

# Résistance des matériaux

## Formulaire

par **Jean COURBON** †

*Ingénieur Général Honoraire des Ponts et Chaussées  
Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées*

et **Jean-Noël THEILLOUT**

*Ingénieur au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées,  
Section Fonctionnement des Structures*

<b>1. Caractéristiques géométriques</b> .....	C 2 060 - 2
<b>2. Contraintes de cisaillement et déformations</b> .....	— 8
<b>3. Moment et effort</b> .....	— 14
<b>4. Flèches et moments</b> .....	— 15
<b>5. Charge critique de flambement</b> .....	— 21
<b>6. Poutres</b> .....	— 25
<b>7. Portiques</b> .....	— 57
<b>8. Anneaux</b> .....	— 72
<b>9. Arcs</b> .....	— 78
<b>10. Plaques</b> .....	— 91

**D**ans cet article, nous donnerons les caractéristiques de résistance de matériaux tels que les poutres dans des situations de contraintes particulières.

# 1. Caractéristiques géométriques

Tableau 1 – Caractéristiques géométriques des sections

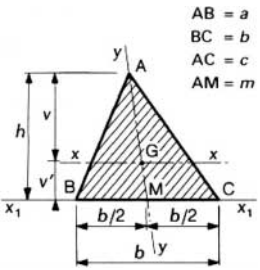
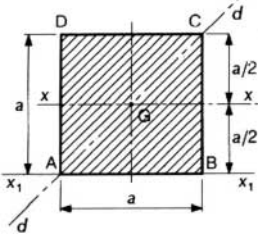
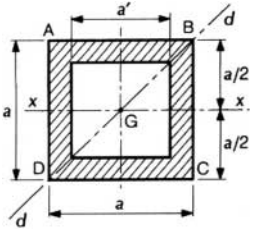
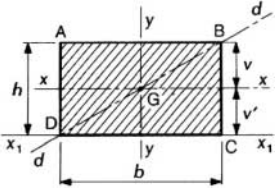
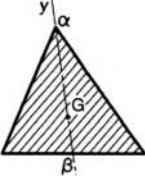
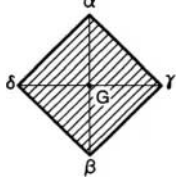
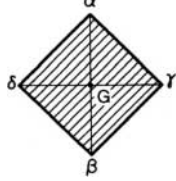
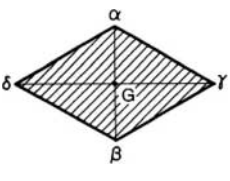
Section				
Centre de gravité	$v = \frac{2h}{3}$ $v' = \frac{h}{3}$	$v = \frac{a}{2}$ $v' = \frac{a}{2}$	$v = \frac{a}{2}$ $v' = \frac{a}{2}$	$v = \frac{h}{2}$ $v' = \frac{h}{2}$
Surface	$S = \frac{bh}{2}$	$S = a^2$	$S = a^2 - a'^2$	$S = bh$
Inertie polaire	$I_G = \frac{S(a^2 + b^2 + c^2)}{36}$	$I_G = \frac{a^4}{6}$	$I_G = \frac{a^4 - a'^4}{6}$	$I_G = \frac{bh(b^2 + h^2)}{12}$
Inertie par rapport à un axe	$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12}$ $I_x = \frac{bh^3}{36}$ $I_y = \frac{b^3h^3}{48m^2}$	$I_{x_1} = \frac{a^4}{3}$ $I_x = \frac{a^4}{12}$ $I_d = \frac{a^4}{12}$	$I_x = \frac{a^4 - a'^4}{12}$ $I_d = \frac{a^4 - a'^4}{12}$	$I_{x_1} = \frac{bh^3}{3}$ $I_x = \frac{bh^3}{12}$ $I_d = \frac{b^3h^3}{6(b^2 + h^2)}$
Module de résistance minimal	$\mu_x = \frac{I_x}{v} = \frac{bh^2}{24}$ $\mu_y = \frac{b^2h^2}{24m}$	$\mu_x = \frac{a^3}{6}$ $\mu_d = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$	$\mu_x = \frac{a^4 - a'^4}{6a}$ $\mu_d = \frac{a^4 - a'^4}{a\sqrt{72}} = \frac{a^4 - a'^4}{6a\sqrt{2}}$	$\mu_x = \frac{bh^2}{6}$ $\mu_d = \frac{b^2h^2}{6\sqrt{b^2 + h^2}}$
Rayon de giration	$r_x = \frac{h}{\sqrt{18}}$ $r_y = \frac{bh}{m\sqrt{24}}$	$r_x = \frac{a}{\sqrt{12}}$ $r_d = \frac{a}{\sqrt{12}}$	$r_x = \sqrt{\frac{a^2 + a'^2}{12}}$ $r_d = \sqrt{\frac{a^2 + a'^2}{12}}$	$r_x = \frac{h}{\sqrt{12}}$ $r_d = \frac{bh}{\sqrt{6(b^2 + h^2)}}$
Noyau central	 $G\alpha = \frac{m}{6}$ et $G\beta = \frac{m}{12}$	 $G\alpha = G\beta = \frac{a}{6}$ $G\gamma = G\delta = \frac{a}{6}$	 $G\alpha = G\beta = \frac{a^2 + a'^2}{6a}$ $G\gamma = G\delta = \frac{a^2 + a'^2}{6a}$	 $G\alpha = G\beta = \frac{h}{6}$ $G\gamma = G\delta = \frac{b}{6}$

Tableau 1 – Caractéristiques géométriques des sections (suite)

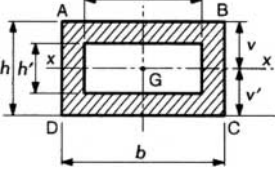
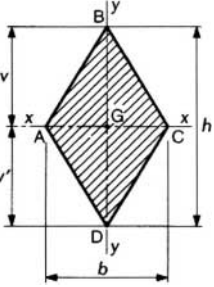
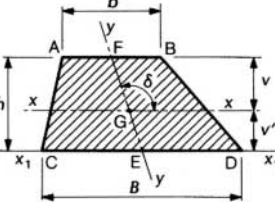
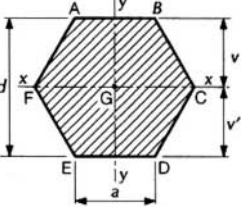
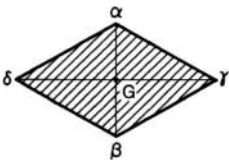
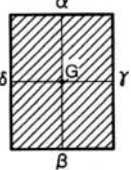
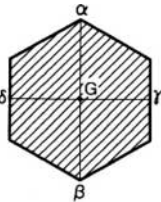
Section				
Centre de gravité	$v = \frac{h}{2}$ $v' = \frac{h}{2}$	$v = \frac{h}{2}$ $v' = \frac{h}{2}$	$v = \frac{h}{3} \left( \frac{2B+b}{B+b} \right)$ $v' = \frac{h}{3} \left( \frac{B+2b}{B+b} \right)$	$v = v' = \frac{1}{2} d$ ou : $v = v' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
Surface	$S = bh - b'h'$	$S = \frac{bh}{2}$	$S = \frac{h}{2} (B+b)$	$S = \frac{d^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
Inertie polaire	$I_G = \frac{bh(b^2+h^2) - b'h'(b'^2+h'^2)}{12}$	$I_G = \frac{bh(b^2+h^2)}{48}$		$I_G = \frac{5d^4}{24\sqrt{3}} = \frac{15a^4}{8\sqrt{3}}$
Inertie par rapport à un axe	$I_x = \frac{bh^3 - b'h'^3}{12}$	$I_x = \frac{bh^3}{48}$ $I_y = \frac{hb^3}{48}$	$I_{x_1} = \frac{h^3}{12} (B+3b)$ $I_x = \frac{h^3(B^2+4Bb+b^2)}{36(B+b)}$ $I_y = \frac{h^3(B^4-b^4)}{48m^2(B-b)}$	$I_x = \frac{5d^4}{48\sqrt{3}} = \frac{5a^4\sqrt{3}}{16}$ $I_y = \frac{5d^4}{48\sqrt{3}} = \frac{5a^4\sqrt{3}}{16}$
Module de résistance minimal	$\mu_x = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h}$	$\mu_x = \frac{bh^2}{24}$ $\mu_y = \frac{hb^2}{24}$	$\mu_{x_1} = \frac{h^2(B+3b)}{12}$ $\mu_x = \frac{h^2(B^2+4Bb+b^2)}{12(2B+b)}$	$\mu_x = \frac{5d^3}{24\sqrt{3}} = \frac{5}{8} a^3$ $\mu_y = \frac{5d^3}{48} = \frac{5a^3\sqrt{3}}{16}$
Rayon de giration	$r_x = \sqrt{\frac{bh^3 - b'h'^3}{12(bh - b'h')}}}$	$r_x = \frac{h}{\sqrt{24}}$ $r_y = \frac{h}{\sqrt{24}}$	$r_x = h \sqrt{\frac{B^2+4Bb+b^2}{18(B+b)^2}}$ $r_y = \frac{h}{m} \sqrt{\frac{B^2+b^2}{24}}$	$r_x = d \sqrt{\frac{5}{72}} = a \sqrt{\frac{5}{24}}$ $r_y = d \sqrt{\frac{5}{72}} = a \sqrt{\frac{5}{24}}$
Noyau central	 $G\alpha = G\beta = \frac{bh^3 - b'h'^3}{6h(bh - b'h')}$ $G\gamma = G\delta = \frac{hb^3 - h'b'^3}{6b(bh - b'h')}$	 $G\alpha = G\beta = \frac{h}{12}$ $G\gamma = G\delta = \frac{b}{12}$	 $G\alpha = G\beta = \frac{5d}{36} = \frac{5a\sqrt{3}}{36}$ $G\gamma = G\delta = \frac{5d\sqrt{3}}{72} = \frac{5a}{24}$	

Tableau 1 – Caractéristiques géométriques des sections (suite)

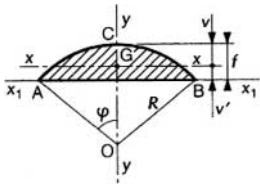
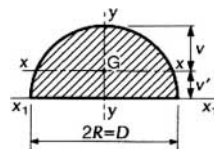
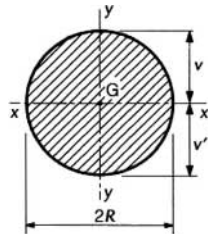
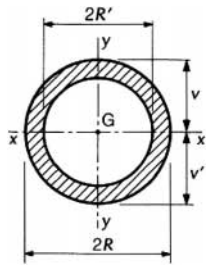
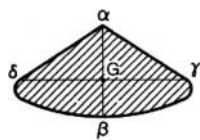
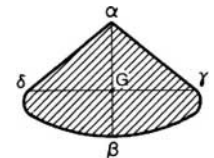
Section				
	$f = R(1 - \cos \varphi)$			
<b>Centre de gravité</b>	$v = R \left( 1 - \frac{4 \sin^3 \varphi}{3(2\varphi - \sin 2\varphi)} \right)$ $v' = R(1 - \cos \varphi) - v$	$v = R \left( 1 - \frac{4}{3\pi} \right)$ $v' = \frac{4R}{3\pi}$	$v = R$ $v' = R$	$v = R$ $v' = R$
<b>Surface</b>	$S = \frac{R^2}{2} (2\varphi - \sin 2\varphi)$	$S = \frac{1}{2} \pi R^2$	$S = \pi R^2$	$S = \pi (R^2 - R'^2)$
<b>Inertie polaire</b>	$I_G = I_x + I_y$	$I_G = \left( \frac{\pi}{4} - \frac{8}{9\pi} \right) R^4$	$I_G = \frac{1}{2} \pi R^4$	$I_G = \frac{1}{2} \pi (R^4 - R'^4)$
<b>Inertie par rapport à un axe</b>	$I_x = \frac{R^4}{16} (4\varphi - \sin 4\varphi) - \frac{R^4(1 - \cos 2\varphi)^3}{9(2\varphi - \sin 2\varphi)}$ $I_y = \frac{R^4}{8} (2\varphi - \frac{4}{3} \sin 2\varphi + \frac{1}{6} \sin 4\varphi)$	$I_{x_1} = \frac{1}{8} \pi R^4$ $I_x = \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi} \right) R^4$ $I_y = \frac{1}{8} \pi R^4$	$I_x = \frac{1}{4} \pi R^4$ $I_y = \frac{1}{4} \pi R^4$	$I_x = \frac{\pi}{4} (R^4 - R'^4)$ $I_y = \frac{\pi}{4} (R^4 - R'^4)$
<b>Module de résistance minimal</b>	$\mu_x = \frac{I_x}{v}$ $\mu_y = \frac{I_y}{R \sin \varphi}$	$\mu_{x_1} = \frac{1}{8} \pi R^3$ $\mu_x = \frac{9\pi^2 - 64}{24(3\pi - 4)} R^3$ $\mu_y = \frac{1}{8} \pi R^3$	$\mu_x = \frac{1}{4} \pi R^3$ $\mu_y = \frac{1}{4} \pi R^3$	$\mu_x = \frac{\pi(R^4 - R'^4)}{4R}$ $\mu_y = \frac{\pi(R^4 - R'^4)}{4R}$
<b>Rayon de giration</b>	$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}}$ $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}}$	$r_x = \frac{R}{2} \sqrt{1 - \left( \frac{8}{3\pi} \right)^2}$ $r_y = \frac{R}{2}$	$r_x = \frac{1}{2} R$ $r_y = \frac{1}{2} R$	$r_x = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 + R'^2}$ $r_y = \frac{1}{2} \sqrt{R^2 + R'^2}$
<b>Noyau central</b>	 $G\alpha = \frac{I_x}{Sv'}$ et $G\beta = \frac{I_x}{Sv}$ $G\gamma = G\delta = \frac{I_y}{SR \sin \varphi}$	 $G\alpha = \left( \frac{3\pi}{16} - \frac{4}{3\pi} \right) R$ $G\beta = \frac{9\pi^2 - 64}{12\pi(3\pi - 4)} R$ $G\gamma = G\delta = \frac{1}{4} R$	Le noyau central est limité par un cercle de centre G et de rayon $\rho$ : $\rho = \frac{1}{4} R$	Le noyau central est limité par un cercle de centre G et de rayon $\rho$ : $\rho = \frac{R^2 + R'^2}{4R}$

Tableau 1 – Caractéristiques géométriques des sections (suite)

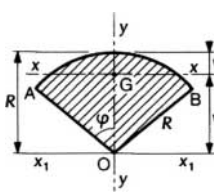
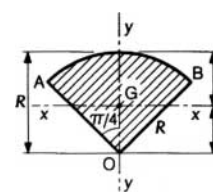
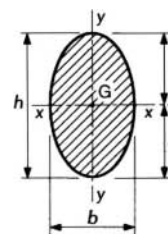
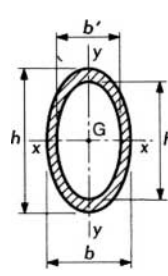
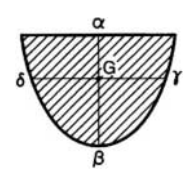
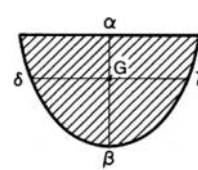
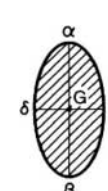
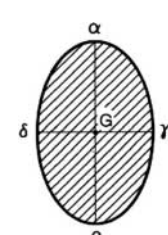
Section				
Centre de gravité	$v = R \left( 1 - \frac{2 \sin \varphi}{3 \varphi} \right)$ $v' = \frac{2 R \sin \varphi}{3 \varphi}$	$v = R \left( 1 - \frac{4 \sqrt{2}}{3 \pi} \right)$ $v' = \frac{4 R \sqrt{2}}{3 \pi}$	$v = \frac{1}{2} h$ $v' = \frac{1}{2} h$	$v = \frac{1}{2} h$ $v' = \frac{1}{2} h$
Surface	$S = \varphi R^2$	$S = \frac{1}{4} \pi R^2$	$S = \frac{\pi}{4} b h$	$S = \frac{\pi}{4} (b h - b' h')$
Inertie polaire	$I_G = I_x + I_y$	$I_G = \left( \frac{\pi}{8} - \frac{8}{9 \pi} \right) R^4$	$I_G = \frac{\pi}{64} b h (b^2 + h^2)$	$I_G = \frac{\pi}{64} [b h (b^2 + h^2) - b' h' (b'^2 + h'^2)]$
Inertie par rapport à un axe	$I_{x_1} = \frac{R^4}{8} (2 \varphi + \sin 2 \varphi)$ $I_x = I_{x_1} - S v'^2$ $I_y = \frac{R^4}{8} (2 \varphi - \sin 2 \varphi)$	$I_x = \left( \frac{\pi}{16} + \frac{1}{8} - \frac{8}{9 \pi} \right) R^4$ $I_y = \frac{\pi - 2}{16} R^4$	$I_x = \frac{\pi}{64} b h^3$ $I_y = \frac{\pi}{64} h b^3$	$I_x = \frac{\pi}{64} (b h^3 - b' h'^3)$ $I_y = \frac{\pi}{64} (h b^3 - h' b'^3)$
Module de résistance minimal	$\mu_x = \frac{I_x}{v}$ ou $\frac{I_x}{v'}$ $\mu_y = \frac{2 \varphi - \sin 2 \varphi}{8 \sin \varphi} R^3$	$\mu_x = \frac{I_x}{v'}$ $\mu_y = \frac{(\pi - 2) \sqrt{2}}{16} R^3$	$\mu_x = \frac{\pi}{32} b h^2$ $\mu_y = \frac{\pi}{32} h b^2$	$\mu_x = \frac{\pi}{32} \frac{b h^3 - b' h'^3}{h}$ $\mu_y = \frac{\pi}{32} \frac{h b^3 - h' b'^3}{b}$
Rayon de giration	$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}}$ $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}}$	$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}}$ $r_y = R \sqrt{\frac{\pi - 2}{4 \pi}}$	$r_x = \frac{1}{4} h$ $r_y = \frac{1}{4} b$	$r_x = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{b h^3 - b' h'^3}{b h - b' h'}}$ $r_y = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{h b^3 - h' b'^3}{b h - b' h'}}$
Noyau central	 $G \alpha = \frac{I_x}{S v'}$ et $G \beta = \frac{I_x}{S v}$ $G \gamma = G \delta = \frac{I_y}{S R \sin \varphi}$	 $G \alpha = \frac{I_x}{S v'}$ et $G \beta = \frac{I_x}{S v}$ $G \gamma = G \delta = \frac{(\pi - 2) \sqrt{2}}{4 \pi} R$	 $G \alpha = G \beta = \frac{h}{8}$ $G \gamma = G \delta = \frac{b}{8}$	 $G \alpha = G \beta = \frac{2 I_x}{S h}$ $G \gamma = G \delta = \frac{2 I_y}{S b}$

Tableau 1 – Caractéristiques géométriques des sections (suite)

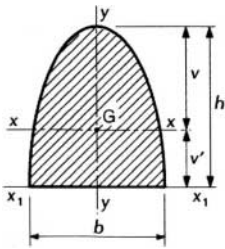
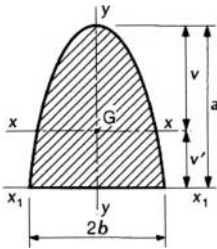
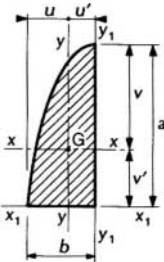
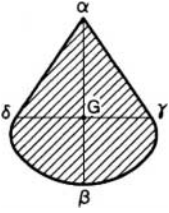
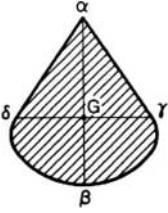
Section			
	<b>Demi-ellipse</b>	<b>Parabole</b>	<b>Demi-parabole</b>
<b>Centre de gravité</b>	$v = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) h$ $v' = \frac{4h}{3\pi}$	$v = \frac{3}{5} a$ $v' = \frac{2}{5} a$	$v = \frac{3}{5} a$ et $u = \frac{5}{8} b$ $v' = \frac{2}{5} a$ et $u' = \frac{3}{8} b$
<b>Surface</b>	$S = \frac{\pi}{4} hb$	$S = \frac{4}{3} ab$	$S = \frac{2}{3} ab$
<b>Inertie polaire</b>	$I_G = I_x + I_y$	$I_G = I_x + I_y$	
<b>Inertie par rapport à un axe</b>	$I_{x_1} = \frac{\pi}{16} bh^3$ $I_x = \left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) bh^3$ $I_y = \frac{\pi}{64} hb^3$	$I_{x_1} = \frac{32}{105} ba^3$ $I_x = \frac{16}{175} ba^3$ $I_y = \frac{4}{15} ab^3$	$I_{x_1} = \frac{16}{105} ba^3$ $I_x = \frac{8}{175} ba^3$ $I_{y_1} = \frac{2}{15} ab^3$ $I_y = \frac{19}{480} ab^3$
<b>Module de résistance minimal</b>	$\mu_{x_1} = \frac{\pi}{16} bh^2$ $\mu_x = \frac{9\pi^2 - 64}{48(3\pi - 4)} bh^2$ $\mu_y = \frac{\pi}{32} hb^2$	$\mu_x = \frac{16}{105} ba^2$ $\mu_y = \frac{4}{15} ab^2$	$\mu_x = \frac{8}{105} ba^2$ $\mu_y = \frac{19}{300} ab^2$
<b>Rayon de giration</b>	$r_x = h \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}}$ $r_y = \frac{1}{4} b$	$r_x = a \sqrt{\frac{12}{175}}$ $r_y = \frac{b}{\sqrt{5}}$	$r_x = a \sqrt{\frac{12}{175}}$ $r_y = b \sqrt{\frac{19}{320}}$
<b>Noyau central</b>	 $G\alpha = \frac{9\pi^2 - 64}{48\pi} h$ $G\beta = \frac{9\pi^2 - 64}{12\pi(3\pi - 4)} h$ $G\gamma = G\delta = \frac{1}{8} b$	 $G\alpha = \frac{6}{35} a$ $G\beta = \frac{4}{35} a$ $G\gamma = G\delta = \frac{1}{8} b$	

Tableau 1 – Caractéristiques géométriques des sections (suite)

Section			
<b>Centre de gravité</b>	$v = \frac{h^2 + (b-e)(2h-e)}{2(h+b-e)}$ $v' = \frac{h^2 + be - e^2}{2(h+b-e)}$	$v = \frac{3\ell(\ell-e) + e^2}{2(2\ell-e)}$ $v' = \frac{\ell^2 + \ell e - e^2}{2(2\ell-e)}$	$v = h - v'$ $v' = \frac{2h^2e + b'e_1^2}{2(2he + b'e_1)}$
<b>Surface</b>	$S = e(h+b-e)$	$S = e(2\ell-e)$	$S = 2he + b'e_1$
<b>Inertie polaire</b>	$I_G = I_x + I_y$	$I_G = I_f + I_d$	$I_G = I_x + I_y$
<b>Inertie par rapport à un axe</b>	$I_{x_1} = \frac{e}{3}(h^3 + be^2 - e^3)$ $I_x = I_{x_1} - S v'^2$ $I_y = \frac{e}{12}[b^3 + (h-e)e^2]$	$I_x = \frac{1}{3}e[\ell^3 + (\ell-e)e^2] - S v'^2$ $I_f = \frac{1}{12}[\ell^4 - (\ell-e)^4]$ $I_d = I_f - \frac{\ell^2(\ell-e)^2 e}{2(2\ell-e)}$	$I_{x_1} = \frac{1}{3}(2h^3e + b'e_1^3)$ $I_x = I_{x_1} - S v'^2$ $I_y = \frac{1}{12}[hb^3 - (h-e_1)b'^3]$
<b>Module de résistance minimal</b>	$\mu_x = \frac{I_x}{v}$ $\mu_y = \frac{e[b^3 + (h-e)e^2]}{6b}$	$\mu_x = \frac{I_x}{v}$ $\mu_f = \frac{I_f \sqrt{2}}{\ell}$ $\mu_d = \frac{I_d}{v' \sqrt{2}}$	$\mu_x = \frac{I_x}{v}$ $\mu_y = \frac{2I_y}{b}$
<b>Rayon de giration</b>	$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}}$ $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}}$	$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}}$ $r_f = \sqrt{\frac{\ell^2 + (\ell-e)^2}{12}}$ et $r_d = \sqrt{\frac{I_d}{S}}$	$r_x = \sqrt{\frac{I_x}{S}}$ $r_y = \sqrt{\frac{I_y}{S}}$
<b>Noyau central</b>	 $G\alpha = \frac{I_x}{Sv'}$ et $G\beta = \frac{I_x}{Sv}$ $G\gamma = G\delta = \frac{2I_y}{Sb}$	 $G\alpha = \frac{I_d}{Sv' \sqrt{2}}$ et $G\beta = \frac{I_d}{Sv \sqrt{2}}$ $G\gamma = G\delta = \frac{I_f \sqrt{2}}{S\ell}$	 $G\alpha = \frac{I_x}{Sv'}$ et $G\beta = \frac{I_x}{Sv}$ $G\gamma = G\delta = \frac{2I_y}{Sb}$

## 2. Contraintes de cisaillement et déformations

**Tableau 2 – Contraintes de cisaillement dues à l'effort tranchant (dédites de la théorie de l'élasticité)**

Les valeurs des contraintes de cisaillement, déduites de la théorie de l'élasticité, sont données dans le tableau ci-après pour les sections circulaire, elliptique et rectangulaire. Elles ont été établies à partir des hypothèses suivantes (Gy et Gz étant les axes principaux d'inertie de la section de la pièce).

■ **La pièce est à section constante**

Dans le cas où la pièce est à section variable, il faut faire intervenir la notion d'effort tranchant réduit.

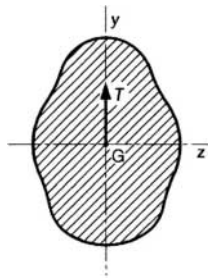
■ **La résultante T (élément de réduction de l'effort tranchant dans la section) est portée par Gy**

Dans le cas où la résultante T est inclinée par rapport aux axes Gy et Gz, on décomposera T en 2 composantes Ty et Tz suivant Gy et Gz. On fera le calcul des contraintes séparément sous l'action de Ty et Tz. Les contraintes totales s'obtiendront par application du principe de superposition.

■ **L'axe Gy est axe de symétrie de la section**

Dans le cas où Gy n'est pas axe de symétrie, il faut faire intervenir la notion de centre de cisaillement.

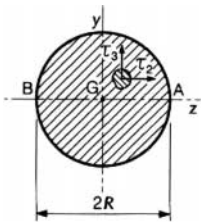
Les formules données dans ce tableau permettront en particulier de comparer les formules exactes ci-après avec les formules approchées, données dans le tableau 3.



**Section**

**Valeurs générales**

**Valeurs particulières**



**Cercle**

$$\tau_3 = \frac{3+2\nu}{8(1+\nu)} \left( \frac{T}{I} \right) \left[ R^2 - y^2 - \frac{1-2\nu}{3+2\nu} z^2 \right]$$

$$\tau_2 = - \frac{1+2\nu}{4(1+\nu)} \left( \frac{T}{I} \right) yz$$

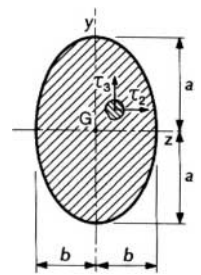
avec  $\nu$  coefficient de Poisson,  
I moment d'inertie par rapport à Gz.

en G :

$$\tau_3 = \frac{3+2\nu}{2(1+\nu)} \left( \frac{T}{S} \right)$$

en A et B :

$$\tau_3 = \frac{1+2\nu}{1+\nu} \left( \frac{T}{S} \right)$$



**Ellipse**

$$\tau_3 = \frac{2(1+\nu)a^2+b^2}{2(1+\nu)(3a^2+b^2)} \left( \frac{T}{I} \right) \left[ a^2 - y^2 - \frac{(1-2\nu)a^2}{2(1+\nu)a^2+b^2} z^2 \right]$$

$$\tau_2 = - \frac{(1+\nu)a^2+\nu b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)} \left( \frac{T}{I} \right) yz$$

avec  $\nu$  coefficient de Poisson,  
I moment d'inertie par rapport à Gz.

en G :

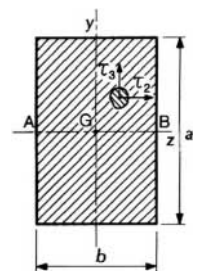
$$\tau_3 = \frac{4(1+\nu)a^2+2b^2}{(1+\nu)(3a^2+b^2)} \left( \frac{T}{S} \right)$$

pour b/a petit :

$$\tau_3 = \frac{4}{3} \left( \frac{T}{S} \right)$$

pour b/a grand :

$$\tau_3 = \frac{2}{1+\nu} \left( \frac{T}{S} \right)$$



**Rectangle**

Point G  $\begin{cases} \tau_3 = \frac{3}{2} \frac{T}{S} k_1 \\ \tau_2 = 0 \end{cases}$

Points A et B  $\begin{cases} \tau_3 = \frac{3}{2} \frac{T}{S} k_2 \\ \tau_2 = 0 \end{cases}$

Les coefficients  $k_1$  et  $k_2$  sont fonction de  $\nu$  et du rapport  $a/b$  ; les valeurs données dans la table ci-après correspondent à  $\nu = 0,25$ .

a/b	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	a/b	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>
0	0,800	∞	0,6	0,879	1,301
0,1	0,800	3,770	0,7	0,899	1,235
0,2	0,801	2,285	0,8	0,916	1,188
0,3	0,811	1,790	0,9	0,929	1,153
0,4	0,832	1,543	1	0,940	1,126
0,5	0,856	1,396			

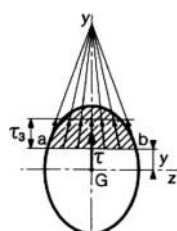
b/a	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>	b/a	k <sub>1</sub>	k <sub>2</sub>
0	1	1	0,6	0,976	1,048
0,1	0,999	1,001	0,7	0,968	1,064
0,2	0,997	1,005	0,8	0,959	1,083
0,3	0,994	1,012	0,9	0,950	1,104
0,4	0,989	1,021	1	0,940	1,126
0,5	0,983	1,033			



**Tableau 3 – Contraintes de cisaillement et déformations dues à l'effort tranchant (formules approchées)**

Les formules approchées, donnant pour les sections usuelles les valeurs des contraintes de cisaillement et la valeur de la section réduite  $S_1$  (intervenant dans le calcul des déformations), ont été déterminées à partir des hypothèses mentionnées dans le tableau 2 et des hypothèses supplémentaires suivantes.

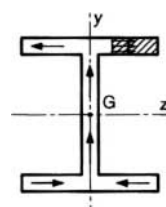
**■ Cas des sections pleines**



Le long d'une ligne parallèle à l'axe d'inertie Gz d'ordonnée y, coupant le contour de la section aux deux points a et b :

- les contraintes de cisaillement  $\tau$  passent toutes par le point de concours des deux tangentes en a et b au contour de la section ;
- la composante  $\tau_3$  suivant Gy des contraintes de cisaillement  $\tau$  est constante.

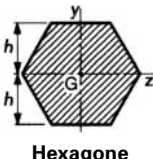
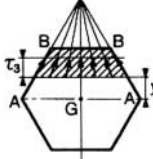
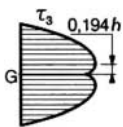
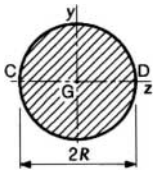
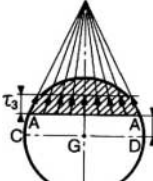
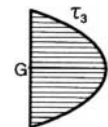
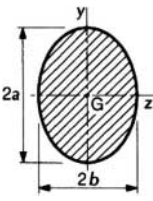
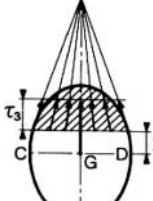
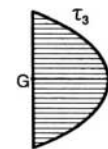
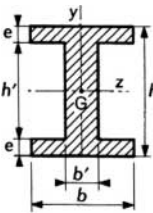
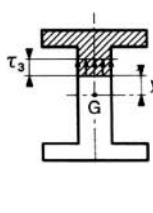
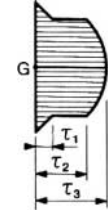
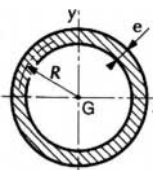
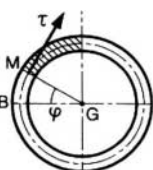
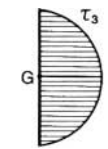
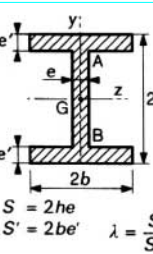
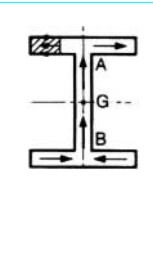
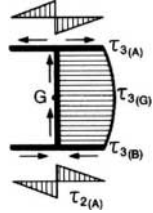
**■ Cas des sections minces (fermées ou ouvertes)**



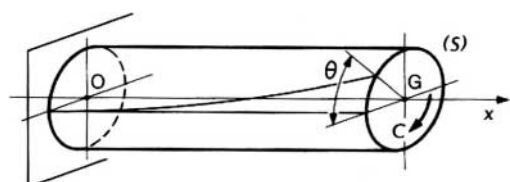
La contrainte de cisaillement est tangente en chaque point à la ligne moyenne du profil.

Section	Contrainte de cisaillement				Déformation $S_1$
	Hypothèses	Valeur générale	Contrainte maximale	Diagramme	
<p><b>Triangle isocèle</b></p>		$\tau_3 = \frac{6T}{S} \left( \frac{1}{3} + \frac{y}{h} \right) \left( \frac{2}{3} - \frac{y}{h} \right)$ $S = \frac{bh^2}{2}$	$\tau_3 = \frac{3}{2} \left( \frac{T}{S} \right)$ <p>pour <math>y = \frac{h}{6}</math></p>		$\frac{5}{6} S$
<p><b>Rectangle</b></p>		$\tau_3 = \frac{3}{2} \frac{T}{S} \left[ 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right]$ $S = bh$	$\tau_3 = \frac{3}{2} \frac{T}{S}$ <p>pour <math>y = 0</math></p>		$\frac{5}{6} S$
<p><b>Losange</b></p>		$\tau_3 = \frac{T}{S} \left[ 1 + \frac{y}{h} - \frac{2y^2}{h^2} \right]$ $\tau_A = \tau_3 \sqrt{1 + \frac{a^2}{4h^2}}$ $S = ah$	$\tau_3 = \frac{9}{8} \frac{T}{S}$ <p>pour <math>y = \frac{h}{4}</math></p>		$\frac{30}{31} S$
<p><b>Carré évidé</b> <math>a' = ka</math> (avec <math>k &lt; 1</math>)</p>		$\tau_3 = \frac{3}{2} \frac{T}{S} \left( \frac{1+k+k^2}{1+k^2} \right)$ <p>pour mm (<math>y = 0</math>)</p>			

**Tableau 3 – Contraintes de cisaillement et déformations dues à l'effort tranchant (formules approchées) (suite)**

Section	Contrainte de cisaillement				Déformation
	Hypothèses	Valeur générale	Contrainte maximale	Diagramme	S <sub>1</sub>
 <p>Hexagone</p>		$\tau_3 = \frac{6}{5} \left( \frac{T}{S} \right) \frac{(h-y)(2h^2 + 2hy - y^2)}{2h - y}$ $S = 2h^2\sqrt{3}$	$\tau_3 = 1,259 \frac{T}{S}$ pour $y = 0,1936 h$		0,901 S
 <p>Cercle</p>		$\tau_3 = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \left( 1 - \frac{y^2}{R^2} \right)$ $\tau \text{ en A} = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}$ $S = \pi R^2$	$\tau_3 = \frac{4}{3} \frac{T}{S}$ le long de CD		$\frac{9}{10} S$
 <p>Ellipse</p>		$\tau_3 = \frac{4}{3} \frac{T}{S} \left( 1 - \frac{y^2}{a^2} \right)$ $S = \pi a b$	$\tau_3 = \frac{4}{3} \frac{T}{S}$ le long de CD		$\frac{9}{10} S$
 <p>Section en I</p>		$\tau_1 = \frac{6 T e (h - e)}{b h^3 - (b - b') h'^3}$ $\tau_2 = \tau_1 \frac{b}{b'}$ $\tau_3 = \frac{3}{2} \left( \frac{T}{b' h} \right) \frac{b - (b - b') (h'/h)^2}{b - (b - b') (h'/h)}$	$\tau_{max} = \tau_3$		
 <p>Section circulaire mince</p>		$\tau_M = \frac{2 T}{S} \cos \varphi$ $S = 2 \pi R e$	$\tau_A = \tau_B = \frac{2 T}{S}$		0,5 S
 <p>Profil mince en I</p> $S = 2he$ $S' = 2be'$ $\lambda = \frac{S}{S'}$		$\tau_2(\text{aile}) = \frac{T}{I} (b - z) h$ $\tau_3(\text{âme}) = \frac{T}{I} \left[ 2be'h + \frac{e}{2} (h^2 - y^2) \right]$	$\tau_2(A) = \frac{T}{I} bh$ $\tau_3(A) = \tau_3(B) = \frac{T}{S} \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{6}}$ $\tau_3(G) = \frac{T}{S} \frac{1 + \frac{\lambda}{4}}{1 + \frac{\lambda}{6}}$		2he

**Tableau 4 – Contraintes de cisaillement et déformations dues à un moment de torsion (torsion gauche libre) (1)**



**■ Contraintes de cisaillement**

Les formules donnant les contraintes de cisaillement dans les pièces de section usuelle soumises à un moment de torsion  $C$  ont été déterminées dans les hypothèses suivantes :

- la pièce est rectiligne et de section constante ;
- au cours de la déformation, les sections ne restent pas planes et sont libres de gauchir (torsion gauche libre).

**■ Déformation**

Dans les mêmes hypothèses que précédemment, si  $\theta$  est l'angle de rotation de la section d'abscisse  $x$ , on a :

$$\frac{d\theta}{dx} = - \frac{C}{GK}$$

avec  $G$  module d'élasticité transversale.

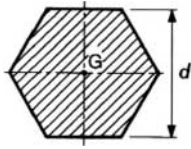
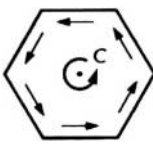
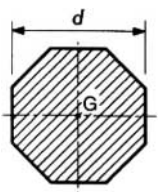

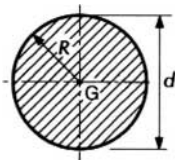
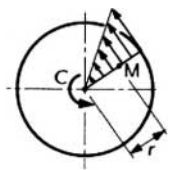
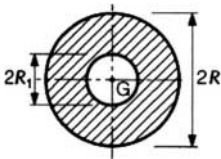
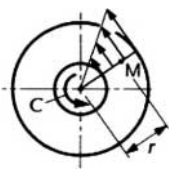
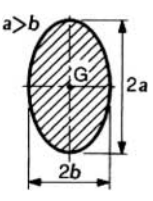
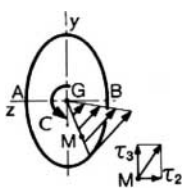
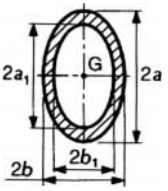
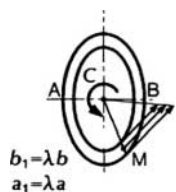
La valeur de  $K$ , module d'inertie à la torsion de la pièce, est donnée dans le tableau ci-après pour les sections usuelles.

Section	Contrainte de cisaillement			Déformation
	Direction des contraintes	Valeur générale	Contrainte maximale	Valeur de $K$
 <b>Triangle équilatéral</b>			$\tau_{max} = \frac{20}{b^3} C$ aux points m	$K = 0,6 I_G = \frac{b^4}{46,2}$ $I_G$ inertie polaire
 <b>Rectangle</b>		$C = - G a^3 b \frac{d\theta}{dx} k_1$ et $\tau_{max} = \frac{C}{k_2 a^2 b}$ ( $a < b$ )		
 <b>Trapèze isocèle</b>		On remplace le trapèze abcd par le rectangle équivalent a'b'c'd' auquel on applique les formules relatives au rectangle (G centre de gravité du trapèze).		

$b/a$	$k_1$	$k_2$	$b/a$	$k_1$	$k_2$	$b/a$	$k_1$	$k_2$
1	0,140 6	0,208 2	1,9	2,223 3	0,243 2	4,5	0,286 6	0,287 0
1,1	0,154 0	0,213 9	2	0,228 7	0,245 9	5	0,291 3	0,291 5
1,2	0,165 1	0,218 9	2,2	0,238 0	0,250 9	6	0,298 3	0,298 4
1,3	0,177 1	0,223 4	2,4	0,245 9	0,255 4	7	0,303 3	0,303 3
1,4	0,186 9	0,227 3	2,6	0,252 6	0,259 7	8	0,307 1	0,307 1
1,5	0,195 8	0,231 0	2,8	0,258 3	0,263 6	9	0,310 0	0,310 0
1,6	0,203 7	0,234 3	3	0,263 3	0,267 2	10	0,312 3	0,312 3
1,7	0,210 9	0,237 5	3,5	0,273 3	0,275 1	20	0,322 8	0,322 8
1,8	0,217 4	0,240 4	4	0,280 8	0,281 7	$\infty$	1/3	1/3

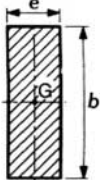

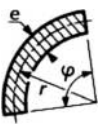

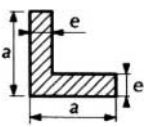
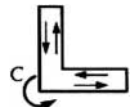
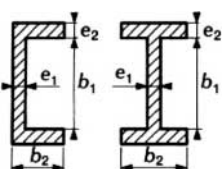
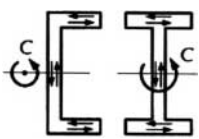

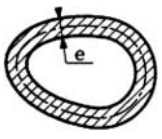
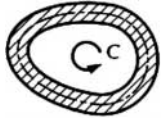
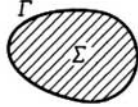
(1) Dans le cas où les sections de la pièce ne sont plus libres de se gauchir, il faut tenir compte (plus particulièrement pour les sections ouvertes à paroi mince) des phénomènes de torsion-flexion qui ont une influence importante sur la distribution des contraintes dans la pièce. L'exemple donné dans le tableau 5 permettra de se rendre compte de cette influence.

**Tableau 4 – Contraintes de cisaillement et déformations dues à un moment de torsion (torsion gauche libre) (1) (suite)**

Section	Contrainte de cisaillement			Déformation
	Direction des contraintes	Valeur générale	Contrainte maximale	Valeur de K
 Hexagone régulier			$\tau_{max} = \frac{C}{0,217 (S d)}$ S aire de la section $S = \frac{1}{2} d^2 \sqrt{3}$	$K = 0,133 d^2 S$
 Octogone régulier			$\tau_{max} = \frac{C}{0,223 \times S \times d}$ S aire de la section $S = 2 (\sqrt{2} - 1) d^2$	$K = 0,130 d^2 S$
 Circulaire pleine		$\tau = \frac{Cr}{K}$ K inertie polaire	$\tau_{max} = \frac{2 C}{\pi R^3}$	$K = \frac{\pi R^4}{2}$
 Annulaire		$\tau = \frac{Cr}{K}$ K inertie polaire	$\tau_{max} = \frac{2 CR}{\pi (R^4 - R_1^4)}$	$K = \frac{\pi (R^4 - R_1^4)}{2}$
 Ellipse pleine		$\tau_3 = \frac{2 Cz}{\pi a b^3}$ $\tau_2 = \frac{2 Cy}{\pi a^3 b}$	$\tau_{max} = \frac{2 C}{\pi a b^2}$ points A et B	$K = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$ $= \frac{S^4}{4 \pi^2 I_G}$ S surface I <sub>G</sub> inertie polaire
 Ellipse creuse		$b_1 = \lambda b$ $a_1 = \lambda a$	$\tau_{max} = \frac{2 C}{\pi a b^2} \left( \frac{1}{1 - \lambda^4} \right)$ points A et B	$K = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} (1 - \lambda^4)$

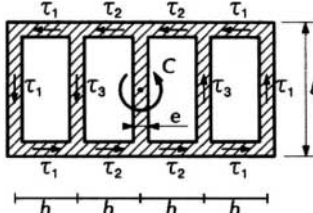
(1) Dans le cas où les sections de la pièce ne sont plus libres de se gauchir, il faut tenir compte (plus particulièrement pour les sections ouvertes à paroi mince) des phénomènes de torsion-flexion qui ont une influence importante sur la distribution des contraintes dans la pièce. L'exemple donné dans le tableau 5 permettra de se rendre compte de cette influence.

