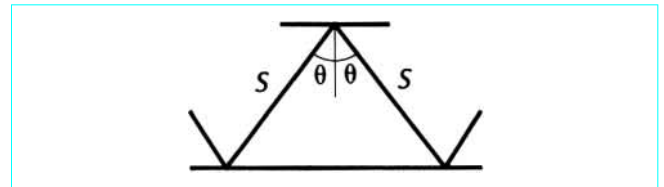


Figure 6 - Poutre Warren

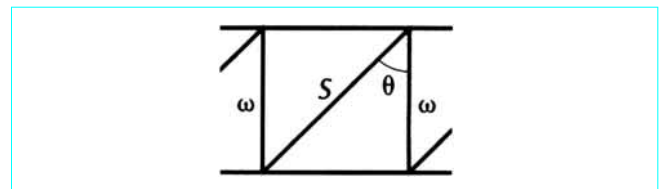


Figure 7 - Poutre Pratt

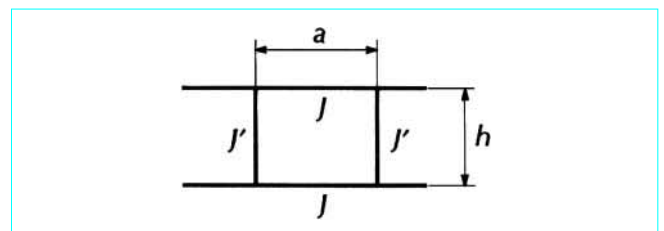


Figure 8 - Poutre échelle

En éliminant  $\mu$  entre les équations précédentes, nous trouvons que  $v$  est une intégrale de l'équation différentielle linéaire :

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + F \frac{d^2 v}{dx^2} + \varepsilon v = 0 \quad (12)$$

Cette équation est encore exacte dans le cas d'une poutre soumise à des liaisons quelconques à ses extrémités, car il suffit d'ajouter à  $\mu$  une fonction linéaire, ce qui ne modifie pas le résultat.

L'équation caractéristique de l'équation différentielle (12) est :

$$EIz^4 + Fz^2 + \varepsilon = 0 \quad (13)$$

Lorsque  $F^2 < 4EI\varepsilon$ , les racines de l'équation caractéristique sont de la forme  $\pm \alpha \pm i\beta$ , et l'intégrale générale s'écrit :

$$v = A \operatorname{ch} \alpha x \cos \beta x + B \operatorname{sh} \alpha x \sin \beta x + C \operatorname{ch} \alpha x \sin \beta x + D \operatorname{sh} \alpha x \cos \beta x$$

Lorsque  $F^2 > 4EI\varepsilon$ , les racines de l'équation caractéristique sont imaginaires pures  $\pm ik$  et  $\pm ik'$ , et l'intégrale générale s'écrit :

$$v = A \cos kx + B \sin kx + C \cos k'x + D \sin k'x$$

Enfin  $v$  doit vérifier les conditions aux limites :

$$v(0) = 0, \quad v(\ell) = 0, \quad v''(0) = 0, \quad v''(\ell) = 0$$

qui expriment que  $v$  et  $M$  sont nuls aux extrémités de la poutre.

Lorsque  $F^2 < 4EI\varepsilon$ , les conditions pour  $x = 0$  montrent que  $A = B = 0$ , et les conditions pour  $x = \ell$  donnent deux équations entre  $C$  et  $D$  dont le déterminant :

$$2\alpha\beta [\operatorname{ch}^2 \alpha\ell \sin^2 \beta\ell + \operatorname{sh}^2 \alpha\ell \cos^2 \beta\ell]$$

n'est jamais nul ; donc  $C$  et  $D$  sont nuls et le flambement n'est pas possible. La force critique de flambement est donc supérieure ou égale à  $2\sqrt{EI\varepsilon}$ .

Lorsque  $F^2 > 4EI\varepsilon$ , les conditions pour  $x = 0$  montrent que  $A = C = 0$ , et les conditions pour  $x = \ell$  donnent deux équations entre  $B$  et  $D$  :

$$\begin{cases} B \sin k\ell + D \sin k'\ell = 0 \\ Bk^2 \sin k\ell + Dk'^2 \sin k'\ell = 0 \end{cases}$$

dont le déterminant  $(k^2 - k'^2) \sin k\ell \sin k'\ell$  est nul si  $k\ell = n\pi$  ou  $k'\ell = n\pi$  ; donc  $n\pi/\ell$  est racine de l'équation (12), soit :

$$EI \frac{n^4 \pi^4}{\ell^4} - F \frac{n^2 \pi^2}{\ell^2} + \varepsilon = 0$$

Il en résulte que la force critique de flambement a pour valeur :

$$F_c = \operatorname{Min}_{n \text{ entier}} \left\{ \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \left( n^2 + \frac{\varepsilon \ell^4}{n^2 \pi^4 EI} \right) \right\} \quad (14)$$

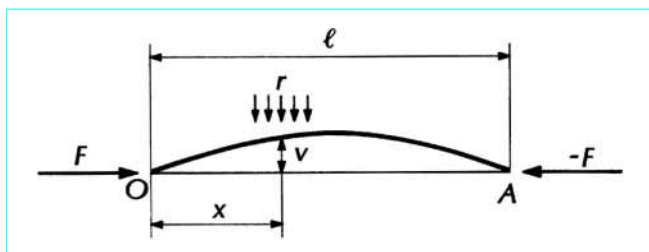


Figure 9 – Poutre droite en milieu élastique

Si  $n$  pouvait prendre toutes les valeurs positives, l'expression (14) qui contient entre parenthèses la somme de deux termes, dont le produit est constant, serait minimale et égale à  $2\sqrt{EI\varepsilon}$  pour la valeur  $n'$  qui rend ces deux termes égaux :

$$n' = \frac{\ell}{\pi} \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{EI}}$$

Il faut donc choisir celui des deux entiers les plus voisins de  $n'$  qui donne la plus petite valeur à l'expression (14). Il est aisé de montrer que cet entier  $n$  vérifie les inégalités :

$$\sqrt{n(n-1)} \leq \frac{\ell}{\pi} \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{EI}} \leq \sqrt{n(n+1)}$$

Lorsque  $\varepsilon \ell^4 / EI$  est très petit, nous avons  $n = 1$  et nous trouvons une force critique peu supérieure à  $\pi^2 EI / \ell^2$  ; c'est le cas d'un milieu peu résistant ou d'une poutre courte.

Lorsque  $\varepsilon \ell^4 / EI$  est très grand,  $n'$  est très grand et le rapport  $n/n'$  est très voisin de 1 :

$$n = n'(1 + \eta) = \frac{\ell}{\pi} \sqrt[4]{\frac{\varepsilon}{EI}} (1 + \eta)$$

$\eta$  tendant vers zéro lorsque  $n'$  tend vers l'infini ; il en résulte que :

$$F_c = 2\sqrt{EI\varepsilon} (1 + 2\eta^2)$$

La force critique est donc très peu supérieure à  $2\sqrt{EI\varepsilon}$  ; ce cas est celui d'un milieu très résistant ou d'une poutre très longue. La force critique de flambement d'une poutre infiniment longue est :

$$F_c = 2\sqrt{EI\varepsilon}$$

## 1.6 Flambement d'un mât vertical sous son propre poids

Considérons (figure 10) une console verticale d'inertie constante  $I$  encastée à sa base  $O$  et libre à l'extrémité supérieure  $A$ . Soit  $p$  le poids propre de cette poutre par unité de longueur.

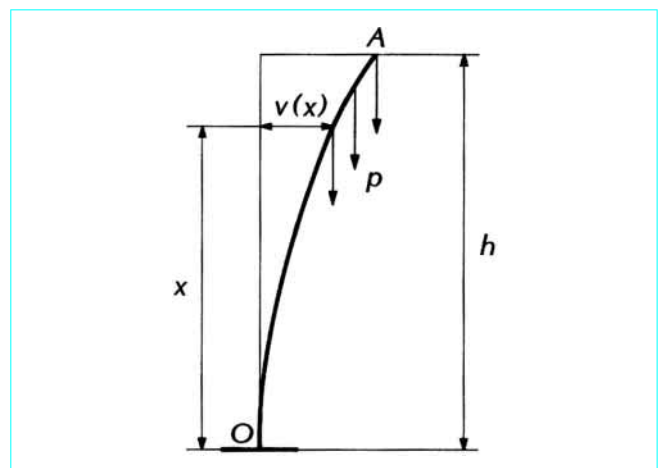


Figure 10 – Console verticale pesante encastée en O et libre en A



Pour étudier le flambement de cette poutre sous son propre poids, examinons s'il est possible de trouver un équilibre dans une position déformée définie par le déplacement transversal  $v(x)$ . Le moment fléchissant  $M(x)$  dû au poids propre a pour valeur :

$$M(x) = \int_x^h p [v(t) - v(x)] dt = EI \frac{d^2v}{dx^2}$$

En dérivant l'équation précédente par rapport à  $x$ , nous voyons que  $v(x)$  est l'intégrale de l'équation différentielle linéaire du troisième ordre :

$$EI \frac{d^3v}{dx^3} + p(h-x) \frac{dv}{dx} = 0$$

qui vérifie les conditions aux limites :

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = 0, \quad v''(h) = 0$$

Si l'on prend une nouvelle variable  $z$  définie par :

$$z = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{p}{EI}} (h-x)^3$$

la fonction  $u = dv/dz$  est une intégrale de l'équation de Bessel :

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{1}{9z^2}\right)u = 0$$

L'intégrale générale de cette équation a pour expression :

$$u = AJ_{1/3}(z) + BJ_{-1/3}(z)$$

Les constantes  $A$  et  $B$  sont définies par les conditions aux limites :

$$u\left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{ph^3}{EI}}\right) = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{3} z^{-1/3} u + z^{2/3} \frac{du}{dz}\right)_{z=0} = 0$$

La seconde montre que  $A=0$ , et la première donne,  $B$  n'étant pas nul, la condition de flambement :

$$J_{-1/3}\left(\frac{2}{3} \sqrt{\frac{ph^3}{EI}}\right) = 0$$

La plus petite racine positive de la fonction de Bessel est la plus petite racine positive de l'équation :

$$1 - \frac{1}{1! \left(-\frac{1}{3} + 1\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \frac{1}{2! \left(-\frac{1}{3} + 1\right) \left(-\frac{1}{3} + 2\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^4 - \dots = 0$$

Elle a pour valeur 1,866 35 ; la condition de flambement est donc :

$$\frac{2}{3} \sqrt{\frac{ph^3}{EI}} = 1,866 35$$

Donc, si  $p$  est donné, le flambement se produira dès que  $h$  dépassera la hauteur critique  $h_c$  :

$$h_c = 1,986 4 \sqrt[3]{\frac{EI}{p}} \tag{15}$$

Et, si  $h$  est donné, le flambement se produira dès que  $p$  dépassera la valeur critique :

$$p_c = 7,837 3 \frac{EI}{h^3} \tag{16}$$

## 2. Flambement des poutres droites de section variable

### 2.1 Étude d'une loi d'inertie permettant l'intégration formelle

#### 2.1.1 Définition de la loi d'inertie

L'inertie d'une section de la poutre  $A_1A_2$  est proportionnelle à la quatrième puissance de l'abscisse de cette section comptée d'une certaine origine  $O$  (figure 11).

Cette loi d'inertie est celle d'une poutre ayant la forme d'un tronc de cône ou d'un tronc de pyramide. Si  $x_1$  et  $x_2$  sont les abscisses des extrémités de la poutre ( $x_1 > x_2$ ), nous avons,  $I_1$  et  $I_2$  désignant les inerties des sections d'extrémités :

$$\ell = x_1 - x_2, \quad I_1 = \beta x_1^4, \quad I_2 = \beta x_2^4$$

Nous obtenons ainsi les relations :

$$\frac{1}{\sqrt[4]{\beta}} = \frac{x_1}{\sqrt[4]{I_1}} = \frac{x_2}{\sqrt[4]{I_2}} = \frac{\ell}{\sqrt[4]{I_1} - \sqrt[4]{I_2}} \tag{17}$$

qui permettent, connaissant  $\ell$ ,  $I_1$  et  $I_2$  de calculer  $x_1$ ,  $x_2$  et  $\beta$ .