**Tableau 4 – Contraintes de cisaillement et déformations dues à un moment de torsion (torsion gauche libre) (1) (suite)**

Section	Contrainte de cisaillement			Déformation
	Direction des contraintes	Valeur générale	Contrainte maximale	Valeur de K
<b>Section pleine quelconque ayant deux axes de symétrie orthogonaux</b>	On obtient une valeur approchée de l'angle de torsion en remplaçant la section réelle par une section elliptique équivalente de même aire $S$ et de même inertie polaire $I_G$ . On a $K = \frac{S^4}{4 \pi^2 I_G}$			
 <b>Rectangle étroit [(b/e) → ∞]</b>			$\tau_{max} = \frac{3 C}{b e^2}$ le long des grands côtés	$K = \frac{1}{3} b e^3$
 <b>Plat circulaire mince ouvert</b>			$\tau_{max} = \frac{3 C}{\phi r e^2}$	$K = \frac{1}{3} \phi r e^3$
 <b>Cornière mince</b>			$\tau_{max} = \frac{3 C}{(2 a - e) e^2}$	$\frac{1}{3} (2 a - e) e^3$
 <b>Ailes parallèles Sections en U et I</b>			$\tau_{max} = \frac{3 C e_1}{b_1 e_1^3 + 2 b_2 e_2^3}$ on suppose $e_1 < e_2$	$\frac{b_1 e_1^3 + 2 b_2 e_2^3}{3}$
 <b>Ailes chanfreinées Sections en U et I</b>			Formules identiques aux ailes parallèles dans lesquelles on remplace : $e_2^3 \text{ par } \frac{1}{4} (e_2 + e_3) (e_2^2 + e_3^2)$	
 <b>Section tubulaire mince</b> e faible et la variation de e dans la section n'est pas brusque.		$\tau = \frac{C}{2 \Sigma e} \Gamma$ 		$\frac{4 \Sigma^2}{\int_{\Gamma} \frac{d\ell}{e}}$

(1) Dans le cas où les sections de la pièce ne sont plus libres de se gauchir, il faut tenir compte (plus particulièrement pour les sections ouvertes à paroi mince) des phénomènes de torsion-flexion qui ont une influence importante sur la distribution des contraintes dans la pièce. L'exemple donné dans le tableau 5 permettra de se rendre compte de cette influence.

**Tableau 4 – Contraintes de cisaillement et déformations dues à un moment de torsion (torsion gauche libre) (1) (suite)**

Section	Contrainte de cisaillement			Déformation
	Direction des contraintes	Valeur générale	Contrainte maximale	Valeur de K
 <p>Membrane tubulaire à parois intermédiaires d'épaisseur constante</p>	<p>On obtient <math>\tau_1, \tau_2, \tau_3</math> et <math>\varphi = \frac{d\theta}{dx}</math> en résolvant les quatre équations :</p> $(\ell + 2h)\tau_1 e + \ell e(\tau_1 - \tau_2) = -2G\ell h\varphi$ $2h\tau_2 e + \ell e(\tau_2 - \tau_1) = -2G\ell h\varphi$ $C = 4\ell h e(\tau_1 + \tau_2)$ $\tau_3 = \tau_1 - \tau_2$			

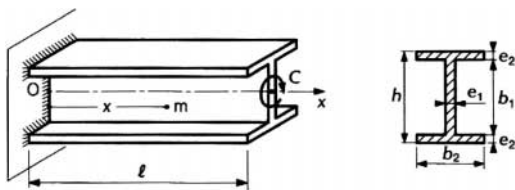
(1) Dans le cas où les sections de la pièce ne sont plus libres de se gauchir, il faut tenir compte (plus particulièrement pour les sections ouvertes à paroi mince) des phénomènes de torsion-flexion qui ont une influence importante sur la distribution des contraintes dans la pièce. L'exemple donné dans le tableau 5 permettra de se rendre compte de cette influence.

### 3. Moment et effort

**Tableau 5 – Moments et effort tranchant dans une section en I soumise à une torsion (torsion gauche non libre) et à une flexion**

Étudions une poutre en I, encastree à une extrémité et soumise à son extrémité libre à un moment de torsion C.

■ **Caractéristiques de la pièce**



On pose :

$$a^2 = \frac{EJh^2}{2GK}$$

EJ rigidité à la flexion d'une aile :

$$J = \frac{e_2 b_2^3}{12}$$

GK rigidité à la torsion de la poutre :

$$K = \frac{b_1 e_1^3 + 2 b_2 e_2^3}{3}$$

■ **Éléments de réduction dans une section m d'abscisse x**

Moment de flexion dans chacune des ailes :

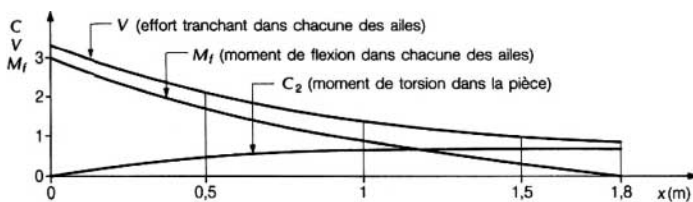
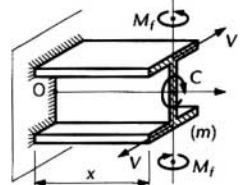
$$M_f = \frac{a}{h} C \frac{\text{sh}\left(\frac{\ell-x}{a}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\ell}{a}\right)}$$

Moment de torsion dans la pièce :

$$C_2 = C \left[ 1 - \frac{\text{ch}\left(\frac{\ell-x}{a}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\ell}{a}\right)} \right]$$

Effort tranchant dans chacune des ailes :

$$V = -\frac{C}{h} \frac{\text{ch}\left(\frac{\ell-x}{a}\right)}{\text{ch}\left(\frac{\ell}{a}\right)}$$

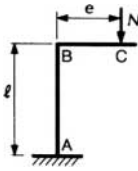
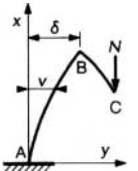
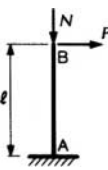
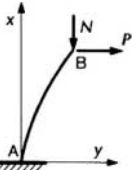
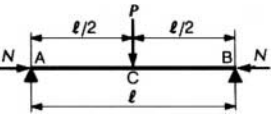
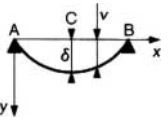
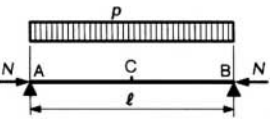
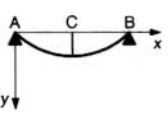


■ **Exemple**

poutre I 300,  $\ell = 180 \text{ cm}$  :  $C = 1 \text{ t} \cdot \text{m}$ .

## 4. Flèches et moments

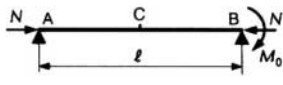

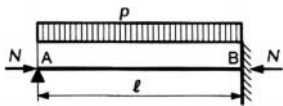
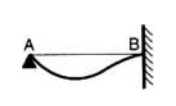
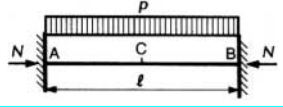
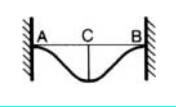
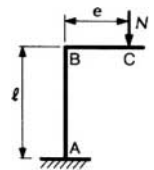
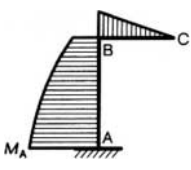
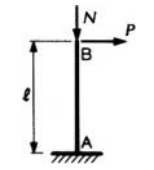
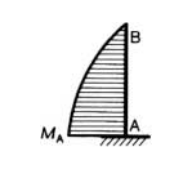
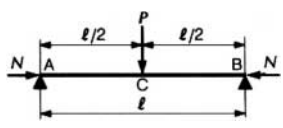
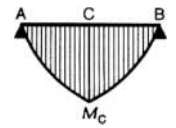
Tableau 6 – Flèches et moments dans des pièces soumises à une flexion-compression (1)

Caractéristiques de la pièce Cas de charges (2)	Déformation																															
	Schéma	Ligne élastique. Flèches (3)																														
		$v = e \frac{1 - \cos kx}{\cos kl}$ $v_A = 0$ $v_B = \delta = e \left[ \frac{1 - \cos kl}{\cos kl} \right] = e [\varphi_1]$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="10">Valeurs des coefficients amplificateurs</th> </tr> <tr> <th><math>kl</math></th> <td>0</td> <td>0,2</td> <td>0,4</td> <td>0,6</td> <td>0,8</td> <td>1</td> <td>1,2</td> <td>1,4</td> <td><math>\pi/2</math></td> </tr> <tr> <th><math>\varphi_1</math></th> <td>0</td> <td>0,020</td> <td>0,086</td> <td>0,212</td> <td>0,435</td> <td>0,851</td> <td>1,760</td> <td>4,883</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> </thead></table>	Valeurs des coefficients amplificateurs										$kl$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$	$\varphi_1$	0	0,020	0,086	0,212	0,435	0,851	1,760	4,883	$\infty$
Valeurs des coefficients amplificateurs																																
$kl$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$																							
$\varphi_1$	0	0,020	0,086	0,212	0,435	0,851	1,760	4,883	$\infty$																							
		$v = \frac{P}{N} \left[ -x + \frac{\sin kl - \sin k(\ell - x)}{k \cos kl} \right]$ $v_B = \frac{P \ell^3}{3 EI} \left[ \frac{3(\tan kl - kl)}{(kl)^3} \right] = \frac{P \ell^3}{3 EI} [\varphi_2]$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="10">Valeurs des coefficients amplificateurs</th> </tr> <tr> <th><math>kl</math></th> <td>0</td> <td>0,2</td> <td>0,4</td> <td>0,6</td> <td>0,8</td> <td>1</td> <td>1,2</td> <td>1,4</td> <td><math>\pi/2</math></td> </tr> <tr> <th><math>\varphi_2</math></th> <td>1</td> <td>1,016</td> <td>1,068</td> <td>1,169</td> <td>1,346</td> <td>1,672</td> <td>2,382</td> <td>4,808</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> </thead></table>	Valeurs des coefficients amplificateurs										$kl$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$	$\varphi_2$	1	1,016	1,068	1,169	1,346	1,672	2,382	4,808	$\infty$
Valeurs des coefficients amplificateurs																																
$kl$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$																							
$\varphi_2$	1	1,016	1,068	1,169	1,346	1,672	2,382	4,808	$\infty$																							
		<p>de A à C : <math>v = \frac{P}{N} \times \frac{1}{2k} \left[ \frac{\sin kx}{\cos(kl/2)} - kx \right]</math></p> $v_C = \delta = \frac{P \ell^3}{48 EI} \left[ \frac{3(\tan u - u)}{u^3} \right] = \frac{P \ell^3}{48 EI} [\varphi_3]$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="10">Valeurs des coefficients amplificateurs</th> </tr> <tr> <th><math>u</math></th> <td>0</td> <td>0,2</td> <td>0,4</td> <td>0,6</td> <td>0,8</td> <td>1</td> <td>1,2</td> <td>1,4</td> <td><math>\pi/2</math></td> </tr> <tr> <th><math>\varphi_3</math></th> <td>1</td> <td>1,016</td> <td>1,068</td> <td>1,169</td> <td>1,346</td> <td>1,672</td> <td>2,382</td> <td>4,808</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> </thead></table>	Valeurs des coefficients amplificateurs										$u$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$	$\varphi_3$	1	1,016	1,068	1,169	1,346	1,672	2,382	4,808	$\infty$
Valeurs des coefficients amplificateurs																																
$u$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$																							
$\varphi_3$	1	1,016	1,068	1,169	1,346	1,672	2,382	4,808	$\infty$																							
		<p>de A à C : <math>v = \frac{p \ell^4}{16 EI u^4} \left[ \frac{\cos \left[ u \left( 1 - \frac{2x}{\ell} \right) \right]}{\cos u} - 1 \right] - \frac{p \ell^2}{8 EI u^2} x(\ell - x)</math></p> $v_C = \delta = \frac{5}{384} \frac{p \ell^4}{EI} \left[ \frac{24(1 - \cos u) + 12 u^2 \cos u}{5 u^4 \cos u} \right] = \frac{5 p \ell^4}{384 EI} [\varphi_4]$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="10">Valeurs des coefficients amplificateurs</th> </tr> <tr> <th><math>u</math></th> <td>0</td> <td>0,2</td> <td>0,4</td> <td>0,6</td> <td>0,8</td> <td>1</td> <td>1,2</td> <td>1,4</td> <td><math>\pi/2</math></td> </tr> <tr> <th><math>\varphi_4</math></th> <td>1</td> <td>1,017</td> <td>1,070</td> <td>1,171</td> <td>1,351</td> <td>1,684</td> <td>2,407</td> <td>4,877</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> </thead></table>	Valeurs des coefficients amplificateurs										$u$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$	$\varphi_4$	1	1,017	1,070	1,171	1,351	1,684	2,407	4,877	$\infty$
Valeurs des coefficients amplificateurs																																
$u$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$																							
$\varphi_4$	1	1,017	1,070	1,171	1,351	1,684	2,407	4,877	$\infty$																							

(1) Les formules ci-dessus ont été établies en tenant compte du moment additionnel produit par les charges axiales par suite de la déformation de la pièce.

(2)  $\ell$  longueur de la pièce,  $I$  moment d'inertie,  $E$  module d'élasticité longitudinale,  $N$  effort de compression,  $p$  ou  $P$  charge transversale de flexion.(3)  $k = \sqrt{N/(EI)}$   $u = kl/2$

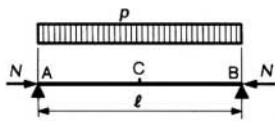
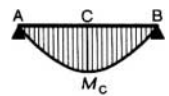
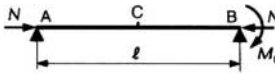
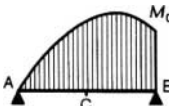
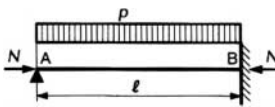

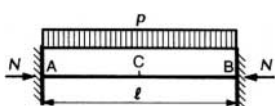
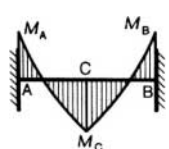
Tableau 6 – Flèches et moments dans des pièces soumises à une flexion-compression (1) (suite)

Caractéristiques de la pièce Cas de charges (2)	Déformation																															
	Schéma	Ligne élastique. Flèches (3)																														
		$v = \frac{M_0}{N} \left[ \frac{\sin kx}{\sin kl} - \frac{x}{l} \right]$																														
		<p>v s'obtient par application du principe de superposition, à l'aide des résultats des deux cas précédents. On prendra <math>M_0 = M_B</math>.</p>																														
		<p>v s'obtiendra également par application du principe de superposition</p>																														
Caractéristiques de la pièce Cas de charges (2)	Moment																															
Diagramme	Valeurs générales et particulières (3)																															
		$M = Ne \frac{\cos kx}{\cos kl}$ $M_A = Ne \left[ \frac{1}{\cos kl} \right] = Ne [\psi_1]$ $M_B = Ne$ <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th colspan="10">Valeurs des coefficients amplificateurs</th> </tr> <tr> <th><math>kl</math></th> <th>0</th> <th>0,2</th> <th>0,4</th> <th>0,6</th> <th>0,8</th> <th>1</th> <th>1,2</th> <th>1,4</th> <th><math>\pi/2</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\psi_1</math></td> <td>1</td> <td>1,020</td> <td>1,086</td> <td>1,212</td> <td>1,435</td> <td>1,851</td> <td>2,760</td> <td>5,883</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> </tbody> </table>	Valeurs des coefficients amplificateurs										$kl$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$	$\psi_1$	1	1,020	1,086	1,212	1,435	1,851	2,760	5,883	$\infty$
Valeurs des coefficients amplificateurs																																
$kl$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$																							
$\psi_1$	1	1,020	1,086	1,212	1,435	1,851	2,760	5,883	$\infty$																							
		$M = \frac{P}{k} \frac{\sin k(\ell - x)}{\cos kl}$ $M_A = P\ell \left[ \frac{\tan kl}{kl} \right] = P\ell (\psi_2)$ <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th colspan="10">Valeurs des coefficients amplificateurs</th> </tr> <tr> <th><math>kl</math></th> <th>0</th> <th>0,2</th> <th>0,4</th> <th>0,6</th> <th>0,8</th> <th>1</th> <th>1,2</th> <th>1,4</th> <th><math>\pi/2</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\psi_2</math></td> <td>1</td> <td>1,014</td> <td>1,057</td> <td>1,140</td> <td>1,287</td> <td>1,557</td> <td>2,143</td> <td>4,141</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> </tbody> </table>	Valeurs des coefficients amplificateurs										$kl$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$	$\psi_2$	1	1,014	1,057	1,140	1,287	1,557	2,143	4,141	$\infty$
Valeurs des coefficients amplificateurs																																
$kl$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$																							
$\psi_2$	1	1,014	1,057	1,140	1,287	1,557	2,143	4,141	$\infty$																							
		$M = \frac{P\ell}{4} \frac{\sin kx}{u \cos u} \text{ de A à C}$ $M_C = \frac{P\ell}{4} \left[ \frac{\tan u}{u} \right] = \frac{P\ell}{4} [\psi_3]$ <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th colspan="10">Valeurs des coefficients amplificateurs</th> </tr> <tr> <th><math>u</math></th> <th>0</th> <th>0,2</th> <th>0,4</th> <th>0,6</th> <th>0,8</th> <th>1</th> <th>1,2</th> <th>1,4</th> <th><math>\pi/2</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\psi_3</math></td> <td>1</td> <td>1,014</td> <td>1,057</td> <td>1,140</td> <td>1,287</td> <td>1,557</td> <td>2,143</td> <td>4,141</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> </tbody> </table>	Valeurs des coefficients amplificateurs										$u$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$	$\psi_3$	1	1,014	1,057	1,140	1,287	1,557	2,143	4,141	$\infty$
Valeurs des coefficients amplificateurs																																
$u$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$																							
$\psi_3$	1	1,014	1,057	1,140	1,287	1,557	2,143	4,141	$\infty$																							

(1) Les formules ci-dessus ont été établies en tenant compte du moment additionnel produit par les charges axiales par suite de la déformation de la pièce.  
(2)  $\ell$  longueur de la pièce,  $I$  moment d'inertie,  $E$  module d'élasticité longitudinale,  $N$  effort de compression,  $p$  ou  $P$  charge transversale de flexion.  
(3)  $k = \sqrt{N/(EI)}$   $u = kl/2$



Tableau 6 – Flèches et moments dans des pièces soumises à une flexion-compression (1) (suite)

Caractéristiques de la pièce Cas de charges (2)	Moment																															
	Diagramme	Valeurs générales et particulières (3)																														
		$M = \frac{p\ell^2}{4u^2} \left[ \frac{\cos \left[ u \left( 1 - \frac{2x}{\ell} \right) \right]}{\cos u} - 1 \right]$ $M_C = \frac{p\ell^2}{8} \left[ \frac{2(1 - \cos u)}{u^2 \cos u} \right] = \frac{p\ell^2}{8} [\psi_4]$ <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <caption>Valeurs des coefficients amplificateurs</caption> <thead> <tr> <th>u</th> <th>0</th> <th>0,2</th> <th>0,4</th> <th>0,6</th> <th>0,8</th> <th>1</th> <th>1,2</th> <th>1,4</th> <th><math>\pi/2</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\psi_4</math></td> <td>1</td> <td>1,017</td> <td>1,071</td> <td>1,176</td> <td>1,360</td> <td>1,702</td> <td>2,444</td> <td>4,983</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> </tbody> </table>	u	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$	$\psi_4$	1	1,017	1,071	1,176	1,360	1,702	2,444	4,983	$\infty$										
u	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$																							
$\psi_4$	1	1,017	1,071	1,176	1,360	1,702	2,444	4,983	$\infty$																							
		$M = M_0 \frac{\sin kx}{\sin k\ell}$ $M_C = \frac{M_0}{2} \left[ \frac{1}{\cos u} \right] = \frac{M_0}{2} [\psi_5]$ <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <caption>Valeurs des coefficients amplificateurs</caption> <thead> <tr> <th>u</th> <th>0</th> <th>0,2</th> <th>0,4</th> <th>0,6</th> <th>0,8</th> <th>1</th> <th>1,2</th> <th>1,4</th> <th><math>\pi/2</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\psi_5</math></td> <td>1</td> <td>1,020</td> <td>1,086</td> <td>1,212</td> <td>1,435</td> <td>1,851</td> <td>2,760</td> <td>5,883</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> </tbody> </table>	u	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$	$\psi_5$	1	1,020	1,086	1,212	1,435	1,851	2,760	5,883	$\infty$										
u	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	$\pi/2$																							
$\psi_5$	1	1,020	1,086	1,212	1,435	1,851	2,760	5,883	$\infty$																							
		$M_A = 0$ $M_B = \frac{p\ell^2}{8} \left[ \frac{4 \tan 2u (\tan u - u)}{u (\tan 2u - 2u)} \right] = -\frac{p\ell^2}{8} [\psi_6]$ <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <caption>Valeurs des coefficients amplificateurs</caption> <thead> <tr> <th>u</th> <th>0</th> <th>0,3</th> <th>0,6</th> <th>0,9</th> <th>1,2</th> <th>1,5</th> <th>1,8</th> <th>2,1</th> <th><math>\beta</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\psi_6</math></td> <td>1</td> <td>1,012</td> <td>1,051</td> <td>1,127</td> <td>1,263</td> <td>1,524</td> <td>2,148</td> <td>5,326</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> </tbody> </table> <p><math>\beta</math> est la plus petite racine positive de l'équation  <math>\tan 2u = 2u ; \beta = 2,24670</math></p>	u	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	$\beta$	$\psi_6$	1	1,012	1,051	1,127	1,263	1,524	2,148	5,326	$\infty$										
u	0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1	$\beta$																							
$\psi_6$	1	1,012	1,051	1,127	1,263	1,524	2,148	5,326	$\infty$																							
		$M_A = M_B = -\frac{p\ell^2}{12} \left[ \frac{3(\tan u - u)}{u^2 \tan u} \right] = -\frac{p\ell^2}{12} [\psi_7]$ $M_C = \frac{p\ell^2}{24} \left[ \frac{6(u - \sin u)}{u^2 \sin u} \right] = +\frac{p\ell^2}{24} [\psi_8]$ <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <caption>Valeurs des coefficients amplificateurs</caption> <thead> <tr> <th>u</th> <th>0</th> <th>0,4</th> <th>0,8</th> <th>1,2</th> <th>1,6</th> <th>2</th> <th>2,4</th> <th>2,8</th> <th><math>\pi</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\psi_7</math></td> <td>1</td> <td>1,011</td> <td>1,045</td> <td>1,111</td> <td>1,227</td> <td>1,436</td> <td>1,885</td> <td>3,396</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> <tr> <td><math>\psi_8</math></td> <td>1</td> <td>1,019</td> <td>1,080</td> <td>1,198</td> <td>1,408</td> <td>1,799</td> <td>2,659</td> <td>5,632</td> <td><math>\infty</math></td> </tr> </tbody> </table>	u	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	$\pi$	$\psi_7$	1	1,011	1,045	1,111	1,227	1,436	1,885	3,396	$\infty$	$\psi_8$	1	1,019	1,080	1,198	1,408	1,799	2,659	5,632	$\infty$
u	0	0,4	0,8	1,2	1,6	2	2,4	2,8	$\pi$																							
$\psi_7$	1	1,011	1,045	1,111	1,227	1,436	1,885	3,396	$\infty$																							
$\psi_8$	1	1,019	1,080	1,198	1,408	1,799	2,659	5,632	$\infty$																							

(1) Les formules ci-dessus ont été établies en tenant compte du moment additionnel produit par les charges axiales par suite de la déformation de la pièce.

(2)  $\ell$  longueur de la pièce,  $I$  moment d'inertie,  $E$  module d'élasticité longitudinale,  $N$  effort de compression,  $p$  ou  $P$  charge transversale de flexion.

(3)  $k = \sqrt{N/(EI)}$   $u = k\ell/2$

**Tableau 7 – Flèches et moments dans des pièces soumises à une flexion-traction (1)**

Caractéristiques de la pièce Cas de charges (2)	Déformation																												
	Diagramme	Ligne élastique. Flèches (3)																											
		$v = e \frac{\text{ch } kx - 1}{\text{ch } k\ell}$ $v_A = 0$ $v_B = \delta = e \left[ \frac{\text{ch } k\ell - 1}{\text{ch } k\ell} \right] = e[\varphi_1]$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="9">Valeurs des coefficients de réduction</th> </tr> <tr> <th><math>k\ell</math></th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>4</th> <th>6</th> <th>8</th> <th>10</th> <th>12</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\varphi_1</math></td> <td>0</td> <td>0,352</td> <td>0,734</td> <td>0,963</td> <td>0,995</td> <td>0,999</td> <td>1,000</td> <td>1,000</td> </tr> </tbody> </table>	Valeurs des coefficients de réduction									$k\ell$	0	1	2	4	6	8	10	12	$\varphi_1$	0	0,352	0,734	0,963	0,995	0,999	1,000	1,000
Valeurs des coefficients de réduction																													
$k\ell$	0	1	2	4	6	8	10	12																					
$\varphi_1$	0	0,352	0,734	0,963	0,995	0,999	1,000	1,000																					
		$v = \frac{P}{T} \left[ x - \frac{\text{sh } k\ell - \text{sh } k(\ell - x)}{k \text{ch } k\ell} \right]$ $v_B = \frac{P\ell^3}{3EI} \left[ \frac{3(k\ell - \text{th } k\ell)}{(k\ell)^3} \right] = \frac{P\ell^3}{3EI} [\varphi_2]$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="9">Valeurs des coefficients de réduction</th> </tr> <tr> <th><math>k\ell</math></th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>4</th> <th>6</th> <th>8</th> <th>10</th> <th>12</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\varphi_2</math></td> <td>1</td> <td>0,715</td> <td>0,388</td> <td>0,141</td> <td>0,069</td> <td>0,041</td> <td>0,027</td> <td>0,019</td> </tr> </tbody> </table>	Valeurs des coefficients de réduction									$k\ell$	0	1	2	4	6	8	10	12	$\varphi_2$	1	0,715	0,388	0,141	0,069	0,041	0,027	0,019
Valeurs des coefficients de réduction																													
$k\ell$	0	1	2	4	6	8	10	12																					
$\varphi_2$	1	0,715	0,388	0,141	0,069	0,041	0,027	0,019																					
		$v = \frac{P}{T} \times \frac{1}{2k} \left( kx - \frac{\text{sh } kx}{\text{ch } (k\ell/2)} \right) \text{ de A à C}$ $v_C = \frac{P\ell^3}{48EI} \left[ \frac{3(u - \text{th } u)}{u^3} \right] = \frac{P\ell^3}{48EI} [\varphi_3]$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="9">Valeurs des coefficients de réduction</th> </tr> <tr> <th><math>u</math></th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>4</th> <th>6</th> <th>8</th> <th>10</th> <th>12</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\varphi_3</math></td> <td>1</td> <td>0,715</td> <td>0,388</td> <td>0,141</td> <td>0,069</td> <td>0,041</td> <td>0,027</td> <td>0,019</td> </tr> </tbody> </table>	Valeurs des coefficients de réduction									$u$	0	1	2	4	6	8	10	12	$\varphi_3$	1	0,715	0,388	0,141	0,069	0,041	0,027	0,019
Valeurs des coefficients de réduction																													
$u$	0	1	2	4	6	8	10	12																					
$\varphi_3$	1	0,715	0,388	0,141	0,069	0,041	0,027	0,019																					
		$v = \frac{p\ell^4}{16EIu^4} \left[ \frac{\text{ch} \left[ u \left( 1 - \frac{2x}{\ell} \right) \right]}{\text{ch } u} - 1 \right] + \frac{p\ell^2}{8EIu^2} x(\ell - x)$ $v_C = \frac{5}{384} \frac{p\ell^4}{EI} \left[ \frac{24(1 - \text{ch } u) + 12u^2 \text{ch } u}{5u^4 \text{ch } u} \right] = \frac{5}{384} \frac{p\ell^4}{EI} [\varphi_4]$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="9">Valeurs des coefficients de réduction</th> </tr> <tr> <th><math>u</math></th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>4</th> <th>6</th> <th>8</th> <th>10</th> <th>12</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\varphi_4</math></td> <td>1</td> <td>0,711</td> <td>0,380</td> <td>0,132</td> <td>0,063</td> <td>0,036</td> <td>0,024</td> <td>0,016</td> </tr> </tbody> </table>	Valeurs des coefficients de réduction									$u$	0	1	2	4	6	8	10	12	$\varphi_4$	1	0,711	0,380	0,132	0,063	0,036	0,024	0,016
Valeurs des coefficients de réduction																													
$u$	0	1	2	4	6	8	10	12																					
$\varphi_4$	1	0,711	0,380	0,132	0,063	0,036	0,024	0,016																					
		$v = \frac{M_0}{T} \left[ \frac{x}{\ell} - \frac{\text{sh } kx}{\text{sh } k\ell} \right]$																											

(1) Les formules ci-dessus ont été établies en tenant compte du moment additionnel produit par les charges axiales par suite de la déformation de la pièce.  
 (2)  $\ell$  longueur de la pièce,  $I$  moment d'inertie,  $E$  module d'élasticité longitudinale,  $T$  effort de traction,  $p$  ou  $P$  charge transversale de flexion.  
 (3)  $k = \sqrt{T/(EI)}$      $u = k\ell/2$

Tableau 7 – Flèches et moments dans des pièces soumises à une flexion-traction (1) (suite)

Caractéristiques de la pièce Cas de charges (2)	Déformation																												
	Diagramme	Ligne élastique. Flèches (3)																											
		v s'obtient, par application du principe de superposition, à l'aide des résultats des deux cas précédents. On prendra $M_0 = M_A$ ; $M_0 = M_B$ .																											
		v s'obtiendra également par application du principe de superposition																											
Caractéristiques de la pièce Cas de charges (2)	Moment																												
Diagramme	Valeurs générales et particulières (3)																												
		$M = Te \frac{\text{ch } kx}{\text{ch } k\ell}$ $M_B = Te$ $M_A = \frac{Te}{\text{ch } k\ell} = Te[\psi_1]$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="9">Valeurs des coefficients de réduction</th> </tr> <tr> <th><math>k\ell</math></th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>4</th> <th>6</th> <th>8</th> <th>10</th> <th>12</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\psi_1</math></td> <td>1</td> <td>0,648</td> <td>0,266</td> <td>0,037</td> <td>0,005</td> <td>0,001</td> <td>0,000</td> <td>0,000</td> </tr> </tbody> </table>	Valeurs des coefficients de réduction									$k\ell$	0	1	2	4	6	8	10	12	$\psi_1$	1	0,648	0,266	0,037	0,005	0,001	0,000	0,000
Valeurs des coefficients de réduction																													
$k\ell$	0	1	2	4	6	8	10	12																					
$\psi_1$	1	0,648	0,266	0,037	0,005	0,001	0,000	0,000																					
		$M = \frac{P}{k} \frac{\text{sh } k(\ell - x)}{\text{ch } k\ell}$ $M_A = P\ell \left[ \frac{\text{th } k\ell}{k\ell} \right] = P\ell[\psi_2]$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="9">Valeurs des coefficients de réduction</th> </tr> <tr> <th><math>k\ell</math></th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>4</th> <th>6</th> <th>8</th> <th>10</th> <th>12</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\psi_2</math></td> <td>1</td> <td>0,762</td> <td>0,482</td> <td>0,250</td> <td>0,167</td> <td>0,125</td> <td>0,100</td> <td>0,083</td> </tr> </tbody> </table>	Valeurs des coefficients de réduction									$k\ell$	0	1	2	4	6	8	10	12	$\psi_2$	1	0,762	0,482	0,250	0,167	0,125	0,100	0,083
Valeurs des coefficients de réduction																													
$k\ell$	0	1	2	4	6	8	10	12																					
$\psi_2$	1	0,762	0,482	0,250	0,167	0,125	0,100	0,083																					
		$M = \frac{P\ell}{4} \times \frac{\text{sh } kx}{u \text{ch } u} \text{ (de A à C)}$ $M_C = \frac{P\ell}{4} \left[ \frac{\text{th } u}{u} \right] = \frac{P\ell}{4}[\psi_3]$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th colspan="9">Valeurs des coefficients de réduction</th> </tr> <tr> <th><math>u</math></th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>4</th> <th>6</th> <th>8</th> <th>10</th> <th>12</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\psi_3</math></td> <td>1</td> <td>0,762</td> <td>0,482</td> <td>0,250</td> <td>0,167</td> <td>0,125</td> <td>0,100</td> <td>0,083</td> </tr> </tbody> </table>	Valeurs des coefficients de réduction									$u$	0	1	2	4	6	8	10	12	$\psi_3$	1	0,762	0,482	0,250	0,167	0,125	0,100	0,083
Valeurs des coefficients de réduction																													
$u$	0	1	2	4	6	8	10	12																					
$\psi_3$	1	0,762	0,482	0,250	0,167	0,125	0,100	0,083																					

(1) Les formules ci-dessus ont été établies en tenant compte du moment additionnel produit par les charges axiales par suite de la déformation de la pièce.

(2)  $\ell$  longueur de la pièce,  $I$  moment d'inertie,  $E$  module d'élasticité longitudinale,  $T$  effort de traction,  $p$  ou  $P$  charge transversale de flexion.

(3)  $k = \sqrt{T/(EI)}$      $u = k\ell/2$

Tableau 7 – Flèches et moments dans des pièces soumises à une flexion-traction (1) (suite)

Caractéristiques de la pièce Cas de charges (2)	Moment																																					
	Diagramme	Valeurs générales et particulières (3)																																				
		$M = \frac{p\ell^2}{4u^2} \left[ 1 - \frac{\text{ch} \left[ u \left( 1 - \frac{2x}{\ell} \right) \right]}{\text{ch } u} \right] \quad (\text{de A à C})$ $M_C = \frac{p\ell^2}{8} \left[ \frac{2(\text{ch } u - 1)}{u^2 \text{ch } u} \right] = \frac{p\ell^2}{8} [\psi_4]$ <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th colspan="9">Valeurs des coefficients de réduction</th> </tr> <tr> <th>u</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>4</th> <th>6</th> <th>8</th> <th>10</th> <th>12</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\psi_4</math></td> <td>1</td> <td>0,704</td> <td>0,367</td> <td>0,120</td> <td>0,055</td> <td>0,031</td> <td>0,020</td> <td>0,014</td> </tr> </tbody> </table>	Valeurs des coefficients de réduction									u	0	1	2	4	6	8	10	12	$\psi_4$	1	0,704	0,367	0,120	0,055	0,031	0,020	0,014									
Valeurs des coefficients de réduction																																						
u	0	1	2	4	6	8	10	12																														
$\psi_4$	1	0,704	0,367	0,120	0,055	0,031	0,020	0,014																														
		$M = M_0 \frac{\text{sh } kx}{\text{sh } k\ell}$ $M_C = \frac{M_0}{2} \left[ \frac{1}{\text{ch } u} \right] = \frac{M_0}{2} [\psi_5]$ <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th colspan="9">Valeurs des coefficients de réduction</th> </tr> <tr> <th>u</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>4</th> <th>6</th> <th>8</th> <th>10</th> <th>12</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\psi_5</math></td> <td>1</td> <td>0,648</td> <td>0,266</td> <td>0,037</td> <td>0,005</td> <td>0,001</td> <td>0,000</td> <td>0,000</td> </tr> </tbody> </table>	Valeurs des coefficients de réduction									u	0	1	2	4	6	8	10	12	$\psi_5$	1	0,648	0,266	0,037	0,005	0,001	0,000	0,000									
Valeurs des coefficients de réduction																																						
u	0	1	2	4	6	8	10	12																														
$\psi_5$	1	0,648	0,266	0,037	0,005	0,001	0,000	0,000																														
		$M_A = M_B = -\frac{p\ell^2}{12} \left[ \frac{3(u - \text{th } u)}{u^2 \text{th } u} \right] = -\frac{p\ell^2}{12} [\psi_6]$ $M_C = \frac{p\ell^2}{24} \left[ \frac{6(\text{sh } u - u)}{u^2 \text{sh } u} \right] = \frac{p\ell^2}{24} [\psi_7]$ <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th colspan="9">Valeurs des coefficients de réduction</th> </tr> <tr> <th>u</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>4</th> <th>6</th> <th>8</th> <th>10</th> <th>12</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\psi_6</math></td> <td>1</td> <td>0,939</td> <td>0,806</td> <td>0,563</td> <td>0,417</td> <td>0,328</td> <td>0,270</td> <td>0,229</td> </tr> <tr> <td><math>\psi_7</math></td> <td>1</td> <td>0,894</td> <td>0,673</td> <td>0,320</td> <td>0,162</td> <td>0,093</td> <td>0,060</td> <td>0,042</td> </tr> </tbody> </table>	Valeurs des coefficients de réduction									u	0	1	2	4	6	8	10	12	$\psi_6$	1	0,939	0,806	0,563	0,417	0,328	0,270	0,229	$\psi_7$	1	0,894	0,673	0,320	0,162	0,093	0,060	0,042
Valeurs des coefficients de réduction																																						
u	0	1	2	4	6	8	10	12																														
$\psi_6$	1	0,939	0,806	0,563	0,417	0,328	0,270	0,229																														
$\psi_7$	1	0,894	0,673	0,320	0,162	0,093	0,060	0,042																														
		$M_A = M_B = M_C = \frac{P\ell}{8} \left[ \frac{\text{th } \frac{u}{2}}{(u/2)} \right] = \frac{P\ell}{8} [\psi_8]$ <table border="1" style="margin-top: 10px;"> <thead> <tr> <th colspan="9">Valeurs des coefficients de réduction</th> </tr> <tr> <th>u</th> <th>0</th> <th>1</th> <th>2</th> <th>4</th> <th>6</th> <th>8</th> <th>10</th> <th>12</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td><math>\psi_8</math></td> <td>1</td> <td>0,924</td> <td>0,762</td> <td>0,482</td> <td>0,332</td> <td>0,250</td> <td>0,200</td> <td>0,167</td> </tr> </tbody> </table>	Valeurs des coefficients de réduction									u	0	1	2	4	6	8	10	12	$\psi_8$	1	0,924	0,762	0,482	0,332	0,250	0,200	0,167									
Valeurs des coefficients de réduction																																						
u	0	1	2	4	6	8	10	12																														
$\psi_8$	1	0,924	0,762	0,482	0,332	0,250	0,200	0,167																														

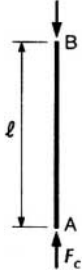
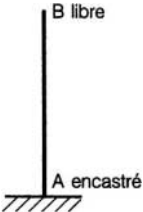
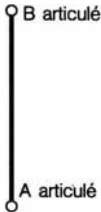

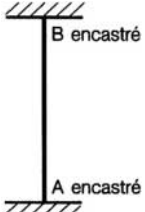
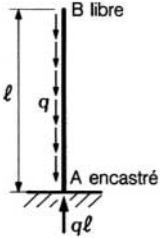
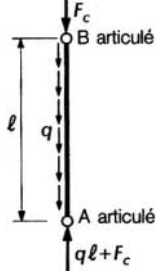
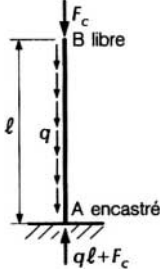
(1) Les formules ci-dessus ont été établies en tenant compte du moment additionnel produit par les charges axiales par suite de la déformation de la pièce.

(2)  $\ell$  longueur de la pièce,  $I$  moment d'inertie,  $E$  module d'élasticité longitudinale,  $T$  effort de traction,  $p$  ou  $P$  charge transversale de flexion.

(3)  $k = \sqrt{T/(EI)}$      $u = k\ell/2$

## 5. Charge critique de flambement

Tableau 8 – Charge critique de flambement d'une barre à inertie constante, libre de fléchir transversalement entre ses extrémités (1)

Caractéristiques de la pièce Cas de charges	Charge critique de flambement $F_c$ (2)			
	 $F_c = \frac{\pi^2 EI}{(2\ell)^2}$	 $F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$	 $F_c = \frac{\pi^2 EI}{(\alpha\ell)^2}$ <p>avec <math>\alpha \approx 0,7</math></p>	 $F_c = \frac{\pi^2 EI}{(0,5\ell)^2}$
	$(q\ell)_c = \frac{\pi^2 EI}{(1,122\ell)^2} = 7,837 \frac{EI}{\ell^2}$			
	$F_c \approx \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} - \frac{q\ell}{2} \text{ (valeur approchée)}$			
	$F_c \approx \frac{\pi^2 EI}{(2\ell)^2} - 0,3 q\ell \text{ (valeur approchée)}$			
<p>(1) <math>E</math> module d'élasticité longitudinale, <math>I</math> moment d'inertie de la section transversale, <math>\ell</math> longueur de la pièce.  (2) sans tenir compte des déformations dues à l'effort tranchant</p>				

**Tableau 8 – Charge critique de flambement d’une barre à inertie constante, libre de fléchir transversalement entre ses extrémités (1) (suite)**

Caractéristiques de la pièce Cas de charges	Charge critique de flambement $F_c$ (2)																					
	$(P_1 + P_2)_c = \frac{4u^2 EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \text{ et } \frac{L}{\ell} = \frac{\pi}{2u}$ <p>Si l'on pose <math>\beta = \frac{P_1 + P_2}{P_1}</math>, <math>u</math> est la plus petite racine positive de l'équation :</p> $u\sqrt{\beta} \cot\left(\frac{u}{\sqrt{\beta}}\right) + u \cot u = \frac{(\beta - 1)^2}{\beta + 1}$ <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="text-align: center;"><math>\frac{P_1 + P_2}{P_1}</math></td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">1,25</td> <td style="text-align: center;">1,5</td> <td style="text-align: center;">1,75</td> <td style="text-align: center;">2</td> <td style="text-align: center;">3</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>L/\ell</math></td> <td style="text-align: center;">1</td> <td style="text-align: center;">0,949</td> <td style="text-align: center;">0,914</td> <td style="text-align: center;">0,888</td> <td style="text-align: center;">0,869</td> <td style="text-align: center;">0,823</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;"><math>u</math></td> <td style="text-align: center;"><math>\pi/2</math></td> <td style="text-align: center;">1,655 1</td> <td style="text-align: center;">1,718 6</td> <td style="text-align: center;">1,768 1</td> <td style="text-align: center;">1,807 8</td> <td style="text-align: center;">1,909 6</td> </tr> </table>	$\frac{P_1 + P_2}{P_1}$	1	1,25	1,5	1,75	2	3	$L/\ell$	1	0,949	0,914	0,888	0,869	0,823	$u$	$\pi/2$	1,655 1	1,718 6	1,768 1	1,807 8	1,909 6
$\frac{P_1 + P_2}{P_1}$	1	1,25	1,5	1,75	2	3																
$L/\ell$	1	0,949	0,914	0,888	0,869	0,823																
$u$	$\pi/2$	1,655 1	1,718 6	1,768 1	1,807 8	1,909 6																
	<p>On a <math>\int_A^C q_x dx = \int_B^C q_x dx = q_0 \ell / 4</math></p> $\left(\frac{q_0 \ell}{4}\right)_c = \frac{\pi^2 EI}{(0,696 \ell)^2}$																					

**Poutre encastree élastiquement à ses extrémités.** Les rotations  $\omega_0$  et  $\omega_1$  des extrémités de la poutre sont proportionnelles aux moments  $M_0$  et  $M_1$  d'encastrement :

$$\omega_0 = \beta_0 \frac{M_0 \ell}{EI}$$

$$\omega_1 = -\beta_1 \frac{M_1 \ell}{EI}$$

$\beta_0$  et  $\beta_1$  étant des nombres positifs sans dimension ;  $\beta = 0$  correspond à un encastrement, et  $\beta = \infty$  correspond à une articulation. L'effort normal critique a pour valeur :

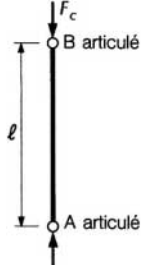
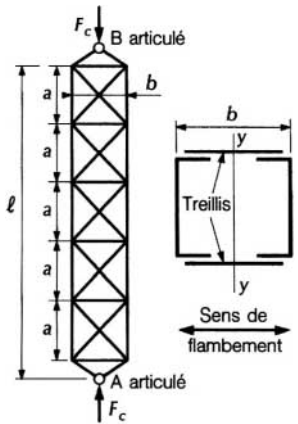
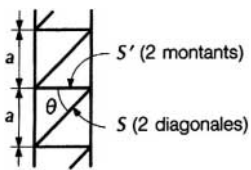
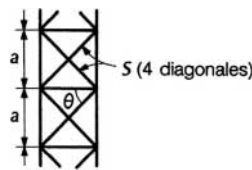
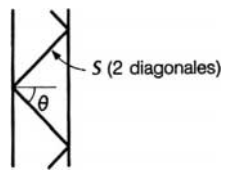
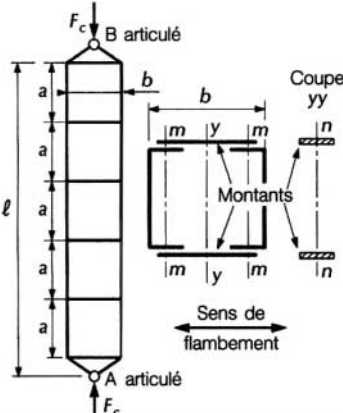
$$F_c = C \frac{EI}{\ell^2}$$

C étant un coefficient dépendant de  $\beta_0$  et  $\beta_1$  dont la valeur est donnée par le tableau suivant.

$\beta_1$	$\beta_0$										
	0	0,1	0,2	0,5	1	2	5	10	20	50	$\infty$
0	39,478	38,199	37,004	33,981	30,550	26,958	23,452	21,933	21,092	20,559	20,191
0,1	38,199	36,981	35,841	32,950	29,647	26,166	22,745	21,257	20,431	19,907	19,546
0,2	37,004	35,841	34,752	31,984	28,804	25,429	22,092	20,635	19,825	19,311	18,955
0,5	33,981	32,950	31,984	29,517	26,648	23,554	20,495	19,073	18,307	17,819	17,482
1	30,550	29,647	28,804	26,648	24,121	21,353	18,521	17,250	16,545	16,091	15,777
2	26,958	26,166	25,429	23,554	21,353	18,916	16,382	15,236	14,589	14,174	13,886
5	23,452	22,745	22,092	20,495	18,521	16,382	14,134	13,107	12,523	12,148	11,887
10	21,933	21,257	20,635	19,073	17,250	15,236	13,107	12,130	11,574	11,217	10,967
20	21,092	20,431	19,825	18,307	16,545	14,589	12,523	11,574	11,034	10,686	10,443
50	20,559	19,907	19,311	17,819	16,091	14,174	12,148	11,217	10,686	10,344	10,105
$\infty$	20,191	19,546	18,955	17,482	15,777	13,886	11,887	10,967	10,443	10,105	9,870

(1) E module d'élasticité longitudinale, I moment d'inertie de la section transversale,  $\ell$  longueur de la pièce.  
 (2) sans tenir compte des déformations dues à l'effort tranchant

**Tableau 8 – Charge critique de flambement d’une barre à inertie constante, libre de fléchir transversalement entre ses extrémités (1) (suite)**

Caractéristiques de la pièce Cas de charges	Charge critique de flambement $F_c$ (2)		
	$F_c = \left( \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \right) \left[ \frac{1}{1 + \left( \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \right) \frac{1}{G S_1}} \right]$ <p>avec <math>G</math> module d'élasticité au cisaillement,  <math>S_1</math> aire réduite de la section transversale de la pièce                      (voir valeurs de <math>S_1</math> dans le tableau 3).</p>		
	<p><b>Treillis I</b></p> 	<p><b>Treillis II</b></p> 	<p><b>Treillis III</b></p> 
$F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \left[ \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \left( \frac{1}{ES \sin \theta \cos^2 \theta} + \frac{1}{ES' \tan \theta} \right)} \right]$ <p>avec <math>I</math> inertie des membrures par rapport à l'axe <math>yy</math>,  <math>S</math> section totale des diagonales situées dans un panneau de hauteur <math>a</math>,  <math>S'</math> section totale des montants situés dans un panneau de hauteur <math>a</math>.</p>			
	$F_c = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \left[ \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \left( \frac{ab}{12EJ'} + \frac{a^2}{24EJ} \right)} \right]$ <p>avec <math>I</math> moment d'inertie des membrures par rapport à l'axe <math>yy</math>,  <math>J</math> moment d'inertie de la membrure (une membrure) par rapport à l'axe <math>mm</math>,  <math>J'</math> moment d'inertie des montants (deux montants) par rapport à l'axe <math>nn</math>.</p>		

(1)  $E$  module d'élasticité longitudinale,  $I$  moment d'inertie de la section transversale,  $\ell$  longueur de la pièce.

(2) sans tenir compte des déformations dues à l'effort tranchant

**Tableau 9 – Charge critique de flambement d’une barre soumise à certaines liaisons transversales entre ses extrémités (1)**

Caractéristiques de la pièce Cas de charges	Charge critique de flambement $F_c$ (2)																																																												
	$F_c = \frac{u^2 EI}{\ell^2} = \frac{\pi^2 EI}{(\gamma \ell)^2} \text{ et } \gamma = \frac{\pi}{u}$ <p><math>u</math> est la plus petite racine positive de l'équation :</p> $\sin \alpha u \sin \beta u - \alpha \beta \sin u = 0$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th><math>\alpha</math></th> <th><math>u</math></th> <th><math>\gamma</math></th> <th><math>\alpha</math></th> <th><math>u</math></th> <th><math>\gamma</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0,50</td> <td><math>2\pi</math></td> <td>0,5</td> <td>0,20</td> <td>5,201 3</td> <td>0,604 0</td> </tr> <tr> <td>0,45</td> <td>6,222 9</td> <td>0,504 8</td> <td>0,15</td> <td>5,003 0</td> <td>0,614 3</td> </tr> <tr> <td>0,40</td> <td>6,066 3</td> <td>0,517 9</td> <td>0,10</td> <td>4,819 2</td> <td>0,651 9</td> </tr> <tr> <td>0,35</td> <td>5,859 0</td> <td>0,536 2</td> <td>0,05</td> <td>4,649 6</td> <td>0,675 7</td> </tr> <tr> <td>0,30</td> <td>5,635 2</td> <td>0,557 5</td> <td><math>\varepsilon</math> (1)</td> <td>4,571 9</td> <td>0,699 2</td> </tr> <tr> <td>0,25</td> <td>5,413 1</td> <td>0,580 4</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>(1) Si <math>\alpha = \varepsilon</math>, l'appui C est très voisin de A qui se comporte alors comme un encastrement.</p>	$\alpha$	$u$	$\gamma$	$\alpha$	$u$	$\gamma$	0,50	$2\pi$	0,5	0,20	5,201 3	0,604 0	0,45	6,222 9	0,504 8	0,15	5,003 0	0,614 3	0,40	6,066 3	0,517 9	0,10	4,819 2	0,651 9	0,35	5,859 0	0,536 2	0,05	4,649 6	0,675 7	0,30	5,635 2	0,557 5	$\varepsilon$ (1)	4,571 9	0,699 2	0,25	5,413 1	0,580 4																					
$\alpha$	$u$	$\gamma$	$\alpha$	$u$	$\gamma$																																																								
0,50	$2\pi$	0,5	0,20	5,201 3	0,604 0																																																								
0,45	6,222 9	0,504 8	0,15	5,003 0	0,614 3																																																								
0,40	6,066 3	0,517 9	0,10	4,819 2	0,651 9																																																								
0,35	5,859 0	0,536 2	0,05	4,649 6	0,675 7																																																								
0,30	5,635 2	0,557 5	$\varepsilon$ (1)	4,571 9	0,699 2																																																								
0,25	5,413 1	0,580 4																																																											
	<p>La barre est soumise sur toute sa longueur AB à la réaction d'un milieu élastique.  <math>C</math> coefficient de raideur du milieu élastique  <math>b</math> largeur de la barre  <math>\beta = C \times b</math>  <math>p</math> pression sur le milieu élastique produite par la déformation <math>p = Cy = (\beta/b)y</math>  <math>L</math> longueur d'onde de la déformation :</p> $F_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th><math>\frac{\beta \ell^4}{16EI}</math></th> <th><math>L/\ell</math></th> <th><math>n</math></th> <th><math>\frac{\beta \ell^4}{16EI}</math></th> <th><math>L/\ell</math></th> <th><math>n</math></th> <th><math>\frac{\beta \ell^4}{16EI}</math></th> <th><math>L/\ell</math></th> <th><math>n</math></th> <th><math>\frac{\beta \ell^4}{16EI}</math></th> <th><math>L/\ell</math></th> <th><math>n</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>10</td> <td>0,615 2</td> <td>1</td> <td>100</td> <td>0,351 2</td> <td>2</td> <td>2 000</td> <td>0,165 4</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0,926 8</td> <td>1</td> <td>20</td> <td>0,483 1</td> <td>1</td> <td>200</td> <td>0,286 1</td> <td>2</td> <td>5 000</td> <td>0,131 5</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0,867 6</td> <td>1</td> <td>50</td> <td>0,406 5</td> <td>2</td> <td>500</td> <td>0,234 9</td> <td>3</td> <td>10 000</td> <td>0,110 7</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>0,741 0</td> <td>1</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td>1 000</td> <td>0,195 1</td> <td>4</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>Au moment du flambement, la poutre se déforme en <math>n</math> demi-ondes.</p>	$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	$n$	$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	$n$	$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	$n$	$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	$n$	0	1	1	10	0,615 2	1	100	0,351 2	2	2 000	0,165 4	4	1	0,926 8	1	20	0,483 1	1	200	0,286 1	2	5 000	0,131 5	5	2	0,867 6	1	50	0,406 5	2	500	0,234 9	3	10 000	0,110 7	6	5	0,741 0	1				1 000	0,195 1	4			
$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	$n$	$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	$n$	$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	$n$	$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	$n$																																																		
0	1	1	10	0,615 2	1	100	0,351 2	2	2 000	0,165 4	4																																																		
1	0,926 8	1	20	0,483 1	1	200	0,286 1	2	5 000	0,131 5	5																																																		
2	0,867 6	1	50	0,406 5	2	500	0,234 9	3	10 000	0,110 7	6																																																		
5	0,741 0	1				1 000	0,195 1	4																																																					
	<p>La barre est soumise sur toute sa longueur AB à la réaction d'un milieu élastique.  <math>C, L, \beta, p, b</math> ont mêmes significations que ci-dessus :</p> $\left(\frac{q_0 \ell}{4}\right)_c = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$ <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <thead> <tr> <th><math>\frac{\beta \ell^4}{16EI}</math></th> <th><math>L/\ell</math></th> <th><math>\frac{\beta \ell^4}{16EI}</math></th> <th><math>L/\ell</math></th> <th><math>\frac{\beta \ell^4}{16EI}</math></th> <th><math>L/\ell</math></th> <th><math>\frac{\beta \ell^4}{16EI}</math></th> <th><math>L/\ell</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td> <td>0,696</td> <td>15</td> <td>0,396</td> <td>100</td> <td>0,290</td> <td>300</td> <td>0,225</td> </tr> <tr> <td>5</td> <td>0,524</td> <td>22,8</td> <td>0,363</td> <td>162,8</td> <td>0,259</td> <td>500</td> <td>0,204</td> </tr> <tr> <td>10</td> <td>0,443</td> <td>56,5</td> <td>0,324</td> <td>200</td> <td>0,246</td> <td>1 000</td> <td>0,174</td> </tr> </tbody> </table>	$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	0	0,696	15	0,396	100	0,290	300	0,225	5	0,524	22,8	0,363	162,8	0,259	500	0,204	10	0,443	56,5	0,324	200	0,246	1 000	0,174																												
$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$	$\frac{\beta \ell^4}{16EI}$	$L/\ell$																																																						
0	0,696	15	0,396	100	0,290	300	0,225																																																						
5	0,524	22,8	0,363	162,8	0,259	500	0,204																																																						
10	0,443	56,5	0,324	200	0,246	1 000	0,174																																																						
	<p>Le cas précédent permet d'étudier la stabilité de la membrure supérieure d'un pont à poutres à treillis à tablier inférieur, chargé uniformément.          On posera <math>\ell</math> portée du pont et <math>I</math> inertie de la membrure supérieure :</p> $\beta = \frac{1}{C} \times \frac{1}{\left[ \frac{a^3}{3EI_1} + \frac{(a+b)^2 d}{2EI_2} \right]}$																																																												
<p>(1) <math>E</math> module d'élasticité longitudinale, <math>I</math> moment d'inertie de la section transversale, <math>\ell</math> longueur de la pièce.          (2) sans tenir compte des déformations dues à l'effort tranchant</p>																																																													



## 6. Poutres

**Tableau 10 – Moment, effort tranchant et déformations des poutres consoles et des poutres droites à une travée d’inertie constante**

Définitions et hypothèses (1)				
Dénomination	Type	Représentation	Réactions et moments sur appui	Déformation
Poutre console	I			
Poutre sur appuis simples	II			
Poutre encastree d'un cote, sur appui simple de l'autre	III			
Poutre encastree des deux cotes	IV			

(1) Les moments fléchissants  $M$  et les efforts tranchants  $T$  sont comptés dans le sens habituel de la Résistance des matériaux. Les réactions verticales  $R$  sont comptées positivement vers le haut. Les rotations  $\omega$  sont comptées positivement dans le sens trigonométrique. Les flèches  $v$  sont comptées positivement vers le haut.

Caractéristiques		Réactions	Moment		Effort tranchant	
Type	Charges		Diagramme	Équations	Diagramme	Équations
I		$R_A = p\ell$		$M = -\frac{px_1^2}{2}$ $M_B = 0$ $M_A = -\frac{p\ell^2}{2}$		$T = px_1$
		$R_A = P$		$M = -Px_1$ $M_B = 0$ $M_A = -P\ell$		$T = P$
		$R_A = P$		$B \text{ à } C : M = 0$ $C \text{ à } A : M = P(x - \alpha)$ $M_C = 0$ $M_A = -P\alpha$		$B \text{ à } C : T = 0$ $C \text{ à } A : T = P$
		$R_A = \frac{p_1\ell}{2}$		$M = -\frac{p_1x_1^3}{6\ell}$ $M_B = 0$ $M_A = -\frac{p_1\ell^2}{6}$		$T = \frac{p_1x_1^2}{2\ell}$

**Tableau 10 – Moment, effort tranchant et déformations des poutres consoles et des poutres droites à une travée d'inertie constante (suite)**

Caractéristiques		Réactions	Moment		Effort tranchant	
Type	Charges		Diagramme	Équations	Diagramme	Équations
		$R_A = R_B = \frac{p \ell}{2}$		$M = \frac{px}{2}(\ell - x)$ $M_O = \frac{p\ell^2}{8}$		$T = p\left(\frac{\ell}{2} - x\right)$
		$R_A = R_B = \frac{P}{2}$		A à O : $M = \frac{P}{2}x$ O à B : $M = \frac{P}{2}(\ell - x)$ $M_O = \frac{P\ell}{4}$		A à O : $T = P/2$ O à B : $T = -P/2$
		$R_A = P\left(1 - \frac{\alpha}{\ell}\right)$ $R_B = P\frac{\alpha}{\ell}$		A à C : $M = P\frac{x(\ell - \alpha)}{\ell}$ C à B : $M = P\frac{\alpha(\ell - x)}{\ell}$ $M_C = P\frac{\alpha(\ell - \alpha)}{\ell}$		A à C : $T = P\left(1 - \frac{\alpha}{\ell}\right)$ $T_A = P\left(1 - \frac{\alpha}{\ell}\right)$ C à B : $T = -P\frac{\alpha}{\ell}$ $T_B = -P\frac{\alpha}{\ell}$
		$R_A = R_B = P$		A à C : $M = Px$ C à C' : $M = Pa$ C' à B : $M = P(\ell - x)$ $M_C = M_{C'} = Pa$		A à C : $T = P$ C à C' : $T = 0$ C' à B : $T = -P$
II		$R_A = \frac{p_1 \ell}{6}$ $R_B = \frac{p_1 \ell}{3}$		$M = \frac{p_1 x}{6\ell}(\ell^2 - x^2)$ $M_{max} = \frac{\sqrt{3}}{27} p_1 \ell^2$ pour $x_m = \ell \frac{\sqrt{3}}{3}$		$T = \frac{p_1 \ell}{6} - \frac{p_1 x^2}{2\ell}$
		$R_A = R_B = \frac{p_1 \ell}{4}$		A à O : $M = \frac{p_1 \ell}{4}x - \frac{p_1 x^3}{3\ell}$ O à B : $M = \frac{p_1 \ell}{4}x_1 - \frac{p_1 x_1^3}{3\ell}$ $M_O = \frac{p_1 \ell^2}{12}$		A à O : $T = \frac{p_1 \ell}{4} - \frac{p_1 x^2}{\ell}$ O à B : $T = -\frac{p_1 \ell}{4} + \frac{p_1 x_1^2}{\ell}$
		$R_A = \frac{m_2 - m_1}{\ell}$ $R_B = \frac{m_1 - m_2}{\ell}$ $m_1 < 0; m_2 < 0$		$M = m_1 + (m_2 - m_1)\frac{x}{\ell}$ $M_O = \frac{m_1 + m_2}{2}$		$T = \frac{m_2 - m_1}{\ell}$
		$R_A = R_B = 0$		$M = m$ $M_O = m$		$T = 0$
		$R_A = R_B = \frac{m}{\ell}$		A à C : $M = -\frac{mx}{\ell}$ C à B : $M = m\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$ $M_{C \text{ gauche}} = -\frac{m\alpha}{\ell}$ $M_{C \text{ droite}} = \frac{m\beta}{\ell}$		$T = -\frac{m}{\ell}$

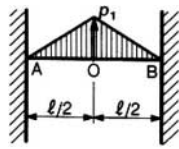
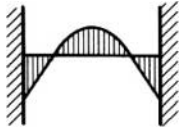
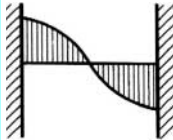
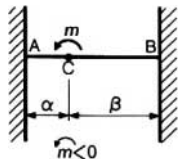
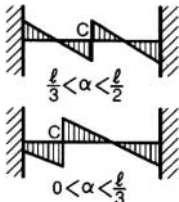

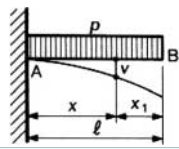
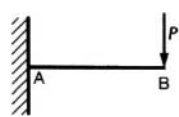
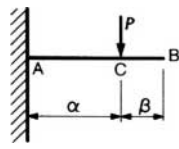
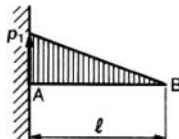
**Tableau 10 – Moment, effort tranchant et déformations des poutres consoles et des poutres droites à une travée d’inertie constante (suite)**

Caractéristiques		Réactions	Moment		Effort tranchant	
Type	Charges		Diagramme	Équations	Diagramme	Équations
III		$R_A = \frac{5}{8} p l$ $R_B = \frac{3}{8} p l$		$M = \frac{p \ell x_1}{2} \left( \frac{3}{4} - \frac{x_1}{\ell} \right)$ $M_A = -\frac{p \ell^2}{8}$ $M_{max} = \frac{9}{128} p \ell^2$ pour $x_{1m} = \frac{3}{8} \ell$		$T = \frac{3}{8} p \ell - p x_1$
		$R_A = \frac{11}{16} P$ $R_B = \frac{5}{16} P$		A à O : $M = \frac{P}{16} (11x - 3\ell)$ $M_A = -\frac{3P\ell}{16}$ O à B : $M = \frac{5}{16} P(\ell - x)$ $M_O = \frac{5P\ell}{32}$		A à O : $T = \frac{11}{16} P$ O à B : $T = -\frac{5}{16} P$
		$R_A = \frac{P\beta(3\ell^2 - \beta^2)}{2\ell^3}$ $R_B = \frac{P\alpha^2(2\ell + \beta)}{2\ell^3}$		A à C : $M = \frac{P\beta}{\ell} \left[ x - \frac{(\ell^2 - \beta^2)(\ell - x)}{2\ell^2} \right]$ $M_A = -\frac{P\beta(\ell^2 - \beta^2)}{2\ell^2}$ C à B : $M = \frac{P\alpha^2(2\ell + \beta)}{2\ell^3} (\ell - x)$ $M_C = \frac{P\alpha^2\beta(2\ell + \beta)}{2\ell^3}$		A à C : $T = \frac{P\beta(3\ell^2 - \beta^2)}{2\ell^3}$ $T_A = \frac{P\beta(3\ell^2 - \beta^2)}{2\ell^3}$ C à B : $T = -\frac{P\alpha^2(2\ell + \beta)}{2\ell^3}$ $T_B = -\frac{P\alpha^2(2\ell + \beta)}{2\ell^3}$
		$R_A = \frac{4}{10} p_1 \ell$ $R_B = \frac{p_1 \ell}{10}$		$M = -\frac{p_1 x_1}{30\ell} (3\ell^2 - 5x_1^2)$ $M_A = -\frac{1}{15} p_1 \ell^2$ $M_{max} = \frac{p_1 \ell^2}{15\sqrt{5}}$ pour $x_1 = \frac{\ell}{\sqrt{5}}$		$T = \frac{p_1}{10\ell} (5x_1^2 - \ell^2)$
		$R_A = \frac{3m}{2\ell}$ $R_B = -\frac{3m}{2\ell}$ $\vec{m} < 0$		$M = \frac{m(3x - \ell)}{2\ell}$ $M_B = m$ $M_A = -\frac{m}{2}$		$T = \frac{3m}{2\ell}$
		$R_A = -\frac{3m}{2\ell} \left( 1 - \frac{\beta^2}{\ell^2} \right)$ $R_B = \frac{3m}{2\ell} \left( 1 - \frac{\beta^2}{\ell^2} \right)$ $\vec{m} < 0$		A à C : $M = \frac{m}{2} \left[ 3 \left( 1 - \frac{\beta^2}{\ell^2} \right) \frac{x_1}{\ell} - 2 \right]$ $M_A = \frac{m}{2} \left( 1 - 3 \frac{\beta^2}{\ell^2} \right)$ C à B : $M = \frac{3m}{2} \left( 1 - \frac{\beta^2}{\ell^2} \right) \frac{x_1}{\ell}$ $M_{Cdroite} = \frac{3m}{2} \left( 1 - \frac{\beta^2}{\ell^2} \right) \frac{\beta}{\ell}$ $M_{Cgauche} = \frac{m}{2} \left[ 3 \left( 1 - \frac{\beta^2}{\ell^2} \right) \frac{\beta}{\ell} - 2 \right]$		$T = -\frac{3m}{2\ell} \left( 1 - \frac{\beta^2}{\ell^2} \right)$ $T_A = T_B = -\frac{3m}{2\ell} \left( 1 - \frac{\beta^2}{\ell^2} \right)$

Tableau 10 – Moment, effort tranchant et déformations des poutres consoles et des poutres droites à une travée d'inertie constante (suite)

Caractéristiques		Réactions	Moment		Effort tranchant	
Type	Charges		Diagramme	Équations	Diagramme	Équations
IV		$R_A = R_B = \frac{p\ell}{2}$		$M = \frac{1}{2} px(\ell - x) - \frac{1}{12} p\ell^2$ $M_A = M_B = -\frac{p\ell^2}{12}$ $M_O = \frac{p\ell^2}{24}$		$T = p\left(\frac{\ell}{2} - x\right)$
		$R_A = R_B = \frac{P}{2}$		A à O : $M = \frac{P\ell}{2} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{1}{4}\right)$ O à B : $M = \frac{P\ell}{2} \left[\frac{3}{4} - \frac{x}{\ell}\right]$ $M_A = M_B = -\frac{P\ell}{8}$ $M_O = \frac{P\ell}{8}$		A à O : $T = \frac{P}{2}$ O à B : $T = -\frac{P}{2}$
		$R_A = \frac{P\beta^2}{\ell^3} (\ell + 2\alpha)$ $R_B = \frac{P\alpha^2}{\ell^3} (\ell + 2\beta)$		A à C : $M = -\frac{P(\ell - \alpha)^2}{\ell^3} [\ell\alpha - (\ell + 2\alpha)x]$ $M_A = -\frac{P\alpha(\ell - \alpha)^2}{\ell^2}$ C à B : $M = -\frac{P\alpha^2}{\ell^3} [(3\ell - 2\alpha)x - \ell(2\ell - \alpha)]$ $M_B = -\frac{P\alpha^2(\ell - \alpha)}{\ell^2}$ $M_C = \frac{2P\alpha^2(\ell - \alpha)^2}{\ell^3}$		A à C : $T = \frac{P\beta^2}{\ell^3} (\ell + 2\alpha)$ $T_A = \frac{P\beta^2}{\ell^3} (\ell + 2\alpha)$ C à B : $T = -\frac{P\alpha^2}{\ell^3} (\ell + 2\beta)$ $T_B = -\frac{P\alpha^2}{\ell^3} (\ell + 2\beta)$
		$R_A = R_B = P$		A à C : $M = -\frac{Pa}{\ell} (\ell - a) + Px$ C à C' : $M = \frac{Pa^2}{\ell}$ C' à B : $M = -\frac{Pa}{\ell} (\ell - a) + P(\ell - x)$ $M_O = M_C = M_{C'} = \frac{Pa^2}{\ell}$ $M_A = -\frac{Pa(\ell - a)}{\ell}$		A à C : $T = P$ C à C' : $T = 0$ C' à B : $T = -P$
		$R_A = \frac{3p_1\ell}{20}$ $R_B = \frac{7p_1\ell}{20}$		$M = -\frac{p_1\ell^2}{60} \left[ 2 - 9\left(\frac{x}{\ell}\right) + 10\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \right]$ $M_A = -\frac{p_1\ell^2}{30}$ et $M_B = -\frac{p_1\ell^2}{20}$ $M_{max} = 0,02144 p_1\ell^2$ pour $x = \ell\sqrt{\frac{3}{10}}$		$T = \frac{p_1\ell}{20} \left[ 3 - 10\left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \right]$

Tableau 10 – Moment, effort tranchant et déformations des poutres consoles et des poutres droites à une travée d'inertie constante (suite)

Caractéristiques		Réactions	Moment		Effort tranchant	
Type	Charges		Diagramme	Équations	Diagramme	Équations
IV		$R_A = R_B = \frac{p_1 \ell}{4}$		A à O : $M = -\frac{p_1 \ell^2}{96} \left( 5 - 24 \frac{x}{\ell} + 32 \frac{x^3}{\ell^3} \right)$ O à B : $M = -\frac{p_1 \ell^2}{96} \left( 5 - 24 \frac{x_1}{\ell} + 32 \frac{x_1^3}{\ell^3} \right)$ $M_O = \frac{p_1 \ell^2}{32}$ $M_A = M_B = -\frac{5p_1 \ell^2}{96}$		A à O : $T = \frac{p_1 \ell}{4} \left( 1 - 4 \frac{x^2}{\ell^2} \right)$ O à B : $T = \frac{p_1 \ell}{4} \left( 1 - 4 \frac{x_1^2}{\ell^2} \right)$
		$R_A = -\frac{6m\alpha\beta}{\ell^3}$ $R_B = \frac{6m\alpha\beta}{\ell^3}$		A à C : $M = \frac{m\beta}{\ell} \left( 2 - 3 \frac{\beta}{\ell} - 6 \frac{\alpha x}{\ell^2} \right)$ $M_A = \frac{m\beta}{\ell} \left( 2 - 3 \frac{\beta}{\ell} \right)$ C à B : $M = -\frac{m\alpha}{\ell} \left( 2 - 3 \frac{\alpha}{\ell} - 6 \frac{\beta x_1}{\ell^2} \right)$ $M_B = -\frac{m\alpha}{\ell} \left( 2 - 3 \frac{\alpha}{\ell} \right)$		$T = -\frac{6m\alpha\beta}{\ell^3}$ $T_A = -\frac{6m\alpha\beta}{\ell^3}$ $T_B = -\frac{6m\alpha\beta}{\ell^3}$
Caractéristiques		Déformations				
		Ligne élastique. Flèches		Rotation des sections		
Type	Charges	Équations		Équations		
I		$v = -\frac{px^2}{24EI} (6\ell^2 - 4\ell x + x^2)$ $v_A = 0$ $v_B = -\frac{p\ell^4}{8EI}$		$\omega = -\frac{px}{6EI} (3\ell^2 - 3\ell x + x^2)$ $\omega_A = 0$ $\omega_B = -\frac{p\ell^3}{6EI}$		
		$v = -\frac{P}{6EI} x^2(3\ell - x)$ $v_A = 0$ $v_B = -\frac{P\ell^3}{3EI}$		$\omega = -\frac{P}{2EI} x(2\ell - x)$ $\omega_A = 0$ $\omega_B = -\frac{P\ell^2}{2EI}$		
		A à C : $v = -\frac{P}{6EI} x^2(3\alpha - x)$ C à B : $v = -\frac{P}{6EI} x^2(3x - \alpha)$ $v_B = -\frac{P}{6EI} \alpha^2(3\ell - \alpha)$		A à C : $\omega = -\frac{P}{2EI} x(2\alpha - x)$ $\omega_A = 0$ C à B : $\omega = -\frac{P}{2EI} \alpha^2$ $\omega_B = -\frac{P\alpha^2}{2EI}$		
		$v = -\frac{p_1 \ell^4}{120EI} \left[ 4 - 5 \frac{x_1}{\ell} + \left( \frac{x_1}{\ell} \right)^5 \right]$ $v_B = -\frac{p_1 \ell^4}{30EI}$		$\omega = -\frac{p_1 \ell^3}{24EI} \left[ 1 - \left( \frac{x_1}{\ell} \right)^4 \right]$ $\omega_A = 0$ $\omega_B = -\frac{p_1 \ell^3}{24EI}$		

**Tableau 10 – Moment, effort tranchant et déformations des poutres consoles et des poutres droites à une travée d’inertie constante (suite)**

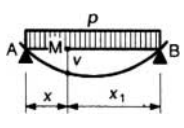
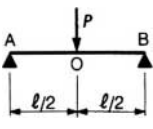
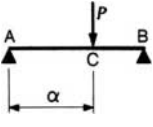
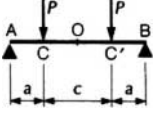
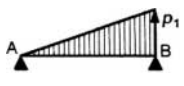
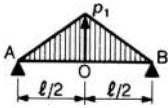
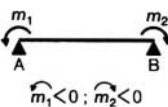

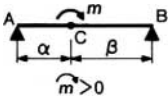
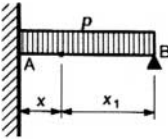
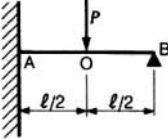
Caractéristiques		Déformations	
		Ligne élastique. Flèches	Rotation des sections
Type	Charges	Équations	Équations
II		$v = -\frac{P}{24EI} x(\ell-x)(\ell^2+\ell x-x^2)$ $v_0 = -\frac{5}{384} \frac{p\ell^4}{EI}$	$\omega = -\frac{p}{24EI} (\ell^3-6\ell x^2+4x^3)$ $\omega_A = -\frac{p\ell^3}{24EI}$ $\omega_B = \frac{p\ell^3}{24EI}$
		$A \text{ à } O : v = -\frac{P}{48EI} x(3\ell^2-4x^2)$ $O \text{ à } B : v = -\frac{P}{48EI} x_1(3\ell^2-4x_1^2)$ $v_0 = -\frac{P\ell^3}{48EI}$	$A \text{ à } O : \omega = -\frac{P}{16EI} (\ell^2-4x^2)$ $\omega_A = -\frac{P\ell^2}{16EI}$ $O \text{ à } B : \omega = \frac{P}{16EI} (\ell^2-4x_1^2)$ $\omega_B = \frac{P\ell^2}{16EI}$
		$A \text{ à } C : v = -\frac{Px(\ell-\alpha)}{6EI\ell} [\alpha(2\ell-\alpha)-x^2]$ $C \text{ à } B : v = -\frac{P\alpha(\ell-x)}{6EI\ell} [x(2\ell-x)-\alpha^2]$ $v_C = -\frac{P\alpha^2(\ell-\alpha)^2}{3EI\ell}$ $\alpha > \frac{\ell}{2} : v_{max} = -\frac{P(\ell-\alpha)}{27EI\ell} \sqrt{3[\alpha(2\ell-\alpha)]^3}$ $\alpha < \frac{\ell}{2} : v_{max} = -\frac{P\alpha}{27EI\ell} \sqrt{3(\ell^2-\alpha^2)^3}$	$A \text{ à } C : \omega = -\frac{P(\ell-\alpha)}{6EI\ell} [\alpha(2\ell-\alpha)-3x^2]$ $\omega_A = -\frac{P\alpha(\ell-\alpha)(2\ell-\alpha)}{6EI\ell}$ $C \text{ à } B : \omega = \frac{P\alpha}{6EI\ell} [(\ell+\alpha)(\ell-\alpha)-3(\ell-x)^2]$ $\omega_B = \frac{P\alpha(\ell-\alpha)(\ell+\alpha)}{6EI\ell}$
		$A \text{ à } C : v = -\frac{Px}{6EI} [3a(\ell-a)-x^2]$ $C \text{ à } C' : v = -\frac{Pa}{6EI} [-a^2+3\ell x-3x^2]$ $v_0 = -\frac{Pa}{24EI} (3\ell^2-4a^2)$ $v_C = v_{C'} = -\frac{Pa^2}{6EI} (3\ell-4a)$ $C' \text{ à } B : v = -\frac{Px_1}{6EI} [3a(\ell-a)-x_1^2]$	$A \text{ à } C : \omega = -\frac{P}{2EI} [a(\ell-a)-x^2]$ $C \text{ à } C' : \omega = -\frac{Pa}{2EI} (\ell-2x)$ $C' \text{ à } B : \omega = \frac{P}{2EI} [a(\ell-a)-x_1^2]$ $\omega_A = -\omega_B = -\frac{Pa(\ell-a)}{2EI}$ $\omega_C = -\omega_{C'} = -\frac{Pa(\ell-2a)}{2EI}$
		$v = -\frac{p_1 x}{360EI\ell} (7\ell^4-10\ell^2 x^2+3x^4)$ $v_{max} = -0,006\ 522 \frac{p_1 \ell^4}{EI} \text{ pour } x = 0,519\ 33 \ell$	$\omega = -\frac{p_1}{360EI\ell} (7\ell^4-30\ell^2 x^2+15x^4)$ $\omega_A = -\frac{7p_1 \ell^3}{360EI}$ $\omega_B = \frac{8p_1 \ell^3}{360EI}$

Tableau 10 – Moment, effort tranchant et déformations des poutres consoles et des poutres droites à une travée d'inertie constante (suite)

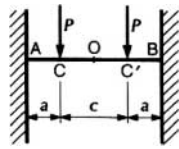
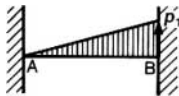
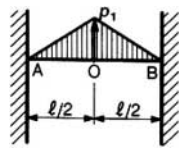
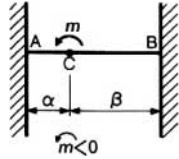
Caractéristiques		Déformations	
Type	Charges	Ligne élastique. Flèches	Rotation des sections
		Équations	Équations
II		$A \text{ à } O : v = -\frac{p_1 x}{960 EI \ell} (25 \ell^4 - 40 \ell^2 x^2 + 16 x^4)$ $O \text{ à } B : v = -\frac{p_1 x_1}{960 EI \ell} (25 \ell^4 - 40 \ell^2 x_1^2 + 16 x_1^4)$ $v_O = -\frac{p_1 \ell^4}{120 EI}$	$A \text{ à } O : \omega = -\frac{p_1}{192 EI \ell} (5 \ell^4 - 24 \ell^2 x^2 + 16 x^4)$ $O \text{ à } B : \omega = \frac{p_1}{192 EI \ell} (5 \ell^4 - 24 \ell^2 x_1^2 + 16 x_1^4)$ $\omega_A = -\omega_B = -\frac{5 p_1 \ell^3}{192 EI}$
		$v = -\frac{x}{6 EI \ell} [(2 m_1 + m_2) \ell^2 - 3 m_1 \ell x + (m_1 - m_2) x^2]$ $v_O = -\frac{\ell^2}{16 EI} (m_1 + m_2)$	$\omega = -\frac{1}{6 EI \ell} [(2 m_1 + m_2) \ell^2 - 6 m_1 \ell x + 3 (m_1 - m_2) x^2]$ $\omega_A = -\frac{1}{6 EI} (2 m_1 + m_2) \ell$ $\omega_B = \frac{1}{6 EI} (m_1 + 2 m_2) \ell$
		$v = -\frac{m x}{2 EI} (\ell - x)$ $v_O = -\frac{m \ell^2}{8 EI}$	$\omega = -\frac{m}{2 EI} (\ell - 2 x)$ $\omega_A = -\frac{m \ell}{2 EI}$ $\omega_B = \frac{m \ell}{2 EI}$
		$A \text{ à } C : v = \frac{m \ell x}{6 EI} \left( 1 - 3 \frac{\beta^2}{\ell^2} - \frac{x^2}{\ell^2} \right)$ $C \text{ à } B : v = -\frac{m \ell x_1}{6 EI} \left( 1 - 3 \frac{\alpha^2}{\ell^2} - \frac{x_1^2}{\ell^2} \right)$ $v_C = \frac{m \alpha \beta (\alpha - \beta)}{3 EI (\alpha + \beta)}$	$A \text{ à } C : \omega = \frac{m \ell}{6 EI} \left( 1 - 3 \frac{\beta^2}{\ell^2} - 3 \frac{x^2}{\ell^2} \right)$ $\omega_A = \frac{m \ell}{6 EI} \left( 1 - 3 \frac{\beta^2}{\ell^2} \right)$ $C \text{ à } B : \omega = \frac{m \ell}{6 EI} \left( 1 - 3 \frac{\alpha^2}{\ell^2} - 3 \frac{x_1^2}{\ell^2} \right)$ $\omega_B = \frac{m \ell}{6 EI} \left( 1 - 3 \frac{\alpha^2}{\ell^2} \right)$
III		$v = -\frac{p}{48 EI} x^2 (\ell - x) (3 \ell - 2 x)$ $v_{max} = -2,079 8 \frac{p \ell^4}{384 EI} \text{ pour } x = 0,578 5 \ell$	$\omega = -\frac{p x}{48 EI} (6 \ell^2 - 15 \ell x + 8 x^2)$ $\omega_B = \frac{p \ell^3}{48 EI}$
		$A \text{ à } O : v = -\frac{P x^2}{96 EI} (9 \ell - 11 x)$ $O \text{ à } B : v = -\frac{P (\ell - x)}{96 EI} [5 x (2 \ell - x) - 2 \ell^2]$ $v_O = -\frac{7 P \ell^3}{768 EI}$ $v_{max} = -\frac{P \ell^3}{48 EI \sqrt{5}} \text{ pour } x = \ell \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$	$A \text{ à } O : \omega = -\frac{P x}{32 EI} (6 \ell - 11 x)$ $O \text{ à } B : \omega = -\frac{P}{32 EI} (4 \ell^2 - 10 \ell x + 5 x^2)$ $\omega_B = \frac{P \ell^2}{32 EI}$

**Tableau 10 – Moment, effort tranchant et déformations des poutres consoles et des poutres droites à une travée d’inertie constante (suite)**

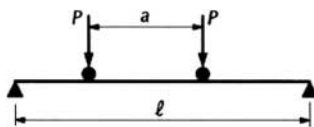
Caractéristiques		Déformations	
		Ligne élastique. Flèches	Rotation des sections
Type	Charges	Équations	Équations
III		$\begin{aligned} \text{A à C : } v &= -\frac{Px^2(\ell-\alpha)}{12EI\ell^3} [\alpha(2\ell-\alpha)(3\ell-x)-2\ell^2x] \\ \text{C à B : } v &= -\frac{P\alpha^2(\ell-x)}{12EI\ell^3} [x(2\ell-x)(3\ell-\alpha)-2\ell^2\alpha] \\ v_C &= -\frac{P\alpha^3(\ell-\alpha)^2(4\ell-\alpha)}{12EI\ell^3} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{A à C : } \omega &= -\frac{P(\ell-\alpha)x}{4EI\ell^3} [\alpha(2\ell-\alpha)(2\ell-x)-2\ell^2x] \\ \text{C à B : } \omega &= -\frac{P\alpha^2}{4EI\ell^3} [\ell(2\ell^2-6\ell x+3x^2)+\alpha x(2\ell-x)] \\ \omega_B &= \frac{P\alpha^2(\ell-\alpha)}{4EI\ell} \end{aligned}$
		$\begin{aligned} v &= -\frac{p_1x_1}{120EI\ell} (\ell^2-x_1^2)^2 \\ v_{max} &= -\frac{2p_1\ell^4}{375EI\sqrt{5}} \text{ pour } x_1 = \frac{\ell}{\sqrt{5}} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \omega &= \frac{p_1}{120EI\ell} (\ell^2-x_1^2)(\ell^2-5x_1^2) \\ \omega_B &= \frac{p_1\ell^3}{120EI} \end{aligned}$
		$\begin{aligned} v &= -\frac{mx^2(\ell-x)}{4EI\ell} \\ v_{max} &= -\frac{m\ell^2}{27EI} \text{ pour } x = \frac{2}{3}\ell \end{aligned}$ <p style="text-align: center;"><math>\hat{m} &lt; 0</math></p>	$\begin{aligned} \omega &= \frac{mx(3\ell-2x)}{4EI\ell} \\ \omega_B &= \frac{m\ell}{4EI} \end{aligned}$
		$\begin{aligned} \text{A à C : } v &= v_1 = \frac{mx^2}{4EI} \left[ \left(1-\frac{x}{\ell}\right) - \left(3-\frac{x}{\ell}\right) \frac{\beta^2}{\ell^2} \right] \\ \text{C à B : } v &= v_1 + \frac{m(x-\alpha)^2}{2EI} \\ v_C &= \frac{m\alpha^2\beta(\alpha^2-2\beta^2)}{4EI\ell^3} \end{aligned}$ <p style="text-align: center;"><math>\hat{m} &lt; 0</math></p>	$\begin{aligned} \text{A à C : } \omega &= \omega_1 = \frac{mx}{4EI} \left[ \left(2-3\frac{x}{\ell}\right) - 3\left(2-\frac{x}{\ell}\right) \frac{\beta^2}{\ell^2} \right] \\ \text{C à B : } \omega &= \omega_1 + \frac{m(x-\alpha)}{EI} \\ \omega_B &= -\frac{m\ell}{4EI} \left(1-\frac{\beta}{\ell}\right) \left(1-\frac{3\beta}{\ell}\right) \end{aligned}$
		$\begin{aligned} v &= -p \frac{x^2(\ell-x)^2}{24EI} \\ v_O &= -\frac{p\ell^4}{384EI} \end{aligned}$	$\omega = -p \frac{x(\ell-x)(\ell-2x)}{24EI}$
IV		$\begin{aligned} \text{A à O : } v &= -\frac{P}{48EI} x^2(3\ell-4x) \\ \text{O à B : } v &= -\frac{P}{48EI} (\ell-x)^2(4x-\ell) \\ v_O &= -\frac{P\ell^3}{192EI} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{A à O : } \omega &= -\frac{P}{8EI} x(\ell-2x) \\ \text{O à B : } \omega &= -\frac{P}{8EI} (\ell-x)(\ell-2x) \end{aligned}$
		$\begin{aligned} \text{A à C : } v &= -\frac{P(\ell-\alpha)^2x^2}{6EI\ell^3} [3\ell\alpha-(\ell+2\alpha)x] \\ \text{C à B : } v &= -\frac{P\alpha^2(\ell-x)^2}{6EI\ell^3} [3\ell x-(\ell+2\alpha)\alpha] \\ v_C &= -\frac{P\alpha^3(\ell-\alpha)^3}{3EI\ell^3} \\ v_{max} &= -\frac{2P}{3EI} \frac{\alpha^3(\ell-\alpha)^2}{(\ell+2\alpha)^2} \text{ pour } x = \frac{2\ell\alpha}{\ell+2\alpha} \quad (\alpha > \beta) \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{A à C : } \omega &= -\frac{P(\ell-\alpha)^2x}{2EI\ell^3} [2\ell\alpha-(\ell+2\alpha)x] \\ \text{C à B : } \omega &= -\frac{P\alpha^2(\ell-x)}{2EI\ell^3} [\ell^2-(3\ell-2\alpha)x] \\ \omega_C &= \frac{P\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)}{2EI\ell^3} \end{aligned}$