#### 2.1.2 Flambement de la poutre articulée à ses extrémités

L'équation différentielle vérifiée par le déplacement transversal :

$$E \beta x^4 \frac{d^2v}{dx^2} + Fv = 0$$

s'écrit  $x^4 \frac{d^2v}{dx^2} + k^2v = 0$  avec  $k^2 = \frac{F}{E\beta}$

Son intégrale générale a pour expression :

$$v = x \left[ A \cos \frac{k}{x} + B \sin \frac{k}{x} \right]$$

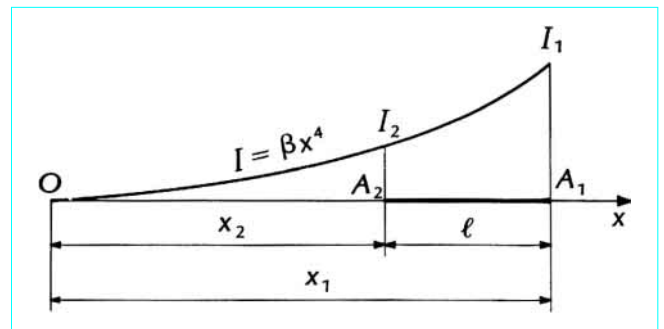


Figure 11 - Poutre droite de section variable

Les conditions aux limites  $v(x_1) = 0$  et  $v(x_2) = 0$  donnent les équations :

$$\begin{cases} A \cos \frac{k}{x_1} + B \sin \frac{k}{x_1} = 0 \\ A \cos \frac{k}{x_2} + B \sin \frac{k}{x_2} = 0 \end{cases}$$

Le flambement n'est possible que si  $A$  et  $B$  ne sont pas tous deux nuls, donc si le déterminant des équations précédentes est nul :

$$\sin \left( \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} \right) = 0$$

donc si 
$$u = \frac{k}{x_2} - \frac{k}{x_1} = \frac{k\ell}{x_1 x_2} = \pi$$

La force critique de flambement a donc pour valeur :

$$F_c = k^2 E \beta = \frac{\pi^2 x_1^2 x_2^2}{\ell^2} E \beta$$

soit, compte tenu des relations (17) :

$$F_c = \frac{\pi^2 E \sqrt{I_1 I_2}}{\ell^2} \tag{18}$$

### 2.1.3 Autres conditions aux limites

On montre aisément que la force critique de flambement de la poutre  $A_1 A_2$  encastrée à ses extrémités a pour valeur :

$$F_c = \frac{4\pi^2 E \sqrt{I_1 I_2}}{\ell^2}$$

et que la force critique de flambement de la poutre  $A_1 A_2$  articulée à une extrémité et articulée à l'autre a pour valeur :

$$F_c = 2,04575 \frac{\pi^2 E \sqrt{I_1 I_2}}{\ell^2}$$

Les formules précédentes montrent que les forces critiques sont celles d'une poutre d'inertie constante égale à  $\sqrt{I_1 I_2}$ .

Il n'en est plus de même dans le cas où la poutre est encastrée en  $A_1$  et libre en  $A_2$ . On trouve dans ce cas que  $u = \frac{k\ell}{x_1 x_2}$  est la plus petite racine positive de l'équation :

$$\tan u + \frac{\sqrt[4]{I_2}}{\sqrt[4]{I_1} - \sqrt[4]{I_2}} u = 0$$

La force critique de flambement dépend du rapport  $\rho = I_1/I_2$ , et l'on peut l'écrire sous la forme :

$$F_c = K(\rho) \frac{\pi^2 E \sqrt{I_1 I_2}}{4\ell^2}$$

$K(\rho)$  étant un facteur numérique qui tend vers 1 lorsque  $\rho$  tend vers 1.

Le tableau 3 donne quelques valeurs de  $K(\rho)$ .

Cette table montre que l'on obtient une force critique plus élevée en encastrant l'extrémité de plus grande inertie.

Tableau 3 – Valeurs de  $K(\rho)$

$\rho$	$K(\rho)$	$K(1/\rho)$
1	1	1
1,2	1,037 4	0,963 6
1,4	1,069 9	0,933 5
1,6	1,098 6	0,908 1
1,8	1,124 3	0,886 1
2	1,147 6	0,866 6
2,5	1,198 2	0,827 0
3	1,240 5	0,795 5
4	1,309 2	0,747 9
5	1,364 0	0,712 6
10	1,541 8	0,611 7
20	1,729 3	0,523 5
50	1,986 5	0,424 3
100	2,183 0	0,361 0
200	2,376 5	0,306 6
500	2,621 0	0,246 5
1 000	2,793 1	0,208 7

## 2.2 Méthode inverse

### 2.2.1 Exposé de la méthode

La méthode inverse consiste à se donner, *a priori*, le déplacement transversal  $v(x)$  au moment du flambement.

Dans le cas d'une poutre articulée à ses extrémités, nous avons :

$$EIv''(x) + F_c v(x) = 0$$

Il en résulte que la force critique :

$$F_c = \frac{EK}{\ell^2} \tag{19}$$

correspond à la loi d'inertie :

$$I(x) = -\frac{K}{\ell^2} \frac{v(x)}{v''(x)} \tag{20}$$

$K$  a les dimensions d'un moment d'inertie.

La méthode doit être légèrement modifiée dans le cas où la poutre n'est pas articulée à ses extrémités, car  $v(x)$  ne vérifie plus une équation différentielle homogène. Mais  $ax + b$  désignant une fonction linéaire convenablement choisie, la fonction  $V(x) = v(x) + ax + b$  vérifie l'équation différentielle homogène :

$$EIv''(x) + F_c V(x) = 0$$

Puisque  $V''(x)$  s'annule en même temps que  $V(x)$ , la fonction  $V(x)$  est l'ordonnée de la fibre moyenne déformée comptée à partir d'une droite passant par les extrémités libres ou articulées (où  $V'' = 0$ ) et par les points d'inflexion de la fibre moyenne déformée. La formule (19) est encore exacte, à condition de remplacer la formule (20) par la formule :

$$I(x) = -\frac{K}{\ell^2} \frac{V(x)}{V''(x)} \tag{21}$$

### 2.2.2 Exemples

#### 2.2.2.1 Poutre articulée à ses extrémités

En prenant :

$$v(x) = Ax(\ell - x)$$

la formule (20) nous donne la loi d'inertie :

$$I(x) = K \frac{x(\ell - x)}{2\ell^2}$$

et la formule (19) nous donne la force critique de flambement :

$$F_c = 12 \frac{EI_m}{\ell^2}$$

avec  $I_m = (1/12) K$  inertie moyenne de la poutre.

### 2.2.2.2 Poutre encastree à ses extrémités

En prenant :

$$v(x) = Ax^2(\ell - x)^2$$

nous trouvons :

$$V(x) = A \left[ x^2(\ell - x)^2 - \frac{1}{36} \ell^4 \right]$$

La formule (21) nous donne la loi d'inertie :

$$I(x) = \frac{K}{72} \left[ 1 + 6 \frac{x(\ell - x)}{\ell^2} \right]$$

et la formule (19) nous donne la force critique de flambement :

$$F_c = \frac{36 EI_m}{\ell^2}$$

avec  $I_m = (1/36) K$  inertie moyenne de la poutre.

### 2.2.2.3 Poutre articulée pour $x = 0$ et encastree pour $x = \ell$

En prenant :

$$v(x) = Ax(\ell - x)^2$$

nous trouvons :

$$V(x) = A \left[ x(\ell - x)^2 - \frac{1}{9} \ell^2 x \right]$$

La formule (21) nous donne la loi d'inertie :

$$I(x) = \frac{1}{6} K \frac{x}{\ell} \left( \frac{4}{3} - \frac{x}{\ell} \right)$$

et la formule (19) nous donne la force critique de flambement :

$$F_c = \frac{18 EI_m}{\ell^2}$$

avec  $I_m = (1/18) K$  inertie moyenne de la poutre.

### 2.2.2.4 Poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre

Prenons l'origine des abscisses à l'extrémité libre ; nous avons, dans ce cas,  $V(x) = v(x) - v(\ell)$ . Choisissons pour  $V(x)$  un polynôme du quatrième degré tel que  $V(0) = 0$ ,  $V''(0) = 0$  et  $V''(\ell) = 0$  ; nous trouvons,  $\alpha$  désignant un paramètre :

$$V(x) = A \left[ \ell^3 x - \frac{1}{3} \alpha \ell x^3 - \frac{1}{4} (1 - \alpha) x^4 \right]$$

La formule (21) nous donne la loi d'inertie :

$$I(x) = K \frac{1 - \frac{1}{3} \alpha \left( \frac{x}{\ell} \right)^2 - \frac{1}{4} (1 - \alpha) \left( \frac{x}{\ell} \right)^3}{2\alpha + 3(1 - \alpha) \frac{x}{\ell}}$$

En tenant compte de :

$$I_0 = I(0) = \frac{K}{2\alpha} \quad \text{et} \quad I_1 = I(\ell) = K \left( \frac{9 - \alpha}{36 - 12\alpha} \right)$$

la formule (19) nous donne la force critique de flambement :

$$F_c = 2\alpha \frac{EI_0}{\ell^2} = \frac{36 - 12\alpha}{9 - \alpha} \cdot \frac{EI_1}{\ell^2}$$

Par exemple, si  $\alpha = 2$ , nous avons  $I_0 = \frac{1}{4} K$  et  $I_1 = \frac{7}{12} K$  et

$$F_c = 4 \frac{EI_0}{\ell^2} = \frac{12}{7} \cdot \frac{EI_1}{\ell^2}$$

## 2.3 Méthodes numériques de calcul des forces critiques

### 2.3.1 Méthode des approximations successives

Elle consiste à résoudre par approximations successives l'équation différentielle vérifiée par le déplacement transversal  $v(x)$ . Ce déplacement doit vérifier les conditions aux limites, et la poutre déformée doit rester en équilibre indifférent lorsqu'elle est soumise à une force de compression égale à la force critique de flambement.

Partons donc d'une fonction  $v_0(x)$  vérifiant les conditions aux limites. En supposant la poutre soumise à une force de compression égale à l'unité, le moment fléchissant supporté par la poutre est  $\mathcal{M} = -v_0(x) + Ax + B$ , les constantes  $A$  et  $B$  étant déterminées par les conditions aux limites ( $A$  et  $B$  sont nuls si la poutre est articulée à ses extrémités,  $B$  est nul si la poutre est articulée pour  $x = 0$  et encastree à l'extrémité  $x = \ell$ ). Par double intégration, on déterminera une nouvelle fonction  $v_1(x)$  vérifiant les conditions aux limites telle que :

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = - \frac{v_0(x) + Ax + B}{EI(x)}$$

Si  $v_0(x)$  était, à un facteur près, le déplacement transversal qui se produit au moment du flambement, l'application d'une force de compression égale à la force critique conduirait à un déplacement  $F_c v_1(x)$  identique à  $v_0(x)$ , et l'on aurait :

$$F_c = \frac{v_0(x)}{v_1(x)}$$

En réalité, on ne connaît qu'une valeur approchée  $v_0(x)$  du déplacement au moment du flambement ; le rapport  $v_0(x)/v_1(x)$  n'est donc pas constant, et l'on obtient une valeur approchée de la force critique en prenant la valeur de ce rapport qui correspond aux plus grandes valeurs de  $v_0(x)$  et de  $v_1(x)$ .

Pour obtenir une meilleure approximation, on détermine une suite de fonctions  $v_0(x)$ ,  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ , ...,  $v_n(x)$ , ..., la fonction  $v_n(x)$  se déduisant de  $v_{n-1}(x)$  de la même façon que  $v_1(x)$  se déduit de  $v_0(x)$ . On démontre que le rapport  $v_{n-1}(x)/v_n(x)$  tend vers  $F_c$  lorsque  $n$  augmente indéfiniment. La force critique a donc pour valeur approchée :

$$F_c = \frac{v_{n-1}(x)}{v_n(x)}$$

Il est même possible de démontrer que  $F_c$  est compris entre la plus grande et la plus petite valeur du rapport  $v_{n-1}(x)/v_n(x)$ .

En général, et c'est ce qui rend la méthode très puissante, les fonctions  $v_n(x)$  seront définies par une table de valeurs correspondant à des sections équidistantes, et les intégrations sont calculées numériquement au moyen des formules données dans l'article *Structures élastiques à plan moyen* [C 2 015] du présent traité.

### 2.3.2 Méthode de l'énergie

Cette méthode, due à S. Timoshenko, est plus rapide que la méthode des approximations successives. Considérons une poutre droite soumise à un effort de compression  $F$ . Donnons à cette poutre un déplacement transversal vérifiant les conditions aux limites. L'équilibre sera stable si le travail  $\Delta \mathcal{C}$  effectué par la force  $F$  est inférieur à la variation de l'énergie de déformation  $\Delta W$  de la poutre. En effet, si  $\Delta \mathcal{C} > \Delta W$ , la poutre reçoit une quantité de travail supérieure à celle qu'elle peut emmagasiner en se déformant, et, si  $\Delta \mathcal{C} < \Delta W$ , il faut appliquer des forces transversales pour maintenir la déformation. Le flambement correspond donc à  $\Delta \mathcal{C} = \Delta W$ .

Calculons  $\Delta \mathcal{C}$ . Si  $\delta$  désigne le rapprochement des extrémités de la poutre pendant la déformation et  $\theta = dv/dx$  le petit angle de  $Ox$  et de la tangente à la fibre moyenne déformée, nous avons :

$$\Delta \mathcal{C} = F\delta = F \int_0^\ell (1 - \cos \theta) dx = \frac{1}{2} F \int_0^\ell \theta^2 dx = \frac{1}{2} F \int_0^\ell v'^2 dx$$

et, comme la variation de l'énergie de déformation a pour valeur :

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M^2}{EI} dx = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI v''^2 dx$$

la valeur approchée, *par excès*, de la force critique de flambement est :

$$F_c = \frac{\int_0^\ell EI v''^2 dx}{\int_0^\ell v'^2 dx} \tag{22}$$

La force critique de flambement est le minimum de l'expression précédente lorsque  $v(x)$  est une fonction de l'ensemble  $\mathcal{F}$  des fonctions vérifiant les conditions aux limites :

$$F_c = \text{Min}_{v \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{\int_0^\ell EI v''^2 dx}{\int_0^\ell v'^2 dx} \right\} \tag{23}$$

On obtiendra une valeur approchée convenable en prenant  $v(x)$  égal au déplacement transversal dû à une densité de charge uniforme.