Tableau 10 – Moment, effort tranchant et déformations des poutres consoles et des poutres droites à une travée d'inertie constante (suite)

Caractéristiques		Déformations	
Type	Charges	Ligne élastique. Flèches	Rotation des sections
Type	Charges	Équations	Équations
IV		$\begin{aligned} \text{A à C: } v &= -\frac{Px^2}{6EI\ell} [3a(\ell-a) - \ell x] \\ \text{C à C': } v &= -\frac{Pa^2}{6EI\ell} [3x(\ell-x) - \ell a] \\ v_C &= -\frac{Pa^3(2\ell-3a)}{6EI\ell} \\ v_O &= -\frac{Pa^2(3\ell-4a)}{24EI} \\ \text{C' à B: } v &= -\frac{P(\ell-x)^2}{6EI\ell} [3a(\ell-a) - \ell(\ell-x)] \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{A à C: } \omega &= \frac{Px}{2EI\ell} [\ell x - 2a(\ell-a)] \\ \text{C à C': } \omega &= -\frac{Pa^2}{2EI\ell} (\ell - 2x) \\ \omega_C &= -\frac{Pa^2c}{2EI\ell} \\ \text{C' à B: } \omega &= -\frac{P(\ell-x)}{2EI\ell} [\ell(\ell-x) - 2a(\ell-a)] \end{aligned}$
		$\begin{aligned} v &= -\frac{p_1\ell^4}{120EI} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left(2 - \frac{x}{\ell} - \frac{x^2}{\ell^2}\right) \\ v_{max} &= -\frac{1,3085 p_1\ell^4}{1000EI} \text{ pour } x = 0,5247\ell \end{aligned}$	$\omega = -\frac{p_1\ell^3}{120EI} \left(\frac{x}{\ell}\right) \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) \left(4 - 5\frac{x}{\ell} - 5\frac{x^2}{\ell^2}\right)$
		$\begin{aligned} \text{A à O: } v &= -\frac{p_1\ell^4}{960EI} \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \left(25 - 40\frac{x}{\ell} + 16\frac{x^3}{\ell^3}\right) \\ \text{O à B: } v &= -\frac{p_1\ell^4}{960EI} \left(\frac{x_1}{\ell}\right)^2 \left(25 - 40\frac{x_1}{\ell} + 16\frac{x_1^3}{\ell^3}\right) \\ v_O &= -\frac{7p_1\ell^4}{3840EI} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{A à O: } \omega &= -\frac{p_1\ell^3}{96EI} \left(\frac{x}{\ell}\right) \left(1 - \frac{2x}{\ell}\right) \left(5 - 2\frac{x}{\ell} - 4\frac{x^2}{\ell^2}\right) \\ \text{O à B: } \omega &= -\frac{p_1\ell^3}{96EI} \left(\frac{x_1}{\ell}\right) \left(1 - \frac{2x_1}{\ell}\right) \left(5 - 2\frac{x_1}{\ell} - 4\frac{x_1^2}{\ell^2}\right) \end{aligned}$
		$\begin{aligned} \text{A à C: } v &= \frac{m\beta x^2}{EI\ell} \left(1 - \frac{3\beta}{2\ell} - \frac{\alpha x}{\ell^2}\right) \\ \text{C à B: } v &= -\frac{m\alpha x_1^2}{EI\ell} \left(1 - \frac{3\alpha}{2\ell} - \frac{\beta x_1}{\ell^2}\right) \\ v_C &= \frac{m\alpha^2\beta^2(\alpha-\beta)}{2EI\ell^3} \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{A à C: } \omega &= \frac{m\beta x}{EI\ell} \left(2 - 3\frac{\beta}{\ell} - 3\frac{\alpha x}{\ell^2}\right) \\ \text{C à B: } \omega &= \frac{m\alpha x_1}{EI\ell} \left(2 - 3\frac{\alpha}{\ell} - 3\frac{\beta x_1}{\ell^2}\right) \end{aligned}$

**Tableau 11 – Ligne enveloppe des moments maximaux d'une poutre droite sur deux appuis simples soumise à deux charges roulantes**



Le tableau ci-après donne, suivant la valeur du rapport  $a/l$ , la ligne enveloppe des moments maximaux dans la travée  $l$ . Le moment maximal absolu (valeur en gras dans les tableaux) est obtenu par application du théorème de Barré : *le moment fléchissant est maximal au droit d'une charge lorsque cette charge et la résultante générale de toutes les charges effectivement appliquées sur la poutre se trouvent dans des sections symétriques par rapport au milieu de la poutre.*

Le moment fléchissant maximal dans la section d'abscisse  $x < l/2$  a pour valeur :

$$M = \begin{cases} P l \left[ 2 \left( 1 - \frac{x}{l} \right) - \frac{a}{l} \right] \frac{x}{l} & \text{si } x < l - a \\ P l \left( 1 - \frac{x}{l} \right) \frac{x}{l} & \text{si } x > l - a \end{cases}$$

Le moment fléchissant maximal dans la travée a pour valeur :

$$M = \begin{cases} \frac{P l}{2} \left( 1 - \frac{a}{2l} \right)^2 & \text{si } a/l < 2 - \sqrt{2} \\ \frac{1}{4} P l & \text{si } a/l > 2 - \sqrt{2} \end{cases}$$

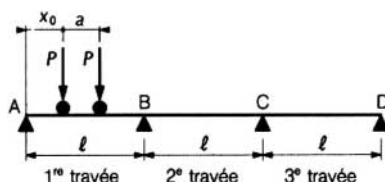
**Ordonnées des lignes enveloppes**

$a/l = 0,10$		$a/l = 0,20$		$a/l = 0,25$		$a/l = 0,30$	
$x/l$	$M/P l$	$x/l$	$M/P l$	$x/l$	$M/P l$	$x/l$	$M/P l$
0,05	0,090 0	0,05	0,085 0	0,05	0,082 5	0,05	0,080 0
0,10	0,170 0	0,10	0,160 0	0,10	0,155 0	0,10	0,150 0
0,15	0,240 0	0,15	0,225 0	0,15	0,217 5	0,15	0,210 0
0,20	0,300 0	0,20	0,280 0	0,20	0,270 0	0,20	0,260 0
0,25	0,350 0	0,25	0,325 0	0,25	0,312 5	0,25	0,300 0
0,30	0,390 0	0,30	0,360 0	0,30	0,345 0	0,30	0,330 0
0,35	0,420 0	0,35	0,385 0	0,35	0,367 5	0,35	0,350 0
0,40	0,440 0	0,40	0,400 0	0,40	0,380 0	0,40	0,360 0
0,45	0,450 0	<b>0,45</b>	<b>0,405 0</b>	<b>0,437 5</b>	<b>0,382 81</b>	<b>0,425</b>	<b>0,361 25</b>
<b>0,475</b>	<b>0,451 25</b>	0,50	0,400 0	0,45	0,382 5	0,45	0,360 0
0,50	0,450 0			0,50	0,375 0	0,50	0,350 0

$a/l = 1/3$		$a/l = 0,40$		$a/l = 0,50$		$a/l = 2/3$	
$x/l$	$M/P l$	$x/l$	$M/P l$	$x/l$	$M/P l$	$x/l$	$M/P l$
0,05	0,078 3	0,05	0,075 0	0,05	0,070 0	0,05	0,061 7
0,10	0,146 7	0,10	0,140 0	0,10	0,130 0	0,10	0,113 3
0,15	0,205 0	0,15	0,195 0	0,15	0,180 0	0,15	0,155 0
0,20	0,253 3	0,20	0,240 0	0,20	0,220 0	0,20	0,186 7
0,25	0,291 7	0,25	0,275 0	0,25	0,250 0	0,25	0,208 3
0,30	0,320 0	0,30	0,300 0	0,30	0,270 0	0,30	0,220 0
0,35	0,338 3	0,35	0,315 0	0,35	0,280 0	<b>0,333 3</b>	<b>0,222 2</b>
0,40	0,346 7	<b>0,40</b>	<b>0,320 0</b>	<b>0,375</b>	<b>0,281 25</b>	0,35	0,227 5
<b>0,416 7</b>	<b>0,347 22</b>	0,45	0,315 0	0,40	0,280 0	0,40	0,240 0
0,45	0,345 0	0,50	0,300 0	0,45	0,270 0	0,45	0,247 5
0,50	0,333 3			0,50	0,250 0	0,50	0,250 0

} 2 charges P  
} 1 charge P

**Tableau 12 – Ligne enveloppe des moments maximaux d'une poutre continue de travées d'égale longueur et d'égale inertie, soumise à deux charges roulantes**



Le tableau ci-après donne en fonction du rapport  $a/l$  :

- les valeurs des moments négatifs  $M_B$  et  $M_C$  maximaux en valeur absolue sur les appuis B et C et les positions correspondantes du convoi définies par  $x_0/l$  ;
- les valeurs des moments maximaux  $M_1$  et  $M_2$  dans les travées AB et BC, et les positions correspondantes du convoi définies par  $x_0/l$  ; lorsque  $a/l > \beta$  ( $\beta \approx 0,615$ ), le maximum  $M_1$  du moment positif dans la première travée est obtenu en disposant une seule charge sur la travée à l'abscisse  $x_0/l \approx 0,427$  (la seconde charge située à gauche se trouve en dehors de la poutre) ;
- les efforts tranchants maximaux au droit des appuis A et B de la première travée et au droit des appuis B et C de la deuxième travée.

Bien qu'elles soient établies pour un grand nombre de travées, les valeurs ci-dessous peuvent être considérées comme suffisamment exactes dès que le nombre de travées est supérieur à trois.

$\frac{a}{l}$	$M_B$		$M_C$		$M_1$		$M_2$		Effort tranchant maximal				$\frac{a}{l}$
	$x_0$ mesuré à partir de A		$x_0$ mesuré à partir de B		$x_0$ mesuré à partir de A		$x_0$ mesuré à partir de B		1 <sup>re</sup> travée		2 <sup>e</sup> travée		
	$x_0/l$	$-M_B/P\ell$	$x_0/l$	$-M_C/P\ell$	$x_0/l$	$M_1/P\ell$	$x_0/l$	$M_2/P\ell$	$T_A/P$	$-T_B/P$	$T_B/P$	$-T_C/P$	
0	0,577	0,206 3	0,616	0,172 5	0,427	0,409 4	0,494	0,345 7	2	2	2	2	0
0,05	0,552	0,205 7	0,591	0,172 0	0,417	0,386 1	0,486	0,321 6	1,936 6	1,974 8	1,963 6	1,966 3	0,05
0,10	0,525	0,204 0	0,563	0,170 3	0,407	0,363 9	0,478	0,299 3	1,873 5	1,945 8	1,922 6	1,927 8	0,10
0,15	0,497	0,201 1	0,535	0,167 5	0,398	0,342 9	0,471	0,278 7	1,810 7	1,913 2	1,877 5	1,884 9	0,15
0,20	0,469	0,197 1	0,504	0,153 7	0,389	0,323 1	0,463	0,259 9	1,748 6	1,877 2	1,828 9	1,838 2	0,20
0,25	0,439	0,191 9	0,472	0,158 9	0,381	0,304 4	0,455	0,242 7	1,687 2	1,837 9	1,777 3	1,788 2	0,25
0,30	0,408	0,185 7	0,438	0,153 0	0,373	0,287 0	0,448	0,227 2	1,626 8	1,795 7	1,723 3	1,735 4	0,30
0,35	0,375	0,178 5	0,403	0,146 3	0,366	0,270 7	0,441	0,213 3	1,567 7	1,750 6	1,667 3	1,680 4	0,35
0,40	0,342	0,170 3	0,365	0,138 8	0,361	0,255 6	0,435	0,201 0	1,510 0	1,702 9	1,609 8	1,623 7	0,40
0,45	0,307	0,161 1	0,331	0,146 0	0,356	0,241 7	0,429	0,190 1	1,453 8	1,652 8	1,551 5	1,565 8	0,45
0,50	0,272	0,159 8	0,298	0,153 6	0,352	0,229 1	0,423	0,180 6	1,399 5	1,600 5	1,492 8	1,507 2	0,50
0,55	0,240	0,166 8	0,265	0,159 7	0,349	0,217 7	0,419	0,172 4	1,347 2	1,546 2	1,434 2	1,448 5	0,55
0,60	0,207	0,172 4	0,232	0,164 4	0,348	0,207 5	0,415	0,165 5	1,297 1	1,490 0	1,376 3	1,390 2	0,60
0,65	0,174	0,176 6	0,200	0,167 8	0,427	0,204 7	0,413	0,159 7	1,249 4	1,432 3	1,319 6	1,332 7	0,65
0,70	0,141	0,179 6	0,166	0,169 9	0,427	0,204 7	0,412	0,155 0	1,204 3	1,373 2	1,264 6	1,276 7	0,70
0,75	0,108	0,181 4	0,132	0,170 8	0,427	0,204 7	0,413	0,151 2	1,162 1	1,312 8	1,211 8	1,222 7	0,75
0,80	0,075	0,182 1	0,098	0,170 6	0,427	0,204 7	0,415	0,148 4	1,122 8	1,251 4	1,161 8	1,171 1	0,80
0,85	0,042	0,181 6	0,065	0,169 3	0,427	0,204 7	0,420	0,146 4	1,086 8	1,189 3	1,115 1	1,122 5	0,85
0,90	0,009	0,180 1	0,032	0,167 0	0,427	0,204 7	0,426	0,145 3	1,054 2	1,126 5	1,072 2	1,077 4	0,90
0,95	-0,024	0,177 6	0,000	0,163 7	0,427	0,204 7	0,434	0,145 0	1,025 2	1,063 4	1,033 7	1,036 4	0,95
1	-0,051	0,174 2	-0,033	0,159 6	0,427	0,204 7	0,444	0,145 4	1	1	1	1	1

■ **Poutres continues. Détermination des moments fléchissants**

Les tableaux 13, 14 et 15 ont pour but de déterminer les moments fléchissants et les efforts tranchants dans les différentes sections d'une poutre continue.

Il suffit pour cela de calculer les moments fléchissants  $M_i$  au droit des appuis  $A_i$ . En effet, si l'on connaît les moments sur appuis  $M_i$ , le moment fléchissant  $m_i(x)$  et l'effort tranchant  $t_i(x)$  dans la section  $X$  d'abscisse  $x = \overline{A_{i-1}X}$  de la travée  $A_{i-1}A_i$  de longueur  $\ell_i$  ont pour expressions :

$$\begin{cases} m_i(x) = \mu_i(x) + M_{i-1} \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) + M_i \frac{x}{\ell_i} \\ t_i(x) = \tau_i(x) + \frac{M_i - M_{i-1}}{\ell_i} \end{cases}$$

$\mu_i(x)$  et  $\tau_i(x)$  désignant respectivement le moment fléchissant et l'effort tranchant produits par les charges appliquées dans la section  $X$  de la poutre  $A_{i-1}A_i$  supposée sur appuis simples.

● **Première méthode**

On peut calculer les moments sur appuis en utilisant la relation des trois moments dont l'expression la plus générale figure dans le tableau 13. Le tableau 14 donne les termes de la relation des trois moments dans les cas le plus souvent rencontrés en pratique.

On obtient ainsi autant d'équations linéaires que de moments sur appuis à calculer. Cette méthode particulière n'est pratique que si l'on a **au plus trois moments sur appuis** à déterminer. C'est le cas d'une poutre continue ayant au plus 4 travées, ou d'une poutre continue symétrique et symétriquement chargée ayant au plus 7 travées.

● **Deuxième méthode**

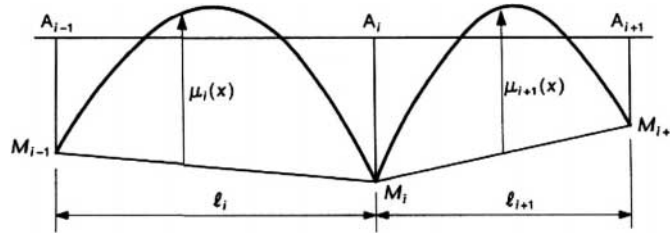
On détermine en premier lieu les foyers des travées au moyen des formules données dans le tableau 15.

Les moments sur appuis dus aux charges appliquées à une seule travée sont ensuite calculés en utilisant les formules données dans le tableau 16.

Les moments sur appuis dus à l'ensemble des charges appliquées s'obtiennent en ajoutant les moments sur appuis dus aux charges appliquées successivement à chaque travée.

Cette **méthode** générale s'applique facilement à un nombre quelconque de travées ; elle est **très précise**.

**Tableau 13 – Poutre continue. Relation générale des trois moments**



La relation des trois moments **relative à l'appui  $A_i$**  est :

$$b_i M_{i-1} + (c_i + a_{i+1}) M_i + b_{i+1} M_{i+1} = \omega'_{i+1} - \omega''_i + \Omega_{i+1} - \Omega_i$$

avec  $M_i$  moment fléchissant sur l'appui  $A_i$ ,

$a_i, b_i$  et  $c_i$  coefficients de souplesse de la travée  $A_{i-1}A_i$  :

$$\begin{cases} a_i = \int_0^{\ell_i} \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right)^2 \frac{dx}{EI} \\ b_i = \int_0^{\ell_i} \frac{x}{\ell_i} \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) \frac{dx}{EI} \\ c_i = \int_0^{\ell_i} \left(\frac{x}{\ell_i}\right)^2 \frac{dx}{EI} \end{cases}$$

$\omega'_i$  et  $\omega''_i$  rotations des extrémités  $A_{i-1}$  et  $A_i$  de la poutre  $A_{i-1}A_i$  supposée sur appuis simples sans l'effet des charges qui lui sont appliquées :

$$\begin{cases} \omega'_i = - \int_0^{\ell_i} \mu_i(x) \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) \frac{dx}{EI} \\ \omega''_i = - \int_0^{\ell_i} \mu_i(x) \frac{x}{\ell_i} \frac{dx}{EI} \end{cases}$$

$\mu_i(x)$  moment fléchissant dû aux charges appliquées à la poutre  $A_{i-1}A_i$  supposée sur appuis simples ;

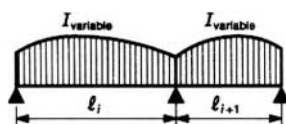
$\Omega_i$  rotation d'ensemble du segment  $A_{i-1}A_i$  due aux dénivellations éventuelles d'appui  $v_i$ , comptées positivement vers le haut :

$$\Omega_i = \frac{v_i - v_{i-1}}{\ell_i}$$

**Nota :** dans chaque travée les abscisses  $x$  sont toujours comptées à partir de l'appui de gauche de la travée. Les dénivellations des appuis dans la déformation des poutres sont considérées comme faibles vis-à-vis de la portée des poutres, et la poutre est supposée rester solidaire des appuis.

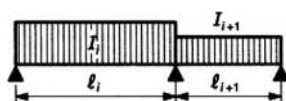
Tableau 14 – Poutre continue. Relation des trois moments. Utilisation du tableau 13

## Poutre continue d'inertie variable



Dans ce cas très général, si les coefficients de souplesse  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et les rotations  $\omega'$  et  $\omega''$  sont trop compliqués à calculer, on les déterminera au moyen d'intégration numérique.

## Poutre continue d'inertie variable d'une travée à l'autre, mais d'inertie constante à l'intérieur de chaque travée



$$b_i = \frac{\ell_i}{6EI_i} \quad a_{i+1} = \frac{\ell_{i+1}}{3EI_{i+1}}$$

$$c_i = \frac{\ell_i}{3EI_i} \quad b_{i+1} = \frac{\ell_{i+1}}{6EI_{i+1}}$$

La relation des trois moments prend la forme suivante :

$$\left(\frac{\ell_i}{I_i}\right) M_{i-1} + \left(\frac{\ell_i}{I_i} + \frac{\ell_{i+1}}{I_{i+1}}\right) 2M_i + \left(\frac{\ell_{i+1}}{I_{i+1}}\right) M_{i+1} = 6E(\omega'_{i+1} - \omega''_i + \Omega_{i+1} - \Omega_i)$$

Les valeurs des rotations  $\omega''_i$  et  $\omega'_{i+1}$  sont données, pour les cas de charge les plus courants, dans le tableau ci-dessous :

Cas de charge dans la travée $\ell_i$	$\omega''_i$	Cas de charge dans la travée $\ell_{i+1}$	$\omega'_{i+1}$
	$+\frac{p_i \ell_i^3}{24 EI_i}$		$-\frac{p_{i+1} \ell_{i+1}^3}{24 EI_{i+1}}$
	$+\frac{P_i \ell_i^2}{16 EI_i}$		$-\frac{P_{i+1} \ell_{i+1}^2}{16 EI_{i+1}}$
	$+\frac{P_i b_i a_i (\ell_i + a_i)}{6 EI_i \ell_i}$		$-\frac{P_{i+1} b_{i+1} a_{i+1} (\ell_{i+1} + b_{i+1})}{6 EI_{i+1} \ell_{i+1}}$
	$+\frac{P a_i (a_i + c_i)}{2 EI_i}$		$-\frac{P_{i+1} a_{i+1} (a_{i+1} + c_{i+1})}{2 EI_{i+1}}$
	$+\frac{8 p_i \ell_i^3}{360 EI_i}$		$-\frac{7 p_{i+1} \ell_{i+1}^3}{360 EI_{i+1}}$
	$+\frac{5 p_i \ell_i^3}{192 EI_i}$		$-\frac{5 p_{i+1} \ell_{i+1}^3}{192 EI_{i+1}}$
	$+\frac{M_i}{6 EI_i \ell_i} [\ell_i^2 - 3a_i^2]$		$+\frac{M_{i+1}}{6 EI_{i+1} \ell_{i+1}} [\ell_{i+1}^2 - 3b_{i+1}^2]$

## Poutre continue d'inertie constante sur toute sa longueur

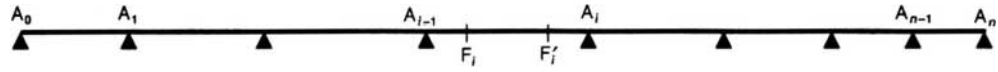
La relation des trois moments prend la forme suivante :



$$M_{i-1}(\ell_i) + 2M_i(\ell_i + \ell_{i+1}) + M_{i+1}(\ell_{i+1}) = 6EI(\omega'_{i+1} - \omega''_i + \Omega_{i+1} - \Omega_i)$$

Les valeurs des relations  $\omega''_i$  et  $\omega'_{i+1}$  seront déduites du tableau ci-dessus en posant  $I_i = I_{i+1} = I$ .

**Tableau 15 – Poutre continue. Détermination des foyers**



Dans chaque travée  $A_{i-1}A_i$ , la position du foyer de gauche  $F_i$  et la position du foyer de droite  $F'_i$  sont définies par les rapports :

$$\varphi_i = \frac{A_{i-1}F_i}{F_iA_i} \quad \text{et} \quad \varphi'_i = \frac{F'_iA_i}{A_{i-1}F'_i}$$

**Cas général**

Les rapports  $\varphi_i$  et  $\varphi'_i$  se calculent par récurrence au moyen des relations :

$$\varphi_1 = 0$$

$$\frac{b_2}{\varphi_2} = a_2 + c_1 - b_1\varphi_1$$

$$\frac{b_i}{\varphi_i} = a_i + c_{i-1} - b_{i-1}\varphi_{i-1}$$

$$\frac{b_n}{\varphi_n} = a_n + c_{n-1} - b_{n-1}\varphi_{n-1}$$

$$\varphi'_{n-1} = 0$$

$$\frac{b_{n-1}}{\varphi'_{n-1}} = c_{n-1} + a_n - b_n\varphi'_{n-1}$$

$$\frac{b_i}{\varphi'_i} = c_i + a_{i+1} - b_{i+1}\varphi'_{i+1}$$

$$\frac{b_1}{\varphi'_1} = c_1 + a_2 - b_2\varphi'_2$$

**Cas d'une poutre continue d'inertie constante ayant  $n$  travées égales (1)**

$$\varphi_1 = \varphi'_n = 0$$

$$\varphi_2 = \varphi'_{n-1} = \frac{1}{4} = 0,25$$

$$\varphi_3 = \varphi'_{n-2} = \frac{4}{15} = 0,266\ 667$$

$$\varphi_4 = \varphi'_{n-3} = \frac{15}{56} = 0,267\ 857$$

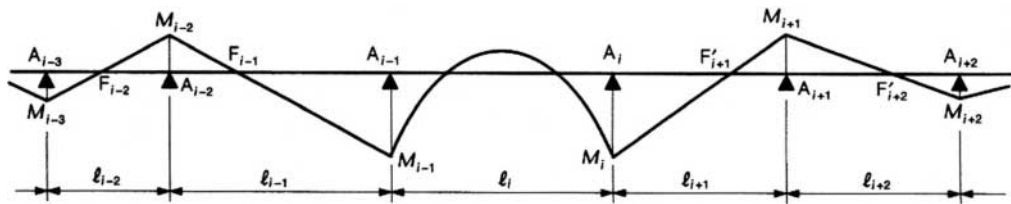
$$\varphi_5 = \varphi'_{n-4} = \frac{56}{209} = 0,267\ 943$$

$$\varphi_6 = \varphi'_{n-5} = \frac{209}{780} = 0,267\ 945$$

(1) **Nota :**  $\varphi_i = \varphi'_{n+1-i}$  tend rapidement vers la valeur limite  $\varphi = \varphi' = 2 - \sqrt{3}$  qui définit les foyers d'une poutre continue d'inertie constante illimitée à gauche et à droite, et constituée de travées égales.

**Tableau 16 – Poutre continue. Méthode des foyers. Calcul des moments sur appuis**

On suppose la travée  $A_{i-1}A_i$  seule chargée



$$M_{i-2} = -\varphi_{i-1}M_{i-1}$$

$$M_{i-3} = -\varphi_{i-2}M_{i-2}$$

$$M_{i-4} = -\varphi_{i-3}M_{i-3}$$

etc.

$$M_{i-1} = \frac{1}{b_i} \frac{\frac{1}{\varphi'_i} \omega'_i + \omega''_i}{\frac{1}{\varphi_i \varphi'_i} - 1}$$

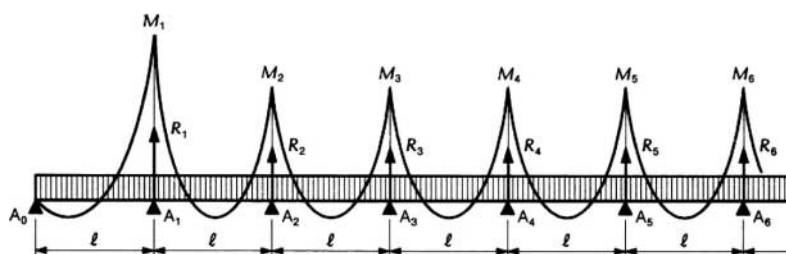
$$M_i = -\frac{1}{b_i} \frac{\omega'_i + \frac{1}{\varphi_i} \omega''_i}{\frac{1}{\varphi_i \varphi'_i} - 1}$$

$$M_{i+1} = -\varphi'_{i+1}M_i$$

$$M_{i+2} = -\varphi'_{i+2}M_{i+1}$$

$$M_{i+3} = -\varphi'_{i+3}M_{i+2}$$

etc.

Tableau 17 – Moments fléchissants des poutres continues d'inertie constante à travées égales et densité de charge linéaire  $p$ 

Effets élastiques		Nombre d'appuis							
		3 appuis	4 appuis	5 appuis	6 appuis	7 appuis	8 appuis	9 appuis	10 appuis
Réactions d'appuis	$R_0$	$0,375\ 00\ p\ell$	$0,400\ 00\ p\ell$	$0,392\ 86\ p\ell$	$0,394\ 74\ p\ell$	$0,394\ 23\ p\ell$	$0,394\ 37\ p\ell$	$0,394\ 33\ p\ell$	$0,394\ 34\ p\ell$
	$R_1$	$1,250\ 00\ p\ell$	$1,100\ 00\ p\ell$	$1,142\ 86\ p\ell$	$1,131\ 58\ p\ell$	$1,134\ 62\ p\ell$	$1,133\ 80\ p\ell$	$1,134\ 02\ p\ell$	$1,133\ 96\ p\ell$
	$R_2$	$0,375\ 00\ p\ell$	$1,100\ 00\ p\ell$	$0,928\ 57\ p\ell$	$0,973\ 68\ p\ell$	$0,961\ 54\ p\ell$	$0,964\ 79\ p\ell$	$0,963\ 92\ p\ell$	$0,964\ 15\ p\ell$
	$R_3$	.....	$0,400\ 00\ p\ell$	$1,142\ 86\ p\ell$	$0,973\ 68\ p\ell$	$1,019\ 23\ p\ell$	$1,007\ 04\ p\ell$	$1,010\ 31\ p\ell$	$1,009\ 43\ p\ell$
	$R_4$	.....	.....	$0,392\ 86\ p\ell$	$1,131\ 58\ p\ell$	$0,961\ 54\ p\ell$	$1,007\ 04\ p\ell$	$0,994\ 85\ p\ell$	$0,998\ 11\ p\ell$
	$R_5$	.....	.....	.....	$0,394\ 74\ p\ell$	$1,134\ 62\ p\ell$	$0,964\ 79\ p\ell$	$1,010\ 31\ p\ell$	$0,998\ 11\ p\ell$
Moments fléchissants sur appuis	$M_0$	0	0	0	0	0	0	0	0
	$M_1$	$-0,125\ 00\ p\ell^2$	$-0,100\ 00\ p\ell^2$	$-0,107\ 14\ p\ell^2$	$-0,105\ 26\ p\ell^2$	$-0,105\ 77\ p\ell^2$	$-0,105\ 63\ p\ell^2$	$-0,105\ 67\ p\ell^2$	$-0,105\ 66\ p\ell^2$
	$M_2$	0	$-0,100\ 00\ p\ell^2$	$-0,071\ 43\ p\ell^2$	$-0,078\ 95\ p\ell^2$	$-0,076\ 92\ p\ell^2$	$-0,077\ 46\ p\ell^2$	$-0,077\ 32\ p\ell^2$	$-0,077\ 36\ p\ell^2$
	$M_3$	.....	0	$-0,107\ 14\ p\ell^2$	$-0,078\ 95\ p\ell^2$	$-0,086\ 54\ p\ell^2$	$-0,084\ 51\ p\ell^2$	$-0,085\ 05\ p\ell^2$	$-0,084\ 91\ p\ell^2$
	$M_4$	.....	.....	0	$-0,105\ 26\ p\ell^2$	$-0,076\ 92\ p\ell^2$	$-0,084\ 51\ p\ell^2$	$-0,082\ 47\ p\ell^2$	$-0,083\ 02\ p\ell^2$
	$M_5$	.....	.....	.....	0	$-0,105\ 77\ p\ell^2$	$-0,077\ 46\ p\ell^2$	$-0,085\ 05\ p\ell^2$	$-0,083\ 02\ p\ell^2$
Moments fléchissants maximaux positifs dans les travées	$M'_1$	$0,070\ 31\ p\ell^2$	$0,080\ 00\ p\ell^2$	$0,077\ 17\ p\ell^2$	$0,077\ 91\ p\ell^2$	$0,077\ 71\ p\ell^2$	$0,077\ 76\ p\ell^2$	$0,077\ 75\ p\ell^2$	$0,077\ 75\ p\ell^2$
	$M'_2$	$0,070\ 31\ p\ell^2$	$0,025\ 00\ p\ell^2$	$0,036\ 35\ p\ell^2$	$0,033\ 24\ p\ell^2$	$0,034\ 07\ p\ell^2$	$0,033\ 85\ p\ell^2$	$0,033\ 91\ p\ell^2$	$0,033\ 89\ p\ell^2$
	$M'_3$	.....	$0,080\ 00\ p\ell^2$	$0,036\ 35\ p\ell^2$	$0,046\ 05\ p\ell^2$	$0,043\ 32\ p\ell^2$	$0,044\ 04\ p\ell^2$	$0,043\ 84\ p\ell^2$	$0,043\ 90\ p\ell^2$
	$M'_4$	.....	.....	$0,077\ 17\ p\ell^2$	$0,033\ 24\ p\ell^2$	$0,043\ 32\ p\ell^2$	$0,040\ 49\ p\ell^2$	$0,041\ 24\ p\ell^2$	$0,041\ 04\ p\ell^2$
	$M'_5$	.....	.....	.....	$0,077\ 91\ p\ell^2$	$0,034\ 07\ p\ell^2$	$0,044\ 04\ p\ell^2$	$0,041\ 24\ p\ell^2$	$0,041\ 98\ p\ell^2$

**Tableau 18 – Moments fléchissants des poutres continues d’inertie constante à travées égales dans différents cas de charges**

La première colonne indique en gras les travées chargées.

La première ligne indique la nature des charges.

$M_B, M_C, M_D, \dots$  désignent les moments fléchissants sur les appuis intermédiaires B, C, D,...

$M_{ik}$  avec  $i = 1, 2, 3, \dots$  et  $k = a, b, c$  désigne le moment fléchissant dans la travée  $i$  au droit du point d’application éventuel  $k$  d’une charge concentrée  $P$ .

Dans le cas d’une charge uniformément répartie de densité  $p$ ,  $M_{ia}$  désigne le moment fléchissant maximal dans la travée  $i$ . Dans le cas d’une travée intermédiaire, ce moment maximal a lieu au voisinage du milieu de la travée. Dans le cas d’une travée extrême, ce moment maximal a lieu au voisinage de la section située à  $0,4 \ell$  d’une extrémité de la poutre continue.

Les charges concentrées  $P$  sont identiques.

$R_A, R_B, R_C, \dots$  désignant les réactions exercées par les appuis A, B, C, ... comptées positivement vers le haut.

Les moments fléchissants maximaux en valeur absolue sont indiqués en caractères gras.

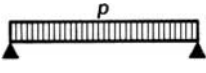
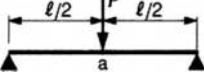
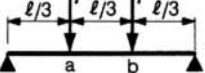
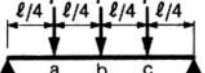



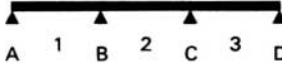
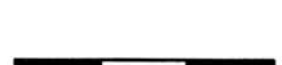
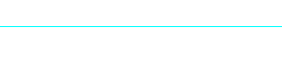

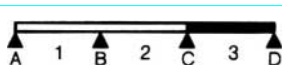
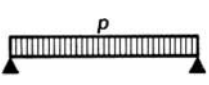
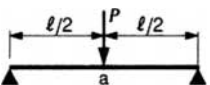
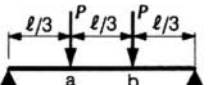
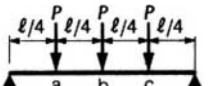






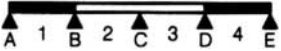
Travées chargées	Moments fléchissants Réactions sur appuis	Charges intervenant sur les travées chargées			
					
<b>Poutres à deux travées d’égale portée</b>					
	$M_{1a}$ $M_{1b}$ $M_{1c}$ $M_B$ $R_A$ $R_B$	$0,070\ 31\ p\ell^2$ ..... ..... <b><math>-0,125\ 00\ p\ell^2</math></b> $0,375\ 00\ p\ell$ $1,250\ 00\ p\ell$	$0,156\ 25\ P\ell$ ..... ..... <b><math>-0,187\ 50\ P\ell</math></b> $0,312\ 50\ P$ $1,375\ 00\ P$	$0,222\ 22\ P\ell$ $0,111\ 11\ P\ell$ ..... <b><math>-0,333\ 33\ P\ell</math></b> $0,666\ 67\ P$ $2,666\ 67\ P$	$0,257\ 81\ P\ell$ $0,265\ 62\ P\ell$ $0,023\ 44\ P\ell$ <b><math>-0,468\ 75\ P\ell</math></b> $1,031\ 25\ P$ $3,937\ 50\ P$
	$M_{1a}$ $M_{1b}$ $M_{1c}$ $M_B$ $R_A$	<b><math>0,095\ 70\ p\ell^2</math></b> ..... ..... $-0,062\ 50\ p\ell^2$ $0,437\ 50\ p\ell$	<b><math>0,203\ 12\ P\ell</math></b> ..... ..... $-0,093\ 75\ P\ell$ $0,406\ 25\ P$	<b><math>0,277\ 78\ P\ell</math></b> $0,222\ 22\ P\ell$ ..... $-0,166\ 67\ P\ell$ $0,833\ 33\ P$	$0,316\ 41\ P\ell$ <b><math>0,382\ 81\ P\ell</math></b> $0,199\ 22\ P\ell$ $-0,234\ 38\ P\ell$ $1,265\ 63\ P$
	$M_{1a}$ $M_{1b}$ $M_{1c}$ $M_B$ $R_A$	..... ..... ..... $-0,062\ 50\ p\ell^2$ $-0,062\ 50\ p\ell$	$-0,046\ 88\ P\ell$ ..... ..... $-0,093\ 75\ P\ell$ $-0,093\ 75\ P$	$-0,055\ 56\ P\ell$ $-0,111\ 11\ P\ell$ ..... $-0,166\ 67\ P\ell$ $-0,166\ 67\ P$	$-0,058\ 59\ P\ell$ $-0,117\ 19\ P\ell$ $-0,175\ 78\ P\ell$ $-0,234\ 38\ P\ell$ $-0,234\ 38\ P$
<b>Poutres à trois travées d’égale portée</b>					
	$M_{1a}$ $M_{1b}$ $M_{1c}$ $M_{2a}$ $M_{2b}$ $M_B = M_C$ $R_A$ $R_B$	$0,080\ 00\ p\ell^2$ ..... ..... $0,025\ 00\ p\ell^2$ ..... <b><math>-0,100\ 00\ p\ell^2</math></b> $0,400\ 00\ p\ell$ $1,100\ 00\ p\ell$	<b><math>0,175\ 00\ P\ell</math></b> ..... ..... $0,100\ 00\ P\ell$ ..... $-0,150\ 00\ P\ell$ $0,350\ 00\ P$ $1,150\ 00\ P$	$0,244\ 44\ P\ell$ $0,155\ 56\ P\ell$ ..... $0,066\ 67\ P\ell$ $0,066\ 67\ P\ell$ <b><math>-0,266\ 67\ P\ell</math></b> $0,733\ 33\ P$ $2,266\ 67\ P$	$0,281\ 25\ P\ell$ $0,312\ 50\ P\ell$ $0,093\ 75\ P\ell$ 0 $0,125\ 00\ P\ell$ <b><math>-0,375\ 00\ P\ell</math></b> $1,125\ 00\ P$ $3,375\ 00\ P$
	$M_{1a}$ $M_{1b}$ $M_{1c}$ $M_{2a}$ $M_{2b}$ $M_B = M_C$ $R_A$	<b><math>0,101\ 25\ p\ell^2</math></b> ..... ..... $-0,050\ 00\ p\ell^2$ ..... $-0,050\ 00\ p\ell^2$ $0,450\ 00\ p\ell$	<b><math>0,212\ 50\ P\ell</math></b> ..... ..... $-0,075\ 00\ P\ell$ ..... $-0,075\ 00\ P\ell$ $0,425\ 00\ P$	<b><math>0,288\ 89\ P\ell</math></b> $0,244\ 44\ P\ell$ ..... $-0,133\ 33\ P\ell$ $-0,133\ 33\ P\ell$ $-0,133\ 33\ P\ell$ $0,866\ 67\ P$	$0,328\ 12\ P\ell$ <b><math>0,406\ 25\ P\ell</math></b> $0,234\ 38\ P\ell$ $-0,187\ 50\ P\ell$ $-0,187\ 50\ P\ell$ $-0,187\ 50\ P\ell$ $1,312\ 50\ P$
	$M_{1a}$ $M_{1b}$ $M_{1c}$ $M_{2a}$ $M_{2b}$ $M_B = M_C$ $R_A$	..... ..... ..... <b><math>0,075\ 00\ p\ell^2</math></b> ..... $-0,050\ 00\ p\ell^2$ $-0,050\ 00\ p\ell$	$-0,037\ 50\ P\ell$ ..... ..... <b><math>0,175\ 00\ P\ell</math></b> ..... $-0,075\ 00\ P\ell$ $-0,075\ 00\ P$	$-0,044\ 44\ P\ell$ $-0,088\ 89\ P\ell$ ..... <b><math>0,200\ 00\ P\ell</math></b> <b><math>0,200\ 00\ P\ell</math></b> $-0,133\ 33\ P\ell$ $-0,133\ 33\ P$	$-0,046\ 88\ P\ell$ $-0,093\ 75\ P\ell$ $-0,140\ 62\ P\ell$ $0,187\ 50\ P\ell$ <b><math>0,312\ 50\ P\ell</math></b> $-0,187\ 50\ P\ell$ $-0,187\ 50\ P$
	$M_B$ $M_C$ $R_B$	<b><math>-0,116\ 67\ p\ell^2</math></b> $-0,033\ 33\ p\ell^2$ $-1,200\ 00\ p\ell$	<b><math>-0,175\ 00\ P\ell</math></b> $-0,050\ 00\ P\ell$ $1,300\ 00\ P$	<b><math>-0,311\ 11\ P\ell</math></b> $-0,088\ 89\ P\ell$ $2,533\ 33\ P$	<b><math>-0,437\ 50\ P\ell</math></b> $-0,125\ 00\ P\ell$ $3,750\ 00\ P\ell$
	$M_B$ $M_C$	$0,016\ 67\ p\ell^2$ $-0,066\ 67\ p\ell^2$	$0,025\ 00\ P\ell$ $-0,100\ 00\ P\ell$	$0,044\ 44\ P\ell$ $-0,177\ 78\ P\ell$	$0,062\ 50\ P\ell$ $-0,250\ 00\ P\ell$



Tableau 18 – Moments fléchissants des poutres continues d'inertie constante à travées égales dans différents cas de charges (suite)

Travées chargées	Moments fléchissants Réactions sur appuis	Charges intervenant sur les travées chargées			
					
<b>Poutres à quatre travées d'égale portée</b>					
	$M_{1a}$ $M_{1b}$ $M_{1c}$ $M_{2a}$ $M_{2b}$ $M_{2c}$ $M_B$ $M_C$ $R_A$ $R_B$ $R_C$	$0,077\ 17\ pl^2$ ..... ..... $0,036\ 35\ pl^2$ ..... ..... $-0,107\ 14\ pl^2$ $-0,071\ 43\ pl^2$ $0,392\ 86\ pl$ $1,142\ 86\ pl$ $0,928\ 57\ pl$	$0,169\ 64\ Pl$ ..... ..... $0,116\ 07\ Pl$ ..... ..... $-0,160\ 71\ Pl$ $-0,107\ 14\ Pl$ $0,339\ 29\ P$ $1,214\ 29\ P$ $0,892\ 86\ P$	$0,238\ 10\ Pl$ $0,142\ 86\ Pl$ ..... $0,079\ 37\ Pl$ $0,111\ 11\ Pl$ ..... $-0,285\ 71\ Pl$ $-0,190\ 48\ Pl$ $0,714\ 29\ P$ $2,380\ 95\ P$ $1,809\ 52\ P$	$0,274\ 55\ Pl$ $0,299\ 11\ Pl$ $0,073\ 66\ Pl$ $0,006\ 70\ Pl$ $0,165\ 18\ Pl$ $0,073\ 66\ Pl$ $-0,401\ 79\ Pl$ $-0,267\ 86\ Pl$ $1,098\ 21\ P$ $3,535\ 71\ P$ $2,732\ 14\ P$
	$M_{1a}$ $M_{1b}$ $M_{1c}$ $M_{2a}$ $M_{2b}$ $M_{2c}$ $M_B$ $M_C$ $R_A$	$0,099\ 65\ pl^2$ ..... ..... ..... ..... ..... $-0,053\ 57\ pl^2$ $-0,035\ 71\ pl^2$ $0,446\ 43\ pl$	$0,209\ 82\ Pl$ ..... ..... $-0,066\ 96\ Pl$ ..... ..... $-0,080\ 36\ Pl$ $-0,053\ 57\ Pl$ $0,419\ 64\ P$	$0,285\ 71\ Pl$ $0,238\ 10\ Pl$ ..... $-0,126\ 98\ Pl$ $-0,111\ 11\ Pl$ ..... $-0,142\ 86\ Pl$ $-0,095\ 24\ Pl$ $0,857\ 14\ P$	$0,324\ 78\ Pl$ $0,399\ 55\ Pl$ $0,224\ 33\ Pl$ $-0,184\ 15\ Pl$ $-0,167\ 41\ Pl$ $-0,150\ 67\ Pl$ $-0,200\ 89\ Pl$ $-0,133\ 93\ Pl$ $1,299\ 11\ P$
	$M_{1a}$ $M_{1b}$ $M_{1c}$ $M_{2a}$ $M_{2b}$ $M_{2c}$ $M_B$ $M_C$ $R_A$	..... ..... ..... $0,080\ 52\ pl^2$ ..... ..... $-0,053\ 57\ pl^2$ $-0,035\ 71\ pl^2$ $-0,053\ 57\ pl$	$-0,040\ 18\ Pl$ ..... ..... $0,183\ 04\ Pl$ ..... ..... $-0,080\ 36\ Pl$ $-0,053\ 57\ Pl$ $-0,080\ 36\ P$	$-0,047\ 62\ Pl$ $-0,095\ 24\ Pl$ ..... $0,206\ 35\ Pl$ $0,222\ 22\ Pl$ ..... $-0,142\ 86\ Pl$ $-0,095\ 24\ Pl$ $-0,142\ 86\ P$	$-0,050\ 22\ Pl$ $-0,100\ 46\ Pl$ $-0,150\ 67\ Pl$ $0,190\ 85\ Pl$ $0,332\ 58\ Pl$ $0,224\ 33\ Pl$ $-0,200\ 89\ Pl$ $-0,133\ 93\ Pl$ $-0,200\ 89\ P$
	$M_B$ $M_C$ $M_D$ $R_B$	$-0,120\ 54\ pl^2$ $-0,017\ 86\ pl^2$ $-0,058\ 04\ pl^2$ $1,223\ 21\ pl$	$-0,180\ 80\ Pl$ $-0,026\ 79\ Pl$ $-0,087\ 05\ Pl$ $1,334\ 82\ P$	$-0,321\ 43\ Pl$ $-0,047\ 62\ Pl$ $-0,154\ 76\ Pl$ $2,595\ 24\ P$	$-0,452\ 01\ Pl$ $-0,066\ 96\ Pl$ $-0,217\ 63\ Pl$ $3,837\ 05\ P$
	$M_B$ $M_C$ $M_D$ $R_B$	$0,013\ 39\ pl^2$ $-0,053\ 57\ pl^2$ $-0,049\ 11\ pl^2$ $-0,080\ 36\ pl$	$0,020\ 09\ Pl$ $-0,080\ 36\ Pl$ $-0,073\ 66\ Pl$ $-0,120\ 54\ P$	$0,035\ 71\ Pl$ $-0,142\ 86\ Pl$ $-0,130\ 95\ Pl$ $-0,214\ 29\ P$	$0,050\ 22\ Pl$ $-0,201\ 89\ Pl$ $-0,184\ 15\ Pl$ $-0,301\ 34\ P$
	$M_B = M_D$ $M_C$ $R_C$	$-0,035\ 71\ pl^2$ $-0,107\ 14\ pl^2$ $1,142\ 86\ pl$	$-0,053\ 57\ Pl$ $-0,160\ 71\ Pl$ $1,214\ 29\ P$	$-0,095\ 24\ Pl$ $-0,285\ 71\ Pl$ $2,380\ 95\ P$	$-0,133\ 93\ Pl$ $-0,401\ 78\ Pl$ $3,535\ 71\ P$
	$M_B = M_D$ $M_C$ $R_C$	$-0,071\ 43\ pl^2$ $0,035\ 71\ pl^2$ $-0,214\ 29\ pl$	$-0,107\ 14\ Pl$ $0,053\ 57\ Pl$ $-0,321\ 43\ P$	$-0,190\ 48\ Pl$ $0,095\ 24\ Pl$ $-0,571\ 43\ P$	$-0,267\ 86\ Pl$ $0,133\ 93\ Pl$ $-0,803\ 57\ P$

**Tableau 18 – Moments fléchissants des poutres continues d’inertie constante à travées égales dans différents cas de charges (suite)**

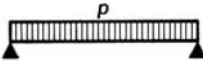
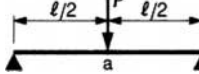
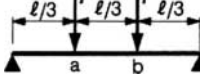
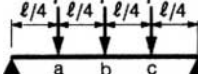


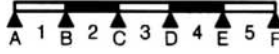


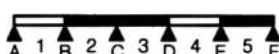

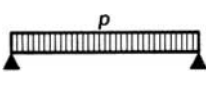
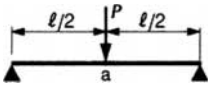
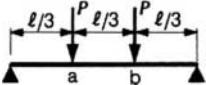
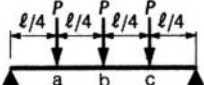
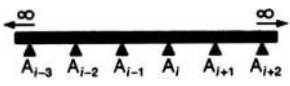
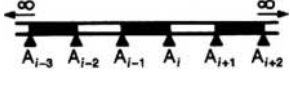
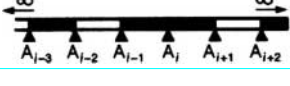
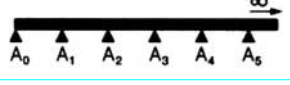

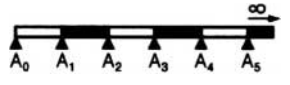
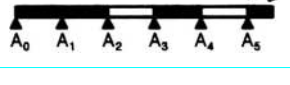
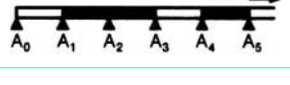
Travées chargées	Moments fléchissants Réactions sur appuis	Charges intervenant sur les travées chargées			
					
<b>Poutres à cinq travées d'égale portée</b>					
	$M_{1a}$ $M_{1b}$ $M_{1c}$ $M_{2a}$ $M_{2b}$ $M_{2c}$ $M_{3a}$ $M_{3b}$ $M_B = M_E$ $M_C = M_D$ $R_A$ $R_B$ $R_C$	$0,077\ 91\ p\ell^2$ ..... ..... $0,033\ 24\ p\ell^2$ ..... ..... $0,046\ 05\ p\ell^2$ ..... ..... $-0,105\ 26\ p\ell^2$ $-0,078\ 95\ p\ell^2$ $0,394\ 74\ p\ell$ $1,131\ 58\ p\ell$ $0,973\ 68\ p\ell$	$0,171\ 05\ P\ell$ ..... ..... $0,111\ 84\ P\ell$ ..... ..... $0,131\ 58\ P\ell$ ..... ..... $-0,157\ 89\ P\ell$ $-0,118\ 42\ P\ell$ $0,342\ 11\ P$ $1,197\ 37\ P$ $0,960\ 53\ P$	$0,239\ 77\ P\ell$ $0,146\ 20\ P\ell$ ..... $0,076\ 02\ P\ell$ $0,099\ 42\ P\ell$ ..... $0,122\ 81\ P\ell$ $0,122\ 81\ P\ell$ $-0,280\ 70\ P\ell$ $-0,210\ 53\ P\ell$ $0,719\ 30\ P$ $2,350\ 88\ P$ $1,929\ 82\ P$	$0,276\ 32\ P\ell$ $0,302\ 63\ P\ell$ $0,078\ 95\ P\ell$ $0,004\ 93\ P\ell$ $0,154\ 61\ P\ell$ $0,054\ 28\ P\ell$ $0,078\ 95\ P\ell$ $0,203\ 95\ P\ell$ $-0,394\ 74\ P\ell$ $-0,296\ 05\ P\ell$ $1,105\ 26\ P$ $3,493\ 42\ P$ $2,901\ 32\ P$
	$M_{1a}$ $M_{1b}$ $M_{1c}$ $M_{2a}$ $M_{2b}$ $M_{2c}$ $M_{3a}$ $M_{3b}$ $M_B = M_E$ $M_C = M_D$ $R_A$	$0,100\ 07\ p\ell^2$ ..... ..... $-0,045\ 88\ p\ell^2$ ..... ..... $0,085\ 53\ p\ell^2$ ..... ..... $-0,052\ 63\ p\ell^2$ $-0,039\ 47\ p\ell^2$ $0,447\ 37\ p\ell$	$0,210\ 53\ P\ell$ ..... ..... $-0,069\ 08\ P\ell$ ..... ..... $0,190\ 79\ P\ell$ ..... ..... $-0,078\ 95\ P\ell$ $-0,059\ 21\ P\ell$ $0,421\ 05\ P$	$0,286\ 55\ P\ell$ $0,239\ 77\ P\ell$ ..... $-0,128\ 65\ P\ell$ $-0,116\ 96\ P\ell$ ..... $0,228\ 07\ P\ell$ $0,228\ 07\ P\ell$ $-0,140\ 35\ P\ell$ $-0,105\ 26\ P\ell$ $0,859\ 65\ P$	$0,325\ 66\ P\ell$ $0,401\ 32\ P\ell$ $0,226\ 97\ P\ell$ $-0,185\ 03\ P\ell$ $-0,172\ 70\ P\ell$ $-0,160\ 36\ P\ell$ $0,226\ 97\ P\ell$ $0,351\ 97\ P\ell$ $-0,197\ 37\ P\ell$ $-0,148\ 03\ P\ell$ $1,302\ 63\ P$
	$M_{1a}$ $M_{1b}$ $M_{1c}$ $M_{2a}$ $M_{2b}$ $M_{2c}$ $M_{3a}$ $M_{3b}$ $M_B = M_E$ $M_C = M_D$ $R_A$	..... ..... ..... $0,079\ 09\ p\ell^2$ ..... ..... ..... ..... ..... $-0,052\ 63\ p\ell^2$ $-0,039\ 47\ p\ell^2$ $-0,052\ 63\ p\ell$	$-0,039\ 47\ P\ell$ ..... ..... $0,180\ 92\ P\ell$ ..... ..... $-0,059\ 21\ P\ell$ ..... ..... $-0,078\ 95\ P\ell$ $-0,059\ 21\ P\ell$ $-0,078\ 95\ P$	$-0,046\ 78\ P\ell$ $-0,093\ 97\ P\ell$ ..... $0,204\ 68\ P\ell$ $0,216\ 37\ P\ell$ ..... $-0,105\ 26\ P\ell$ $-0,105\ 26\ P\ell$ $-0,140\ 35\ P\ell$ $-0,105\ 26\ P\ell$ $-0,140\ 35\ P$	$-0,049\ 34\ P\ell$ $-0,098\ 68\ P\ell$ $-0,148\ 03\ P\ell$ $0,189\ 97\ P\ell$ $0,327\ 30\ P\ell$ $0,214\ 64\ P\ell$ $-0,148\ 03\ P\ell$ $-0,148\ 03\ P\ell$ $-0,197\ 37\ P\ell$ $-0,148\ 03\ P\ell$ $-0,197\ 37\ P$
	$M_B$ $M_C$ $M_D$ $M_E$ $R_B$	$-0,119\ 62\ p\ell^2$ $-0,021\ 53\ p\ell^2$ $-0,044\ 26\ p\ell^2$ $-0,051\ 44\ p\ell^2$ $-1,217\ 70\ p\ell$	$-0,179\ 43\ P\ell$ $-0,032\ 30\ P\ell$ $-0,066\ 39\ P\ell$ $-0,077\ 15\ P\ell$ $1,326\ 56\ P$	$-0,319\ 98\ P\ell$ $-0,057\ 42\ P\ell$ $-0,118\ 02\ P\ell$ $-0,137\ 16\ P\ell$ $-2,580\ 54\ P$	$-0,448\ 56\ P\ell$ $-0,080\ 74\ P\ell$ $-0,165\ 97\ P\ell$ $-0,192\ 88\ P\ell$ $3,816\ 39\ P$
	$M_B$ $M_C$ $M_D$ $M_E$ $R_B$	$0,014\ 35\ p\ell^2$ $-0,057\ 42\ p\ell^2$ $-0,034\ 69\ p\ell^2$ $-0,053\ 83\ p\ell^2$ $-0,086\ 12\ p\ell$	$0,021\ 53\ P\ell$ $-0,086\ 12\ P\ell$ $-0,052\ 03\ P\ell$ $-0,080\ 74\ P\ell$ $-0,129\ 19\ P$	$0,038\ 28\ P\ell$ $-0,153\ 11\ P\ell$ $-0,092\ 50\ P\ell$ $-0,143\ 54\ P\ell$ $-0,229\ 65\ P$	$0,053\ 83\ P\ell$ $-0,215\ 31\ P\ell$ $-0,130\ 08\ P\ell$ $-0,201\ 85\ P\ell$ $-0,322\ 97\ P$
	$M_B$ $M_C$ $M_D$ $M_E$ $R_C$	$-0,034\ 69\ p\ell^2$ $-0,111\ 24\ p\ell^2$ $-0,020\ 33\ p\ell^2$ $-0,057\ 42\ p\ell^2$ $1,167\ 46\ p\ell$	$-0,052\ 03\ P\ell$ $-0,166\ 87\ P\ell$ $-0,030\ 50\ P\ell$ $-0,086\ 12\ P\ell$ $1,251\ 20\ P$	$-0,092\ 50\ P\ell$ $-0,296\ 65\ P\ell$ $-0,054\ 23\ P\ell$ $-0,153\ 11\ P\ell$ $2,446\ 57\ P$	$-0,130\ 08\ P\ell$ $-0,417\ 17\ P\ell$ $-0,076\ 26\ P\ell$ $-0,215\ 31\ P\ell$ $3,627\ 99\ P$
	$M_B$ $M_C$ $M_D$ $M_E$ $R_C$	$-0,070\ 57\ p\ell^2$ $0,032\ 29\ p\ell^2$ $-0,058\ 62\ p\ell^2$ $-0,047\ 85\ p\ell^2$ $-0,193\ 78\ p\ell$	$-0,105\ 86\ P\ell$ $0,048\ 44\ P\ell$ $-0,087\ 92\ P\ell$ $-0,071\ 77\ P\ell$ $-0,290\ 67\ P$	$-0,188\ 20\ P\ell$ $0,086\ 12\ P\ell$ $-0,156\ 30\ P\ell$ $-0,127\ 59\ P\ell$ $-0,516\ 75\ P$	$-0,264\ 65\ P\ell$ $0,121\ 11\ P\ell$ $-0,219\ 80\ P\ell$ $-0,179\ 43\ P\ell$ $-0,726\ 67\ P$

Tableau 18 – Moments fléchissants des poutres continues d'inertie constante à travées égales dans différents cas de charges (suite)

Travées chargées	Moments fléchissants Réactions sur appuis	Charges intervenant sur les travées chargées			
					
<b>Poutres à une infinité de travées d'égale portée. Travées intermédiaires</b>					
	$M_{i-2}$ $M_{i-1}$ $M_i$ $M_{i+1}$ $M_{i+2}$	$-0,083\ 33\ p\ell^2$	$-0,125\ 00\ P\ell$	$-0,222\ 22\ P\ell$	$-0,312\ 50\ P\ell$
	$M_+(x = \frac{\ell_i}{2})$	$-0,041\ 67\ p\ell^2$	$0,125\ 00\ P\ell$	$0,111\ 11\ P\ell$	$0,187\ 50\ P\ell$
	$M_{i-2}$ $M_{i-1}$ $M_i$ $M_{i+1}$ $M_{i+2}$	$-0,041\ 67\ p\ell^2$	$-0,062\ 50\ P\ell$	$-0,111\ 11\ P\ell$	$-0,156\ 25\ P\ell$
	$M_+$ (milieu des travées chargées)	$0,083\ 33\ p\ell^2$	$0,187\ 50\ P\ell$	$0,222\ 22\ P\ell$	$0,343\ 75\ P\ell$
	$M_-$ (milieu des travées non chargées)	$-0,041\ 67\ p\ell^2$	$-0,062\ 50\ P\ell$	$-0,111\ 11\ P\ell$	$-0,156\ 25\ P\ell$
	$M_i$ $M_{i-1} = M_{i+1}$ $M_{i-2} = M_{i+2}$	$-0,113\ 84\ p\ell^2$ $-0,022\ 33\ p\ell^2$ $-0,046\ 85\ p\ell^2$	$-0,170\ 75\ P\ell$ $-0,033\ 49\ P\ell$ $-0,070\ 27\ P\ell$	$-0,303\ 56\ P\ell$ $-0,059\ 54\ P\ell$ $-0,124\ 93\ P\ell$	$-0,426\ 88\ P\ell$ $-0,083\ 73\ P\ell$ $-0,175\ 68\ P\ell$
<b>Poutres à une infinité de travées d'égale portée. Travées de rive</b>					
	$M_1$ $M_2$ $M_3$ $M_4$	$-0,105\ 66\ p\ell^2$ $-0,077\ 35\ p\ell^2$ $-0,084\ 94\ p\ell^2$ $-0,082\ 90\ p\ell^2$	$-0,158\ 49\ P\ell$ $-0,116\ 02\ P\ell$ $-0,127\ 40\ P\ell$ $-0,124\ 36\ P\ell$	$-0,281\ 77\ P\ell$ $-0,206\ 27\ P\ell$ $-0,226\ 50\ P\ell$ $-0,221\ 08\ P\ell$	$-0,396\ 23\ P\ell$ $-0,290\ 06\ P\ell$ $-0,318\ 51\ P\ell$ $-0,310\ 89\ P\ell$
	$M_{0,1}$ $M_1$ $M_2$ $M_{2,3}$ $M_3$ $M_4$	$0,099\ 98\ p\ell^2$ $-0,052\ 83\ p\ell^2$ $-0,038\ 68\ p\ell^2$ $0,084\ 44\ p\ell$ $-0,042\ 47\ p\ell^2$ $-0,041\ 45\ p\ell^2$	$0,210\ 38\ P\ell$ $-0,079\ 25\ P\ell$ $-0,058\ 01\ P\ell$ $0,189\ 14\ P\ell$ $-0,063\ 70\ P\ell$ $-0,062\ 18\ P\ell$	$0,286\ 37\ P\ell$ $-0,140\ 88\ P\ell$ $-0,103\ 13\ P\ell$ $0,226\ 83\ P\ell$ $-0,113\ 25\ P\ell$ $-0,110\ 54\ P\ell$	$0,400\ 94\ P\ell$ $-0,198\ 12\ P\ell$ $-0,145\ 03\ P\ell$ $0,347\ 86\ P\ell$ $-0,159\ 26\ P\ell$ $-0,155\ 44\ P\ell$
	$M_1$ $M_{1,2}$ $M_2$ $M_3$ $M_{3,4}$ $M_4$	$-0,052\ 83\ p\ell^2$ $-0,079\ 35\ p\ell^2$ $-0,038\ 68\ p\ell^2$ $-0,042\ 47\ p\ell^2$ $0,083\ 04\ p\ell^2$ $-0,041\ 45\ p\ell^2$	$-0,079\ 25\ P\ell$ $0,181\ 37\ P\ell$ $-0,058\ 01\ P\ell$ $-0,063\ 70\ P\ell$ $-0,187\ 06\ P\ell$ $-0,062\ 18\ P\ell$	$-0,140\ 88\ P\ell$ $0,217\ 62\ P\ell$ $-0,103\ 13\ P\ell$ $-0,113\ 25\ P\ell$ $0,221\ 89\ P\ell$ $-0,110\ 54\ P\ell$	$-0,198\ 12\ P\ell$ $0,328\ 43\ P\ell$ $-0,145\ 03\ P\ell$ $-0,159\ 26\ P\ell$ $0,342\ 65\ P\ell$ $-0,155\ 44\ P\ell$
	$M_1$ $M_2$ $M_3$ $M_4$	$-0,119\ 82\ p\ell^2$ $-0,020\ 73\ p\ell^2$ $-0,047\ 28\ p\ell^2$ $-0,040\ 16\ p\ell^2$	$-0,179\ 73\ P\ell$ $-0,031\ 09\ P\ell$ $-0,070\ 92\ P\ell$ $-0,060\ 25\ P\ell$	$-0,319\ 52\ P\ell$ $-0,055\ 27\ P\ell$ $-0,126\ 07\ P\ell$ $-0,107\ 10\ P\ell$	$-0,449\ 32\ P\ell$ $-0,077\ 72\ P\ell$ $-0,177\ 29\ P\ell$ $-0,150\ 61\ P\ell$
	$M_1$ $M_2$ $M_3$ $M_4$	$-0,034\ 88\ p\ell^2$ $-0,110\ 47\ p\ell^2$ $-0,023\ 23\ p\ell^2$ $-0,046\ 61\ p\ell^2$	$-0,052\ 32\ P\ell$ $-0,165\ 71\ P\ell$ $-0,034\ 85\ P\ell$ $-0,069\ 91\ P\ell$	$-0,093\ 02\ P\ell$ $-0,294\ 59\ P\ell$ $-0,061\ 95\ P\ell$ $-0,124\ 28\ P\ell$	$-0,130\ 81\ P\ell$ $-0,414\ 27\ P\ell$ $-0,087\ 11\ P\ell$ $-0,174\ 78\ P\ell$

■ Poutres continues articulées.

Détermination des moments fléchissants

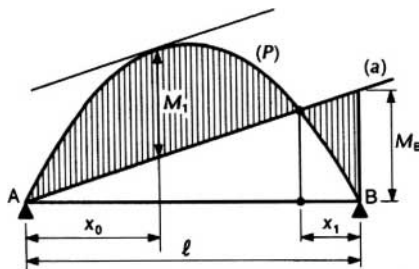
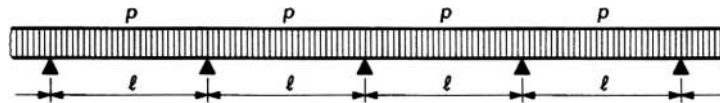
On peut, à l'aide d'articulations, transformer la poutre continue hyperstatique en poutres, type Cantilever, isostatiques. Le nombre d'articulations sera égal au nombre de travées de la poutre continue, moins une unité. Dans le choix de l'emplacement des articulations, on cherchera à obtenir, comme valeur absolue du moment fléchissant maximal, la valeur la plus réduite possible. Si, dans cette disposition optimale, la flexibilité des poutres Cantilever (plus grande que celle de la poutre continue) devient trop importante, on

pourra adopter une disposition des articulations légèrement différente, donnant une réduction des moments moins favorable, mais une flexibilité acceptable.

Dans le **cas général** de charges et travées quelconques, on tracera dans chaque travée supposée libre la courbe des moments et on choisira comme ligne de fermeture rectiligne des moments celle donnant une réduction optimale du moment fléchissant maximal.

Pour les **cas particuliers**, on se reportera aux tableaux 19 et 20.

**Tableau 19 – Moments fléchissants des poutres continues articulées à travées égales uniformément chargées. Résultats préliminaires**

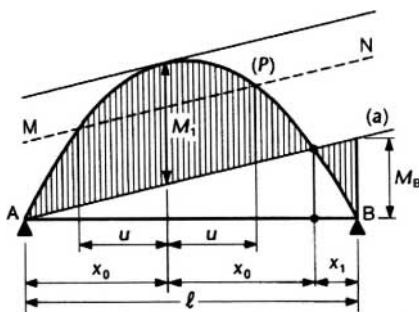


(P) parabole d'ordonnée maximale  $p\ell^2/8 = 0,125 p\ell^2$

Droite Aa issue de A telle que  $M_1 = M_B$

On a  $M_1 = M_B = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} p\ell^2 \approx 0,08579 p\ell^2$

$x_1 = (3-2\sqrt{2})\ell \approx 0,17157\ell$      $x_0 = (\sqrt{2}-1)\ell \approx 0,41421\ell$



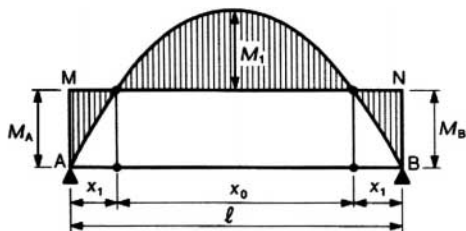
(P) parabole d'ordonnée maximale  $p\ell^2/8 = 0,125 p\ell^2$

Droite Aa telle que  $M_B = p\ell^2/16 = 0,0625 p\ell^2$

Droite MN parallèle à Aa telle que  $AM = p\ell^2/16 = 0,0625 p\ell^2$

On a  $M_1 = \frac{49}{512} p\ell^2 \approx 0,09570 p\ell^2$      $M_B = \frac{1}{16} p\ell^2 = 0,0625 p\ell^2$

$x_1 = \frac{1}{8}\ell = 0,125\ell$      $x_0 = \frac{7}{16}\ell = 0,4375\ell$      $u = \frac{\sqrt{17}}{16}\ell \approx 0,25769\ell$



(P) parabole d'ordonnée maximale  $p\ell^2/8 = 0,125 p\ell^2$

Droite MN telle que  $M_1 = M_A = M_B = p\ell^2/16 = 0,0625 p\ell^2$

$x_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}\ell \approx 0,14645\ell$      $x_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}\ell \approx 0,70711\ell$

Tableau 20 – Moments fléchissants et position des articulations des poutres continues articulées à travées égales uniformément chargées

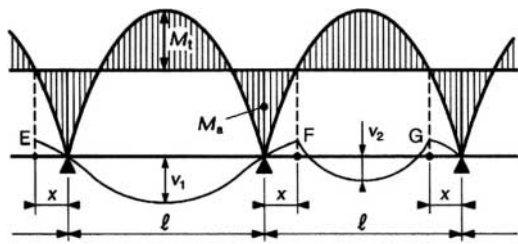
Nombre de travées	Ligne de fermeture choisie, courbe des moments	Moments et position des articulations
2		$M_1 = M_B = M_2 = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} p \ell^2 \approx 0,085\,79 p \ell^2$ $x_1 = (3-2\sqrt{2}) \ell \approx 0,171\,57 \ell$
3		$M_B = M_2 = M_C = \frac{1}{16} p \ell^2 = 0,062\,5 p \ell^2$ $M_1 = M_3 = \frac{49}{512} p \ell^2 \approx 0,095\,70 p \ell^2$ $x_1 = x_3 = \frac{1}{8} \ell = 0,125 \ell$
		$M_1 = M_B = M_C = M_3 = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} p \ell^2 \approx 0,085\,79 p \ell^2$ $M_2 = \left(\sqrt{2} - \frac{11}{8}\right) p \ell^2 \approx 0,039\,21 p \ell^2$ $x_2 = \frac{1-\sqrt{8\sqrt{2}-11}}{2} \ell \approx 0,219\,95 \ell$
4		$M_1 = M_B = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} p \ell^2 \approx 0,085\,79 p \ell^2$ $M_C = M_3 = M_D = \frac{1}{16} p \ell^2 = 0,062\,5 p \ell^2$ $M_4 = \frac{49}{512} p \ell^2 \approx 0,095\,70 p \ell^2$ $M_2 = \frac{705-480\sqrt{2}}{512} p \ell^2 \approx 0,051\,13 p \ell^2$ $x_2 = \frac{31-16\sqrt{2}-\sqrt{705-480\sqrt{2}}}{16} \ell \approx 0,203\,51 \ell$ $x'_2 = \frac{16\sqrt{2}-15-\sqrt{705-480\sqrt{2}}}{16} \ell \approx 0,156\,94 \ell$ $x_4 = \frac{1}{8} \ell = 0,125 \ell$
5		$M_1 = M_5 = \frac{49}{512} p \ell^2 \approx 0,095\,70 p \ell^2$ $M_B = M_2 = M_C = M_3 = M_D = M_4 = M_E$ $= \frac{1}{16} p \ell^2 = 0,062\,5 p \ell^2$ $x_1 = x_5 = \frac{1}{8} \ell = 0,125 \ell$ $x_3 = x'_3 = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \ell \approx 0,146\,45 \ell$

**Remarque :** la compensation des moments dans les travées intermédiaires a été obtenue dans les exemples précédents en adoptant une distance  $x$  des articulations aux appuis de  $\frac{2-\sqrt{2}}{4} \ell$ . Cette compensation optimale des moments présente l'inconvénient suivant : les travées sans articulation en poutre Cantilever (EF) (tableau 21) sont beaucoup plus flexibles que les travées suivantes comportant deux articulations (FG). Dans le cas où cette flexibilité est trop importante, on renonce à compenser complètement les moments. On adopte pour  $x$  une valeur supérieure à  $\frac{2-\sqrt{2}}{4} \ell$  et l'on obtient ainsi une meilleure égalisation des flèches.

**Tableau 20 – Moments fléchissants et position des articulations des poutres continues articulées à travées égales uniformément chargées (suite)**

Nombre de travées	Ligne de fermeture choisie, courbe des moments	Moments et position des articulations
5		$M_1 = M_B = M_E = M_5 = \frac{3-2\sqrt{2}}{2} p \ell^2 \approx 0,085 79 p \ell^2$ $M_C = M_3 = M_D = \frac{1}{16} p \ell^2 = 0,062 5 p \ell^2$ $M_2 = M_4 = \frac{705 - 480\sqrt{2}}{512} p \ell^2 \approx 0,051 13 p \ell^2$ $x_2 = x'_4 = \frac{31 - 16\sqrt{2} - \sqrt{705 - 480\sqrt{2}}}{16} \ell \approx 0,203 51 \ell$ $x'_2 = x_4 = \frac{16\sqrt{2} - 15 - \sqrt{705 - 480\sqrt{2}}}{16} \ell \approx 0,156 94 \ell$
Grand nombre pair de travées	<p>On adopte dans les deux premières travées et la dernière travée la même ligne de fermeture que celle mentionnée pour la poutre à 4 travées. Dans les travées intermédiaires, on adopte une ligne de fermeture horizontale telle que <math>M_{travée} = M_{appui} = p \ell^2 / 16</math></p>	$M_1 = M_B \approx 0,085 79 p \ell^2$ $M_2 \approx 0,051 13 p \ell^2$ $M_C = M_3 = M_D = \dots = M_{n-1} = M_L = \frac{1}{16} p \ell^2$ $M_n \approx 0,095 70 p \ell^2$ $x_2 \approx 0,203 51 \ell$ $x'_2 \approx 0,156 94 \ell$ $x_4 = x'_4 = \dots = x_{n-2} = x'_{n-2} \approx 0,146 45 \ell$ $x_n = 0,125 \ell$
Grand nombre impair de travées	<p>1<sup>re</sup> solution :</p>	$M_1 = M_n \approx 0,095 70 p \ell^2$ $M_B = M_2 = M_C = \dots = M_{n-1} = M_L = \frac{1}{16} p \ell^2$ $x'_1 = x_n = 0,125 \ell$ $x_3 = x'_3 = \dots = x_{n-2} = x'_{n-2} \approx 0,146 45 \ell$
Grand nombre impair de travées	<p>2<sup>e</sup> solution :</p> <p>2<sup>e</sup> solution :</p>	$M_1 = M_B = M_L = M_n \approx 0,085 79 p \ell^2$ $M_2 = M_{n-1} \approx 0,051 13 p \ell^2$ $M_C = M_3 = M_D = \dots = M_{n-2} = M_K = \frac{1}{16} p \ell^2$ $x_2 = x'_{n-1} \approx 0,203 51 \ell$ $x'_2 = x_{n-1} \approx 0,156 94 \ell$ $x_4 = x'_4 = \dots = x_{n-3} = x'_{n-3} \approx 0,146 45 \ell$
<p><b>Remarque :</b> la compensation des moments dans les travées intermédiaires a été obtenue dans les exemples précédents en adoptant une distance <math>x</math> des articulations aux appuis de <math>\frac{2-\sqrt{2}}{4} \ell</math>. Cette compensation optimale des moments présente l'inconvénient suivant : les travées sans articulation en poutre Cantilever (EF) (tableau 21) sont beaucoup plus flexibles que les travées suivantes comportant deux articulations (FG). Dans le cas où cette flexibilité est trop importante, on renonce à compenser complètement les moments. On adopte pour <math>x</math> une valeur supérieure à <math>\frac{2-\sqrt{2}}{4} \ell</math> et l'on obtient ainsi une meilleure égalisation des flèches.</p>		

**Tableau 21 – Moments fléchissants et flèches d'une poutre Cantilever en fonction de la position des articulations (1)**

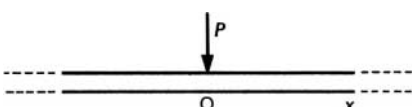
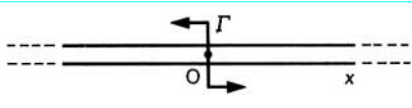
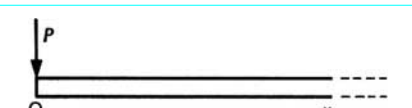
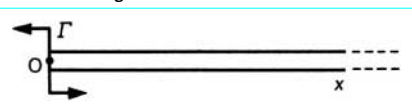
	$x/\ell$	$M_a/p\ell^2$	$M_t/p\ell^2$	$v_1/p\ell^4/EI$	$v_2/p\ell^4/EI$
	0,146 45	-0,062 5	0,062 5	-0,005 208	-0,002 157
	0,15	-0,063 75	0,061 25	-0,005 052	-0,002 115
	0,16	-0,067 2	0,057 8	-0,004 621	-0,002 039
	0,17	-0,070 55	0,054 45	-0,004 202	-0,002 029
	0,18	-0,073 8	0,051 2	-0,003 796	-0,002 080
	0,19	-0,076 95	0,048 05	-0,003 402	-0,002 189
	0,20	-0,080	0,045	-0,003 021	-0,002 354
	0,21	-0,082 95	0,042 05	-0,002 652	-0,002 572
	0,211 32	-0,083 33	0,041 67	-0,002 604	-0,002 604

(1) Ce tableau donne, en fonction de la position des articulations de la poutre Cantilever, le moment  $M_a$  sur appui, le moment  $M_t$  au milieu de la travée, et les flèches  $v_1$  au milieu d'une travée sans articulations et  $v_2$  au milieu d'une travée avec articulations.

Il y a égalisation en valeur absolue des moments pour  $x = \frac{2-\sqrt{2}}{4} \ell \approx 0,146 45 \ell$ .

Il y a égalisation des flèches pour  $x = \frac{3-\sqrt{3}}{6} \ell \approx 0,211 32 \ell$ .

**Tableau 22 – Effort tranchant, moment fléchissant et déformation d'une poutre continue sur appuis élastiques infiniment rapprochés**

Cas de charge	Effort tranchant	Moment fléchissant	Rotation	Flèche
 Poutre infinie soumise à une charge concentrée $P$	$T = -\frac{1}{2} P\theta(\gamma x)$	$M = \frac{P}{4\gamma} \psi(\gamma x)$	$\omega = \frac{P\gamma^2}{k} \zeta(\gamma x)$	$v = -\frac{P\gamma}{2k} \varphi(\gamma x)$
 Poutre infinie soumise à un couple concentré $\Gamma$	$T = \frac{1}{2} \Gamma\gamma\varphi(\gamma x)$	$M = -\frac{1}{2} \Gamma\theta(\gamma x)$	$\omega = \frac{\Gamma\gamma^3}{k} \psi(\gamma x)$	$v = \frac{\Gamma\gamma^2}{k} \zeta(\gamma x)$
 Poutre semi-infinie soumise à une charge concentrée $P$	$T = -P\psi(\gamma x)$	$M = -\frac{P}{\gamma} \zeta(\gamma x)$	$\omega = \frac{2P\gamma^2}{k} \varphi(\gamma x)$	$v = -\frac{2P\gamma}{k} \theta(\gamma x)$
 Poutre semi-infinie soumise à un couple concentré $\Gamma$	$T = 2\Gamma\gamma\zeta(\gamma x)$	$M = -\Gamma\varphi(\gamma x)$	$\omega = \frac{4\Gamma\gamma^3}{k} \theta(\gamma x)$	$v = -\frac{2\Gamma\gamma^2}{k} \psi(\gamma x)$

$\gamma$  constante définie par :

$$\gamma = 4\sqrt{\frac{k}{4EI}}$$

La constante  $\gamma$  a les dimensions de l'inverse d'une longueur, appelée parfois longueur élastique de la poutre.

Les fonctions  $\varphi(u)$ ,  $\zeta(u)$ ,  $\psi(u)$  et  $\theta(u)$  sont définies dans le tableau 23.

$E$  module d'élasticité de la poutre

$I$  moment d'inertie de la section de la poutre

$r(x)$  densité de réaction exercée par les appuis élastiques

$T(x)$  effort tranchant dans les sections de la poutre

$M(x)$  moment fléchissant dans les sections de la poutre

$\omega(x) = dv/dx$  rotation des sections de la poutre, comptée positivement dans le sens trigonométrique

$v(x)$  flèche des sections de la poutre comptée positivement vers le haut

$k$  module de réaction des appuis élastiques défini par :

$$r(x) = -kv(x)$$

**Nota :** les appuis élastiques sont supposés *bilatéraux* ; ils exercent donc une densité de réaction dirigée vers le haut lorsque  $v(x) < 0$ , et une densité de réaction dirigée vers le bas lorsque  $v(x) > 0$ .