Si l'on désire une meilleure approximation, on prendra, dans la formule (22), l'une des fonctions déterminées dans la méthode des approximations successives ; cette formule a l'avantage de faire intervenir toutes les valeurs de la fonction. En prenant la fonction  $v_1(x)$  ou au plus  $v_2(x)$ , on obtient la force critique avec une erreur relative inférieure au millième.

**Nota :** la méthode de l'énergie s'applique facilement à l'étude de la stabilité d'une structure quelconque. Il suffit de donner à la structure une déformation quelconque compatible avec les liaisons, et d'examiner si le travail des forces extérieures est bien inférieur à la variation de l'énergie de déformation de la structure.

### 2.3.3 Exemples d'application de la méthode de l'énergie

#### 2.3.3.1 Flambement d'une console de section constante

La fonction :

$$v_0(x) = \frac{x^2(3\ell - x)}{2\ell^3} e$$

vérifie les conditions aux limites :

$$v_0(0) = 0, \quad v'_0(0) = 0, \quad v''_0(\ell) = 0$$

On trouve :

$$\Delta \mathcal{C} = \frac{3}{5} \frac{Fe^2}{\ell} \quad \text{et} \quad \Delta W = \frac{3}{2} EI \frac{e^2}{\ell^3}$$

Nous trouvons ainsi la valeur approchée de la force critique :

$$F_c = 2,5 \frac{EI}{\ell^2}$$

qui ne dépasse la valeur exacte :

$$F_c = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} = 2,467 40 \frac{EI}{\ell^2}$$

que de 1,3 %.

Appliquons la méthode à la fonction  $v_1(x)$  déduite de  $v_0(x)$  au moyen de la méthode des approximations successives. Nous avons :

$$v''_1(x) = \frac{M}{EI} = \frac{F(e - v_0)}{EI} = \frac{Fe}{EI} \left[ 1 - \frac{3}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \right]$$

$$v'_1(x) = \int_0^x v''_1(t) dt = \frac{F\ell e}{EI} \left[ \frac{x}{\ell} - \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\ell}\right)^3 + \frac{1}{8} \left(\frac{x}{\ell}\right)^4 \right]$$

Donc, sans avoir besoin de déterminer  $v_1(x)$ , nous avons :

$$\int_0^\ell EI v''_1^2 dx = \frac{17}{35} \cdot \frac{F^2 e^2 \ell}{EI}, \quad \int_0^\ell v'^2_1 dx = \frac{62}{315} \cdot \frac{F^2 e^2 \ell^3}{(EI)^2}$$

La formule (22) nous donne la valeur approchée de la force critique :

$$F_c = \frac{153}{62} \cdot \frac{EI}{\ell^2} = 2,467 74 \frac{EI}{\ell^2}$$

qui ne dépasse la valeur exacte que de 0,014 %.

#### 2.3.3.2 Flambement d'une poutre droite dans un milieu élastique

Conservons les notations du paragraphe 1.5 et, puisque  $v(0) = 0$ ,  $v(\ell) = 0$ , choisissons  $v(x)$  sous forme d'une série de sinus :

$$v(x) = a_1 \sin \frac{\pi x}{\ell} + a_2 \frac{\sin 2\pi x}{\ell} + a_3 \sin \frac{3\pi x}{\ell} + \dots$$

Le travail de la force  $F$  a pour valeur :

$$\Delta \mathcal{C} = \frac{1}{2} \int_0^\ell v'^2 dx = \frac{\pi^2 F}{4\ell} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$$

L'énergie de déformation est la somme de l'énergie de déformation  $\Delta W_1$  de la poutre :

$$\Delta W_1 = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI v''^2 dx = \frac{\pi^4 EI}{4\ell^3} \sum_{n=1}^{\infty} n^4 a_n^2$$

et de l'énergie de déformation  $\Delta W_2$  des appuis élastiques :

$$\Delta W_2 = \frac{1}{2} \int_0^\ell \varepsilon v^2 dx = \frac{1}{4} \varepsilon \ell \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

La force critique de flambement correspond à  $\Delta \mathcal{C} = \Delta W_1 + \Delta W_2$ , donc :

$$F_c = \text{Min} \left\{ \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \frac{\sum n^4 a_n^2 + \frac{\varepsilon \ell^4}{\pi^4 EI} \sum a_n^2}{\sum n^2 a_n^2} \right\}$$

Il est facile de trouver le minimum de l'expression précédente en observant qu'étant donné une suite de fractions à termes positifs :

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\beta_2}, \frac{\alpha_3}{\beta_3}, \dots, \frac{\alpha_n}{\beta_n}, \dots$$

la fraction :

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n + \dots}{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n + \dots}$$

est comprise entre la plus grande et la plus petite fraction de la suite. Nous devons donc prendre tous les coefficients  $\alpha_n$  nuls à l'exception de l'un d'entre eux,  $\alpha_n$  par exemple. Nous retrouvons ainsi la formule (14). La méthode de l'énergie a l'avantage de s'appliquer lorsque l'inertie  $I$  et le module de réaction du milieu sont variables.

### 3. Flambement des poutres circulaires de section constante

#### 3.1 Formules préliminaires

##### 3.1.1 Système des forces extérieures relatif à une section

Une poutre circulaire de rayon  $a$  (figure 12) est soumise à une densité de force extérieure :

$$\vec{f} = q\vec{i} + p\vec{j}$$

avec  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  vecteurs unité tangent et normal à la fibre moyenne.

Au point  $G$  de la fibre moyenne, défini par l'angle  $(OG_0, OG) = \theta$  ou par l'abscisse curviligne  $s = a\theta$ , la résultante générale  $\vec{R}$  et le moment résultant  $\vec{L}$  du système des forces extérieures ont pour expressions :

$$\begin{cases} \vec{R} = \vec{R}_0 + \int_0^s \vec{f}(t) dt \\ \vec{L} = \vec{L}_0 + \vec{R}_0 \wedge \vec{G}_0G + \int_0^s \vec{f}(t) \wedge \vec{g}G dt \end{cases}$$

avec  $\vec{R}_0$  et  $\vec{L}_0$  valeurs de  $\vec{R}$  et de  $\vec{L}$  en  $G_0$ ,  
 $t$  abscisse curviligne du point courant  $g$  de l'arc  $G_0G$ .

Dérivons les relations précédentes par rapport à  $s$ ; nous trouvons puisque  $d\vec{G}/ds = \vec{i}$  :

$$\begin{cases} d\vec{R} = \vec{f}(s) \\ \frac{d\vec{L}}{ds} = \left[ \vec{R}_0 + \int_0^s \vec{f}(t) dt \right] \wedge \vec{i} = \vec{R} \wedge \vec{i} \end{cases}$$

Remplaçons  $\vec{R}$  et  $\vec{L}$  par leurs expressions :

$$\vec{R} = N\vec{i} + T\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{L} = -M\vec{k}$$

avec  $\vec{k}$  vecteur unité qui forme avec les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  un trièdre trirectangle direct,

$N$  effort normal,

$T$  effort tranchant,

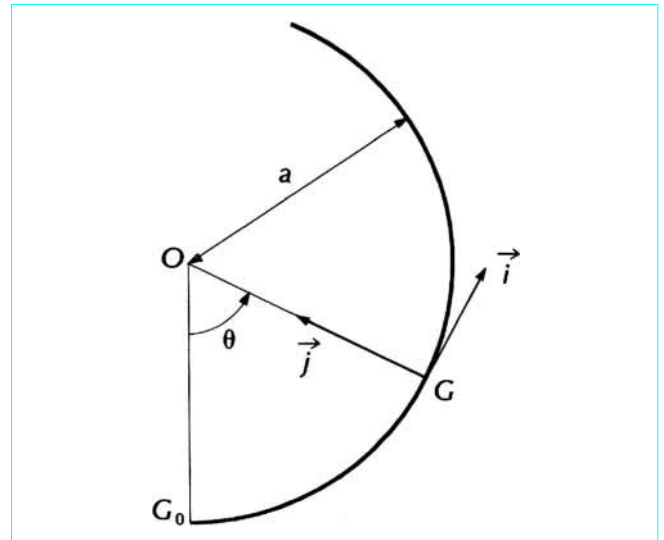


Figure 12 – Poutre circulaire de section constante

$M$  moment fléchissant compté positivement dans le sens des aiguilles d'une montre (convention de signe des poutres à plan moyen).

En tenant compte des formules :

$$\frac{d\vec{i}}{ds} = \frac{\vec{j}}{a} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{j}}{ds} = -\frac{\vec{i}}{a}$$

nous obtenons les relations :

$$\frac{dN}{ds} - \frac{T}{a} = q, \quad \frac{dT}{ds} + \frac{N}{a} = p, \quad \frac{dM}{ds} = T \quad (24)$$

que l'on peut également écrire en prenant  $\theta$  pour variable :

$$\frac{dN}{d\theta} - T = qa, \quad \frac{dT}{d\theta} + N = pa, \quad \frac{dM}{d\theta} = aT \quad (25)$$

Dans le cas où la poutre n'est soumise qu'à une pression normale  $p$ , nous avons,  $q$  étant nul :

$$\frac{d}{d\theta} (M - Na) = 0$$

donc,  $C$  désignant une constante :

$$M = Na + C$$

et, puisque d'après les équations (25) :

$$Na = pa^2 - \frac{d(aT)}{d\theta} = pa^2 - \frac{d^2M}{d\theta^2}$$

nous obtenons la relation :

$$\mathcal{L}(M) = \frac{d^2M}{d\theta^2} + M = pa^2 + C \quad (26)$$

##### 3.1.2 Rotation et translation d'une section

Les formules de Navier-Bresse donnent la rotation  $\omega\vec{k}$  et la translation  $\vec{\lambda}$  de la section  $G$ , connaissant la rotation  $\omega_0\vec{k}$  et la translation  $\vec{\lambda}_0$  de la section  $G_0$ , et les moments fléchissants le long de l'arc

$G_0G$  (nous négligeons les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant) :

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \int_0^s \frac{M(t)}{EI} dt \\ \vec{\lambda} = \vec{\lambda}_0 + \omega_0 \vec{k} \wedge \vec{G}_0G + \int_0^s \vec{k} \wedge \vec{gG} \frac{M(t)}{EI} dt \end{cases}$$

Dérivons les équations précédentes par rapport à  $s$  :

$$\begin{cases} \frac{d\omega}{ds} = \frac{M}{EI} \\ \frac{d\vec{\lambda}}{ds} = \left[ \omega_0 \vec{k} + \int_0^s \vec{k} \frac{M(t)}{EI} dt \right] \wedge \vec{i} = \omega \vec{j} \end{cases}$$

et remplaçons  $\vec{\lambda}$  par son expression en fonction du déplacement tangentiel  $U$  et du déplacement radial  $V$  :

$$\vec{\lambda} = U \vec{i} + V \vec{j}$$

nous obtenons les équations :

$$\frac{d\omega}{ds} = \frac{M}{EI}, \quad \frac{dU}{ds} - \frac{V}{a} = 0, \quad \frac{dV}{ds} + \frac{U}{a} = \omega \quad (27)$$

que l'on peut également écrire en prenant  $\theta$  pour variable :

$$\frac{d\omega}{d\theta} = \frac{Ma}{EI}, \quad \frac{dU}{d\theta} - V = 0, \quad \frac{dV}{d\theta} + U = a\omega \quad (28)$$

La deuxième formule (28) montre que lorsque la fibre moyenne  $\Gamma$  a ses extrémités fixes ou bien est une courbe fermée, nous avons :

$$\int_{\Gamma} V d\theta = 0 \quad (29)$$

Enfin, on vérifie aisément la relation suivante qui est une conséquence des équations (28) :

$$\mathcal{L}(V) = \frac{d^2V}{d\theta^2} + V = \frac{Ma^2}{EI} \quad (30)$$

**Nota** : les formules (24), (25), (27) et (28) sont valables pour une poutre à plan moyen quelconque, à condition de désigner par  $\theta$  l'angle de  $Ox$  et de la tangente à la fibre moyenne ; dans ce cas le rayon de courbure  $a = ds/d\theta$  est une fonction de  $s$  ou de  $\theta$ .