**Tableau 23 – Poutre continue sur appuis élastiques infiniment rapprochés.  
Fonctions  $\varphi(u)$ ,  $\zeta(u)$ ,  $\psi(u)$ , et  $\theta(u)$**

<p>■ Définitions</p> <p>● pour <math>u &gt; 0</math></p> $\begin{cases} \varphi(u) = e^{-u} (\cos u + \sin u) & \zeta(u) = e^{-u} \sin u \\ \psi(u) = e^{-u} (\cos u - \sin u) & \theta(u) = e^{-u} \cos u \end{cases}$ <p>● pour <math>u &lt; 0</math></p> $\begin{cases} \varphi(u) = \varphi(-u) & \zeta(u) = -\zeta(-u) \\ \psi(u) = \psi(-u) & \theta(u) = -\theta(-u) \end{cases}$ <p>■ Abscisses des zéros et des maximums ou minimums pour <math>u &gt; 0</math></p>		Valeurs des fonctions $\varphi(u)$ , $\zeta(u)$ , $\psi(u)$ , et $\theta(u)$				
		$u$	$\varphi(u)$	$\zeta(u)$	$\psi(u)$	$\theta(u)$
		0	1	0	1	1
		0,05	0,997 58	0,047 54	0,902 50	0,950 04
		0,10	0,990 65	0,090 33	0,809 98	0,900 32
		0,15	0,979 67	0,128 62	0,722 42	0,851 04
		0,20	0,965 07	0,162 66	0,639 75	0,802 41
		0,25	0,947 27	0,192 68	0,561 91	0,754 59
		0,30	0,926 66	0,218 93	0,488 80	0,707 73
		0,35	0,903 60	0,241 64	0,420 33	0,661 96
		0,40	0,878 44	0,261 03	0,356 37	0,617 41
		0,45	0,851 50	0,277 35	0,296 80	0,574 15
		0,50	0,823 07	0,290 79	0,241 49	0,532 28
		0,55	0,793 43	0,301 56	0,190 30	0,491 86
		0,60	0,762 84	0,309 88	0,143 07	0,452 95
		0,65	0,731 53	0,315 94	0,099 66	0,415 59
		0,70	0,699 72	0,319 91	0,059 90	0,379 81
		0,75	0,667 61	0,321 98	0,023 64	0,345 63
		0,80	0,635 38	0,322 33	-0,009 28	0,313 05
		0,85	0,603 20	0,321 11	-0,039 02	0,282 09
		0,90	0,571 20	0,318 48	-0,065 75	0,252 73
		0,95	0,539 54	0,314 58	-0,089 62	0,224 96
		1	0,508 33	0,309 56	-0,110 78	0,198 77
		1,05	0,477 66	0,303 54	-0,129 43	0,174 12
		1,10	0,447 65	0,296 66	-0,145 67	0,150 99
		1,15	0,418 36	0,289 01	-0,159 67	0,129 34
		1,20	0,389 86	0,280 72	-0,171 58	0,109 14
		1,25	0,362 23	0,271 89	-0,181 55	0,090 34
		1,30	0,335 50	0,262 60	-0,189 70	0,072 90
		1,35	0,309 72	0,252 95	-0,196 17	0,056 78
		1,40	0,284 92	0,243 01	-0,201 10	0,041 91
		1,45	0,261 13	0,232 86	-0,204 59	0,028 27
		1,50	0,238 35	0,222 57	-0,206 79	0,015 78
		1,55	0,216 62	0,212 20	-0,207 79	0,004 41
		1,60	0,195 92	0,201 81	-0,207 71	-0,005 90
		1,65	0,176 25	0,191 45	-0,206 64	-0,015 20
		1,70	0,157 62	0,181 16	-0,204 70	-0,023 54
		1,75	0,140 02	0,170 99	-0,201 97	-0,030 97
		1,80	0,123 42	0,160 98	-0,198 53	-0,037 56
		1,85	0,107 82	0,151 15	-0,194 48	-0,043 33
		1,90	0,093 18	0,141 54	-0,189 89	-0,048 35
		1,95	0,079 50	0,132 17	-0,184 83	-0,052 67
		2	0,066 74	0,123 06	-0,179 38	-0,056 32
		2,1	0,043 88	0,105 71	-0,167 53	-0,061 82
		2,2	0,024 38	0,089 58	-0,154 79	-0,065 21
		2,3	0,007 96	0,074 76	-0,141 56	-0,066 80
		2,4	-0,005 62	0,061 28	-0,128 17	-0,066 89

Fonction	Zéros	Maximums ou minimums
$\varphi(u)$	$\frac{3}{4}\pi + n\pi$	$n\pi$
$\zeta(u)$	$n\pi$	$\frac{1}{4}\pi + n\pi$
$\psi(u)$	$\frac{1}{4}\pi + n\pi$	$\frac{1}{2}\pi + n\pi$
$\theta(u)$	$\frac{1}{2}\pi + n\pi$	$\frac{3}{4}\pi + n\pi$

■ Dérivées des fonctions

$$\frac{d\varphi}{du} = -2\zeta(u) \quad \frac{d\zeta}{du} = \psi(u)$$

$$\frac{d\psi}{du} = -2\theta(u) \quad \frac{d\theta}{du} = -\varphi(u)$$



**Tableau 23 – Poutre continue sur appuis élastiques infiniment rapprochés.**  
**Fonctions  $\varphi(u)$ ,  $\zeta(u)$ ,  $\psi(u)$ , et  $\theta(u)$  (suite)**

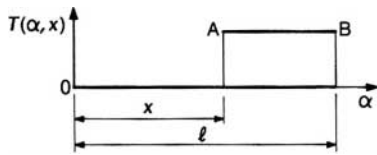
■ Courbes représentatives	Valeurs des fonctions $\varphi(u)$ , $\zeta(u)$ , $\psi(u)$ , et $\theta(u)$				
	$u$	$\varphi(u)$	$\zeta(u)$	$\psi(u)$	$\theta(u)$
<p>Fonction <math>\varphi(u)</math></p>	2,5	-0,016 64	0,049 13	-0,114 89	-0,065 76
	2,6	-0,025 36	0,038 29	-0,101 93	-0,063 64
	2,7	-0,032 04	0,028 72	-0,089 48	-0,060 76
	2,8	-0,036 93	0,020 37	-0,077 67	-0,057 30
<p>Fonction <math>\zeta(u)</math></p>	2,9	-0,040 26	0,013 16	-0,066 59	-0,053 43
	3	-0,042 26	0,007 03	-0,056 31	-0,049 29
	3,1	-0,043 14	0,001 87	-0,046 88	-0,045 01
	3,2	-0,043 07	-0,002 38	-0,038 31	-0,040 69
<p>Fonction <math>\psi(u)</math></p>	3,3	-0,042 24	-0,005 82	-0,030 60	-0,036 42
	3,4	-0,040 79	-0,008 53	-0,023 74	-0,032 27
	3,5	-0,038 87	-0,010 59	-0,017 69	-0,028 28
	3,6	-0,036 59	-0,012 09	-0,012 41	-0,024 50
<p>Fonction <math>\theta(u)</math></p>	3,7	-0,034 07	-0,013 10	-0,007 87	-0,020 97
	3,8	-0,031 38	-0,013 69	-0,004 01	-0,017 69
	3,9	-0,028 62	-0,013 92	-0,000 77	-0,014 69
	4	-0,025 83	-0,013 86	0,001 89	-0,011 97
<p>Fonction <math>\theta(u)</math></p>	4,2	-0,020 42	-0,013 07	0,005 72	-0,007 35
	4,4	-0,015 46	-0,011 68	0,007 91	-0,003 77
	4,6	-0,011 12	-0,009 99	0,008 86	-0,001 13
	4,8	-0,007 48	-0,008 20	0,008 92	0,000 72
<p>Fonction <math>\theta(u)</math></p>	5	-0,004 55	-0,006 46	0,008 37	0,001 91
	5,2	-0,002 29	-0,004 87	0,007 46	0,002 58
	5,4	-0,000 62	-0,003 49	0,006 36	0,002 87
	5,6	0,000 53	-0,002 33	0,005 20	0,002 87
<p>Fonction <math>\theta(u)</math></p>	5,8	0,001 27	-0,001 41	0,004 09	0,002 68
	6	0,001 69	-0,000 69	0,003 07	0,002 38
	6,2	0,001 85	-0,000 17	0,002 19	0,002 02
	6,4	0,001 84	0,000 19	0,001 46	0,001 65
<p>Fonction <math>\theta(u)</math></p>	6,6	0,001 72	0,000 42	0,000 87	0,001 29
	6,8	0,001 52	0,000 55	0,000 42	0,000 97
	7	0,001 29	0,000 60	0,000 09	0,000 69
	7,2	0,001 05	0,000 59	-0,000 14	0,000 45
<p>Fonction <math>\theta(u)</math></p>	7,4	0,000 82	0,000 55	-0,000 28	0,000 27
	7,6	0,000 61	0,000 48	-0,000 36	0,000 13
	7,8	0,000 43	0,000 41	-0,000 39	0,000 02

**Tableau 24 – Lignes d'influence dans une poutre console de section constante, encastree pour  $x = 0$  et libre pour  $x = \ell$ , sous l'action d'une charge verticale unité  $P$  (1)**

■ **Ligne d'influence de l'effort tranchant**

La charge  $P$  produit dans la section d'abscisse  $x$  un effort tranchant égal à :

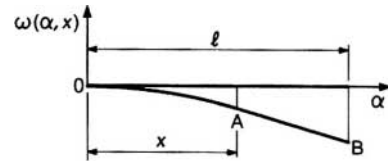
$$T(\alpha, x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \alpha < x \\ 1 & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



■ **Ligne d'influence de la rotation d'une section (2)**

La charge  $P$  provoque une rotation de la section d'abscisse  $x$  égale à :

$$\omega(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{1}{2EI} \alpha^2 & \text{pour } \alpha < x \\ -\frac{1}{2EI} x(2\alpha - x) & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$

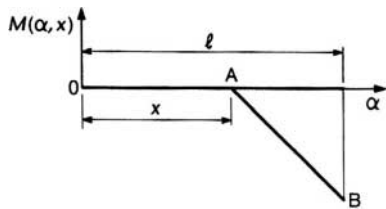


Le segment de droite AB est tangent à l'arc de parabole OA au point A.

■ **Ligne d'influence du moment fléchissant**

La charge  $P$  produit dans la section d'abscisse  $x$  un moment fléchissant égal à :

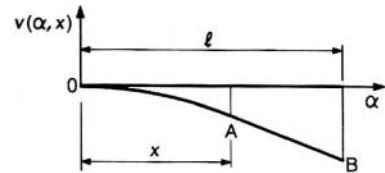
$$M(\alpha, x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \alpha < x \\ x - \alpha & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



■ **Ligne d'influence de la flèche (3)**

La charge  $P$  provoque une flèche de la section d'abscisse  $x$  égale à :

$$v(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{1}{6EI} \alpha^2(3x - \alpha) & \text{pour } \alpha < x \\ -\frac{1}{6EI} x^2(3\alpha - x) & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



Le segment de droite AB est tangent en A à l'arc de la cubique OA.

(1) La charge verticale unité  $P$  est appliquée dans la section d'abscisse  $\alpha$ .  
 (2) Les rotations sont comptées positivement dans le sens trigonométrique.

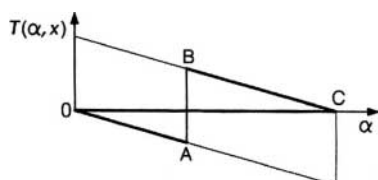
(3) Les flèches sont comptées positivement vers le haut.

**Tableau 25 – Lignes d'influence d'une poutre droite de section constante sur appuis simples sous l'action d'une charge verticale unité  $P$  (1)**

■ **Ligne d'influence de l'effort tranchant**

La charge  $P$  produit dans la section d'abscisse  $x$  un effort tranchant égal à :

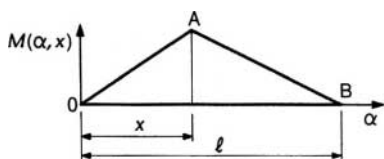
$$T(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\ell} & \text{pour } \alpha < x \\ 1 - \frac{\alpha}{\ell} & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



■ **Ligne d'influence du moment fléchissant**

La charge  $P$  produit dans la section d'abscisse  $x$  un moment fléchissant égal à :

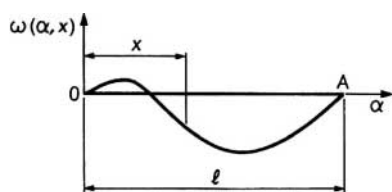
$$M(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{\alpha(\ell - x)}{\ell} & \text{pour } \alpha < x \\ \frac{x(\ell - \alpha)}{\ell} & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



■ **Ligne d'influence de la rotation d'une section (2)**

La charge  $P$  provoque une rotation de la section d'abscisse  $x$  égale à :

$$\omega(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{1}{6EI\ell} [(\ell - \alpha)(\ell + \alpha) - 3(\ell - x)^2] \alpha & \text{pour } \alpha < x \\ -\frac{1}{6EI\ell} [\alpha(2\ell - \alpha) - 3x^2] (\ell - \alpha) & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



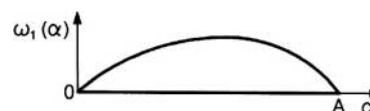
■ **Lignes d'influence des rotations des extrémités de la poutre (2)**

La charge  $P$  provoque une rotation  $\omega_0(\alpha)$  de l'extrémité  $x = 0$  et une rotation  $\omega_1(\alpha)$  de l'extrémité  $x = \ell$  :

$$\omega_0(\alpha) = -\frac{\alpha(\ell - \alpha)(2\ell - \alpha)}{6EI\ell}$$



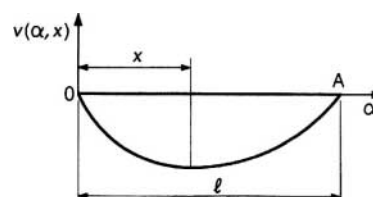
$$\omega_1(\alpha) = \frac{\alpha(\ell - \alpha)(\ell + \alpha)}{6EI\ell}$$



■ **Ligne d'influence de la flèche (3)**

La charge  $P$  provoque une flèche de la section d'abscisse  $x$  égale à :

$$v(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{\alpha(\ell - x)}{6EI\ell} [x(2\ell - x) - \alpha^2] & \text{pour } \alpha < x \\ -\frac{x(\ell - \alpha)}{6EI\ell} [\alpha(2\ell - \alpha) - x^2] & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



(1) La charge verticale unité  $P$  est appliquée dans la section d'abscisse  $\alpha$ .

(3) Les flèches sont comptées positivement vers le haut.

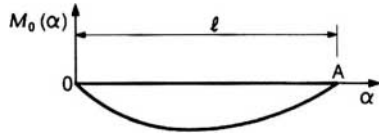
(2) Les rotations sont comptées positivement dans le sens trigonométrique.

**Tableau 26 – Lignes d'influence d'une poutre de section constante, encastree pour  $x = 0$  et simplement appuiee pour  $x = \ell$ , sous l'action d'une charge verticale unitée  $P$  (1)**

■ **Ligne d'influence du moment d'encastrement**

La charge  $P$  produit dans la section d'encastrement  $x = 0$  un moment égal à :

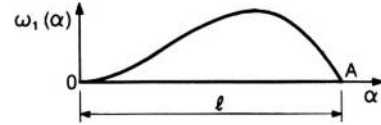
$$M_0(\alpha) = -\frac{\alpha(\ell - \alpha)(2\ell - \alpha)}{2\ell^2}$$



■ **Ligne d'influence de la rotation de l'extrémité  $x = \ell$  (2)**

La charge  $P$  provoque une rotation de l'extrémité  $x = \ell$  égale à :

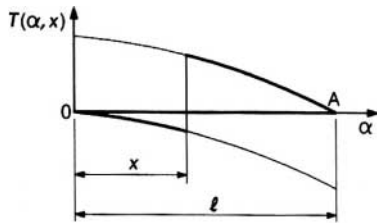
$$\omega_1(\alpha) = \frac{\alpha^2(\ell - \alpha)}{4EI\ell}$$



■ **Ligne d'influence de l'effort tranchant**

La charge  $P$  produit dans la section d'abscisse  $x$  un effort tranchant égal à :

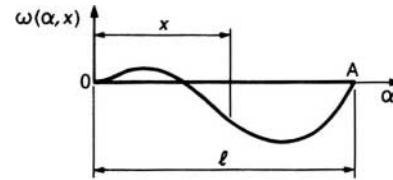
$$T(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\ell} \left[ 1 - \frac{(\ell - \alpha)(\ell - 2\alpha)}{2\ell^2} \right] & \text{pour } \alpha < x \\ \frac{\ell - \alpha}{\ell} \left[ 1 + \frac{\alpha(2\ell - \alpha)}{2\ell^2} \right] & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



■ **Ligne d'influence de la rotation d'une section (2)**

La charge  $P$  provoque une rotation de la section d'abscisse  $x$  égale à :

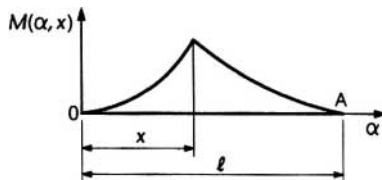
$$\omega(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{4EI\ell^3} [\ell(-2\ell^2 + 6\ell x - 3x^2) - \alpha x(2\ell - x)] & \text{pour } \alpha < x \\ -\frac{x(\ell - \alpha)}{4EI\ell^3} [\alpha(2\ell - \alpha)(2\ell - x) - 2\ell^2 x] & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



■ **Ligne d'influence du moment fléchissant**

La charge  $P$  produit dans la section d'abscisse  $x$  un moment fléchissant égal à :

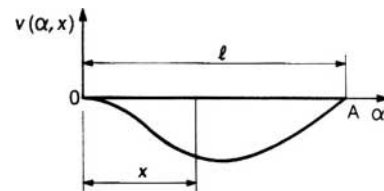
$$M(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{\alpha(\ell - x)}{\ell} \left[ 1 - \frac{(\ell - \alpha)(2\ell - \alpha)}{2\ell^2} \right] & \text{pour } \alpha < x \\ \frac{\ell - \alpha}{\ell} \left[ x - \frac{\alpha(2\ell - \alpha)(\ell - x)}{2\ell^2} \right] & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



■ **Ligne d'influence de la flèche (3)**

La charge  $P$  provoque une flèche de la section d'abscisse  $x$  égale à :

$$v(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{\alpha^2(\ell - x)}{12EI\ell^3} [x(2\ell - x)(3\ell - \alpha) - 2\ell^2 \alpha] & \text{pour } \alpha < x \\ -\frac{x^2(\ell - \alpha)}{12EI\ell^3} [\alpha(2\ell - \alpha)(3\ell - x) - 2\ell^2 x] & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



(1) La charge verticale unitée  $P$  est appliquée dans la section d'abscisse  $\alpha$ .  
 (2) Les rotations sont comptées positivement dans le sens trigonométrique.

(3) Les flèches sont comptées positivement vers le haut.

**Tableau 27 – Lignes d'influence d'une poutre de section constante encastree à ses extrémités sous l'action d'une charge verticale unité  $P$  (1)**

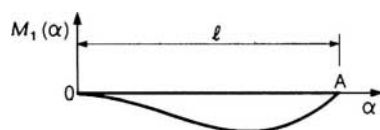
■ **Lignes d'influence des moments d'encastrement**

La charge  $P$  produit dans la section  $x = 0$  un moment fléchissant  $M_0(\alpha)$  et dans la section  $x = \ell$  un moment fléchissant  $M_1(\alpha)$  :

$$M_0(\alpha) = -\frac{\alpha(\ell - \alpha)^2}{\ell^2}$$



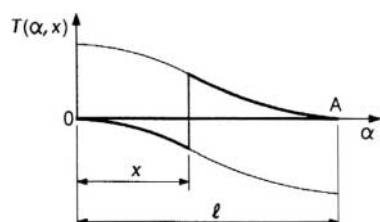
$$M_1(\alpha) = -\frac{\alpha^2(\ell - \alpha)}{\ell^2}$$



■ **Ligne d'influence de l'effort tranchant**

La charge  $P$  produit dans la section d'abscisse  $x$  un effort tranchant égal à :

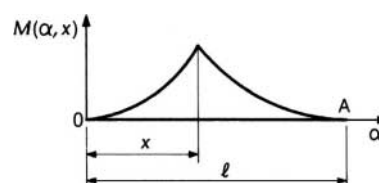
$$T(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\ell} \left[ 1 - \frac{(\ell - \alpha)(\ell - 2\alpha)}{\ell^2} \right] & \text{pour } \alpha < x \\ \frac{\ell - \alpha}{\ell} \left[ 1 + \frac{\alpha(\ell - 2\alpha)}{\ell^2} \right] & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



■ **Ligne d'influence du moment fléchissant**

La charge  $P$  produit dans la section d'abscisse  $x$  un moment fléchissant égal à :

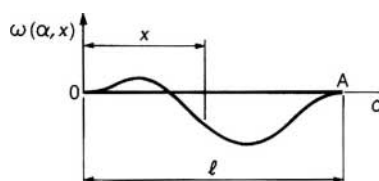
$$M(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{\alpha^2}{\ell^3} [2\ell^2 - 3\ell x - \ell\alpha + 2\alpha x] & \text{pour } \alpha < x \\ \frac{(\ell - \alpha)^2}{\ell^3} [\ell x - \ell\alpha + 2\alpha x] & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



■ **Ligne d'influence de la rotation d'une section (2)**

La charge  $P$  provoque une rotation de la section d'abscisse  $x$  égale à :

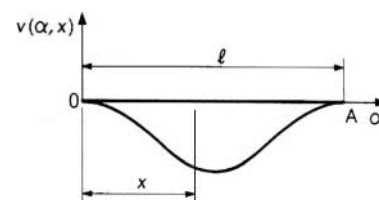
$$\omega(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{\alpha^2(\ell - x)}{2EI\ell^3} [\ell^2 - 3\ell x + 2\alpha x] & \text{pour } \alpha < x \\ -\frac{x(\ell - \alpha)^2}{2EI\ell^3} [2\ell\alpha - \ell x - 2\alpha x] & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



■ **Ligne d'influence de la flèche (3)**

La charge  $P$  provoque une flèche de la section d'abscisse  $x$  égale à :

$$v(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{\alpha^2(\ell - x)^2}{6EI\ell^3} [3\ell x - (\ell + 2x)\alpha] & \text{pour } \alpha < x \\ -\frac{x^2(\ell - \alpha)^2}{6EI\ell^3} [3\ell\alpha - (\ell + 2\alpha)x] & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$



(1) La charge verticale unité  $P$  est appliquée dans la section d'abscisse  $\alpha$ .

(2) Les rotations sont comptées positivement dans le sens trigonométrique.

(3) Les flèches sont comptées positivement vers le haut.

**Tableau 28 – Lignes d'influence dans les poutres continues sous l'action d'une charge verticale unité  $P$ . Notations**

**■ Généralités**

La poutre continue à  $n$  travées  $A_{i-1} A_i$  repose sur  $n + 1$  appuis simples  $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ .  
 Une section d'une travée quelconque  $A_{i-1} A_i$  est repérée par son abscisse comptée à partir de l'extrémité de gauche  $A_{i-1}$ .  
 La charge unité  $P$  est appliquée dans la section d'abscisse  $\alpha$  d'une travée quelconque.  
 Nous désignons par :

- $M_i(\alpha)$  le moment fléchissant sur l'appui  $A_i$ ;
- $T(\alpha, x), M(\alpha, x), \omega(\alpha, x)$  et  $v(\alpha, x)$  l'effort tranchant, le moment fléchissant, la rotation et la flèche de la section d'abscisse  $x$  d'une travée quelconque sous l'action de la charge  $P$ .

**■ Caractéristiques de la travée  $A_{i-1} A_i$  ( $i^{\text{e}}$  travée)**

Longueur :  $\ell_i$       Inertie :  $I_i(x)$   
 Coefficients de souplesse :

$$a_i = \int_0^{\ell_i} \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right)^2 \frac{dx}{EI_i} \quad b_i = \int_0^{\ell_i} \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) \frac{x}{\ell_i} \frac{dx}{EI_i} \quad c_i = \int_0^{\ell_i} \left(\frac{x}{\ell_i}\right)^2 \frac{dx}{EI_i}$$

Lorsqu'on suppose la charge  $P$  appliquée à la travée  $A_{i-1} A_i$  **supposée sur appuis simples** :

— l'effort tranchant dans la section d'abscisse  $x$  est :

$$\tau(\alpha, x) = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\ell} & \text{pour } \alpha < x \\ 1 - \frac{\alpha}{\ell} & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$

— le moment fléchissant dans la section d'abscisse  $x$  est :

$$\mu(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{\alpha(\ell - x)}{\ell} & \text{pour } \alpha < x \\ \frac{x(\ell - \alpha)}{\ell} & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$

— les rotations  $\omega'_i(\alpha)$  et  $\omega''_i(\alpha)$  des extrémités  $A_{i-1}$  et  $A_i$  sont :

$$\omega'_i(\alpha) = - \int_0^{\ell_i} \mu(\alpha, x) \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) \frac{dx}{EI_i(x)}$$

$$\omega''_i(\alpha) = \int_0^{\ell_i} \mu(\alpha, x) \left(\frac{x}{\ell_i}\right) \frac{dx}{EI_i(x)}$$

— la rotation de la section d'abscisse  $x$  est :

$$\Omega(\alpha, x) = - \int_0^{\ell_i} \frac{\tau(x, \xi) \mu(\alpha, \xi)}{EI_i(\xi)} d\xi$$

— la flèche de la section d'abscisse  $x$  est :

$$V(\alpha, x) = - \int_0^{\ell_i} \frac{\mu(x, \xi) \mu(\alpha, \xi)}{EI_i(\xi)} d\xi$$

**■ Cas où l'inertie  $I_i$  est constante**

Les formules précédentes deviennent dans ce cas :

$$a_i = c_i = \frac{\ell_i}{3EI_i} \quad b_i = \frac{\ell_i}{6EI_i}$$

$$\omega'_i(\alpha) = - \frac{\alpha(\ell_i - \alpha)(2\ell_i - \alpha)}{6EI_i \ell_i} \quad \omega''_i(\alpha) = \frac{\alpha(\ell_i - \alpha)(\ell_i + \alpha)}{6EI_i \ell_i}$$

$$\Omega(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{1}{6EI_i \ell_i} [(\ell_i - \alpha)(\ell_i + \alpha) - 3(\ell_i - x)^2] \alpha & \text{pour } \alpha < x \\ - \frac{1}{6EI_i \ell_i} [\alpha(2\ell_i - \alpha) - 3x^2] (\ell_i - \alpha) & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$

$$V(\alpha, x) = \begin{cases} - \frac{\alpha(\ell_i - x)}{6EI_i \ell_i} [x(2\ell_i - x) - \alpha^2] & \text{pour } \alpha < x \\ - \frac{x(\ell_i - \alpha)}{6EI_i \ell_i} [\alpha(2\ell_i - \alpha) - x^2] & \text{pour } \alpha > x \end{cases}$$

**■ Foyers**

Dans chaque travée  $A_{i-1} A_i$  le foyer de gauche  $F_i$  et le foyer de droite  $F'_i$  sont définis par les rapports :

$$\varphi_i = \frac{A_{i-1} F_i}{F_i A_i} \quad \varphi'_i = \frac{F'_i A_i}{A_{i-1} F'_i}$$

Le tableau 15 permet le calcul des rapports  $\varphi_i$  et  $\varphi'_i$ .

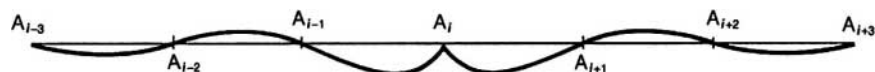
Tableau 29 – Lignes d'influence dans les poutres continues sous l'action d'une charge verticale unité  $P$ 

#### ■ Ligne d'influence d'un moment sur appui

Sous l'action de la charge  $P$ , le moment fléchissant  $M_i(\alpha)$  sur l'appui  $A_i$  a pour valeur :

- lorsque  $P$  se trouve sur la travée  $A_{i-1}A_i$  :

$$M_i(\alpha) = -\frac{1}{b_i} \cdot \frac{\omega'_i(\alpha) + \frac{1}{\varphi_i} \omega''_i(\alpha)}{\frac{1}{\varphi_i \varphi'_i} - 1}$$



- lorsque  $P$  se trouve sur la travée  $A_iA_{i+1}$  :

$$M_i(\alpha) = \frac{1}{b_{i+1}} \frac{\frac{1}{\varphi'_{i+1}} \omega'_{i+1}(\alpha) + \omega''_{i+1}(\alpha)}{\frac{1}{\varphi_{i+1} \varphi'_{i+1}} - 1}$$

- lorsque  $P$  se trouve sur la travée  $A_{r-1}A_r$  (avec  $r < i$ ) :

$$M_i(\alpha) = (-1)^{i-r} \varphi'_{r+1} \varphi'_{r+2} \dots \varphi'_i M_r(\alpha)$$

- lorsque  $P$  se trouve sur la travée  $A_{s-1}A_s$  (avec  $s > i+1$ ) :

$$M_i(\alpha) = (-1)^{s-i-1} \varphi_{i+1} \varphi_{i+2} \dots \varphi_{s-1} M_{s-1}(\alpha)$$

#### ■ Ligne d'influence de la rotation d'une section

La charge  $P$  provoque une rotation de la section  $X$  d'abscisse  $x$  de la travée  $A_{i-1}A_i$  égale à :

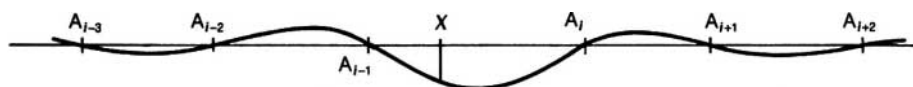
$$\omega(\alpha, x) = \Omega(\alpha, x) - M_{i-1}(\alpha) \frac{2\ell_i^2 - 6\ell_i x + 3x^2}{6EI_i \ell_i} - M_i(\alpha) \frac{\ell_i^2 - 3x^2}{6EI_i \ell_i}$$



#### ■ Ligne d'influence de la flèche

La charge  $P$  provoque une flèche de la section  $X$  d'abscisse  $x$  de la travée  $A_{i-1}A_i$  égale à :

$$v(\alpha, x) = V(\alpha, x) - M_{i-1}(\alpha) \frac{\alpha(\ell_i - \alpha)(2\ell_i - \alpha)}{6EI_i \ell_i} - M_i(\alpha) \frac{\alpha(\ell_i - \alpha)(\ell_i + \alpha)}{6EI_i \ell_i}$$



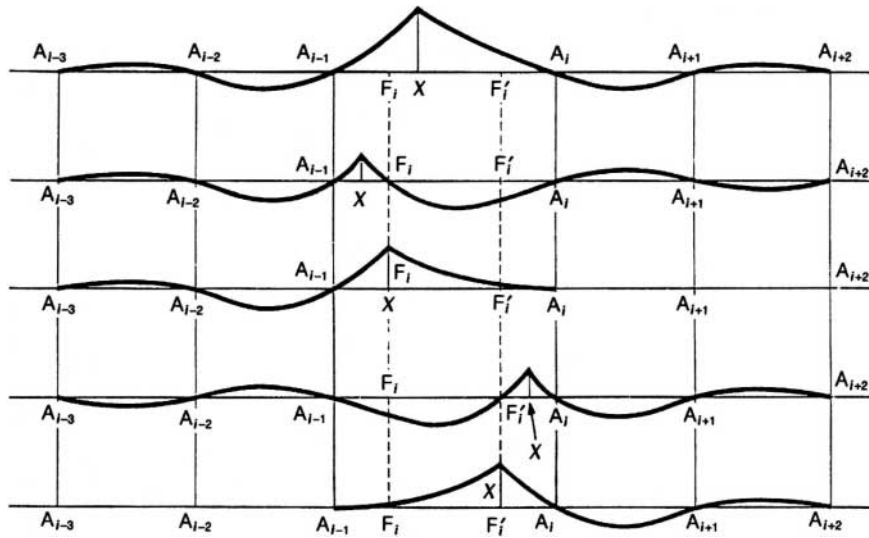
**Tableau 29 – Lignes d’influence dans les poutres continues sous l’action d’une charge verticale unité  $P$  (suite)**

■ **Ligne d’influence du moment fléchissant**

La charge  $P$  produit dans la section  $X$  d’abscisse  $x$  de la travée  $A_{i-1} A_i$  un moment fléchissant égal à :

$$M(\alpha, x) = \mu(\alpha, x) + M_{i-1}(\alpha) \left(1 - \frac{x}{\ell_i}\right) + M_i(\alpha) \frac{x}{\ell_i}$$

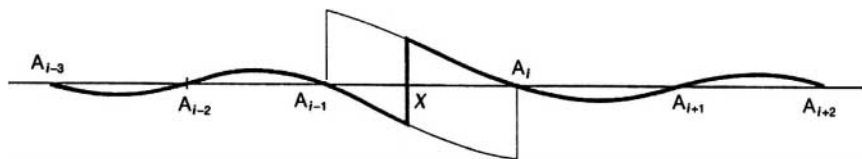
La forme de la ligne d’influence dépend de la position de la section  $X$  par rapport aux foyers  $F_i$  et  $F'_i$  de la travée.



■ **Ligne d’influence de l’effort tranchant**

La charge  $P$  produit dans la section  $X$  d’abscisse  $x$  de la travée  $A_{i-1} A_i$  un effort tranchant égal à :

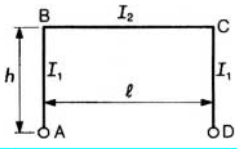
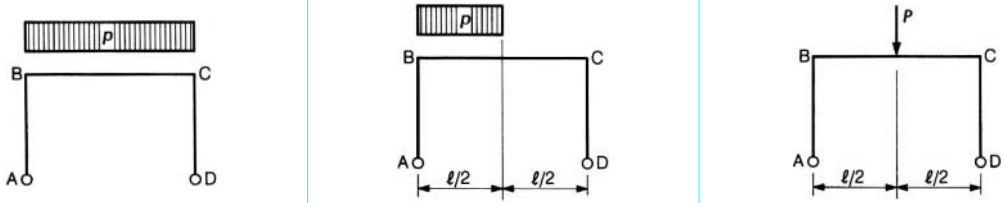
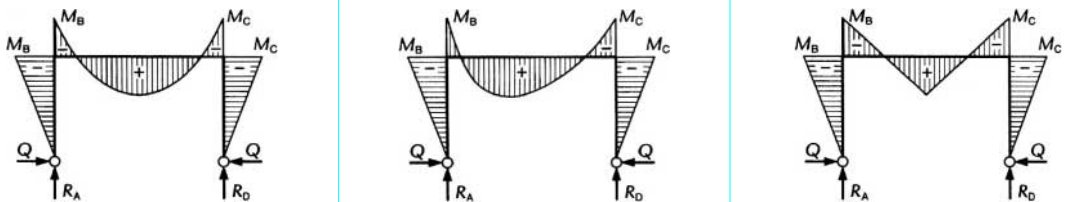
$$T(\alpha, x) = \tau(\alpha, x) + \frac{1}{\ell_i} [M_i(\alpha) - M_{i-1}(\alpha)]$$





## 7. Portiques

Tableau 30 – Moments et réactions sur appuis dans un portique à une travée, rectangulaire, symétrique, avec deux appuis articulés

Tableau 30 – Moments et réactions sur appuis dans un portique à une travée, rectangulaire, symétrique, avec deux appuis articulés																																															
																																															
Valeurs fixes : $K = \frac{\text{raideur traverse}}{\text{raideur poteau}} = \frac{I_2}{\ell} \times \frac{h}{I_1}$ $N = 2K + 3$																																															
Cas de charge																																															
Diagramme des moments																																															
Réactions sur appuis	$R_A = R_D = \frac{1}{2} p\ell$ $Q = \frac{p\ell^2}{4Nh}$																																														
	$R_A = \frac{3}{8} p\ell \quad R_D = \frac{1}{8} p\ell$ $Q = \frac{p\ell^2}{8Nh}$																																														
	$R_A = R_D = \frac{1}{2} P$ $Q = \frac{3P\ell}{8Nh}$																																														
Moments aux nœuds B et C pour des valeurs particulières de K	$M_B = M_C = -\alpha \frac{p\ell^2}{8}$ $\alpha = \frac{2}{2K+3}$ <table border="1" data-bbox="302 1287 567 1862"> <thead> <tr> <th>K</th> <th><math>\alpha</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0,666 67</td></tr> <tr><td>0,1</td><td>0,625</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,588 24</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,526 32</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,476 19</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,434 78</td></tr> <tr><td>1</td><td>0,4</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>0,333 33</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,285 71</td></tr> <tr><td>2,5</td><td>0,25</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,222 22</td></tr> <tr><td>3,5</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,181 82</td></tr> <tr><td>4,5</td><td>0,166 67</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,153 85</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,133 33</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,117 65</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,105 26</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,095 24</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,086 96</td></tr> <tr><td>20</td><td>0,046 51</td></tr> <tr><td><math>\infty</math></td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	K	$\alpha$	0	0,666 67	0,1	0,625	0,2	0,588 24	0,4	0,526 32	0,6	0,476 19	0,8	0,434 78	1	0,4	1,5	0,333 33	2	0,285 71	2,5	0,25	3	0,222 22	3,5	0,2	4	0,181 82	4,5	0,166 67	5	0,153 85	6	0,133 33	7	0,117 65	8	0,105 26	9	0,095 24	10	0,086 96	20	0,046 51	$\infty$	0
K	$\alpha$																																														
0	0,666 67																																														
0,1	0,625																																														
0,2	0,588 24																																														
0,4	0,526 32																																														
0,6	0,476 19																																														
0,8	0,434 78																																														
1	0,4																																														
1,5	0,333 33																																														
2	0,285 71																																														
2,5	0,25																																														
3	0,222 22																																														
3,5	0,2																																														
4	0,181 82																																														
4,5	0,166 67																																														
5	0,153 85																																														
6	0,133 33																																														
7	0,117 65																																														
8	0,105 26																																														
9	0,095 24																																														
10	0,086 96																																														
20	0,046 51																																														
$\infty$	0																																														
	$M_B = M_C = -\alpha \frac{p\ell^2}{16}$ $\alpha = \frac{2}{2K+3}$ <table border="1" data-bbox="687 1287 945 1862"> <thead> <tr> <th>K</th> <th><math>\alpha</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0,666 67</td></tr> <tr><td>0,1</td><td>0,625</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,588 24</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,526 32</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,476 19</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,434 78</td></tr> <tr><td>1</td><td>0,4</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>0,333 33</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,285 71</td></tr> <tr><td>2,5</td><td>0,25</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,222 22</td></tr> <tr><td>3,5</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,181 82</td></tr> <tr><td>4,5</td><td>0,166 67</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,153 85</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,133 33</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,117 65</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,105 26</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,095 24</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,086 96</td></tr> <tr><td>20</td><td>0,046 51</td></tr> <tr><td><math>\infty</math></td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	K	$\alpha$	0	0,666 67	0,1	0,625	0,2	0,588 24	0,4	0,526 32	0,6	0,476 19	0,8	0,434 78	1	0,4	1,5	0,333 33	2	0,285 71	2,5	0,25	3	0,222 22	3,5	0,2	4	0,181 82	4,5	0,166 67	5	0,153 85	6	0,133 33	7	0,117 65	8	0,105 26	9	0,095 24	10	0,086 96	20	0,046 51	$\infty$	0
K	$\alpha$																																														
0	0,666 67																																														
0,1	0,625																																														
0,2	0,588 24																																														
0,4	0,526 32																																														
0,6	0,476 19																																														
0,8	0,434 78																																														
1	0,4																																														
1,5	0,333 33																																														
2	0,285 71																																														
2,5	0,25																																														
3	0,222 22																																														
3,5	0,2																																														
4	0,181 82																																														
4,5	0,166 67																																														
5	0,153 85																																														
6	0,133 33																																														
7	0,117 65																																														
8	0,105 26																																														
9	0,095 24																																														
10	0,086 96																																														
20	0,046 51																																														
$\infty$	0																																														
	$M_B = M_C = -\alpha \frac{p\ell}{4}$ $\alpha = \frac{3}{4K+6}$ <table border="1" data-bbox="1073 1287 1338 1862"> <thead> <tr> <th>K</th> <th><math>\alpha</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0,5</td></tr> <tr><td>0,1</td><td>0,468 75</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,441 18</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,394 74</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,357 14</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,326 09</td></tr> <tr><td>1</td><td>0,3</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>0,25</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,214 29</td></tr> <tr><td>2,5</td><td>0,187 5</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,166 67</td></tr> <tr><td>3,5</td><td>0,15</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,136 36</td></tr> <tr><td>4,5</td><td>0,125</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,115 38</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,1</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,088 24</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,078 95</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,071 43</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,065 22</td></tr> <tr><td>20</td><td>0,034 88</td></tr> <tr><td><math>\infty</math></td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	K	$\alpha$	0	0,5	0,1	0,468 75	0,2	0,441 18	0,4	0,394 74	0,6	0,357 14	0,8	0,326 09	1	0,3	1,5	0,25	2	0,214 29	2,5	0,187 5	3	0,166 67	3,5	0,15	4	0,136 36	4,5	0,125	5	0,115 38	6	0,1	7	0,088 24	8	0,078 95	9	0,071 43	10	0,065 22	20	0,034 88	$\infty$	0
K	$\alpha$																																														
0	0,5																																														
0,1	0,468 75																																														
0,2	0,441 18																																														
0,4	0,394 74																																														
0,6	0,357 14																																														
0,8	0,326 09																																														
1	0,3																																														
1,5	0,25																																														
2	0,214 29																																														
2,5	0,187 5																																														
3	0,166 67																																														
3,5	0,15																																														
4	0,136 36																																														
4,5	0,125																																														
5	0,115 38																																														
6	0,1																																														
7	0,088 24																																														
8	0,078 95																																														
9	0,071 43																																														
10	0,065 22																																														
20	0,034 88																																														
$\infty$	0																																														

**Tableau 30 – Moments et réactions sur appuis dans un portique à une travée, rectangulaire, symétrique, avec deux appuis articulés (suite)**

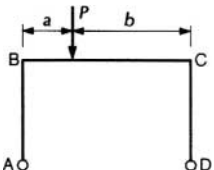
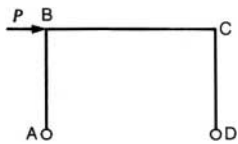
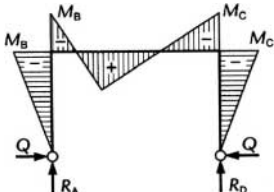
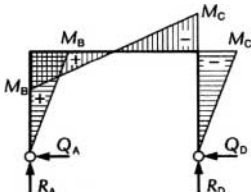
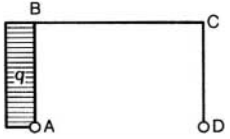
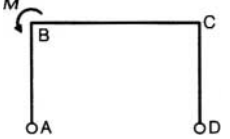
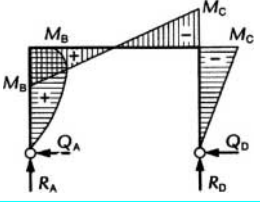
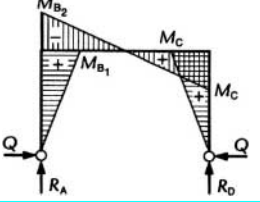
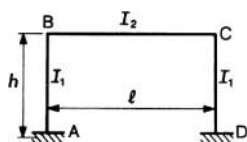
<p>Cas de charge</p>																																																
<p>Diagramme des moments</p>																																																
<p>Réactions sur appuis</p>	$R_A = \frac{Pb}{\ell} \quad R_D = \frac{Pa}{\ell}$ $Q = \frac{3Pab}{2N\ell h}$	$R_A = -R_D = -\frac{Ph}{\ell}$ $Q_A = Q_D = \frac{1}{2}P$																																														
<p>Moments aux nœuds B et C pour des valeurs particulières de K</p>	<p>Cas particulier : <math>a = \frac{1}{4}\ell, b = \frac{3}{4}\ell</math></p> $M_B = M_C = \alpha \frac{3P\ell}{16}$ $\alpha = \frac{3}{4K+6}$ <table border="1" data-bbox="483 1053 712 1625"> <thead> <tr> <th>K</th> <th><math>\alpha</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0,5</td></tr> <tr><td>0,1</td><td>0,468 75</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,441 18</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,394 74</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,357 14</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,326 09</td></tr> <tr><td>1</td><td>0,3</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>0,25</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,214 29</td></tr> <tr><td>2,5</td><td>0,187 5</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,166 67</td></tr> <tr><td>3,5</td><td>0,15</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,136 36</td></tr> <tr><td>4,5</td><td>0,125</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,115 38</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,1</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,088 24</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,078 95</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,071 43</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,065 22</td></tr> <tr><td>20</td><td>0,034 88</td></tr> <tr><td><math>\infty</math></td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	K	$\alpha$	0	0,5	0,1	0,468 75	0,2	0,441 18	0,4	0,394 74	0,6	0,357 14	0,8	0,326 09	1	0,3	1,5	0,25	2	0,214 29	2,5	0,187 5	3	0,166 67	3,5	0,15	4	0,136 36	4,5	0,125	5	0,115 38	6	0,1	7	0,088 24	8	0,078 95	9	0,071 43	10	0,065 22	20	0,034 88	$\infty$	0	$M_B = -M_C = \frac{1}{2}Ph$
K	$\alpha$																																															
0	0,5																																															
0,1	0,468 75																																															
0,2	0,441 18																																															
0,4	0,394 74																																															
0,6	0,357 14																																															
0,8	0,326 09																																															
1	0,3																																															
1,5	0,25																																															
2	0,214 29																																															
2,5	0,187 5																																															
3	0,166 67																																															
3,5	0,15																																															
4	0,136 36																																															
4,5	0,125																																															
5	0,115 38																																															
6	0,1																																															
7	0,088 24																																															
8	0,078 95																																															
9	0,071 43																																															
10	0,065 22																																															
20	0,034 88																																															
$\infty$	0																																															

Tableau 30 – Moments et réactions sur appuis dans un portique à une travée, rectangulaire, symétrique, avec deux appuis articulés (suite)