### 3.2 Flambement d'un anneau circulaire

#### 3.2.1 Flambement sous l'action d'une pression uniforme

Considérons (figure 13) un arc  $G_0G$  de la fibre moyenne déformée. Pour calculer le moment fléchissant produit en  $G$  par la pression  $p$ , nous pouvons remplacer la pression  $p$  agissant sur l'arc  $G_0G$  par la même pression  $p$  appliquée sur les rayons  $OG_0$  et  $OG$ , comme il est indiqué sur la figure 13 ; en effet l'ensemble des pressions  $p$  sur le contour fermé  $OG_0G$  constitue un système de forces équivalent à zéro. Parmi les forces qui interviennent dans le calcul du moment fléchissant, seule la résultante des pressions sur  $OG$  dépend des coordonnées  $(x, y)$  de  $G$  ; les autres n'en dépendent pas et leur moment par rapport à  $G$  est une fonction linéaire de  $x$  et de  $y$ . Le moment fléchissant est donc de la forme :

$$M = Ax + By + C + \frac{1}{2} p(x^2 + y^2)$$

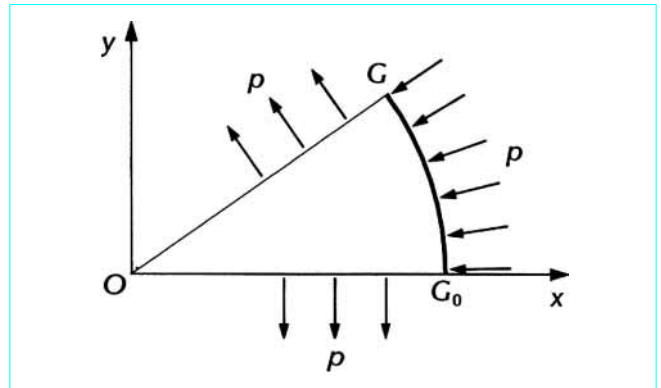


Figure 13 – Anneau circulaire

Soit  $V(\theta)$  la composante radiale du déplacement de  $G$ . L'équation polaire de la fibre moyenne déformée étant  $\rho = a - V$  à des infiniment petits d'ordre supérieur près, nous avons :

$$M = A(a - V) \cos \theta + B(a - V) \sin \theta + C + \frac{1}{2} p(a - V)^2$$

et, comme le moment fléchissant est identiquement nul lorsque  $V$  est identiquement nul,  $A$ ,  $B$  et  $C + (1/2) pa^2$  sont nuls ; donc, en négligeant  $V^2$  devant  $V$  qui est petit, nous trouvons :

$$M = -paV \quad (31)$$

Il résulte alors de la relation (30) que  $V$  est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} + \left(1 + \frac{pa^3}{EI}\right) V = 0$$

En posant :

$$k^2 = 1 + \frac{pa^3}{EI} \quad (32)$$

l'intégrale générale de l'équation différentielle est :

$$V = A \cos k\theta + B \sin k\theta$$

La condition (29) ne peut être satisfaite que si  $k$ , qui est supérieur à 1, est un entier. La pression critique de flambement de l'anneau est obtenue en prenant  $k = 2$  :

$$p_c = \frac{3EI}{a^3} \quad (33)$$

Cette formule s'applique au cas d'un long tube de rayon moyen  $a$  et d'épaisseur  $e$ . Mais, puisque tout anneau élémentaire constituant le tube ne peut se dilater dans la direction de l'axe du tube, il faut remplacer  $E$  par  $E/(1 - \nu^2)$ ,  $\nu$  désignant le coefficient de Poisson. Donc, en tenant compte de ce que  $I = (1/12)e^3$ , nous obtenons :

$$p_c = \frac{Ee^3}{4(1 - \nu^2)a^3}$$

#### 3.2.2 Flambement d'un anneau circulaire placé dans un milieu élastique sous l'effet d'une pression uniforme

Soit  $V$  la composante radiale du déplacement d'un point de l'anneau au moment du flambement. Le moment fléchissant  $M$  est la somme du moment  $M_1$  dû à la pression  $p$  et du moment  $M_2$  dû

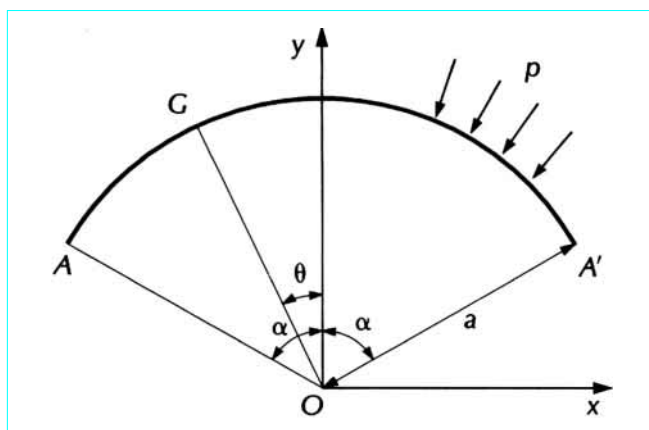


Figure 14 - Arc circulaire

à la densité de réaction  $-\varepsilon V$  exercée par le milieu. Nous avons, d'après les formules (31) et (26) :

$$M_1 = -paV \quad \text{et} \quad \mathcal{L}(M_2) = -\varepsilon a^2 V + C$$

donc  $\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(M_1) + \mathcal{L}(M_2) = C - \varepsilon a^2 V - pa\mathcal{L}(V)$

En éliminant  $M$  entre l'équation précédente et l'équation (30), nous obtenons l'équation différentielle vérifiée par le déplacement radial :

$$\mathcal{L}\mathcal{L}(V) + \frac{pa^3}{EI} \mathcal{L}(V) + \frac{\varepsilon a^4}{EI} V = 0$$

En effet, la condition (29) montre que  $C$  est nul.

En définissant les quantités sans dimensions :

$$\alpha = \frac{pa^3}{EI} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{\varepsilon a^4}{EI} \quad (34)$$

l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{d^4 V}{d\theta^4} + (2 + \alpha) \frac{d^2 V}{d\theta^2} + (1 + \alpha + \beta) V = 0$$

L'intégrale générale de cette équation différentielle du quatrième ordre à coefficients constants d'équation caractéristique :

$$\varphi(z) = z^4 + (2 + \alpha)z^2 + (1 + \alpha + \beta) = 0$$

a deux formes différentes selon le signe du discriminant :

$$\Delta = (2 + \alpha)^2 - 4(1 + \alpha + \beta) = \alpha^2 - 4\beta$$

Lorsque  $\alpha^2 < 4\beta$ , les racines de l'équation caractéristique sont de la forme  $\pm \lambda \pm i\mu$ , et l'intégrale générale est de la forme :

$$V = e^{-\lambda\theta} (A \cos \mu\theta + B \sin \mu\theta) + e^{\lambda\theta} (A' \cos \mu\theta + B' \sin \mu\theta)$$

Le flambement ne peut pas se produire dans ce cas, puisque  $V$  n'est jamais une fonction périodique de  $\theta$  de période  $2\pi$ .

Lorsque  $\alpha^2 > 4\beta$ , les racines de l'équation caractéristique sont imaginaires pures  $\pm ik$  et  $\pm ik'$  et l'intégrale générale est de la forme :

$$V = A \cos k\theta + B \sin k\theta + A' \cos k'\theta + B' \sin k'\theta$$

$V$  est une fonction périodique de période  $2\pi$  dans les deux cas suivants :

- $k$  est un entier supérieur à 1, et  $A' = B' = 0$  ;
- $k'$  est un entier supérieur à 1, et  $A = B = 0$ .

Il convient en effet d'exclure la valeur 1 pour  $k$  ou  $k'$ , car elle conduit à un simple déplacement d'ensemble de l'anneau.

Il en résulte que l'équation caractéristique doit avoir une racine égale à  $in$ , avec  $n > 1$ . La condition  $\varphi(in) = 0$  donne immédiatement :

$$\alpha = n^2 - 1 + \frac{\beta}{n^2 - 1}$$

Compte tenu de la valeur (34) de  $\alpha$ , nous trouvons que la pression critique de flambement a pour valeur :

$$p_c = \text{Min}_{n>1} \left\{ \frac{EI}{a^3} \left( n^2 - 1 + \frac{\beta}{n^2 - 1} \right) \right\} \quad (35)$$

Le produit des deux termes entre parenthèses étant constant, le minimum de l'expression (35) a lieu lorsque  $n$  est égale à l'un des deux entiers encadrant la valeur  $\sqrt{1 + \sqrt{\beta}}$  qui correspond à l'égalité de ces deux termes ;  $n$  est le nombre d'ondes de la fibre moyenne déformée au moment du flambement.

Si nous prenons  $n = \sqrt{1 + \sqrt{\beta}}$  dans la formule (35) nous voyons que :

$$p_c \geq \frac{2EI}{a^3} \sqrt{\beta}$$

Lorsque  $\beta$  est grand, la pression critique a pour valeur, avec une bonne approximation :

$$p_c = \frac{2}{a} \sqrt{EI\varepsilon}$$

Cette pression correspond à un effort normal critique :

$$N_c = p_c a = 2 \sqrt{EI\varepsilon}$$

Lorsque  $\beta$  est petit, le minimum est obtenu pour  $n = 2$ , et :

$$p_c = \frac{3EI}{a^3} \left( 1 + \frac{1}{9} \beta \right)$$

**Nota :** la théorie précédente permet d'étudier la stabilité d'un tube en acier foncé dans un terrain sous la nappe phréatique.

### 3.3 Flambement d'un arc circulaire sous l'effet d'une pression uniforme

#### 3.3.1 Équation différentielle vérifiée par le déplacement radial

Considérons (figure 14) un arc circulaire  $A'A$  d'ouverture angulaire  $2\alpha$ , et repérons les sections par l'angle  $\theta = (Oy, OG)$  compté à partir de l'axe de symétrie.

L'arc n'étant soumis qu'à une pression extérieure uniforme  $p$ , l'effort normal est constant et égal à  $pa$ . Pour étudier la stabilité élastique de l'arc, donc déterminer la pression critique  $p_c$  qui entraîne le flambement, donnons à l'arc un déplacement radial  $V(\theta)$  respectant l'invariabilité des appuis, donc tel que l'on ait, d'après l'équation (29) :

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} V d\theta = 0 \quad (36)$$

La réaction de l'appui  $A'(\theta = -\alpha)$ , qui avant déformation se réduisait à l'effort normal  $N = pa$ , comprend un couple  $M_0$  et une force dont les composantes suivant la tangente et la normale à la fibre moyenne sont  $N + N_0$  et  $T_0$ . En observant que  $M_0$ ,  $N_0$  et  $T_0$  sont petits en même temps que  $V$  et en négligeant des infiniment petits d'ordre supérieur, nous trouvons pour valeur du moment fléchissant :

$$M = -paV + M_0 + T_0 a \sin(\theta + \alpha) + N_0 a [1 - \cos(\theta + \alpha)]$$



En reportant cette valeur dans la formule (30), nous voyons que  $V$  est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2 V}{d\theta^2} + k^2 V = \frac{a^2}{EI} \left\{ M_0 + T_0 a \sin(\theta + \alpha) + N_0 a [1 - \cos(\theta + \alpha)] \right\} \quad (37)$$

$k^2$  étant toujours défini par l'équation (32) :

$$k^2 = 1 + \frac{pa^3}{EI}$$

### 3.3.2 Arc articulé à ses extrémités

Le moment fléchissant étant nul pour  $\theta = \pm \alpha$ , nous avons nécessairement :

$$M_0 = 0, \quad \text{et} \quad T_0 \cos \alpha + N_0 \sin \alpha = 0$$

de sorte que l'équation différentielle (37) devient :

$$\frac{d^2 V}{d\theta^2} + k^2 V = \frac{T_0 a^3}{EI} \cdot \frac{\cos \theta - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

L'intégrale générale de cette équation est :

$$V = A \cos k\theta + B \sin k\theta + \frac{T_0 a^3}{EI \sin \alpha} \left( \frac{\cos \theta}{k^2 - 1} - \frac{\cos \alpha}{k^2} \right)$$

La condition (36) et les conditions aux limites :

$$V(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad V(-\alpha) = 0$$

donnent un système de trois équations linéaires et homogènes en  $A$ ,  $B$  et  $T_0$  ; on trouve aisément que la plus petite valeur de  $k$  pour laquelle ce système a une solution non nulle est  $\pi/\alpha$  ; la pression critique de flambement de l'arc a donc pour valeur :

$$p_c = \frac{EI}{a^3} \left( \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \quad (38)$$

### 3.3.3 Arc encastré à ses extrémités

L'intégrale générale de l'équation (37) a pour expression :

$$V = A \cos k\theta + B \sin k\theta + \frac{a^2}{EI} \left[ \frac{M_0}{k^2} + T_0 a \frac{\sin(\theta + \alpha)}{k^2 - 1} + N_0 a \left( \frac{1}{k^2} - \frac{\cos(\theta + \alpha)}{k^2 - 1} \right) \right]$$

La condition (36) et les conditions aux limites :

$$V(\alpha) = 0, \quad V'(\alpha) = 0, \quad V(-\alpha) = 0, \quad V'(-\alpha) = 0$$

donnent un système de cinq équations linéaires et homogènes en  $A$ ,  $B$ ,  $M_0$ ,  $N_0$  et  $T_0$ . L'étude de ce système montre que la plus petite valeur de  $k$  pour laquelle ce système a une solution non nulle est la plus petite racine positive  $k_1$  de l'équation :

$$\tan k\alpha = k \tan \alpha$$

La pression critique de flambement  $p_c$  a pour valeur :

$$p_c = (k_1^2 - 1) \frac{EI}{a^3} \quad (39)$$

Le tableau 4 donne les valeurs du facteur  $k_1^2 - 1$  pour des angles  $\alpha$  variant de dix degrés en dix degrés. Pour  $\alpha = 180^\circ$ , on retrouve évidemment la pression critique de flambement d'un anneau.

Tableau 4 – Valeurs du facteur  $k_1^2 - 1$  [formule (39)]

$\alpha$ (degrés)	$k_1^2 - 1$	$\alpha$ (degrés)	$k_1^2 - 1$	$\alpha$ (degrés)	$k_1^2 - 1$
10	662,49	70	13,277	130	3,996 1
20	165,38	80	10,137	140	3,565 8
30	73,328	90	8	150	3,270 3
40	41,118	100	6,490 4	160	3,091 5
50	26,220	110	5,395 8	170	3,012 9
60	18,138	120	4,590 2	180	3

## 4. Flambement des arcs de section quelconque

### 4.1 Introduction

Nous exposerons deux méthodes de calcul de la poussée critique de flambement d'un arc de section constante soumis à des charges verticales : la méthode des approximations successives et la méthode de l'énergie. Nous examinerons les divers types d'arcs : arc encastré, arc à deux articulations, arc à une seule articulation et arc à trois articulations.