Cas de charge																																																																																																																																												
Diagramme des moments																																																																																																																																												
Réactions sur appuis	$R_A = -R_D = -\frac{qh^2}{2\ell}$ $Q_A = \frac{11K+18}{8N}qh \quad Q_D = \frac{5K+6}{8N}qh$	$R_A = -R_D = \frac{M}{\ell}$ $Q = -\frac{3M}{2Nh}$																																																																																																																																										
Moments aux nœuds B et C pour des valeurs particulières de K	$M_B = \alpha \frac{qh^2}{2} \quad M_C = -\beta \frac{qh^2}{2}$ $\alpha = \frac{3K+6}{8K+12} \quad \beta = \frac{5K+6}{8K+12}$ <table border="1" data-bbox="302 989 763 1564"> <thead> <tr> <th>K</th> <th><math>\alpha</math></th> <th><math>\beta</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0,5</td><td>0,5</td></tr> <tr><td>0,1</td><td>0,492 19</td><td>0,507 81</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,485 29</td><td>0,514 71</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,473 68</td><td>0,526 32</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,464 29</td><td>0,535 71</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,456 52</td><td>0,543 48</td></tr> <tr><td>1</td><td>0,45</td><td>0,55</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>0,437 5</td><td>0,562 5</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,428 57</td><td>0,571 43</td></tr> <tr><td>2,5</td><td>0,421 88</td><td>0,578 13</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,416 67</td><td>0,583 33</td></tr> <tr><td>3,5</td><td>0,412 5</td><td>0,587 5</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,409 09</td><td>0,590 91</td></tr> <tr><td>4,5</td><td>0,406 25</td><td>0,593 75</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,403 85</td><td>0,596 15</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,4</td><td>0,6</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,397 06</td><td>0,602 94</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,394 74</td><td>0,605 26</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,392 86</td><td>0,607 14</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,391 30</td><td>0,608 70</td></tr> <tr><td>20</td><td>0,383 72</td><td>0,616 28</td></tr> <tr><td><math>\infty</math></td><td>0,375</td><td>0,625</td></tr> </tbody> </table>	K	$\alpha$	$\beta$	0	0,5	0,5	0,1	0,492 19	0,507 81	0,2	0,485 29	0,514 71	0,4	0,473 68	0,526 32	0,6	0,464 29	0,535 71	0,8	0,456 52	0,543 48	1	0,45	0,55	1,5	0,437 5	0,562 5	2	0,428 57	0,571 43	2,5	0,421 88	0,578 13	3	0,416 67	0,583 33	3,5	0,412 5	0,587 5	4	0,409 09	0,590 91	4,5	0,406 25	0,593 75	5	0,403 85	0,596 15	6	0,4	0,6	7	0,397 06	0,602 94	8	0,394 74	0,605 26	9	0,392 86	0,607 14	10	0,391 30	0,608 70	20	0,383 72	0,616 28	$\infty$	0,375	0,625	$M_{B_1} = M_C = \alpha M \quad M_{B_2} = -\beta M$ $\alpha = \frac{3}{4K+6} \quad \beta = \frac{4K+3}{4K+6}$ <table border="1" data-bbox="937 989 1338 1564"> <thead> <tr> <th>K</th> <th><math>\alpha</math></th> <th><math>\beta</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0,5</td><td>0,5</td></tr> <tr><td>0,1</td><td>0,468 75</td><td>0,531 25</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,441 18</td><td>0,558 82</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,394 74</td><td>0,605 26</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,357 14</td><td>0,642 66</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,326 09</td><td>0,673 91</td></tr> <tr><td>1</td><td>0,3</td><td>0,7</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>0,25</td><td>0,75</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,214 29</td><td>0,785 71</td></tr> <tr><td>2,5</td><td>0,187 5</td><td>0,812 5</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,166 67</td><td>0,833 33</td></tr> <tr><td>3,5</td><td>0,15</td><td>0,85</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,136 36</td><td>0,863 64</td></tr> <tr><td>4,5</td><td>0,125</td><td>0,875</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,115 38</td><td>0,884 62</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,1</td><td>0,9</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,088 24</td><td>0,911 76</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,078 95</td><td>0,921 05</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,071 43</td><td>0,928 57</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,065 22</td><td>0,934 78</td></tr> <tr><td>20</td><td>0,034 88</td><td>0,965 12</td></tr> <tr><td><math>\infty</math></td><td>0</td><td>1</td></tr> </tbody> </table>	K	$\alpha$	$\beta$	0	0,5	0,5	0,1	0,468 75	0,531 25	0,2	0,441 18	0,558 82	0,4	0,394 74	0,605 26	0,6	0,357 14	0,642 66	0,8	0,326 09	0,673 91	1	0,3	0,7	1,5	0,25	0,75	2	0,214 29	0,785 71	2,5	0,187 5	0,812 5	3	0,166 67	0,833 33	3,5	0,15	0,85	4	0,136 36	0,863 64	4,5	0,125	0,875	5	0,115 38	0,884 62	6	0,1	0,9	7	0,088 24	0,911 76	8	0,078 95	0,921 05	9	0,071 43	0,928 57	10	0,065 22	0,934 78	20	0,034 88	0,965 12	$\infty$	0	1
K	$\alpha$	$\beta$																																																																																																																																										
0	0,5	0,5																																																																																																																																										
0,1	0,492 19	0,507 81																																																																																																																																										
0,2	0,485 29	0,514 71																																																																																																																																										
0,4	0,473 68	0,526 32																																																																																																																																										
0,6	0,464 29	0,535 71																																																																																																																																										
0,8	0,456 52	0,543 48																																																																																																																																										
1	0,45	0,55																																																																																																																																										
1,5	0,437 5	0,562 5																																																																																																																																										
2	0,428 57	0,571 43																																																																																																																																										
2,5	0,421 88	0,578 13																																																																																																																																										
3	0,416 67	0,583 33																																																																																																																																										
3,5	0,412 5	0,587 5																																																																																																																																										
4	0,409 09	0,590 91																																																																																																																																										
4,5	0,406 25	0,593 75																																																																																																																																										
5	0,403 85	0,596 15																																																																																																																																										
6	0,4	0,6																																																																																																																																										
7	0,397 06	0,602 94																																																																																																																																										
8	0,394 74	0,605 26																																																																																																																																										
9	0,392 86	0,607 14																																																																																																																																										
10	0,391 30	0,608 70																																																																																																																																										
20	0,383 72	0,616 28																																																																																																																																										
$\infty$	0,375	0,625																																																																																																																																										
K	$\alpha$	$\beta$																																																																																																																																										
0	0,5	0,5																																																																																																																																										
0,1	0,468 75	0,531 25																																																																																																																																										
0,2	0,441 18	0,558 82																																																																																																																																										
0,4	0,394 74	0,605 26																																																																																																																																										
0,6	0,357 14	0,642 66																																																																																																																																										
0,8	0,326 09	0,673 91																																																																																																																																										
1	0,3	0,7																																																																																																																																										
1,5	0,25	0,75																																																																																																																																										
2	0,214 29	0,785 71																																																																																																																																										
2,5	0,187 5	0,812 5																																																																																																																																										
3	0,166 67	0,833 33																																																																																																																																										
3,5	0,15	0,85																																																																																																																																										
4	0,136 36	0,863 64																																																																																																																																										
4,5	0,125	0,875																																																																																																																																										
5	0,115 38	0,884 62																																																																																																																																										
6	0,1	0,9																																																																																																																																										
7	0,088 24	0,911 76																																																																																																																																										
8	0,078 95	0,921 05																																																																																																																																										
9	0,071 43	0,928 57																																																																																																																																										
10	0,065 22	0,934 78																																																																																																																																										
20	0,034 88	0,965 12																																																																																																																																										
$\infty$	0	1																																																																																																																																										

**Tableau 31 – Moments et réactions sur appuis dans un portique à une travée, rectangulaire, symétrique, avec deux appuis encastrés**



Valeurs fixes :

$$K = \frac{\text{raideur traverse}}{\text{raideur poteau}} = \frac{I_2}{\ell} \times \frac{h}{I_1}$$

$$N_1 = K + 2$$

$$N_2 = 6K + 1$$

Cas de charge

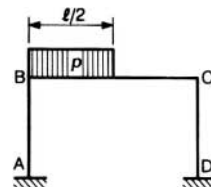
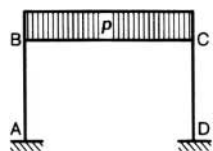
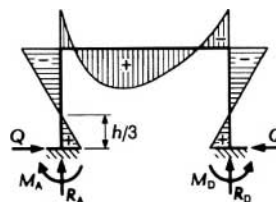
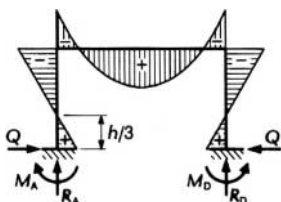


Diagramme des moments



Réactions et moments sur appuis

$$R_A = R_D = \frac{1}{2} p\ell$$

$$Q = \frac{p\ell^2}{4N_1 h}$$

$$M_A = M_D = \frac{p\ell^2}{12N_1}$$

$$R_A = \frac{p\ell}{8} \left( 3 + \frac{1}{4N_2} \right) \quad R_D = \frac{p\ell}{8} \left( 1 - \frac{1}{4N_2} \right)$$

$$Q = \frac{p\ell^2}{8N_1 h}$$

$$M_A = \frac{p\ell^2}{8} \left( \frac{1}{3N_1} - \frac{1}{8N_2} \right) \quad M_D = \frac{p\ell^2}{8} \left( \frac{1}{3N_1} + \frac{1}{8N_2} \right)$$

$$M_A = M_D = \alpha \frac{p\ell^2}{8}$$

$$M_B = M_C = -\beta \frac{p\ell^2}{8}$$

$$\alpha = \frac{2}{3(K+2)} \quad \beta = \frac{4}{3(K+2)}$$

$$M_A = \alpha \frac{p\ell^2}{16} \quad M_B = -\beta \frac{p\ell^2}{16} \quad M_C = -\gamma \frac{p\ell^2}{16} \quad M_D = \delta \frac{p\ell^2}{16}$$

$$\alpha = \frac{2}{3N_1} - \frac{1}{4N_2} \quad \beta = \frac{4}{3N_1} + \frac{1}{4N_2}$$

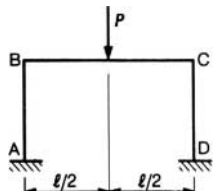
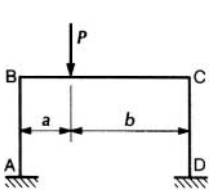
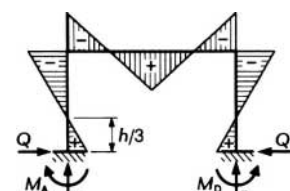
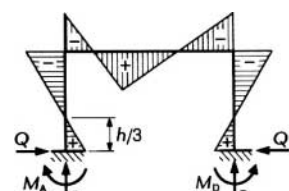
$$\delta = \frac{2}{3N_1} + \frac{1}{4N_2} \quad \gamma = \frac{4}{3N_1} + \frac{1}{4N_2}$$

Moments aux nœuds A, B, C et D pour des valeurs particulières de K

K	$\alpha$	$\beta$
0	0,333 33	0,666 67
0,1	0,317 46	0,634 92
0,2	0,303 03	0,606 06
0,4	0,277 78	0,555 56
0,6	0,256 41	0,512 82
0,8	0,238 10	0,476 19
1	0,222 22	0,444 44
1,5	0,190 48	0,380 95
2	0,166 67	0,333 33
2,5	0,148 15	0,296 30
3	0,133 33	0,266 67
3,5	0,121 21	0,242 42
4	0,111 11	0,222 22
4,5	0,102 56	0,205 13
5	0,095 24	0,190 48
6	0,083 33	0,166 67
7	0,074 07	0,148 15
8	0,066 67	0,133 33
9	0,060 61	0,121 21
10	0,055 56	0,111 11
20	0,030 30	0,060 61
$\infty$	0	0

K	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$
0	0,083 33	0,916 67	0,416 67	0,583 33
0,1	0,161 21	0,791 17	0,478 67	0,473 71
0,2	0,189 39	0,719 70	0,492 42	0,416 67
0,4	0,204 25	0,629 08	0,482 03	0,351 31
0,6	0,202 06	0,567 17	0,458 47	0,310 76
0,8	0,194 99	0,519 29	0,433 09	0,281 20
1	0,186 51	0,480 16	0,408 73	0,257 94
1,5	0,165 48	0,405 95	0,355 95	0,215 48
2	0,147 44	0,352 56	0,314 10	0,185 90
2,5	0,132 52	0,311 92	0,280 67	0,163 77
3	0,120 18	0,279 82	0,253 51	0,146 49
3,5	0,109 85	0,253 79	0,231 06	0,132 58
4	0,101 11	0,232 22	0,212 22	0,121 11
4,5	0,093 64	0,214 06	0,196 20	0,111 49
5	0,087 17	0,198 54	0,182 41	0,103 30
6	0,076 58	0,173 42	0,159 91	0,090 09
7	0,068 26	0,153 96	0,142 33	0,079 89
8	0,061 56	0,138 44	0,128 23	0,071 77
9	0,056 06	0,125 76	0,116 67	0,065 15
10	0,051 46	0,115 21	0,107 01	0,059 65
20	0,028 24	0,062 67	0,058 54	0,032 37
$\infty$	0	0	0	0

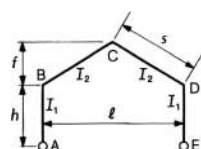
**Tableau 31 – Moments et réactions sur appuis dans un portique à une travée, rectangulaire, symétrique, avec deux appuis encastrés (suite)**

Cas de charge																																																																																																																																																																																										
Diagramme des moments																																																																																																																																																																																										
Réactions et moments sur appuis	$R_A = R_D = \frac{1}{2} P$ $Q = \frac{3P\ell}{4N_1 h}$ $M_A = M_D = \frac{P\ell}{8N_1}$	$R_A = P \frac{b}{\ell} \left[ 1 + \frac{a(b-a)}{N_2 \ell^2} \right] \quad R_D = P \frac{a}{\ell} \left[ 1 + \frac{b(a-b)}{N_2 \ell^2} \right]$ $Q = \frac{3Pab}{2N_1 \ell h}$ $M_A = \frac{Pab}{\ell} \left( \frac{1}{2N_1} - \frac{b-a}{2N_2 \ell} \right) \quad M_D = \frac{Pab}{\ell} \left( \frac{1}{2N_1} + \frac{b-a}{2N_2 \ell} \right)$																																																																																																																																																																																								
Moments aux nœuds A, B, C et D pour des valeurs particulières de K	$M_A = M_D = \alpha \frac{P\ell}{4}$ $M_B = M_C = -\beta \frac{P\ell}{4}$ $\alpha = \frac{1}{2(K+2)} \quad \beta = \frac{1}{K+2}$ <table border="1" data-bbox="272 1170 665 1734"> <thead> <tr> <th>K</th> <th><math>\alpha</math></th> <th><math>\beta</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0,25</td><td>0,5</td></tr> <tr><td>0,1</td><td>0,238 10</td><td>0,476 19</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,227 27</td><td>0,454 55</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,208 33</td><td>0,416 67</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,192 31</td><td>0,384 62</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,178 57</td><td>0,357 14</td></tr> <tr><td>1</td><td>0,166 67</td><td>0,333 33</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>0,142 86</td><td>0,285 71</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,125</td><td>0,25</td></tr> <tr><td>2,5</td><td>0,111 11</td><td>0,222 22</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,1</td><td>0,2</td></tr> <tr><td>3,5</td><td>0,090 91</td><td>0,181 82</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,083 33</td><td>0,166 67</td></tr> <tr><td>4,5</td><td>0,076 92</td><td>0,153 85</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,071 43</td><td>0,142 86</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,062 5</td><td>0,125</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,055 56</td><td>0,111 11</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,05</td><td>0,1</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,045 45</td><td>0,090 91</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,041 67</td><td>0,083 33</td></tr> <tr><td>20</td><td>0,022 73</td><td>0,045 45</td></tr> <tr><td><math>\infty</math></td><td>0</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	K	$\alpha$	$\beta$	0	0,25	0,5	0,1	0,238 10	0,476 19	0,2	0,227 27	0,454 55	0,4	0,208 33	0,416 67	0,6	0,192 31	0,384 62	0,8	0,178 57	0,357 14	1	0,166 67	0,333 33	1,5	0,142 86	0,285 71	2	0,125	0,25	2,5	0,111 11	0,222 22	3	0,1	0,2	3,5	0,090 91	0,181 82	4	0,083 33	0,166 67	4,5	0,076 92	0,153 85	5	0,071 43	0,142 86	6	0,062 5	0,125	7	0,055 56	0,111 11	8	0,05	0,1	9	0,045 45	0,090 91	10	0,041 67	0,083 33	20	0,022 73	0,045 45	$\infty$	0	0	<p>Cas particulier : <math>a = \frac{\ell}{4}, b = \frac{3\ell}{4}</math></p> $M_A = \alpha \frac{3P\ell}{16} \quad M_B = -\beta \frac{3P\ell}{16} \quad M_C = -\gamma \frac{3P\ell}{16} \quad M_D = \delta \frac{3P\ell}{16}$ $\alpha = \frac{1}{2N_1} - \frac{1}{4N_2} \quad \beta = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{4N_2}$ $\delta = \frac{1}{2N_1} + \frac{1}{4N_2} \quad \gamma = \frac{1}{N_1} - \frac{1}{4N_2}$ <table border="1" data-bbox="756 1170 1345 1734"> <thead> <tr> <th>K</th> <th><math>\alpha</math></th> <th><math>\beta</math></th> <th><math>\gamma</math></th> <th><math>\delta</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>0</td><td>0,75</td><td>0,25</td><td>0,5</td></tr> <tr><td>0,1</td><td>0,081 85</td><td>0,632 44</td><td>0,319 94</td><td>0,394 35</td></tr> <tr><td>0,2</td><td>0,113 64</td><td>0,568 18</td><td>0,340 91</td><td>0,340 91</td></tr> <tr><td>0,4</td><td>0,134 80</td><td>0,490 20</td><td>0,343 14</td><td>0,281 86</td></tr> <tr><td>0,6</td><td>0,137 96</td><td>0,438 96</td><td>0,330 27</td><td>0,246 66</td></tr> <tr><td>0,8</td><td>0,135 47</td><td>0,400 25</td><td>0,314 04</td><td>0,221 67</td></tr> <tr><td>1</td><td>0,130 95</td><td>0,369 05</td><td>0,297 62</td><td>0,202 38</td></tr> <tr><td>1,5</td><td>0,117 66</td><td>0,310 71</td><td>0,260 71</td><td>0,167 86</td></tr> <tr><td>2</td><td>0,105 77</td><td>0,269 23</td><td>0,230 77</td><td>0,144 23</td></tr> <tr><td>2,5</td><td>0,095 49</td><td>0,237 85</td><td>0,206 60</td><td>0,126 74</td></tr> <tr><td>3</td><td>0,086 84</td><td>0,213 16</td><td>0,186 84</td><td>0,113 16</td></tr> <tr><td>3,5</td><td>0,079 55</td><td>0,193 18</td><td>0,170 45</td><td>0,102 27</td></tr> <tr><td>4</td><td>0,073 33</td><td>0,176 67</td><td>0,156 67</td><td>0,093 33</td></tr> <tr><td>4,5</td><td>0,067 99</td><td>0,162 77</td><td>0,144 92</td><td>0,085 85</td></tr> <tr><td>5</td><td>0,063 36</td><td>0,150 92</td><td>0,134 79</td><td>0,079 49</td></tr> <tr><td>6</td><td>0,055 74</td><td>0,131 76</td><td>0,118 24</td><td>0,069 26</td></tr> <tr><td>7</td><td>0,049 74</td><td>0,116 93</td><td>0,105 30</td><td>0,061 37</td></tr> <tr><td>8</td><td>0,044 90</td><td>0,105 10</td><td>0,094 90</td><td>0,055 10</td></tr> <tr><td>9</td><td>0,040 91</td><td>0,095 45</td><td>0,086 36</td><td>0,05</td></tr> <tr><td>10</td><td>0,037 57</td><td>0,087 43</td><td>0,079 23</td><td>0,045 77</td></tr> <tr><td>20</td><td>0,020 66</td><td>0,047 52</td><td>0,043 39</td><td>0,024 79</td></tr> <tr><td><math>\infty</math></td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td></tr> </tbody> </table>	K	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	0	0	0,75	0,25	0,5	0,1	0,081 85	0,632 44	0,319 94	0,394 35	0,2	0,113 64	0,568 18	0,340 91	0,340 91	0,4	0,134 80	0,490 20	0,343 14	0,281 86	0,6	0,137 96	0,438 96	0,330 27	0,246 66	0,8	0,135 47	0,400 25	0,314 04	0,221 67	1	0,130 95	0,369 05	0,297 62	0,202 38	1,5	0,117 66	0,310 71	0,260 71	0,167 86	2	0,105 77	0,269 23	0,230 77	0,144 23	2,5	0,095 49	0,237 85	0,206 60	0,126 74	3	0,086 84	0,213 16	0,186 84	0,113 16	3,5	0,079 55	0,193 18	0,170 45	0,102 27	4	0,073 33	0,176 67	0,156 67	0,093 33	4,5	0,067 99	0,162 77	0,144 92	0,085 85	5	0,063 36	0,150 92	0,134 79	0,079 49	6	0,055 74	0,131 76	0,118 24	0,069 26	7	0,049 74	0,116 93	0,105 30	0,061 37	8	0,044 90	0,105 10	0,094 90	0,055 10	9	0,040 91	0,095 45	0,086 36	0,05	10	0,037 57	0,087 43	0,079 23	0,045 77	20	0,020 66	0,047 52	0,043 39	0,024 79	$\infty$	0	0	0	0
K	$\alpha$	$\beta$																																																																																																																																																																																								
0	0,25	0,5																																																																																																																																																																																								
0,1	0,238 10	0,476 19																																																																																																																																																																																								
0,2	0,227 27	0,454 55																																																																																																																																																																																								
0,4	0,208 33	0,416 67																																																																																																																																																																																								
0,6	0,192 31	0,384 62																																																																																																																																																																																								
0,8	0,178 57	0,357 14																																																																																																																																																																																								
1	0,166 67	0,333 33																																																																																																																																																																																								
1,5	0,142 86	0,285 71																																																																																																																																																																																								
2	0,125	0,25																																																																																																																																																																																								
2,5	0,111 11	0,222 22																																																																																																																																																																																								
3	0,1	0,2																																																																																																																																																																																								
3,5	0,090 91	0,181 82																																																																																																																																																																																								
4	0,083 33	0,166 67																																																																																																																																																																																								
4,5	0,076 92	0,153 85																																																																																																																																																																																								
5	0,071 43	0,142 86																																																																																																																																																																																								
6	0,062 5	0,125																																																																																																																																																																																								
7	0,055 56	0,111 11																																																																																																																																																																																								
8	0,05	0,1																																																																																																																																																																																								
9	0,045 45	0,090 91																																																																																																																																																																																								
10	0,041 67	0,083 33																																																																																																																																																																																								
20	0,022 73	0,045 45																																																																																																																																																																																								
$\infty$	0	0																																																																																																																																																																																								
K	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$																																																																																																																																																																																						
0	0	0,75	0,25	0,5																																																																																																																																																																																						
0,1	0,081 85	0,632 44	0,319 94	0,394 35																																																																																																																																																																																						
0,2	0,113 64	0,568 18	0,340 91	0,340 91																																																																																																																																																																																						
0,4	0,134 80	0,490 20	0,343 14	0,281 86																																																																																																																																																																																						
0,6	0,137 96	0,438 96	0,330 27	0,246 66																																																																																																																																																																																						
0,8	0,135 47	0,400 25	0,314 04	0,221 67																																																																																																																																																																																						
1	0,130 95	0,369 05	0,297 62	0,202 38																																																																																																																																																																																						
1,5	0,117 66	0,310 71	0,260 71	0,167 86																																																																																																																																																																																						
2	0,105 77	0,269 23	0,230 77	0,144 23																																																																																																																																																																																						
2,5	0,095 49	0,237 85	0,206 60	0,126 74																																																																																																																																																																																						
3	0,086 84	0,213 16	0,186 84	0,113 16																																																																																																																																																																																						
3,5	0,079 55	0,193 18	0,170 45	0,102 27																																																																																																																																																																																						
4	0,073 33	0,176 67	0,156 67	0,093 33																																																																																																																																																																																						
4,5	0,067 99	0,162 77	0,144 92	0,085 85																																																																																																																																																																																						
5	0,063 36	0,150 92	0,134 79	0,079 49																																																																																																																																																																																						
6	0,055 74	0,131 76	0,118 24	0,069 26																																																																																																																																																																																						
7	0,049 74	0,116 93	0,105 30	0,061 37																																																																																																																																																																																						
8	0,044 90	0,105 10	0,094 90	0,055 10																																																																																																																																																																																						
9	0,040 91	0,095 45	0,086 36	0,05																																																																																																																																																																																						
10	0,037 57	0,087 43	0,079 23	0,045 77																																																																																																																																																																																						
20	0,020 66	0,047 52	0,043 39	0,024 79																																																																																																																																																																																						
$\infty$	0	0	0	0																																																																																																																																																																																						

**Tableau 31 – Moments et réactions sur appuis dans un portique à une travée, rectangulaire, symétrique, avec deux appuis encastrés (suite)**

Cas de charge												
Diagramme des moments												
Réactions et moments sur appuis	$R_A = -R_D = -\frac{3PhK}{N_2 \ell}$ $Q_A = Q_D = \frac{1}{2} P$ $M_A = -M_D = -Ph \frac{3K+1}{2N_2}$	$R_A = -R_D = -\frac{qh^2K}{N_2 \ell}$ $Q_A = \frac{qh}{4} \frac{6K+13}{2N_1} \quad Q_D = \frac{qh}{4} \frac{2K+3}{2N_1}$ $M_A = -\frac{qh^2}{4} \left( \frac{K+3}{6N_1} + \frac{4K+1}{N_2} \right)$ $M_D = -\frac{qh^2}{4} \left( \frac{K+3}{6N_1} - \frac{4K+1}{N_2} \right)$	$R_A = -R_D = -\frac{6MK}{N_2 \ell}$ $Q = -\frac{3M}{2N_1 h}$ $M_A = -\frac{M}{2N_1} + \frac{M}{2N_2} \quad M_D = -\frac{M}{2N_1} - \frac{M}{2N_2}$									
Moments aux nœuds A, B, C et D pour des valeurs particulières de K	$M_A = -M_D = -\alpha Ph$ $M_B = -M_C = \beta Ph$ $\alpha = \frac{3K+1}{2N_2} \quad \beta = \frac{3K}{2N_2}$	$M_A = -\alpha \frac{qh^2}{2} \quad M_B = \beta \frac{qh^2}{2}$ $M_C = -\gamma \frac{qh^2}{2} \quad M_D = \delta \frac{qh^2}{2}$ $\alpha = \frac{4K+1}{2N_2} + \frac{K+3}{12N_1} \quad \beta = \frac{K}{N_2} - \frac{K}{12N_1}$ $\delta = \frac{4K+1}{2N_2} - \frac{K+3}{12N_1} \quad \gamma = \frac{K}{N_2} + \frac{K}{12N_1}$	$M_A = \alpha M \quad M_{B_1} = \beta_1 M \quad M_{B_2} = -\beta_2 M$ $M_C = -\gamma M \quad M_D = -\delta M$ $\alpha = \frac{1}{2N_1} + \frac{1}{2N_2} \quad \beta_1 = \frac{1}{N_1} + \frac{1}{2N_2} \quad \beta_2 = 1 - \beta_1$ $\gamma = \frac{1}{N_1} - \frac{1}{2N_2} \quad \delta = \frac{1}{2N_1} + \frac{1}{2N_2}$									
	K	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\alpha$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\gamma$	$\delta$
	0	0,5	0	0,625	0	0	0,375	0,25	1	0	0	0,75
	0,1	0,406 25	0,093 75	0,560 52	0,058 53	0,066 47	0,314 48	0,074 40	0,788 69	0,211 31	0,163 69	0,550 60
	0,2	0,363 64	0,136 36	0,530 30	0,083 33	0,098 48	0,287 88	0	0,681 82	0,318 18	0,227 27	0,454 55
	0,4	0,323 53	0,176 47	0,500 41	0,103 76	0,131 54	0,264 30	-0,061 27	0,563 73	0,436 27	0,269 61	0,355 39
	0,6	0,304 35	0,195 65	0,484 95	0,111 20	0,149 67	0,254 18	-0,083 61	0,493 31	0,506 69	0,275 92	0,301 00
	0,8	0,293 10	0,206 90	0,475 16	0,114 12	0,161 74	0,248 97	-0,092 36	0,443 35	0,556 65	0,270 94	0,264 78
	1	0,286 71	0,214 29	0,468 25	0,115 08	0,170 63	0,246 03	-0,095 24	0,404 76	0,595 24	0,261 90	0,238 10
	1,5	0,275	0,225	0,457 14	0,114 29	0,185 71	0,242 86	-0,092 86	0,335 71	0,664 29	0,235 71	0,192 86
	2	0,269 23	0,230 77	0,450 32	0,112 18	0,195 51	0,241 99	-0,086 54	0,288 46	0,711 54	0,211 54	0,163 46
	2,5	0,265 63	0,234 38	0,445 60	0,109 95	0,202 55	0,241 90	-0,079 86	0,253 47	0,746 53	0,190 97	0,142 36
	3	0,263 16	0,236 84	0,442 11	0,107 89	0,207 89	0,242 11	-0,073 67	0,226 32	0,773 68	0,173 68	0,126 32
3,5	0,261 36	0,238 64	0,439 39	0,106 06	0,212 12	0,242 42	-0,068 18	0,204 55	0,795 45	0,159 09	0,113 64	
4	0,26	0,24	0,437 22	0,104 44	0,215 56	0,242 78	-0,063 33	0,186 67	0,813 33	0,146 67	0,103 33	
4,5	0,258 93	0,241 07	0,435 44	0,103 02	0,218 41	0,243 13	-0,059 07	0,171 70	0,828 30	0,135 99	0,094 78	
5	0,258 06	0,241 94	0,433 95	0,101 77	0,220 81	0,243 47	-0,055 30	0,158 99	0,841 01	0,126 73	0,087 56	
6	0,256 76	0,243 24	0,431 59	0,099 66	0,224 66	0,244 09	-0,048 99	0,138 51	0,861 49	0,111 49	0,076 01	
7	0,255 81	0,244 19	0,429 80	0,097 98	0,227 61	0,244 62	-0,043 93	0,122 74	0,877 26	0,099 48	0,067 18	
8	0,255 10	0,244 90	0,428 40	0,096 60	0,229 93	0,245 07	-0,039 80	0,110 20	0,889 80	0,089 60	0,060 20	
9	0,254 55	0,245 45	0,427 27	0,095 45	0,231 82	0,245 45	-0,036 36	0,1	0,9	0,081 82	0,054 55	
10	0,254 10	0,245 90	0,426 34	0,094 49	0,233 38	0,245 79	-0,033 47	0,091 53	0,908 47	0,075 14	0,049 86	
20	0,252 07	0,247 93	0,421 83	0,089 53	0,241 05	0,247 59	-0,018 60	0,049 59	0,950 41	0,041 32	0,026 86	
$\infty$	0,25	0,25	0,416 67	0,083 33	0,25	0,25	0	0	1	0	0	

Tableau 32 – Moments et réactions sur appuis dans un portique à une travée, symétrique, à deux rampants et béquilles verticales sur deux articulations



Valeurs fixes :  $K = \frac{\text{raideur rampant}}{\text{raideur béquille}} = \frac{I_2}{S} \times \frac{h}{I_1}$      $\varphi = f/h$  ;  $\Delta = K + 3 + 3\varphi + \varphi^2$

Cas de charge	Diagramme des moments	Réactions et moments sur appuis	Moments aux nœuds B, C et D pour des valeurs particulières de K et de $\varphi$																																																																																																																																																																																																																																								
		$R_A = R_E = \frac{1}{2} p \ell$ $Q = \frac{p \ell^2}{h} \frac{8+5\varphi}{32\Delta}$	$M_B = M_D = -\beta \frac{p \ell^2}{8}$ $M_C = \gamma \frac{p \ell^2}{8}$ $\beta = \frac{8+5\varphi}{4\Delta}$ $\gamma = 1 - \frac{(1+\varphi)(8+5\varphi)}{4\Delta}$																																																																																																																																																																																																																																								
		$R_A = \frac{3}{8} p \ell$ $R_E = \frac{1}{8} p \ell$ $Q = \frac{p \ell^2}{h} \frac{8+5\varphi}{64\Delta}$	$M_B = M_D = -\beta \frac{p \ell^2}{16}$ $M_C = \gamma \frac{p \ell^2}{16}$ $\beta = \frac{8+5\varphi}{4\Delta}$ $\gamma = 1 - \frac{(1+\varphi)(8+5\varphi)}{\Delta}$																																																																																																																																																																																																																																								
		$R_A = R_E = \frac{1}{2} P$ $Q = \frac{P \ell}{h} \frac{3+2\varphi}{8\Delta}$	$M_B = M_D = -\beta \frac{P \ell}{4}$ $M_C = \gamma \frac{P \ell}{4}$ $\beta = \frac{3+2\varphi}{2\Delta}$ $\gamma = 1 - \frac{(1+\varphi)(3+2\varphi)}{2\Delta}$																																																																																																																																																																																																																																								
			<table border="1"> <thead> <tr> <th>K</th> <th><math>\varphi</math></th> <th><math>\beta</math></th> <th><math>\gamma</math></th> <th><math>\beta</math></th> <th><math>\gamma</math></th> <th><math>\beta</math></th> <th><math>\gamma</math></th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td rowspan="5">0</td> <td>0</td> <td>0,666 67</td> <td>0,333 33</td> <td>0,666 67</td> <td>0,333 33</td> <td>0,5</td> <td>0,5</td> </tr> <tr> <td>0,5</td> <td>0,552 63</td> <td>0,171 05</td> <td>0,552 63</td> <td>0,171 05</td> <td>0,421 05</td> <td>0,368 42</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0,464 29</td> <td>0,071 43</td> <td>0,464 29</td> <td>0,071 43</td> <td>0,357 14</td> <td>0,285 71</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0,346 15</td> <td>-0,038 46</td> <td>0,346 15</td> <td>-0,038 46</td> <td>0,269 23</td> <td>0,192 31</td> </tr> <tr> <td><math>\infty</math></td> <td>0</td> <td>-0,25</td> <td>0</td> <td>-0,25</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td rowspan="5">0,1</td> <td>0</td> <td>0,645 16</td> <td>0,354 84</td> <td>0,645 16</td> <td>0,354 84</td> <td>0,483 87</td> <td>0,516 13</td> </tr> <tr> <td>0,5</td> <td>0,541 24</td> <td>0,188 14</td> <td>0,541 24</td> <td>0,188 14</td> <td>0,412 37</td> <td>0,381 44</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0,457 75</td> <td>0,084 51</td> <td>0,457 75</td> <td>0,084 51</td> <td>0,352 11</td> <td>0,295 77</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0,343 51</td> <td>-0,030 53</td> <td>0,343 51</td> <td>-0,030 53</td> <td>0,267 18</td> <td>0,198 47</td> </tr> <tr> <td><math>\infty</math></td> <td>0</td> <td>-0,25</td> <td>0</td> <td>-0,25</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td rowspan="5">0,5</td> <td>0</td> <td>0,571 43</td> <td>0,428 57</td> <td>0,571 43</td> <td>0,428 57</td> <td>0,428 57</td> <td>0,571 43</td> </tr> <tr> <td>0,5</td> <td>0,5</td> <td>0,25</td> <td>0,5</td> <td>0,25</td> <td>0,380 95</td> <td>0,428 57</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0,433 33</td> <td>0,133 33</td> <td>0,433 33</td> <td>0,133 33</td> <td>0,333 33</td> <td>0,333 33</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0,333 33</td> <td>0</td> <td>0,333 33</td> <td>0</td> <td>0,259 26</td> <td>0,222 22</td> </tr> <tr> <td><math>\infty</math></td> <td>0</td> <td>-0,25</td> <td>0</td> <td>-0,25</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td rowspan="5">1</td> <td>0</td> <td>0,5</td> <td>0,5</td> <td>0,5</td> <td>0,5</td> <td>0,375</td> <td>0,625</td> </tr> <tr> <td>0,5</td> <td>0,456 52</td> <td>0,315 22</td> <td>0,456 52</td> <td>0,315 22</td> <td>0,347 83</td> <td>0,478 26</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0,406 25</td> <td>0,187 5</td> <td>0,406 25</td> <td>0,187 5</td> <td>0,312 5</td> <td>0,375</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0,321 43</td> <td>0,035 71</td> <td>0,321 43</td> <td>0,035 71</td> <td>0,25</td> <td>0,25</td> </tr> <tr> <td><math>\infty</math></td> <td>0</td> <td>-0,25</td> <td>0</td> <td>-0,25</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td rowspan="5">2</td> <td>0</td> <td>0,4</td> <td>0,6</td> <td>0,4</td> <td>0,6</td> <td>0,3</td> <td>0,7</td> </tr> <tr> <td>0,5</td> <td>0,388 89</td> <td>0,416 67</td> <td>0,388 89</td> <td>0,416 67</td> <td>0,296 30</td> <td>0,555 56</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0,361 11</td> <td>0,277 78</td> <td>0,361 11</td> <td>0,277 78</td> <td>0,277 78</td> <td>0,444 44</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0,3</td> <td>0,1</td> <td>0,3</td> <td>0,1</td> <td>0,233 33</td> <td>0,3</td> </tr> <tr> <td><math>\infty</math></td> <td>0</td> <td>-0,25</td> <td>0</td> <td>-0,25</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td rowspan="5">10</td> <td>0</td> <td>0,153 85</td> <td>0,846 15</td> <td>0,153 85</td> <td>0,846 15</td> <td>0,115 38</td> <td>0,884 62</td> </tr> <tr> <td>0,5</td> <td>0,177 97</td> <td>0,733 05</td> <td>0,177 97</td> <td>0,733 05</td> <td>0,135 59</td> <td>0,796 61</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>0,191 18</td> <td>0,617 65</td> <td>0,191 18</td> <td>0,617 65</td> <td>0,147 06</td> <td>0,705 88</td> </tr> <tr> <td>2</td> <td>0,195 65</td> <td>0,413 04</td> <td>0,195 65</td> <td>0,413 04</td> <td>0,152 17</td> <td>0,543 48</td> </tr> <tr> <td><math>\infty</math></td> <td>0</td> <td>-0,25</td> <td>0</td> <td>-0,25</td> <td>0</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td><math>\infty</math></td> <td>99</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>0</td> <td>1</td> </tr> </tbody> </table>	K	$\varphi$	$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$	0	0	0,666 67	0,333 33	0,666 67	0,333 33	0,5	0,5	0,5	0,552 63	0,171 05	0,552 63	0,171 05	0,421 05	0,368 42	1	0,464 29	0,071 43	0,464 29	0,071 43	0,357 14	0,285 71	2	0,346 15	-0,038 46	0,346 15	-0,038 46	0,269 23	0,192 31	$\infty$	0	-0,25	0	-0,25	0	0	0,1	0	0,645 16	0,354 84	0,645 16	0,354 84	0,483 87	0,516 13	0,5	0,541 24	0,188 14	0,541 24	0,188 14	0,412 37	0,381 44	1	0,457 75	0,084 51	0,457 75	0,084 51	0,352 11	0,295 77	2	0,343 51	-0,030 53	0,343 51	-0,030 53	0,267 18	0,198 47	$\infty$	0	-0,25	0	-0,25	0	0	0,5	0	0,571 43	0,428 57	0,571 43	0,428 57	0,428 57	0,571 43	0,5	0,5	0,25	0,5	0,25	0,380 95	0,428 57	1	0,433 33	0,133 33	0,433 33	0,133 33	0,333 33	0,333 33	2	0,333 33	0	0,333 33	0	0,259 26	0,222 22	$\infty$	0	-0,25	0	-0,25	0	0	1	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,375	0,625	0,5	0,456 52	0,315 22	0,456 52	0,315 22	0,347 83	0,478 26	1	0,406 25	0,187 5	0,406 25	0,187 5	0,312 5	0,375	2	0,321 43	0,035 71	0,321 43	0,035 71	0,25	0,25	$\infty$	0	-0,25	0	-0,25	0	0	2	0	0,4	0,6	0,4	0,6	0,3	0,7	0,5	0,388 89	0,416 67	0,388 89	0,416 67	0,296 30	0,555 56	1	0,361 11	0,277 78	0,361 11	0,277 78	0,277 78	0,444 44	2	0,3	0,1	0,3	0,1	0,233 33	0,3	$\infty$	0	-0,25	0	-0,25	0	0	10	0	0,153 85	0,846 15	0,153 85	0,846 15	0,115 38	0,884 62	0,5	0,177 97	0,733 05	0,177 97	0,733 05	0,135 59	0,796 61	1	0,191 18	0,617 65	0,191 18	0,617 65	0,147 06	0,705 88	2	0,195 65	0,413 04	0,195 65	0,413 04	0,152 17	0,543 48	$\infty$	0	-0,25	0	-0,25	0	0	$\infty$	99	0	1	0	1	0	1
K	$\varphi$	$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$																																																																																																																																																																																																																																				
0	0	0,666 67	0,333 33	0,666 67	0,333 33	0,5	0,5																																																																																																																																																																																																																																				
	0,5	0,552 63	0,171 05	0,552 63	0,171 05	0,421 05	0,368 42																																																																																																																																																																																																																																				
	1	0,464 29	0,071 43	0,464 29	0,071 43	0,357 14	0,285 71																																																																																																																																																																																																																																				
	2	0,346 15	-0,038 46	0,346 15	-0,038 46	0,269 23	0,192 31																																																																																																																																																																																																																																				
	$\infty$	0	-0,25	0	-0,25	0	0																																																																																																																																																																																																																																				
0,1	0	0,645 16	0,354 84	0,645 16	0,354 84	0,483 87	0,516 13																																																																																																																																																																																																																																				
	0,5	0,541 24	0,188 14	0,541 24	0,188 14	0,412 37	0,381 44																																																																																																																																																																																																																																				
	1	0,457 75	0,084 51	0,457 75	0,084 51	0,352 11	0,295 77																																																																																																																																																																																																																																				
	2	0,343 51	-0,030 53	0,343 51	-0,030 53	0,267 18	0,198 47																																																																																																																																																																																																																																				
	$\infty$	0	-0,25	0	-0,25	0	0																																																																																																																																																																																																																																				
0,5	0	0,571 43	0,428 57	0,571 43	0,428 57	0,428 57	0,571 43																																																																																																																																																																																																																																				
	0,5	0,5	0,25	0,5	0,25	0,380 95	0,428 57																																																																																																																																																																																																																																				
	1	0,433 33	0,133 33	0,433 33	0,133 33	0,333 33	0,333 33																																																																																																																																																																																																																																				
	2	0,333 33	0	0,333 33	0	0,259 26	0,222 22																																																																																																																																																																																																																																				
	$\infty$	0	-0,25	0	-0,25	0	0																																																																																																																																																																																																																																				
1	0	0,5	0,5	0,5	0,5	0,375	0,625																																																																																																																																																																																																																																				
	0,5	0,456 52	0,315 22	0,456 52	0,315 22	0,347 83	0,478 26																																																																																																																																																																																																																																				
	1	0,406 25	0,187 5	0,406 25	0,187 5	0,312 5	0,375																																																																																																																																																																																																																																				
	2	0,321 43	0,035 71	0,321 43	0,035 71	0,25	0,25																																																																																																																																																																																																																																				
	$\infty$	0	-0,25	0	-0,25	0	0																																																																																																																																																																																																																																				
2	0	0,4	0,6	0,4	0,6	0,3	0,7																																																																																																																																																																																																																																				
	0,5	0,388 89	0,416 67	0,388 89	0,416 67	0,296 30	0,555 56																																																																																																																																																																																																																																				
	1	0,361 11	0,277 78	0,361 11	0,277 78	0,277 78	0,444 44																																																																																																																																																																																																																																				
	2	0,3	0,1	0,3	0,1	0,233 33	0,3																																																																																																																																																																																																																																				
	$\infty$	0	-0,25	0	-0,25	0	0																																																																																																																																																																																																																																				
10	0	0,153 85	0,846 15	0,153 85	0,846 15	0,115 38	0,884 62																																																																																																																																																																																																																																				
	0,5	0,177 97	0,733 05	0,177 97	0,733 05	0,135 59	0,796 61																																																																																																																																																																																																																																				
	1	0,191 18	0,617 65	0,191 18	0,617 65	0,147 06	0,705 88																																																																																																																																																																																																																																				
	2	0,195 65	0,413 04	0,195 65	0,413 04	0,152 17	0,543 48																																																																																																																																																																																																																																				
	$\infty$	0	-0,25	0	-0,25	0	0																																																																																																																																																																																																																																				
$\infty$	99	0	1	0	1	0	1																																																																																																																																																																																																																																				

**Tableau 32 – Moments et réactions sur appuis dans un portique à une travée, symétrique, à deux rampants et béquilles verticales sur deux articulations (suite)**