Comme le déplacement d'un point de la fibre moyenne de l'arc a une composante horizontale, il convient de distinguer deux modes différents d'application des charges :

— **charges liées à l'arc** ; les charges sont appliquées aux points matériels de l'arc ; la ligne d'action d'une charge se déplace donc en même temps que le point d'application de la charge ;

— **charges liées à l'espace** ; les lignes d'action des charges sont fixes dans l'espace ; une charge appliquée initialement à un point matériel de l'arc n'est plus appliquée au même point matériel de l'arc après déformation.

Ces deux modes d'application des charges conduisent, pour un arc donné, à des valeurs légèrement différentes de la poussée critique. C'est le cas des charges liées à l'arc qui présente évidemment le plus d'intérêt pour le constructeur.

### 4.2 Étude géométrique des déformations de l'arc

#### 4.2.1 Fonctions considérées dans la déformation d'un arc

Les axes  $Oxy$  étant rectangulaires, la fibre moyenne  $AB$  d'équation  $y = y(x)$  vient, après déformation, en  $A'B'$  (figure 15).

Un point matériel  $P$  de coordonnées  $(x, y)$  vient, après déformation, en un point  $P'$  de coordonnées  $(x + \delta x, y + \delta y)$ . L'axe  $Ox$  fait avec la tangente en  $P$  à  $AB$  l'angle  $\theta$  et avec la tangente en  $P'$  à  $A'B'$  l'angle  $\theta + \delta\theta$ . Nous poserons :

$$\delta x = u, \quad \delta y = v, \quad \delta\theta = \varphi$$

Enfin, il existe un point  $P''$  de  $A'B'$  qui a même abscisse que  $P$  ; nous poserons  $\overline{PP''} = z$ .

Les fonctions  $u$ ,  $v$ ,  $\varphi$  et  $z$  sont des fonctions de  $x$  que nous considérons comme des infiniment petits du premier ordre. Nous allons montrer que la connaissance de la fonction  $v$  entraîne celles des fonctions  $u$ ,  $\varphi$  et  $z$ .



■ **Calcul de  $u$**

Un point  $P_1$  voisin de  $P$  de coordonnées :

$$(x + dx, y + dy)$$

vient en un point  $P'_1$  voisin de  $P'$  de coordonnées :

$$(x + u + dx + du, y + v + dy + dv)$$

en écrivant que  $PP_1 = P'P'_1$ , nous obtenons :

$$dx^2 + dy^2 = (dx + du)^2 + (dy + dv)^2$$

soit, en désignant par  $y'$ ,  $u'$  et  $v'$  les dérivées de  $y$ ,  $u$  et  $v$  :

$$u' + v' y' = - \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2)$$

$u' + v' y'$  étant un infiniment petit du second ordre, nous pouvons, au troisième ordre près, remplacer dans le second membre  $u'$  par  $-v' y'$  ; nous obtenons ainsi la formule :

$$u' + v' y' = - \frac{1}{2} (1 + y'^2) v'^2 \tag{40}$$

qui se réduit, lorsque l'on néglige les termes du second ordre, à :

$$u' + v' y' = 0 \tag{41}$$

Dans ce cas,  $u(x)$  se déduit de  $v(x)$  par la formule :

$$u(x) = u(a) - \int_a^x v'(\xi) y'(\xi) d\xi \tag{42}$$

■ **Calcul de  $\varphi$**

Des relations :

$$\tan \theta = y' \quad \text{et} \quad \tan(\theta + \varphi) = \frac{y' + v'}{1 + u'}$$

on en déduit aisément, en négligeant les termes d'ordre égal ou supérieur au second :

$$\varphi = v'$$

■ **Calcul de  $z$**

Au voisinage de  $P'$  les équations paramétriques de la fibre moyenne déformée s'écrivent,  $u, v, u', v', u'', v'', \dots$  désignant les valeurs des fonctions  $u, v$  et de leurs dérivées au point  $P$  :

$$\begin{cases} X = x + u + (1 + u') dx + \frac{1}{2} u'' dx^2 + \dots \\ Y = y + v + (y' + v') dx + \frac{1}{2} (y'' + v'') dx^2 + \dots \end{cases}$$

Le paramètre du point  $P''$  est défini par  $X = x$  ; on trouve ainsi, en négligeant les termes d'ordre supérieur au second :

$$dx = -u + uu'$$

Il en résulte que  $z = Y - y$  a pour expression :

$$z = v - uy' \tag{43}$$

que l'on retrouve aisément en considérant le triangle  $PP'P''$ .

**4.2.2 Moment fléchissant résultant de la déformation**

La courbure de la fibre moyenne en  $P$  est  $1/R = d\theta/ds$  et la courbure de la fibre moyenne déformée en  $P'$  est  $1/R' = d(\theta + \varphi)/ds$ , puisque les éléments d'arc ont même longueur. Donc :

$$\frac{1}{R'} - \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dx} \cdot \frac{dx}{ds} = \varphi' \cos \theta = v'' \cos \theta$$

Si  $E$  est le module d'élasticité et  $I$  l'inertie de la section, le moment fléchissant résultant de la variation de courbure a pour valeur :

$$M = EI \left( \frac{1}{R'} - \frac{1}{R} \right) = EI v'' \cos \theta$$

soit, en désignant par  $J = I \cos \theta$  l'inertie réduite et par  $D$  le produit  $EJ$  :

$$M = Dv'' \tag{44}$$

formule qui peut également être déduite des formules de Navier-Bresse, à condition de négliger les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant.

**4.2.3 Conditions aux limites vérifiées par le déplacement vertical**

**4.2.3.1 Arc encastré**

Les axes étant choisis comme il est indiqué sur la figure 16, la fonction  $v(x)$  doit vérifier les cinq conditions aux limites :

$$\begin{cases} v(0) = 0, & v(\ell) = 0, & v'(0) = 0, & v'(\ell) = 0 \\ \int_0^\ell v' y' dx = 0 \end{cases}$$

la dernière résultant de la formule (42).

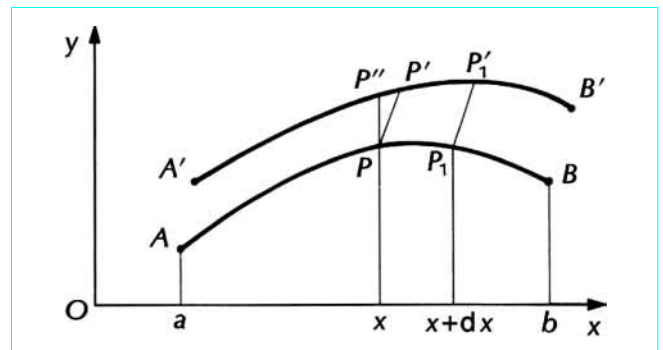


Figure 15 - Déformations d'un arc de section quelconque

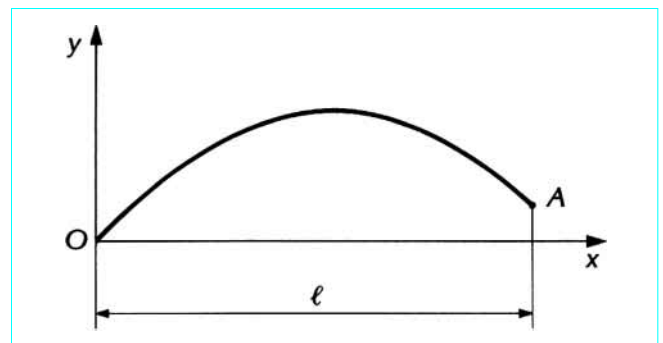


Figure 16 - Arc encastré ou arc à deux articulations

4.2.3.2 Arc à deux articulations

Les axes étant ceux de la figure 16, la fonction  $v(x)$  doit vérifier les cinq conditions aux limites :

$$\begin{cases} v(0) = 0, & v(\ell) = 0, & v''(0) = 0, & v''(\ell) = 0 \\ \int_0^\ell v'y'dx = 0 \end{cases}$$

4.2.3.3 Arc à une articulation

En choisissant deux systèmes d'axes  $O_1x_1y_1$  et  $O_2x_2y_2$  (figure 17), la déformation de l'arc est définie par :

$$v(x) = \begin{cases} v_1(x_1) & \text{pour } 0 \leq x_1 \leq a_1 \\ v_2(x_2) & \text{pour } 0 \leq x_2 \leq a_2 \end{cases}$$

Les fonctions  $v_1(x_1)$  et  $v_2(x_2)$  doivent vérifier les huit conditions aux limites :

$$\begin{cases} v_1(0) = 0, & v_1'(0) = 0, & v_1''(a_1) = 0 \\ v_2(0) = 0, & v_2'(0) = 0, & v_2''(a_2) = 0 \\ v_1(a_1) = v_2(a_2) & \int_0^{a_1} v_1'y_1'dx + \int_0^{a_2} v_2'y_2'dx = 0 \end{cases}$$

Les sept premières sont évidentes. La dernière exprime, d'après la formule (42), que le déplacement horizontal de l'articulation C est le même lorsque l'on considère cette articulation comme appartenant soit à  $O_1C$  soit à  $O_2C$ . Les fonctions  $y_1$  et  $y_2$  sont les ordonnées des arcs de fibre moyenne  $O_1C$  et  $O_2C$  rapportées aux axes  $O_1x_1y_1$  et  $O_2x_2y_2$ .

4.2.3.4 Arc à trois articulations

En conservant les axes de la figure 17 et les notations définies pour l'arc à une articulation, les fonctions  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  doivent,  $O_1$  et  $O_2$  étant des articulations, vérifier les huit conditions aux limites :

$$\begin{cases} v_1(0) = 0, & v_1''(0) = 0, & v_1''(a_1) = 0 \\ v_2(0) = 0, & v_2''(0) = 0, & v_2''(a_2) = 0 \\ v_1(a_1) = v_2(a_2) & \int_0^{a_1} v_1'y_1'dx + \int_0^{a_2} v_2'y_2'dx = 0 \end{cases}$$

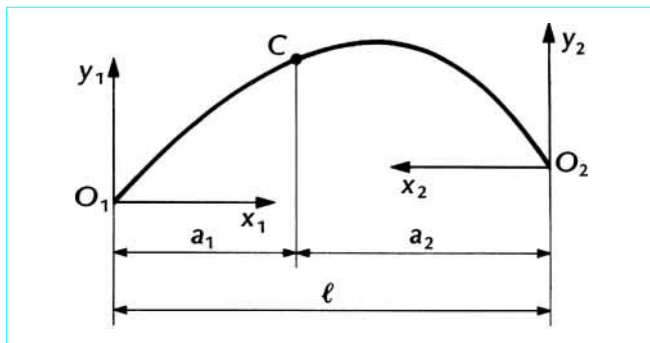


Figure 17 - Arc à une ou trois articulations

4.3 Équation fondamentale vérifiée par le déplacement vertical

4.3.1 Cas des charges liées à l'arc

Choisissons pour origine des axes le centre de gravité de l'extrémité de gauche (figure 18), et supposons l'arc funiculaire de la densité de charge  $p(x)$  qui lui est appliquée. Si l'on désigne par  $Q$  et  $B$  les composantes horizontale et verticale de la réaction de l'appui de gauche et par  $-A$  le moment de cette réaction par rapport à  $O$ , nous avons, puisque le moment fléchissant en tout point de l'arc est nul :

$$m(x) + A + Bx - Qy = 0 \tag{45}$$

$m(x)$  désignant la part du moment fléchissant due à  $p(x)$  :

$$m(x) = - \int_0^x p(\xi)(x - \xi) d\xi \tag{46}$$

Dérivons l'équation (45) par rapport à  $x$ , nous obtenons :

$$- \int_0^x p(\xi) d\xi + B - Qy'(x) = 0$$

En particulier si l'on fait  $x = 0$ , nous voyons que :

$$B = Qy'(0) \tag{47}$$

Une nouvelle dérivation donne la relation :

$$Qy''(x) = -p(x) \tag{48}$$

Donnons une déformation à l'arc ; le point matériel  $P$  de coordonnées  $(x, y)$  vient en  $P'$  de coordonnées  $(x + u, y + v)$ . Les quantités  $A, B$  et  $Q$  deviennent  $A + \delta A, B + \delta B$  et  $Q + \delta Q$ . Le moment fléchissant  $M(x)$  au point  $P'$  de la fibre moyenne déformée a pour valeur,  $m(x) + \delta m(x)$  désignant la part de ce moment due à la densité de charge  $p(x)$  :

$$M = m(x) + \delta m(x) + A + \delta A + (B + \delta B)(x + u) - (Q + \delta Q)(y + v)$$

soit, compte tenu de l'équation (45) et en négligeant les termes du second ordre :

$$M = \delta m(x) + Bu - Qv + \delta A + x\delta B - y\delta Q \tag{49}$$

Calculons  $\delta m(x)$  ; puisque les charges sont appliquées aux points matériels de l'arc, nous avons :

$$m(x) + \delta m(x) = - \int_0^x p(\xi)[x + u(x) - \xi - u(\xi)] d\xi$$

donc, compte tenu de l'équation (46) :

$$\delta m(x) = - \int_0^x p(\xi)[u(x) - u(\xi)] d\xi$$

puis de l'équation (48) :

$$\delta m(x) = Q \int_0^x y''(\xi)[u(x) - u(\xi)] d\xi$$

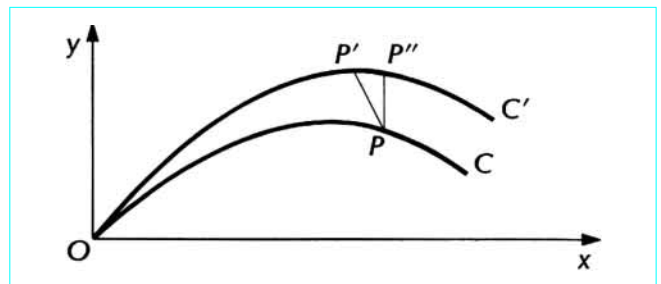


Figure 18 - Charges liées à l'arc

Une intégration par parties transforme l'équation précédente en :

$$\delta m(x) = -Qy'(0)u(x) + Q \int_0^x y'(\xi) u'(\xi) d\xi$$

soit, compte tenu des relations (41) et (47) :

$$\delta m(x) = -Bu(x) - Q \int_0^x y'^2(\xi) v'(\xi) d\xi$$

Reportons cette valeur dans l'équation (49) ; nous obtenons :

$$M = -Q \left[ v + \int_0^x y'^2(\xi) v'(\xi) d\xi \right] + \delta A + x\delta B - y\delta Q$$

Il résulte alors de la formule (44) que  $v(x)$  est une solution de l'équation fondamentale :

$$Dv'' + Q(v + \psi_1) = \delta A + x\delta B - y\delta Q \quad (50)$$

dans laquelle  $\psi_1$  est une fonction de  $x$  qui se déduit de la fonction  $v$  par l'opérateur linéaire  $L_1$  :

$$\psi_1 = L_1(v) = \int_0^x y'^2(\xi) v'(\xi) d\xi$$

La solution générale de l'équation (50) dépend de façon linéaire et homogène de cinq constantes. En effet,  $v(x)$  est une intégrale de l'équation linéaire du troisième ordre obtenue en dérivant l'équation (50) :

$$(Dv'')' + Q(1 + y'^2)v' = \delta B - y'\delta Q$$

### 4.3.2 Cas des charges liées à l'espace

Conservons les notations définies au paragraphe 4.3.1. Nous calculons le moment fléchissant au point  $P''$  de coordonnées  $(x, y + z)$ . Puisque **les lignes d'action des charges sont fixes**, le moment  $m(x)$  des charges par rapport au point  $P$  est égal au moment des charges par rapport au point  $P''$ . Donc :

$$M(x) = m(x) + A + \delta A + (B + \delta B)x - (Q + \delta Q)(y + z)$$

soit, compte tenu de l'équation (45) et en négligeant le terme du second ordre :

$$M(x) = \delta A + x\delta B - y\delta Q - zQ$$

En tenant compte des relations démontrées précédemment :

$$M = Dv'', \quad u' + v'y' = 0, \quad z = v - uy'$$

nous voyons que les fonctions  $u$  et  $v$  sont des intégrales du système différentiel linéaire du troisième ordre :

$$\begin{cases} Dv'' + Q(v - uy') = \delta A + x\delta B - y\delta Q \\ u' + v'y' = 0 \end{cases}$$

La fonction  $v(x)$  dépend donc de façon linéaire et homogène de cinq constantes :  $\delta A, \delta B, \delta Q$  et de deux constantes d'intégration. En effet, si l'on dérive la première équation après l'avoir divisée par  $y'$ , on voit en remplaçant  $u'$  par  $-v'y'$  que  $v$  est une intégrale d'une équation linéaire du troisième ordre qui ne contient que  $\delta B$  et  $\delta Q$ .

Désignons par  $\psi_2$  la fonction  $-uy'$  ; la fonction  $v(x)$  est une solution de l'équation fondamentale :

$$Dv'' + Q(v + \psi_2) = \delta A + x\delta B - y\delta Q \quad (51)$$

dans laquelle  $\psi_2$  est une fonction de  $x$  qui se déduit de la fonction  $v$  par l'opérateur linéaire  $L_2$  :

$$\psi_2 = L_2(v) = y'(x) \int_0^x y'(\xi) v'(\xi) d\xi$$

### 4.3.3 Calcul théorique de la poussée critique

Le calcul de la poussée critique est aisé lorsque l'on sait intégrer formellement les équations fondamentales (50) ou (51).

Dans le cas d'un arc encastré ou d'un arc à deux articulations, la fonction  $v(x)$  dépend de façon linéaire et homogène de cinq constantes. Les cinq conditions aux limites données au paragraphe 4.2.3.2 fournissent un système de cinq équations linéaires et homogènes entre ces constantes. L'élimination des constantes entre ces équations donne une équation en  $Q$  dont la plus petite racine positive est la poussée critique.

Dans le cas d'un arc à une ou trois articulations, nous devons écrire l'équation fondamentale pour chacun des arcs  $O_1C$  et  $O_2C$  (figure 17). Les fonctions  $v_1(x)$  et  $v_2(x)$  dépendent donc de dix constantes :  $\delta A_1, \delta A_2, \delta B_1, \delta B_2, \delta Q_1, \delta Q_2$  et quatre constantes d'intégration. Mais ces dix constantes se réduisent à huit, car les équations d'équilibre de la statique exigent que :

$$\delta Q_1 = \delta Q_2 = \delta Q, \quad \delta B_1 = -\delta B_2 = \delta B$$

Les huit conditions aux limites données aux paragraphes 4.2.3.3 ou 4.2.3.4 fournissent un système de huit équations linéaires et homogènes entre les huit constantes. L'élimination des constantes entre ces équations donne une équation en  $Q$  dont la plus petite racine positive est la poussée critique.

### 4.3.4 Cas d'un arc non funiculaire

Dans ce cas, le moment fléchissant  $M_0(x)$  avant déformation n'est pas nul ; l'équation (45) doit donc être remplacée par l'équation :

$$M_0(x) = m(x) + A + Bx - Qy$$

En reprenant les calculs qui nous conduisent aux équations fondamentales (50) ou (51), nous trouvons que  $v(x)$  est une solution de l'équation :

$$Dv'' + Q(v + \psi) = M_0(x) + \delta A + x\delta B - y\delta Q$$

$\psi$  étant égal à  $\psi_1$  ou  $\psi_2$ . La solution générale de cette équation est la somme de la solution générale des équations fondamentales (50) ou (51) et d'une solution particulière de l'équation :

$$Dv'' + Q(v + \psi) = M_0(x)$$

Les constantes qui interviennent dans le calcul sont, dans chaque cas, déterminées par les conditions aux limites. On obtient ainsi autant d'équations que de constantes, mais les équations ne sont plus homogènes. La poussée critique est la plus petite valeur de  $Q$  pour laquelle le déterminant principal des équations s'annule. Le moment  $M_0(x)$  n'intervient pas dans le déterminant ; donc **la poussée critique est une caractéristique de l'arc qui ne dépend pas des charges appliquées, mais seulement de la façon dont ces charges sont appliquées** (charges liées à l'arc ou liées à l'espace).

## 4.4 Méthode des approximations successives

L'équation fondamentale est de la forme :

$$Dv'' + Q(v + Lv) = \delta A + x\delta B - y\delta Q$$

$L$  étant l'opérateur  $L_1$  dans le cas des charges liées à l'arc, et l'opérateur  $L_2$  dans le cas des charges liées à l'espace.

Nous allons définir un opérateur linéaire  $\Omega$  qui associe à toute fonction  $v_0(x)$  vérifiant les conditions aux limites une fonction  $v_1(x) = \Omega v_0(x)$  vérifiant les conditions aux limites.

Dans le cas d'un arc encastré ou d'un arc à deux articulations, la fonction  $v_1(x)$  est la fonction qui vérifie les conditions aux limites et dont la dérivée seconde a pour expression :

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{-(v_0 + Lv_0) + \delta A + x \delta B - \gamma \delta Q}{D}$$

Il suffit donc, pour déterminer la fonction  $v_1$ , d'intégrer deux fois l'expression précédente et de déterminer les constantes au moyen des conditions aux limites.

Dans le cas d'un arc à une ou à trois articulations, la fonction  $v_0(x)$  est égale à  $v_1^0(x)$  sur l'arc  $O_1C$  et à  $v_2^0(x)$  sur l'arc  $O_2C$ ; la fonction  $v_1(x)$  est égale à  $v_1^1(x)$  sur l'arc  $O_1C$  et à  $v_2^1(x)$  sur l'arc  $O_2C$ . Les fonctions  $v_1^1(x)$  et  $v_2^1(x)$  vérifient les conditions aux limites et ont pour dérivées secondes :

$$\frac{d^2 v_1^1}{dx^2} = \frac{-(v_1^0 + Lv_1^0) + \delta A_1 + x \delta B - \gamma \delta Q}{D}$$

$$\frac{d^2 v_2^1}{dx^2} = \frac{-(v_2^0 + Lv_2^0) + \delta A_2 - x \delta B - \gamma \delta Q}{D}$$

car  $\delta Q_1 = \delta Q_2 = \delta Q$  et  $\delta B_1 = -\delta B_2 = \delta B$ .

Il suffit donc, pour déterminer la fonction  $v_1$ , d'intégrer deux fois les expressions précédentes et de déterminer les constantes au moyen des conditions aux limites.

Donc, étant donné une fonction de départ  $v_0$ , nous pouvons déterminer une suite de fonctions :

$$v_1 = \Omega v_0, \quad v_2 = \Omega v_1, \dots, \quad v_n = \Omega v_{n-1}$$

Cela posé, supposons que  $v_0(x)$  soit, à un facteur près, le déplacement au moment du flambement. Si nous multiplions  $v_0(x)$  par la poussée critique  $Q_c$ , nous devons obtenir une fonction :

$$\Omega(Q_c v_0) = Q_c \Omega v_0 = Q_c v_1$$

identique à la fonction  $v_0$ . Nous aurions donc :

$$Q_c = v_0(x)/v_1(x) \tag{52}$$

Mais, puisque  $v_0(x)$  n'est qu'une approximation de la déformation au moment du flambement, le second membre de la relation (52) ne se réduit pas à une constante. On obtiendra cependant une valeur approchée de la poussée critique en donnant à  $x$  une valeur particulière, celle qui correspond par exemple aux plus grandes valeurs de  $v_0$  et de  $v_1$ . Si l'approximation est jugée insuffisante, on utilisera un des rapports de la suite :

$$\frac{v_1(x)}{v_2(x)}, \quad \frac{v_2(x)}{v_3(x)}, \dots, \quad \frac{v_{n-1}(x)}{v_n(x)}, \dots$$

qui tend vers la poussée critique.

Des simplifications de calcul sont possibles dans le cas des arcs ayant un axe de symétrie. On peut, dans ce cas, distinguer le flambement symétrique et le flambement antisymétrique ; si l'on compte les abscisses à partir de l'axe de symétrie, la fonction  $v(x)$  est paire dans le premier cas et impaire dans le second cas. En général, la poussée critique d'un arc encastré ou d'un arc à deux articulations correspond au flambement antisymétrique, tandis que la poussée critique d'un arc à une ou à trois articulations correspond au flambement symétrique.

## 4.5 Méthode de l'énergie

### 4.5.1 Cas des charges liées à l'arc

Nous considérons un arc funiculaire quelconque, et nous l'écartons de sa position d'équilibre en lui donnant un déplacement  $v(x)$  vérifiant les conditions aux limites.

La variation de l'énergie de déformation a pour valeur :

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} ds = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{D} dx = \frac{1}{2} \int Dv''^2 dx$$

les intégrales étant calculées d'une extrémité à l'autre de l'arc.

Le travail  $\Delta \mathcal{C}$  des forces extérieures a pour valeur, puisque la densité de charge vérifie la relation (48) :

$$\Delta \mathcal{C} = - \int p v dx = Q \int \gamma y'' dx$$

Intégrons par parties ; nous obtenons, puisque  $v$  est toujours nul aux extrémités de l'arc :

$$\Delta \mathcal{C} = - \int v' y' dx$$

soit, compte tenu de la formule (40) :

$$\Delta \mathcal{C} = Q \int \left[ u' + \frac{1}{2} (1 + y'^2) v'^2 \right] dx$$

soit enfin, puisque  $u$  est nul aux extrémités de l'arc :

$$\Delta \mathcal{C} = \frac{1}{2} Q \int (1 + y'^2) v'^2 dx$$

On remarquera qu'il est nécessaire de tenir compte des termes du second ordre pour calculer le travail des forces extérieures.

Le flambement a lieu dès que  $\Delta \mathcal{C}$  dépasse  $\Delta W$ . Il en résulte que la poussée critique a pour valeur :

$$Q_c = \text{Min}_{v \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{\int Dv''^2 dx}{\int (1 + y'^2) v'^2 dx} \right\} \tag{53}$$

les intégrales étant toujours calculées d'une extrémité à l'autre de l'arc, et  $\mathcal{F}$  désignant l'ensemble des fonctions  $v(x)$  qui vérifient les conditions aux limites. On obtient une grande précision en prenant pour  $v(x)$  l'une des fonctions  $v_1(x)$ ,  $v_2(x)$ ,... obtenues dans la méthode des approximations successives.

### 4.5.2 Cas des charges liées à l'espace

La variation de l'énergie de déformation est la même que dans le cas des charges liées à l'arc. Mais le travail  $\Delta \mathcal{C}$  des forces extérieures est différent ; son calcul est assez délicat ; bornons-nous à donner le résultat :

$$\Delta \mathcal{C} = \frac{1}{2} Q \int [(1 + y'^2) v'^2 - uv' y''] dx$$

Il en résulte que la poussée critique a pour valeur :

$$Q_c = \text{Min}_{v \in \mathcal{F}} \left\{ \frac{\int Dv''^2 dx}{\int [(1 + y'^2) v'^2 - uv' y''] dx} \right\} \quad (54)$$

### 4.6 Application aux arcs paraboliques d'inertie réduite constante

Considérons un arc parabolique symétrique de portée  $2a$  et de flèche  $f$ ; l'équation de la fibre moyenne est :

$$y = f \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad (-a \leq x \leq a)$$

En supposant l'inertie réduite  $J$  constante, la méthode des approximations successives et la méthode de l'énergie conduisent à la valeur approchée suivante de la poussée critique :

$$Q_c = m \frac{\pi^2 EJ}{a^2} \frac{1}{1 + K \left( \frac{f}{2a} \right)^2}$$

$m$  et  $K$  étant des constantes données dans le tableau 5.

Tableau 5 – Valeurs de $m$ et $K$				
Type d'arc	$m$	$K$ pour des charges		Observations
		liées à l'arc	liées à l'espace	
Arc encastré	2,045 8	3,352	4,013	Flambement antisymétrique
Arc à 2 articulations	1	6,144	6,954	
Arc à 1 articulation	1,113 2	1,145	1,360	Flambement symétrique
Arc à 3 articulations	0,752 7	1,990	2,270	

## 5. Déversement latéral des poutres droites

### 5.1 Première méthode. Recherche de la déformation au moment du déversement

#### 5.1.1 Déversement d'une poutre droite soumise à la flexion circulaire

Soit (figure 19), au moment du déversement,  $m\xi$  la tangente à la fibre moyenne,  $m\eta$  et  $m\zeta$  les axes centraux de la section de centre de gravité  $m$ . Par rapport aux axes fixes  $Oxyz$ , le point  $m$  a pour coordonnées  $x, v$  et  $w$ ; d'autre part la section a tourné d'un angle  $\theta$ ; sur la figure 19,  $v$  est négatif,  $w$  et  $\theta$  sont positifs.

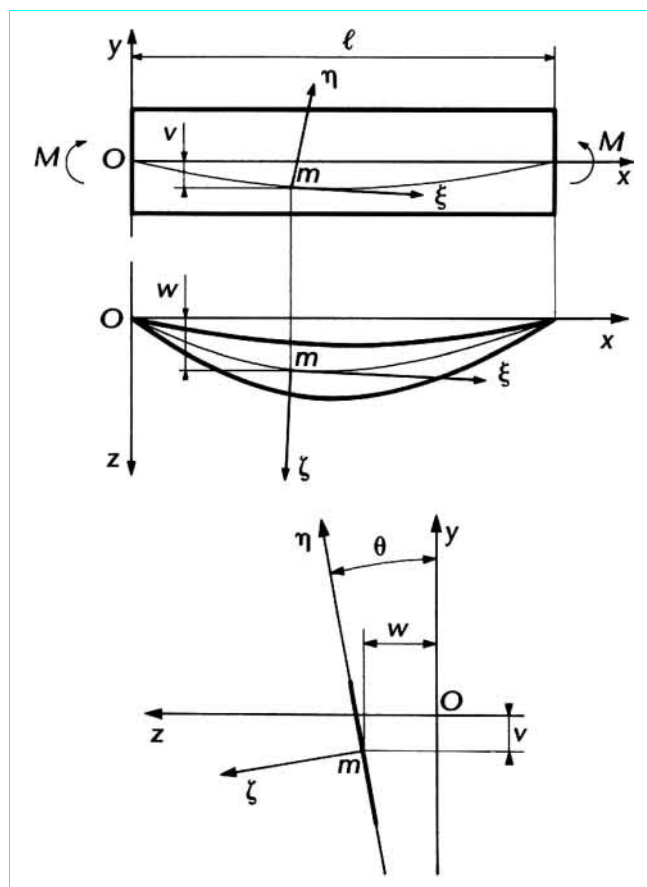


Figure 19 – Déversement d'une poutre droite soumise à la flexion circulaire

Désignons par  $M_\xi, M_\eta$  et  $M_\zeta$  les projections du moment des forces appliquées à gauche de la section sur les axes  $m\xi\eta\zeta$ ; les fonctions  $v, w$  et  $\theta$  de  $x$  satisfont aux équations :

$$\left. \begin{aligned} EI \frac{d^2 v}{dx^2} &= -M_\zeta \\ EJ \frac{d^2 w}{dx^2} &= M_\eta \\ GK \frac{d\theta}{dx} &= -M_\xi \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

dans lesquelles  $EI$  et  $EJ$  désignent les rigidités à la flexion dans le plan  $Oxy$  et dans le plan  $Oxz$ , et  $GK$  la rigidité à la torsion.

Pour calculer  $M_\xi, M_\eta$  et  $M_\zeta$ , nous avons besoin des cosinus directeurs des axes  $m\xi\eta\zeta$  par rapport aux axes fixes. En considérant  $v, w$  et  $\theta$  comme des quantités très petites dont nous pouvons négliger les carrés et les produits, nous trouvons les valeurs des cosinus directeurs données dans le tableau :

	$Ox$	$Oy$	$Oz$
$m\xi$	1	$dv/dx$	$dw/dx$
$m\eta$	$-dv/dx$	1	$\theta$
$m\zeta$	$-dw/dx$	$-\theta$	1

La poutre étant soumise à un moment constant de valeur algébrique  $-M$  sur  $Oz$ , les équations (55) deviennent :

$$\begin{cases} EI \frac{d^2v}{dx^2} = M \\ EJ \frac{d^2w}{dx^2} = -M\theta \\ GK \frac{d\theta}{dx} = M \frac{dw}{dx} \end{cases}$$

La première est l'équation classique de la flexion de la poutre ; nous déduisons des deux dernières :

$$GK \frac{d^2\theta}{dx^2} = M \frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{M^2}{EJ} \theta$$

La rotation  $\theta$  est donc une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + k^2\theta = 0 \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{M^2}{EJGK}$$

Il en résulte que  $\theta$  est de la forme :

$$\theta = A \cos kx + B \sin kx$$

Les constantes  $A$  et  $B$  sont déterminées par les conditions aux limites ; en supposant que la poutre ne puisse pas tourner autour de  $Ox$  à ses extrémités,  $\theta$  doit être nul pour  $x=0$  et  $x=\ell$ , donc :

$$A = 0, \quad B \sin k\ell = 0$$

La plus petite valeur de  $k$  pour laquelle le déversement est possible est  $\pi$  ; nous trouvons ainsi le moment critique  $M_c$  qui provoque le déversement de la poutre :

$$M_c = \frac{\pi \sqrt{EJGK}}{\ell} \quad (56)$$

### 5.1.2 Déversement d'une poutre soumise à une compression excentrée

Considérons (figure 20) une poutre de longueur  $\ell$  soumise à deux forces opposées  $F$  et  $-F$  dont la ligne d'action commune est parallèle à la fibre moyenne  $Ox$  et à une distance  $e$  de celle-ci. Avant déversement, la poutre est soumise à un moment fléchissant constant  $M = Fe$ . Les fonctions  $v$ ,  $w$  et  $\theta$  sont, dans ce cas, des intégrales du système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} EI \frac{d^2v}{dx^2} = M - Fv \\ EJ \frac{d^2w}{dx^2} = -M\theta - Fw \\ GK \frac{d\theta}{dx} = M \frac{dw}{dx} \end{cases}$$

La dernière s'intègre et montre que  $w = (GK/M)\theta$  puisque  $\theta$  et  $w$  s'annulent en même temps pour  $x=0$  et  $x=\ell$ . En reportant la valeur de  $w$  dans la seconde équation, nous trouvons que  $\theta$  est l'intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{M^2}{EJGK} \left(1 + \frac{F}{M^2} GK\right) \theta = 0$$

qui s'annule pour  $x=0$  et  $x=\ell$ . Nous obtenons ainsi la condition de déversement :

$$\frac{M^2}{EJGK} \left(1 + \frac{F}{M^2} GK\right) = \frac{\pi^2}{\ell^2} \quad (57)$$

dans laquelle  $M = Fe$ . Elle permet de calculer le moment critique  $M_c$  ou la force critique  $F_c = M_c/e$ .

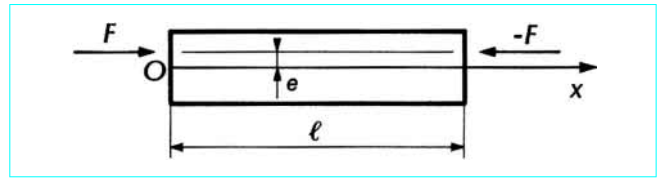


Figure 20 – Déversement d'une poutre soumise à une compression excentrée

Examinons deux cas particuliers correspondant à une excentricité très forte ou très faible.

Dans le cas où  $e$  est très grand, le déversement sera occasionné par le moment fléchissant, la force  $F$  étant faible. Le moment critique différera peu de la valeur donnée par l'équation (56). En prenant  $M^2 = \pi^2 EJGK/\ell^2$  dans le terme entre parenthèses de l'équation (57), nous obtenons une valeur très approchée du moment critique :

$$M_c = \frac{\pi \sqrt{EJGK}}{\ell} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\ell}{\pi e} \sqrt{\frac{GK}{EJ}}}} \quad (58)$$

Dans le cas où  $e$  est très petit,  $M$  est petit et le déversement est occasionné par la force de compression  $F$ . Compte tenu de  $M = Fe$ , l'équation (57) peut s'écrire :

$$\frac{F}{EJ} \left(1 + \frac{Fe^2}{GK}\right) = \frac{\pi^2}{\ell^2}$$

Une valeur approchée de la force critique est donc  $\pi^2 EJ/\ell^2$  ; en reportant cette valeur dans le terme entre parenthèses de l'équation précédente, nous obtenons une valeur très approchée de la force critique :

$$F_c = \frac{\pi^2 EJ}{\ell^2} \frac{1}{1 + \pi^2 \left(\frac{e}{\ell}\right)^2 \frac{EJ}{GK}} \quad (59)$$

Lorsque  $e$  tend vers zéro, cette valeur tend vers la force critique de flambement d'Euler.

### 5.1.3 Déversement d'une poutre droite sous l'effet de charges verticales

Les charges verticales produisent un moment fléchissant  $M$  compté avec la convention de signe des poutres à plan moyen et, au moment du déversement, un couple de torsion  $C$  infiniment petit. Le moment des forces appliquées à gauche d'une section ont pour composantes sur les axes  $Oxyz$  :

$$M_x = C, \quad M_y = 0, \quad M_z = -M$$

et sur les axes  $m\xi\eta\zeta$ , en négligeant les infiniment petits du second ordre  $Cdv/dx$  et  $Cdw/dx$  :

$$M_\xi = C - M \frac{dw}{dx}, \quad M_\eta = -M\theta, \quad M_\zeta = -M$$

Les équations (55) s'écrivent donc dans ce cas :

$$\begin{cases} EI \frac{d^2v}{dx^2} = M \\ EJ \frac{d^2w}{dx^2} = -M\theta \\ GK \frac{d\theta}{dx} = M \frac{dw}{dx} - C \end{cases} \quad (60)$$



La première est l'équation classique de la flexion des poutres. Les deux dernières dans lesquelles  $M$  dépend de  $x$  et  $C$  dépend de  $w$  forment un système de deux équations linéaires en  $\theta$  et  $w$  que l'on ne peut pas intégrer formellement. Il faut donc avoir recours à des méthodes numériques. Bornons-nous à donner quelques résultats.

■ **Console de longueur  $\ell$  supportant une charge concentrée  $P$  à son extrémité** : la charge critique a pour valeur :

$$P_c = 4,0126 \frac{\sqrt{EJGK}}{\ell^2} \quad (61)$$

■ **Console de longueur  $\ell$  supportant une densité de charge  $p$**  : la densité de charge critique a pour valeur :

$$p_c = 12,854 \frac{\sqrt{EJGK}}{\ell^3} \quad (62)$$

■ **Poutre simplement appuyée de portée  $\ell$  supportant une charge  $P$  dans la section médiane** : la charge critique a pour valeur :

$$P_c = 16,936 \frac{\sqrt{EJGK}}{\ell^2} \quad (63)$$

■ **Poutre simplement appuyée de portée  $\ell$  supportant une densité de charge  $p$**  : la densité de charge critique a pour valeur :

$$p_c = 28,503 \frac{\sqrt{EJGK}}{\ell^3} \quad (64)$$

Les formules (61), (62) et (63) peuvent être établies en utilisant les fonctions de Bessel. La formule (64) a été obtenue en déterminant  $\theta$  sous la forme d'une série entière.

**Nota** : le moment critique  $M_c$  correspondant à chacune des charges critiques données ci-avant est toujours supérieur à la valeur donnée par l'équation (56). Par exemple, dans le cas de la formule (64) :

$$M_c = \frac{1}{8} p_c \ell^2 = 3,563 \frac{\sqrt{EJGK}}{\ell}$$

### 5.1.4 Déversement des poutres non libres de se gauchir

Les résultats précédents ne sont valables que si la troisième équation (55) donnant la relation entre l'angle de torsion et le couple de torsion est exacte, c'est-à-dire si les sections sont libres de se gauchir. Par contre, dans le cas d'une poutre (en double té par exemple) ayant une rigidité au gauchissement  $EK_1$ , lorsqu'une section ne peut se gauchir (section d'encastrement d'une console, section médiane d'une poutre symétriquement chargée), la dernière équation (55) doit être remplacée par l'équation de la torsion génée (article *Théorie des poutres* [C 2 010] dans ce traité) :

$$GK \frac{d\theta}{dx} - EK_1 \frac{d^3\theta}{dx^3} = -M_\xi \quad (65)$$

Il est alors possible de reprendre les problèmes traités précédemment. Les valeurs critiques sont augmentées. Par exemple, dans le cas d'une poutre soumise à un moment constant, la formule (56) doit être remplacée par la formule :

$$M_c = \frac{\pi \sqrt{EJGK}}{\ell} \sqrt{1 + \pi^2(a/\ell)^2} \quad (66)$$

avec  $a$  longueur caractéristique définie par :

$$a^2 = \frac{EK_1}{GK}$$

Les facteurs correctifs qu'il faut introduire dans les formules (61), (62), (63) et (64) sont très voisins et légèrement supérieurs à  $\sqrt{1 + \pi^2(a/\ell)^2}$ .

Pour une poutre en double té, si  $h$  est la hauteur de la poutre,  $b$  la largeur et  $e$  l'épaisseur des membrures,  $K_1$  a pour valeur :

$$K_1 = \frac{1}{24} h^2 b^3 e$$

## 5.2 Méthode de l'énergie

### 5.2.1 Formules générales

Il est possible de résoudre approximativement les problèmes de déversement au moyen de la méthode de l'énergie.

Soit  $\ell$  la longueur de la poutre. Lorsque la poutre se déverse, l'énergie de déformation augmente, par suite de la flexion latérale et de la torsion, de :

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M_\eta^2 dx}{EJ} + \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M_\xi^2 dx}{GK}$$

En utilisant les relations :

$$M_\eta = -M\theta \quad \text{et} \quad M_\xi = -GK \frac{d\theta}{dx}$$

nous pouvons exprimer  $\Delta W$  connaissant la seule fonction  $\theta$  qui définit le déversement :

$$\Delta W = \frac{1}{2} \int_0^\ell \frac{M^2 \theta^2}{EJ} dx + \frac{1}{2} \int_0^\ell GK \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \quad (67)$$

$M$  désignant le moment fléchissant provoqué par les charges.

En même temps, les points d'application des charges subissent, du fait du déversement, un déplacement vertical  $\delta(x)$  que l'on peut calculer connaissant la seule fonction  $\theta$ . En effet, supposons d'abord la **poutre encastree pour  $x = 0$**  (console). La flexion latérale et la torsion de l'élément dont le centre a pour abscisse  $\xi < x$  donne à la section d'abscisse  $x$  un déplacement horizontal :

$$\frac{M_\eta(\xi)(x-\xi)}{EJ(\xi)} d\xi = -\frac{\theta(\xi) M(\xi)(x-\xi)}{EJ(\xi)} d\xi$$

et un déplacement vertical :

$$-\theta(\xi) \frac{M_\eta(\xi)(x-\xi)}{EJ(\xi)} d\xi = \frac{\theta^2(\xi) M(\xi)(x-\xi)}{EJ(\xi)} d\xi$$

Il en résulte que :

$$\delta(x) = f(x) = \int_0^x \frac{\theta^2(\xi) M(\xi)(x-\xi)}{EJ(\xi)} d\xi \quad (68)$$

Dans le cas d'une **console**, le moment fléchissant dans la section d'abscisse  $\xi$  dû à une charge unité appliquée à l'abscisse  $x$  étant :

$$\mu_1(x, \xi) = \begin{cases} -(x-\xi) & \text{pour } \xi < x \\ 0 & \text{pour } \xi > x \end{cases}$$

le déplacement  $\delta(x)$  peut se mettre sous la forme :

$$\delta(x) = - \int_0^\ell \frac{\theta^2(\xi) M(\xi)}{EJ(\xi)} \mu_1(x, \xi) d\xi$$

Il en résulte que le travail des forces extérieures a pour valeur, dans le cas d'une charge concentrée  $P$  appliquée à l'abscisse  $x_1$  :

$$\Delta \mathcal{C} = -P\delta(x_1) = \int_0^\ell \frac{\theta^2(\xi) M(\xi)}{EJ(\xi)} P \mu_1(x_1, \xi) d\xi$$

et dans le cas d'une densité de charge  $p(x)$  :

$$\Delta \mathcal{C} = - \int_0^\ell p(x) \delta(x) dx = \int_0^\ell \frac{\theta^2(\xi) M(\xi)}{EJ(\xi)} d\xi \int_0^\ell p(x) \mu_1(x, \xi) dx$$

Donc, dans tous les cas de charge :

$$\Delta \mathcal{C} = \int_0^\ell \frac{\theta^2(\xi) M^2(\xi)}{EJ(\xi)} d\xi \quad (69)$$

Lorsque la poutre est appuyée pour  $x=0$  et  $x=\ell$ , nous avons,  $\delta(x)$  étant nul pour  $x=0$  et  $x=\ell$  :

$$\delta(x) = f(x) - (x/\ell)f(\ell)$$

soit, compte tenu de l'expression (68) de  $f(x)$  :

$$\delta(x) = \int_0^x \frac{\theta^2(\xi) M(\xi)(x-\xi)}{EJ(x)} d\xi - \frac{x}{\ell} \int_0^\ell \frac{\theta^2(\xi) M(\xi)(\ell-\xi)}{EJ(\xi)} d\xi$$

Si  $\mu(x, \xi)$  désigne le moment fléchissant, dans la section d'abscisse  $\xi$  de la poutre supportée sur appuis simples, dû à une charge unité appliquée à l'abscisse  $x$  :

$$\mu(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\xi(\ell-x)}{\ell} & \text{pour } \xi < x \\ \frac{x(\ell-\xi)}{\ell} & \text{pour } \xi > x \end{cases}$$

il est facile de voir que le déplacement  $\delta(x)$  peut se mettre sous la forme :

$$\delta(x) = - \int_0^\ell \frac{\theta^2(\xi) M(\xi)}{EJ(\xi)} \mu(x, \xi) d\xi$$

Il en résulte que le travail des forces extérieures a pour valeur, dans le cas d'une charge concentrée  $P$  appliquée à l'abscisse  $x_1$  :

$$\Delta \mathcal{C} = - P \delta(x_1) = \int_0^\ell \frac{\theta^2(\xi) M(\xi)}{EJ(\xi)} P \mu(x_1, \xi) d\xi$$

et, dans le cas d'une densité de charge  $p(x)$  :

$$\Delta \mathcal{C} = - \int_0^\ell p(x) \delta(x) dx = \int_0^\ell \frac{\theta^2(\xi) M(\xi)}{EJ(\xi)} d\xi \int_0^\ell p(x) \mu(x, \xi) dx$$

Donc, dans tous les cas de charge :

$$\Delta \mathcal{C} = \int_0^\ell \frac{\theta^2(\xi) M(\xi) \mu(\xi)}{EJ(\xi)} d\xi \quad (70)$$

formule qui devient dans le cas d'une poutre sur appuis simples :

$$\Delta \mathcal{C} = \int_0^\ell \frac{\theta^2(\xi) M^2(\xi)}{EJ(\xi)} d\xi \quad (71)$$

Donc, si nous nous donnons un déversement possible défini par une fonction  $\theta(x)$  vérifiant les conditions aux limites, la condition  $\Delta \mathcal{C} = \Delta W$  donnera une valeur de la charge critique approchée par excès.

Dans le cas d'une console ou d'une poutre sur appuis simples, la condition de déversement s'écrit très simplement :

$$\int_0^\ell \frac{M^2 \theta^2}{EJ} dx = \int_0^\ell GK \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \quad (72)$$

La méthode de l'énergie présente l'avantage de substituer à l'intégration laborieuse d'équations différentielles de simples calculs numériques d'intégrales définies. En outre, elle s'applique aux poutres de section variable, et elle permet de tenir compte de la position des points d'application des charges qui ne sont pas nécessairement sur la fibre moyenne.

## 5.2.2 Exemples d'application de la méthode de l'énergie

### 5.2.2.1 Console supportant une charge $P$ à son extrémité $x = \ell$

Dans ce cas où  $M = -P(\ell - x)$ , la formule (72) montre que la charge critique est la charge minimale donnée par l'équation :

$$P^2 \int_0^\ell \frac{\theta^2(\ell-x)^2}{EJ} dx = \int_0^\ell GK \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \quad (73)$$

lorsque  $\theta$  est une fonction vérifiant les conditions aux limites  $\theta(0) = 0$  et  $\theta'(\ell) = 0$ , cette dernière exprimant que le couple de torsion est nul pour  $x = \ell$ .

Par exemple, lorsque  $J$  et  $K$  sont constants, en prenant la fonction :

$$\theta = \frac{x}{\ell} - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{\ell} \right)^2$$

nous trouvons une valeur approchée de la charge critique :

$$P_c = \sqrt{\frac{35}{2}} \frac{\sqrt{EJGK}}{\ell^2} = 4,183 \frac{\sqrt{EJGK}}{\ell^2}$$

dépassant d'environ 4,2 % la valeur exacte.

### 5.2.2.2 Poutre sur appuis simples supportant une charge $P$ dans la section $x = \ell/2$

Dans ce cas où  $M = (1/2)Px$  dans l'intervalle  $(0, \ell/2)$ , la formule (72) montre, compte tenu de la symétrie, que la charge critique est la charge minimale donnée par l'équation :

$$P^2 \int_0^{\ell/2} \frac{\theta^2 x^2}{EJ} dx = 4 \int_0^{\ell/2} GK \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \quad (74)$$

lorsque  $\theta$  est une fonction vérifiant les conditions aux limites  $\theta(0) = 0$  et  $\theta'(\ell/2) = 0$ , cette dernière exprimant que le couple de torsion est nul dans la section médiane.

Par exemple, lorsque  $J$  et  $K$  sont constants, en prenant la fonction :

$$\theta = \sin \frac{\pi x}{\ell}$$

nous trouvons une valeur approchée de la charge critique :

$$P_c = 4\pi^2 \sqrt{\frac{3}{6 + \pi^2}} \frac{\sqrt{EJGK}}{\ell^2} = 17,165 \frac{\sqrt{EJGK}}{\ell^2}$$

dépassant la valeur exacte d'environ 1,4 %.

### 5.2.2.3 Console supportant une densité de charge constante $p$

Dans ce cas où  $M = -(1/2)p(\ell - x)^2$ , la formule (72) montre que la densité de charge critique est la densité minimale donnée par l'équation :

$$p^2 \int_0^\ell \frac{\theta^2(\ell-x)^4}{EJ} dx = 4 \int_0^\ell GK \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \quad (75)$$

lorsque  $\theta$  est une fonction vérifiant les conditions aux limites  $\theta(0) = 0$  et  $\theta'(\ell) = 0$ .

Par exemple lorsque  $J$  et  $K$  sont constants, en prenant la même fonction qu'au paragraphe 5.2.2.1, nous trouvons une valeur approchée de la densité critique :

$$p_c = \sqrt{210} \frac{\sqrt{EJGK}}{\ell^3} = 14,49 \frac{\sqrt{EJGK}}{\ell^3}$$

dépassant la valeur exacte d'environ 12,7 %.



#### 5.2.2.4 Poutre sur appuis simples supportant une densité de charge constante $p$

Dans ce cas où  $M = (1/2) px (\ell - x)$ , la formule (72) montre que la densité de charge critique est la densité minimale donnée par l'équation :

$$p^2 \int_0^\ell \frac{\theta^2 x^2 (\ell - x)^2}{EJ} dx = 4 \int_0^\ell GK \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \quad (76)$$

lorsque  $\theta$  est une fonction vérifiant les conditions aux limites  $\theta(0) = 0$  et  $\theta(\ell) = 0$ .

Par exemple, lorsque  $J$  et  $K$  sont constants, en prenant la même fonction qu'au paragraphe 5.2.2.2, nous trouvons une valeur approchée de la densité critique :

$$p_c = \pi^2 \sqrt{\frac{120 \pi^2}{45 + \pi^4} \frac{\sqrt{EJGK}}{\ell^3}} = 28,46 \frac{\sqrt{EJGK}}{\ell^3}$$

très voisine de la valeur exacte.

### Références bibliographiques

- [1] TIMOSHENKO (S.). – *Théorie de la stabilité élastique*. Paris, Béranger (1943).
- [2] COURBON (J.). – *Résistance des Matériaux*. 2 volumes, Paris, Dunod (1971).
- [3] COURBON (J.). – *Flambement des poutres circulaires*. Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, juin 1965.
- [4] COURBON (J.). – *Flambement des arcs*. Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, juil.-août 1967.