Cas de charge								
Diagramme des moments								
Réactions et moments sur appuis	$R_A = -R_E = -\frac{Ph}{\ell}$ $Q_A = \frac{P}{2} \left[ 1 + \frac{\varphi(3+2\varphi)}{2\Delta} \right] \quad Q_B = P - Q_A$				$R_A = -R_E = -\frac{qfh(2+\varphi)}{2\ell}$ $Q_A = \frac{1}{2} qf \left[ 1 + \frac{\varphi(4+3\varphi)}{8\Delta} \right] \quad Q_B = qf - Q_A$			
Moments aux nœuds B, C et D pour des valeurs particulières de K et de $\varphi$	$M_B = \beta Ph \quad M_C = -\gamma Ph \quad M_D = -\delta Ph$ $\beta = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{\varphi(3+2\varphi)}{\Delta} \right] \quad \delta = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{\varphi(3+2\varphi)}{\Delta} \right]$ $\gamma = \frac{\varphi}{2} \left[ 1 - \frac{(1+\varphi)(3+2\varphi)}{2\Delta} \right]$				$M_B = \beta \frac{qfh}{2} \quad M_C = -\gamma \frac{qf^2}{2} \quad M_D = -\delta \frac{qfh}{2}$ $\beta = 1 + \frac{\varphi(4+3\varphi)}{8\Delta} \quad \delta = 1 - \frac{\varphi(4+3\varphi)}{8\Delta}$ $\gamma = \frac{1}{2} - \frac{(1+\varphi)(4+3\varphi)}{8\Delta}$			
K	$\varphi$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	
0	0	0,5	0	0,5	1	0,333 33	1	
	0,5	0,605 26	0,092 11	0,394 74	1,072 37	0,282 89	0,927 63	
	1	0,678 57	0,142 86	0,321 43	1,125	0,25	0,875	
	2	0,769 23	0,192 31	0,230 77	1,192 31	0,211 54	0,807 69	
	$\infty$	1	0,25	0	1,375	0,125	0,625	
0,1	0	0,5	0	0,5	1	0,338 71	1	
	0,5	0,603 09	0,095 36	0,396 91	1,070 88	0,287 37	0,929 12	
	1	0,676 06	0,147 89	0,323 94	1,123 24	0,253 52	0,876 76	
	2	0,767 18	0,198 47	0,232 82	1,190 84	0,213 74	0,809 16	
	$\infty$	1	0,25	0	1,375	0,125	0,625	
0,5	0	0,5	0	0,5	1	0,357 14	1	
	0,5	0,595 24	0,107 14	0,404 76	1,065 48	0,303 57	0,934 52	
	1	0,666 67	0,166 67	0,333 33	1,116 67	0,266 67	0,883 33	
	2	0,759 26	0,222 22	0,240 74	1,185 19	0,222 22	0,814 81	
	$\infty$	1	0,25	0	1,375	0,125	0,625	
1	0	0,5	0	0,5	1	0,375	1	
	0,5	0,586 96	0,119 57	0,413 04	1,059 78	0,320 65	0,940 22	
	1	0,656 25	0,187 5	0,343 75	1,109 38	0,281 25	0,890 63	
	2	0,75	0,25	0,25	1,178 57	0,232 14	0,821 43	
	$\infty$	1	0,25	0	1,375	0,125	0,625	
2	0	0,5	0	0,5	1	0,4	1	
	0,5	0,574 07	0,138 89	0,425 93	1,050 93	0,347 22	0,949 07	
	1	0,638 89	0,222 22	0,361 11	1,097 22	0,305 56	0,904 78	
	2	0,733 33	0,3	0,266 67	1,166 67	0,25	0,833 33	
	$\infty$	1	0,25	0	1,375	0,125	0,625	
10	0	0,5	0	0,5	1	0,461 54	1	
	0,5	0,533 90	0,199 15	0,466 10	1,023 31	0,430 08	0,976 69	
	1	0,573 53	0,352 94	0,426 47	1,051 47	0,397 06	0,948 53	
	2	0,652 17	0,543 48	0,347 83	1,108 70	0,336 96	0,891 30	
	$\infty$	1	0,25	0	1,375	0,125	0,625	
$\infty$	99	0,5	$\varphi/2$	0,5	1	0,5	1	



**Tableau 32 – Moments et réactions sur appuis dans un portique à une travée, symétrique, à deux rampants et béquilles verticales sur deux articulations (suite)**

Cas de charge							
Diagramme des moments							
Réactions et moments sur appuis	$R_A = -R_E = -\frac{qh^2}{2\ell}$ $Q_A = qh - Q_E \quad Q_E = \frac{qh}{2} \left[ \frac{5K + 12 + 6\varphi}{8\Delta} \right]$	$R_A = -R_E = \frac{M}{\ell}$ $Q = -\frac{3M}{h} \left( \frac{2 + \varphi}{4\Delta} \right)$					
Moments aux nœuds B, C et D pour des valeurs particulières de K et de $\varphi$	$M_B = \beta \frac{qh^2}{2} \quad M_C = -\gamma \frac{qh^2}{2} \quad M_D = -\delta \frac{qh^2}{2}$ $\beta = 1 - \delta \quad \delta = \frac{5K + 12 + 6\varphi}{8\Delta}$ $\gamma = \frac{(1 + \varphi)(5K + 12 + 6\varphi)}{8\Delta} - \frac{1}{2}$	$M_{B_1} = M_D = -\beta_1 M \quad M_{B_2} = -\beta_2 M \quad M_C = \gamma M$ $\beta_1 = \frac{3(\varphi + 2)}{4\Delta} \quad \beta_2 = 1 - \beta_1$ $\gamma = \frac{3(1 + \varphi)(2 + \varphi)}{\Delta} - \frac{1}{2}$					
K	$\varphi$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\gamma$
0	0	0,5	0	0,5	0,5	0,5	0
	0,5	0,605 26	0,092 11	0,394 74	0,394 74	0,605 26	0,092 11
	1	0,678 57	0,142 86	0,321 43	0,321 43	0,678 57	0,142 86
	2	0,769 23	0,192 31	0,230 77	0,230 77	0,769 23	0,192 31
	$\infty$	1	0,25	0	0	1	0,25
0,1	0	0,495 97	0,004 03	0,504 03	0,483 87	0,516 13	-0,016 13
	0,5	0,600 52	0,099 23	0,399 48	0,386 60	0,613 40	0,079 90
	1	0,674 30	0,151 41	0,325 70	0,316 90	0,683 10	0,133 80
	2	0,766 22	0,201 34	0,233 78	0,229 01	0,770 99	0,187 02
	$\infty$	1	0,25	0	0	1	0,25
0,5	0	0,482 14	0,017 86	0,517 86	0,428 57	0,571 43	-0,071 43
	0,5	0,583 33	0,125	0,416 67	0,357 14	0,642 86	0,035 71
	1	0,658 33	0,183 33	0,341 67	0,3	0,7	0,1
	2	0,754 63	0,236 11	0,245 37	0,222 22	0,777 78	0,166 67
	$\infty$	1	0,25	0	0	1	0,25
1	0	0,468 75	0,031 25	0,531 25	0,375	0,625	-0,125
	0,5	0,565 22	0,152 17	0,434 78	0,326 09	0,673 91	-0,010 87
	1	0,640 63	0,218 75	0,359 38	0,281 25	0,718 75	0,062 5
	2	0,741 07	0,276 79	0,258 93	0,214 29	0,785 71	0,142 86
	$\infty$	1	0,25	0	0	1	0,25
2	0	0,45	0,05	0,55	0,3	0,7	-0,2
	0,5	0,537 04	0,194 44	0,462 96	0,277 78	0,722 22	-0,083 33
	1	0,611 11	0,277 78	0,388 89	0,25	0,75	0
	2	0,716 67	0,35	0,283 33	0,2	0,8	0,1
	$\infty$	1	0,25	0	0	1	0,25
10	0	0,403 85	0,096 15	0,596 15	0,115 38	0,884 62	-0,384 62
	0,5	0,449 15	0,326 27	0,550 85	0,127 12	0,872 88	-0,309 32
	1	0,5	0,5	0,5	0,132 35	0,867 65	-0,235 29
	2	0,597 83	0,706 52	0,402 17	0,130 43	0,869 57	-0,108 70
	$\infty$	1	0,25	0	0	1	0,25
$\infty$	$\varphi$	0,375	$\frac{1}{8}(1 + 5\varphi)$	0,625	0	1	-0,5

**Tableau 33 – Moments fléchissants dans des portiques à 2, 3 et 4 travées, à béquilles verticales sur articulations**

Les béquilles ont la même hauteur  $h$  et la même inertie constante  $I_1$ .

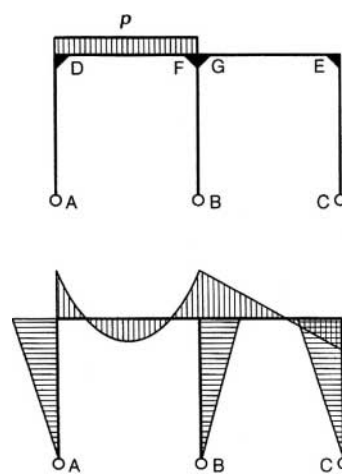
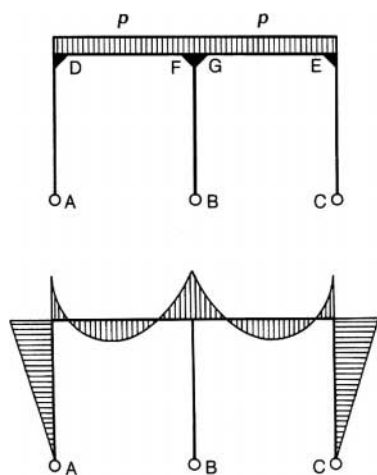
fléchissants aux nœuds pour les différents cas de charges indiqués sur les schémas en fonction du rapport sans dimension :

Les traverses horizontales ont la même longueur  $\ell$  et la même inertie constante  $I_2$ .

$$K = \frac{hI_2}{\ell I_1}$$

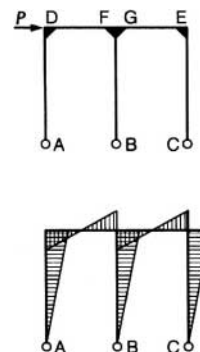
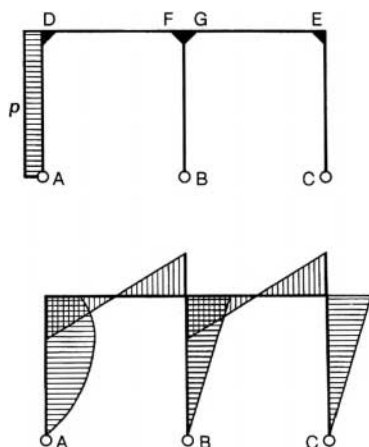
Les tableaux numériques donnent les valeurs des moments

Les diagrammes des moments fléchissants figurent en traits fins sur les schémas des portiques.



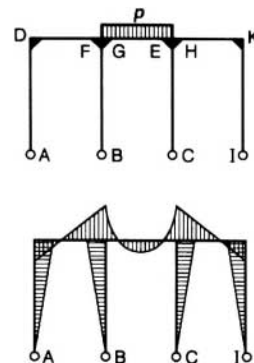
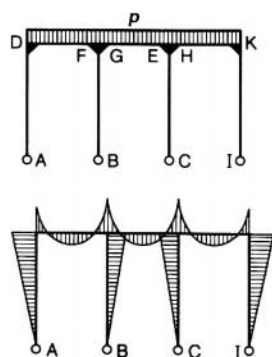
$K$	$\frac{M_D}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)} = \frac{M_E}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)}$	$\frac{M_F}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)} = \frac{M_G}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)}$	$M_D / \frac{p\ell^2}{4}$	$M_F / \frac{p\ell^2}{4}$	$M_G / \frac{p\ell^2}{4}$	$M_E / \frac{p\ell^2}{4}$
0	-0,333 33	-0,333 33	-0,333 33	-0,333 33	0	0
0,1	-0,294 12	-0,352 94	-0,298 57	-0,327 99	-0,024 96	0,004 46
0,2	-0,263 16	-0,368 42	-0,270 47	-0,323 10	-0,045 32	0,007 31
0,3	-0,238 10	-0,380 95	-0,247 25	-0,318 68	-0,062 27	0,009 16
0,4	-0,217 39	-0,391 30	-0,227 74	-0,314 70	-0,076 60	0,010 35
0,6	-0,185 19	-0,407 41	-0,196 76	-0,307 87	-0,099 54	0,011 57
0,8	-0,161 29	-0,419 35	-0,173 24	-0,302 27	-0,117 08	0,011 95
1	-0,142 86	-0,428 57	-0,154 76	-0,297 62	-0,130 95	0,011 90
1,5	-0,111 11	-0,444 44	-0,122 22	-0,288 89	-0,155 56	0,011 11
2	-0,090 91	-0,454 55	-0,101 01	-0,282 83	-0,171 72	0,010 10
2,5	-0,076 92	-0,461 54	-0,086 08	-0,278 39	-0,183 15	0,009 16
3	-0,066 67	-0,466 67	-0,075	-0,275	-0,191 67	0,008 33
3,5	-0,058 82	-0,470 59	-0,066 45	-0,272 33	-0,198 26	0,007 63
4	-0,052 63	-0,473 68	-0,059 65	-0,270 18	-0,203 51	0,007 02
4,5	-0,047 62	-0,476 19	-0,054 11	-0,268 40	-0,207 79	0,006 49
5	-0,043 48	-0,478 26	-0,049 52	-0,266 91	-0,211 35	0,006 04
6	-0,037 04	-0,481 48	-0,042 33	-0,264 55	-0,216 93	0,005 29
7	-0,032 26	-0,483 87	-0,036 96	-0,262 77	-0,221 10	0,004 70
8	-0,028 57	-0,485 71	-0,032 80	-0,261 38	-0,224 34	0,004 23
9	-0,025 64	-0,487 18	-0,029 49	-0,260 26	-0,226 92	0,003 85
10	-0,023 26	-0,488 37	-0,026 78	-0,259 34	-0,229 03	0,003 52
$\infty$	0	-0,5	0	-0,25	-0,25	0

Tableau 33 – Moments fléchissants dans des portiques à 2, 3 et 4 travées, à béquilles verticales sur articulations (suite)



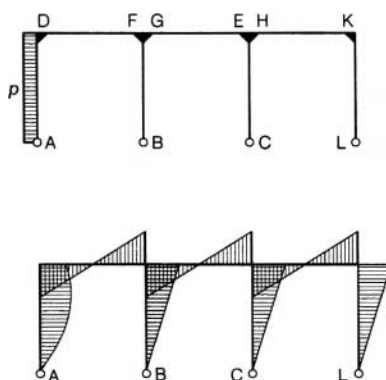
$K$	$M_D/ph^2$	$M_F/ph^2$	$M_G/ph^2$	$M_E/ph^2$	$\frac{M_D}{Ph} = -\frac{M_E}{Ph}$	$\frac{M_F}{Ph} = -\frac{M_G}{Ph}$
0	0,125	-0,125	0,125	-0,125	0,25	-0,25
0,1	0,119 40	-0,119 60	0,126 78	-0,134 25	0,257 58	-0,242 42
0,2	0,115 31	-0,114 95	0,128 11	-0,141 63	0,263 89	-0,236 11
0,3	0,111 95	-0,111 26	0,129 12	-0,147 66	0,269 23	-0,230 77
0,4	0,109 21	-0,108 18	0,129 92	-0,152 69	0,273 81	-0,226 19
0,6	0,105 03	-0,103 30	0,131 08	-0,160 59	0,281 25	-0,218 75
0,8	0,102 00	-0,099 61	0,131 87	-0,166 52	0,287 04	-0,212 96
1	0,099 70	-0,096 73	0,132 44	-0,171 13	0,291 67	-0,208 33
1,5	0,095 83	-0,091 67	0,133 33	-0,179 17	0,3	-0,2
2	0,093 43	-0,088 38	0,133 84	-0,184 34	0,305 56	-0,194 44
2,5	0,091 80	-0,086 08	0,134 16	-0,187 96	0,309 52	-0,190 48
3	0,090 63	-0,084 38	0,134 38	-0,190 63	0,312 5	-0,187 5
3,5	0,089 73	-0,083 06	0,134 53	-0,192 67	0,314 81	-0,185 19
4	0,089 04	-0,082 02	0,134 65	-0,194 30	0,316 67	-0,183 33
4,5	0,088 47	-0,081 17	0,134 74	-0,195 62	0,318 18	-0,181 82
5	0,088 01	-0,080 46	0,134 81	-0,196 71	0,319 44	-0,180 56
6	0,087 30	-0,079 37	0,134 92	-0,198 41	0,321 43	-0,178 57
7	0,086 78	-0,078 55	0,135 00	-0,199 68	0,322 92	-0,177 08
8	0,086 38	-0,077 91	0,135 05	-0,200 66	0,324 07	-0,175 93
9	0,086 06	-0,077 40	0,135 10	-0,201 44	0,325	-0,175
10	0,085 80	-0,076 99	0,135 13	-0,202 08	0,325 40	-0,174 60
$\infty$	0,083 33	-0,072 92	0,135 42	-0,208 33	0,333 33	-0,166 67

**Tableau 33 – Moments fléchissants dans des portiques à 2, 3 et 4 travées, à béquilles verticales sur articulations (suite)**



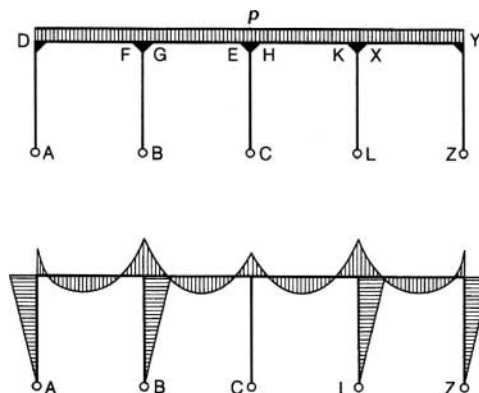
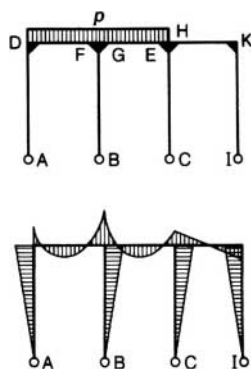
$K$	$\frac{M_D}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)} = \frac{M_K}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)}$	$\frac{M_F}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)} = \frac{M_H}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)}$	$\frac{M_G}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)} = \frac{M_E}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)}$	$\frac{M_D}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)} = \frac{M_K}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)}$	$\frac{M_F}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)} = \frac{M_H}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)}$	$\frac{M_G}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)} = \frac{M_E}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)}$
0	-0,333 33	-0,333 33	-0,333 33	0	0	-0,333 33
0,1	-0,295 08	-0,350 82	-0,334 43	0,016 39	-0,036 07	-0,314 75
0,2	-0,265 82	-0,362 03	-0,336 71	0,025 92	-0,060 76	-0,301 27
0,3	-0,242 42	-0,369 70	-0,339 39	0,030 30	-0,078 79	-0,290 91
0,4	-0,223 14	-0,375 21	-0,342 15	0,033 06	-0,092 56	-0,282 64
0,6	-0,192 98	-0,382 46	-0,347 37	0,035 09	-0,112 28	-0,270 18
0,8	-0,170 31	-0,386 90	-0,351 97	0,034 99	-0,125 76	-0,261 14
1	-0,152 54	-0,389 83	-0,355 93	0,033 90	-0,135 59	-0,254 24
1,5	-0,121 21	-0,393 94	-0,363 64	0,030 30	-0,151 52	-0,242 42
2	-0,100 67	-0,395 97	-0,369 13	0,026 85	-0,161 07	-0,234 90
2,5	-0,086 12	-0,397 13	-0,373 21	0,023 92	-0,167 46	-0,229 67
3	-0,075 27	-0,397 85	-0,376 34	0,021 51	-0,172 04	-0,225 81
3,5	-0,066 85	-0,398 33	-0,378 83	0,019 50	-0,175 49	-0,222 84
4	-0,060 13	-0,398 66	-0,380 85	0,017 82	-0,178 17	-0,220 49
4,5	-0,054 54	-0,398 91	-0,382 51	0,016 39	-0,180 33	-0,218 58
5	-0,050 08	-0,399 09	-0,383 92	0,015 17	-0,182 09	-0,217 00
6	-0,042 90	-0,399 34	-0,386 14	0,013 20	-0,184 82	-0,214 52
7	-0,037 53	-0,399 50	-0,387 82	0,011 68	-0,186 82	-0,212 68
8	-0,033 36	-0,399 61	-0,389 14	0,010 46	-0,188 36	-0,211 25
9	-0,030 02	-0,399 68	-0,390 21	0,009 48	-0,189 57	-0,210 11
10	-0,027 28	-0,399 74	-0,391 08	0,008 66	-0,190 56	-0,209 48
$\infty$	0	-0,4	-0,4	0	-0,2	-0,2

Tableau 33 – Moments fléchissants dans des portiques à 2, 3 et 4 travées, à béquilles verticales sur articulations (suite)



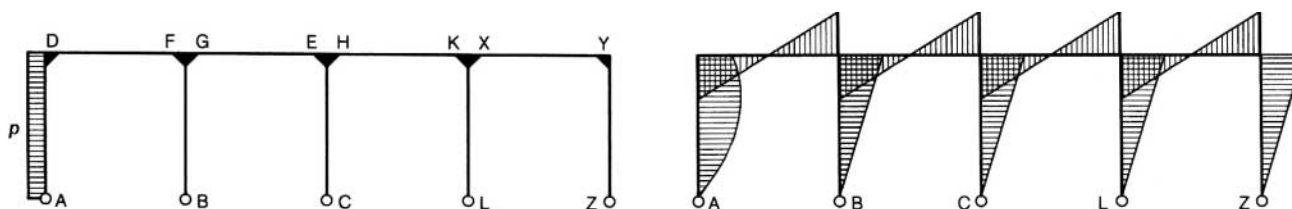
$K$	$M_D/ph^2$	$M_F/ph^2$	$M_G/ph^2$	$M_E/ph^2$	$M_H/ph^2$	$M_K/ph^2$
0	0,083 33	-0,083 33	0,083 33	-0,083 33	0,083 33	-0,083 33
0,1	0,077 39	-0,080 05	0,082 31	-0,081 90	0,086 61	-0,091 73
0,2	0,072 87	-0,077 95	0,081 77	-0,080 51	0,088 71	-0,098 18
0,3	0,069 26	-0,076 52	0,081 49	-0,079 22	0,090 15	-0,103 35
0,4	0,066 30	-0,075 48	0,081 36	-0,078 06	0,091 18	-0,107 62
0,6	0,061 65	-0,074 12	0,081 34	-0,076 07	0,092 54	-0,114 28
0,8	0,058 14	-0,073 29	0,081 45	-0,074 46	0,093 38	-0,119 28
1	0,055 39	-0,072 74	0,081 62	-0,073 14	0,093 93	-0,123 18
1,5	0,050 51	-0,071 97	0,082 07	-0,070 71	0,094 70	-0,130 05
2	0,047 28	-0,071 59	0,082 47	-0,069 05	0,095 08	-0,134 53
2,5	0,044 99	-0,071 37	0,082 80	-0,067 84	0,095 30	-0,137 70
3	0,043 28	-0,071 24	0,083 06	-0,066 94	0,095 43	-0,140 05
3,5	0,041 95	-0,071 15	0,083 29	-0,066 22	0,095 52	-0,141 88
4	0,040 88	-0,071 08	0,083 47	-0,065 65	0,095 58	-0,143 33
4,5	0,040 01	-0,071 04	0,083 63	-0,065 18	0,095 63	-0,144 52
5	0,039 28	-0,071 00	0,083 76	-0,064 79	0,095 66	-0,145 50
6	0,038 14	-0,070 96	0,083 98	-0,064 17	0,095 71	-0,147 05
7	0,037 28	-0,070 93	0,084 14	-0,063 71	0,095 74	-0,148 20
8	0,036 61	-0,070 91	0,084 27	-0,063 35	0,095 76	-0,149 10
9	0,036 08	-0,070 89	0,084 38	-0,063 05	0,095 77	-0,149 82
10	0,035 64	-0,070 88	0,084 47	-0,062 82	0,095 78	-0,150 41
$\infty$	0,031 25	-0,070 83	0,085 42	-0,060 42	0,095 83	-0,156 25

**Tableau 33 – Moments fléchissants dans des portiques à 2, 3 et 4 travées, à béquilles verticales sur articulations (suite)**



K	$M_F / \frac{p\ell^2}{4}$	$M_G / \frac{p\ell^2}{4}$	$\frac{M_D}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)} = \frac{M_Y}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)}$	$\frac{M_F}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)} = \frac{M_X}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)}$	$\frac{M_G}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)} = \frac{M_K}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)}$	$\frac{M_E}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)} = \frac{M_H}{\left(\frac{p\ell^2}{4}\right)}$
0	-0,333 33	-0,333 33	-0,333 33	-0,333 33	-0,333 33	-0,333 33
0,1	-0,360 11	-0,344 20	-0,295 03	-0,350 93	-0,335 40	-0,332 30
0,2	-0,378 06	-0,354 08	-0,265 59	-0,362 59	-0,339 49	-0,330 25
0,3	-0,390 91	-0,362 77	-0,241 94	-0,370 97	-0,344 09	-0,327 96
0,4	-0,400 55	-0,370 37	-0,222 38	-0,377 33	-0,348 64	-0,325 68
0,6	-0,414 04	-0,382 85	-0,191 74	-0,386 43	-0,356 93	-0,321 53
0,8	-0,423 00	-0,392 57	-0,168 70	-0,392 68	-0,363 96	-0,318 02
1	-0,429 38	-0,400 32	-0,150 68	-0,397 26	-0,369 86	-0,315 07
1,5	-0,439 39	-0,414 14	-0,119 05	-0,404 76	-0,380 95	-0,309 52
2	-0,445 19	-0,423 23	-0,098 45	-0,409 33	-0,388 60	-0,305 70
2,5	-0,448 96	-0,429 64	-0,083 94	-0,412 41	-0,394 16	-0,302 92
3	-0,451 61	-0,434 41	-0,073 17	-0,414 63	-0,398 37	-0,300 81
3,5	-0,453 57	-0,438 09	-0,064 85	-0,416 32	-0,401 67	-0,299 16
4	-0,455 09	-0,441 02	-0,058 24	-0,417 64	-0,404 33	-0,297 84
4,5	-0,456 28	-0,443 40	-0,052 85	-0,418 70	-0,406 50	-0,296 75
5	-0,457 26	-0,445 38	-0,048 37	-0,419 57	-0,408 32	-0,295 84
6	-0,458 75	-0,448 48	-0,041 36	-0,420 92	-0,411 19	-0,294 40
7	-0,459 83	-0,450 79	-0,036 13	-0,421 92	-0,413 35	-0,293 33
8	-0,460 65	-0,452 58	-0,032 07	-0,422 69	-0,415 03	-0,292 48
9	-0,461 30	-0,454 00	-0,028 84	-0,423 30	-0,416 38	-0,291 81
10	-0,461 82	-0,455 17	-0,026 19	-0,423 79	-0,417 48	-0,291 26
∞	-0,466 67	-0,466 67	0	-0,428 57	-0,428 57	-0,285 71

Tableau 33 – Moments fléchissants dans des portiques à 2, 3 et 4 travées, à béquilles verticales sur articulations (suite)



$K$	$M_D/ph^2$	$M_F/ph^2$	$M_G/ph^2$	$M_E/ph^2$	$M_H/ph^2$	$M_K/ph^2$	$M_X/ph^2$	$M_Y/ph^2$
0	0,062 50	-0,062 50	0,062 50	-0,062 50	0,062 50	-0,062 50	0,062 50	-0,062 50
0,1	0,055 32	-0,059 20	0,062 89	-0,062 69	0,062 31	-0,062 11	0,065 80	-0,069 68
0,2	0,049 80	-0,057 02	0,063 65	-0,063 08	0,061 92	-0,061 35	0,067 98	-0,075 20
0,3	0,045 36	-0,055 44	0,064 52	-0,063 51	0,061 49	-0,060 48	0,069 56	-0,079 64
0,4	0,041 70	-0,054 25	0,065 37	-0,063 93	0,061 07	-0,059 63	0,070 75	-0,083 30
0,6	0,035 95	-0,052 54	0,066 92	-0,064 71	0,060 29	-0,058 08	0,072 46	-0,089 05
0,8	0,031 63	-0,051 37	0,068 24	-0,065 37	0,059 63	-0,056 76	0,073 63	-0,093 37
1	0,028 25	-0,050 51	0,069 35	-0,065 92	0,059 08	-0,055 65	0,074 49	-0,096 75
1,5	0,022 32	-0,049 11	0,071 43	-0,066 96	0,058 04	-0,053 57	0,075 89	-0,102 68
2	0,018 46	-0,048 25	0,072 86	-0,067 68	0,057 32	-0,052 14	0,076 75	-0,106 54
2,5	0,015 74	-0,047 67	0,073 91	-0,068 20	0,056 80	-0,051 09	0,077 33	-0,109 26
3	0,013 72	-0,047 26	0,074 70	-0,068 60	0,056 40	-0,050 30	0,077 74	-0,111 28
3,5	0,012 16	-0,046 94	0,075 31	-0,068 91	0,056 09	-0,049 69	0,078 06	-0,112 84
4	0,010 92	-0,046 69	0,075 81	-0,069 16	0,055 84	-0,049 19	0,078 31	-0,114 08
4,5	0,009 91	-0,046 49	0,076 22	-0,069 36	0,055 64	-0,048 78	0,078 51	-0,115 09
5	0,009 07	-0,046 33	0,076 56	-0,069 53	0,055 47	-0,048 44	0,078 67	-0,115 93
6	0,007 76	-0,046 08	0,077 10	-0,069 80	0,055 20	-0,047 90	0,078 92	-0,117 24
7	0,006 77	-0,045 89	0,077 50	-0,070 00	0,055 00	-0,047 50	0,079 11	-0,118 23
8	0,006 01	-0,045 75	0,077 82	-0,070 16	0,054 84	-0,047 18	0,079 25	-0,118 99
9	0,005 41	-0,045 63	0,078 07	-0,070 29	0,054 71	-0,046 93	0,079 37	-0,119 59
10	0,004 91	-0,045 54	0,078 28	-0,070 39	0,054 61	-0,046 72	0,079 46	-0,120 09
$\infty$	0	-0,044 64	0,080 36	-0,071 43	0,053 57	-0,044 64	0,080 36	-0,125

## 8. Anneaux

### Anneau circulaire

L'anneau circulaire élastique de section constante se rencontre notamment dans le calcul des conduites circulaires soumises à des systèmes de forces divers tels que : poids propre, pression d'un liquide intérieur ou extérieur, poids des remblais, poussée des terres, etc.

■ **Notations. Méthode de calcul**

Un anneau circulaire  $\Sigma$  de rayon  $r$  et d'inertie constante  $I$  est soumis à un système de forces extérieures en équilibre  $S$ .

Une section  $X$  de l'anneau est repérée par l'angle  $\theta = (IO, IX)$ .

Pour calculer le moment fléchissant  $M(\theta)$ , l'effort normal  $N(\theta)$  et l'effort tranchant  $T(\theta)$  dans la section  $X$ , on associe à l'anneau  $\Sigma$  la structure isostatique  $\Sigma_0$  constituée par l'anneau encastré en  $O$  sur un appui fixe, et coupé dans la section diamétralement opposée  $A$ .

Les inconnues hyperstatiques sont le moment fléchissant  $M_1$ , l'effort normal  $N_1$  et l'effort tranchant  $T_1$  dans la section  $A$ .

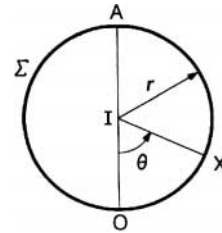
Nous calculons également le déplacement relatif de la section  $A$  par rapport à la section  $O$  : translation de composante horizontale  $u_1$  et de composante verticale  $v_1$  et rotation  $\omega_1$ . On notera que le raccourcissement du diamètre vertical  $OA$  est  $\delta = -v_1$ .

Nous désignons par  $m(\theta)$ ,  $n(\theta)$  et  $t(\theta)$  le moment fléchissant, l'effort normal et l'effort tranchant dans la section  $X$  de la structure  $\Sigma_0$  sous l'effet des forces appliquées à l'anneau  $\Sigma$ . Nous posons :

$$F = \int_0^\pi m(\theta) d\theta \quad G = \int_0^\pi m(\theta) \cos \theta d\theta \quad H = \int_0^\pi m(\theta) \sin \theta d\theta$$

On simplifie beaucoup le calcul en décomposant le système  $S$  des forces appliquées à l'anneau  $\Sigma$  en somme de systèmes  $S'$  de forces symétriques par rapport à  $OA$  et de systèmes  $S''$  de forces antisymétriques par rapport à  $OA$ . Puisque le système  $S$  est en équilibre, la somme des réactions d'appui en  $O$  dues aux systèmes  $S'$  et  $S''$  est nulle.

On néglige les déformations dues à l'effort normal et à l'effort tranchant.



● **Anneau soumis à un système de forces symétriques**

En raison de la symétrie, on peut se borner à  $0 \leq \theta \leq \pi$ . On trouve :

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{\pi} (2G - F) & N_1 = \frac{2}{\pi r} G & T_1 = 0 \\ u_1 = 0 & v_1 = \frac{r^2}{EI} \left( \frac{2}{\pi} F - H \right) & \omega_1 = 0 \\ M(\theta) = m(\theta) + M_1 - N_1 r (1 + \cos \theta) \\ N(\theta) = n(\theta) - N_1 \cos \theta \\ T(\theta) = t(\theta) + N_1 \sin \theta \end{cases}$$

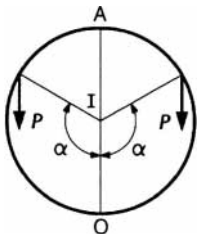
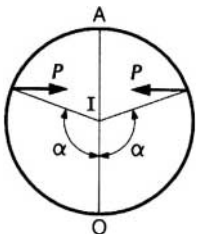
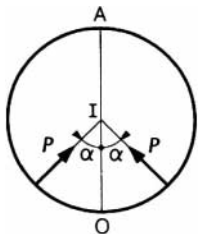
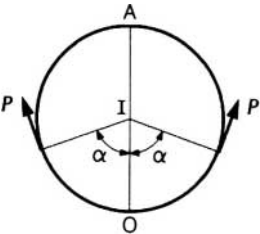
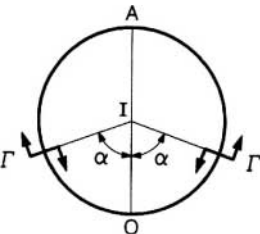
● **Anneau soumis à un système de forces antisymétriques**

En raison de l'antisymétrie, on peut se borner à  $0 \leq \theta \leq \pi$ . On trouve :

$$\begin{cases} M_1 = 0 & N_1 = 0 & T_1 = \frac{2}{\pi r} H \\ u_1 = -\frac{r^2}{EI} \left( F + G - \frac{4}{\pi} H \right) & v_1 = 0 & \omega_1 = \frac{r}{EI} \left( F - \frac{4}{\pi} H \right) \\ M(\theta) = m(\theta) - T_1 r \sin \theta \\ N(\theta) = n(\theta) - T_1 \sin \theta \\ T(\theta) = t(\theta) - T_1 \cos \theta \end{cases}$$



Tableau 34 – Anneau circulaire. Systèmes de forces élémentaires

	<p>■ Deux forces symétriques verticales <math>P</math> :</p> $M_1 = -\frac{Pr}{\pi} [f_1(\alpha) + \sin^2 \alpha]$ $N_1 = -\frac{P}{\pi} \sin^2 \alpha$ $v_1 = \frac{Pr^3}{EI} \left[ \frac{2}{\pi} f_1(\alpha) - \frac{1}{2} f_4(\alpha) \right]$
	<p>■ Deux forces symétriques horizontales <math>P</math> :</p> $M_1 = \frac{Pr}{\pi} [f_2(\alpha) - f_3(\alpha)]$ $N_1 = \frac{P}{\pi} f_2(\alpha)$ $v_1 = \frac{Pr^3}{EI} \left[ \frac{2}{\pi} f_3(\alpha) - \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha)^2 \right]$
	<p>■ Deux forces symétriques radiales <math>P</math> :</p> $M_1 = -\frac{Pr}{\pi} f_1(\alpha)$ $N_1 = \frac{P}{\pi} \alpha \sin \alpha$ $v_1 = \frac{Pr^3}{EI} \left[ \frac{2}{\pi} (1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} f_3(\alpha) \right]$
	<p>■ Deux forces symétriques tangentielles <math>P</math> :</p> $M_1 = \frac{Pr}{\pi} [f_3(\alpha) - (\alpha - \sin \alpha)]$ $N_1 = \frac{P}{\pi} f_3(\alpha)$ $v_1 = \frac{Pr^3}{EI} \left\{ \frac{2}{\pi} (\alpha - \sin \alpha) - \frac{1}{2} [f_1(\alpha) + 1 - \cos \alpha] \right\}$
	<p>■ Deux couples symétriques <math>\Gamma</math> :</p> $M_1 = \frac{\Gamma}{\pi} (2 \sin \alpha - \alpha)$ $N_1 = \frac{2\Gamma}{\pi r} \sin \alpha$ $v_1 = -\frac{\Gamma r^2}{EI} \left( 1 - \cos \alpha - \frac{2\alpha}{\pi} \right)$

**Fonctions**  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$  et  $f_4(\alpha)$ . Elles sont définies pour  $0 \leq \alpha \leq \pi$  :

$$f_1(\alpha) = 1 - \cos \alpha - \alpha \sin \alpha$$

$$f_2(\alpha) = \alpha - \sin \alpha \cos \alpha$$

$$f_3(\alpha) = \sin \alpha - \alpha \cos \alpha$$

$$f_4(\alpha) = \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin \alpha$$

**Nota** : ces solutions jouent le même rôle que les lignes d'influence. Elles permettent d'obtenir par superposition la solution relative à tout système de forces appliquées à l'anneau.

Tableau 34 – Anneau circulaire. Systèmes de forces élémentaires (suite)

	<p>■ Deux forces antisymétriques verticales <math>P</math> :</p> $T_1 = \frac{P}{\pi} f_4(\alpha)$ $u_1 = -\frac{Pr^3}{EI} \left[ f_1(\alpha) - \frac{2}{\pi} f_4(\alpha) - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha \right]$ $\omega_1 = \frac{Pr^2}{EI} \left[ f_1(\alpha) - \frac{2}{\pi} f_4(\alpha) \right]$
	<p>■ Deux forces antisymétriques horizontales <math>P</math> :</p> $T_1 = \frac{P}{\pi} (1 - \cos \alpha)^2$ $u_1 = -\frac{Pr^3}{EI} \left[ f_3(\alpha) + \frac{1}{2} f_2(\alpha) - \frac{2}{\pi} (1 - \cos \alpha)^2 \right]$ $\omega_1 = \frac{Pr^2}{EI} \left[ f_3(\alpha) - \frac{2}{\pi} (1 - \cos \alpha)^2 \right]$
	<p>■ Deux forces antisymétriques radiales <math>P</math> :</p> $T_1 = \frac{P}{\pi} f_3(\alpha)$ $u_1 = -\frac{Pr^3}{EI} \left[ 1 - \cos \alpha + \frac{1}{2} \alpha \sin \alpha - \frac{2}{\pi} f_3(\alpha) \right]$ $\omega_1 = \frac{Pr^2}{EI} \left[ 1 - \cos \alpha - \frac{2}{\pi} f_3(\alpha) \right]$
	<p>■ Deux forces antisymétriques tangentielles <math>P</math> :</p> $T_1 = \frac{P}{\pi} [1 - \cos \alpha + f_1(\alpha)]$ $u_1 = -\frac{Pr^3}{EI} \left\{ \alpha (1 - \cos \alpha) - \frac{1}{2} \sin \alpha - \frac{2}{\pi} [1 - \cos \alpha + f_1(\alpha)] \right\}$ $\omega_1 = \frac{Pr^2}{EI} \left\{ \alpha - \sin \alpha - \frac{2}{\pi} [1 - \cos \alpha + f_1(\alpha)] \right\}$
	<p>■ Deux couples antisymétriques <math>\Gamma</math> :</p> $T_1 = \frac{2\Gamma}{\pi r} (1 - \cos \alpha)$ $u_1 = -\frac{\Gamma r^2}{EI} \left[ \alpha + \sin \alpha - \frac{4}{\pi} (1 - \cos \alpha) \right]$ $\omega_1 = \frac{\Gamma r}{EI} \left[ \alpha - \frac{4}{\pi} (1 - \cos \alpha) \right]$

Fonctions  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$  et  $f_4(\alpha)$ . Elles sont définies pour  $0 \leq \alpha \leq \pi$  :

$$f_1(\alpha) = 1 - \cos \alpha - \alpha \sin \alpha$$

$$f_2(\alpha) = \alpha - \sin \alpha \cos \alpha$$

$$f_3(\alpha) = \sin \alpha - \alpha \cos \alpha$$

$$f_4(\alpha) = \alpha + \sin \alpha \cos \alpha - 2 \sin \alpha$$

Nota : ces solutions jouent le même rôle que les lignes d'influence. Elles permettent d'obtenir par superposition la solution relative à tout système de forces appliquées à l'anneau.

Tableau 35 – Fonctions  $f_1(\alpha)$ ,  $f_2(\alpha)$ ,  $f_3(\alpha)$  et  $f_4(\alpha)$  du tableau 34

$\alpha$ (1) (degré)	$f_1(\alpha)$	$f_2(\alpha)$	$f_3(\alpha)$	$f_4(\alpha)$	$\alpha$ (1) (degré)	$f_1(\alpha)$	$f_2(\alpha)$	$f_3(\alpha)$	$f_4(\alpha)$
0	0	0	0	0	92	-0,569 83	1,640 58	1,055 43	-0,427 96
2	-0,000 61	0,000 03	0,000 01	-0,000 01	94	-0,566 86	1,710 20	1,112 01	-0,424 11
4	-0,002 43	0,000 23	0,000 11	-0,000 11	96	-0,561 81	1,779 47	1,169 66	-0,417 48
6	-0,005 47	0,000 76	0,000 38	-0,000 38	98	-0,554 60	1,848 24	1,228 31	-0,407 93
8	-0,009 70	0,001 81	0,000 91	-0,000 90	100	-0,545 17	1,916 34	1,287 88	-0,395 30
10	-0,015 12	0,003 52	0,001 77	-0,001 75	102	-0,533 42	1,983 60	1,348 28	-0,379 43
12	-0,021 69	0,006 07	0,003 05	-0,003 02	104	-0,519 30	2,049 88	1,409 42	-0,360 18
14	-0,029 41	0,009 61	0,004 83	-0,004 76	106	-0,502 74	2,115 01	1,471 20	-0,337 43
16	-0,038 23	0,014 29	0,007 20	-0,007 06	108	-0,483 68	2,178 85	1,533 54	-0,311 05
18	-0,048 14	0,020 27	0,010 23	-0,009 98	110	-0,462 06	2,241 26	1,596 32	-0,280 92
20	-0,059 08	0,027 67	0,014 01	-0,013 58	112	-0,437 82	2,302 10	1,659 45	-0,246 93
22	-0,071 02	0,036 64	0,018 59	-0,017 91	114	-0,410 92	2,361 25	1,722 82	-0,208 99
24	-0,083 92	0,047 31	0,024 07	-0,023 02	116	-0,381 31	2,418 59	1,786 31	-0,167 01
26	-0,097 72	0,059 78	0,030 51	-0,028 95	118	-0,348 95	2,474 01	1,849 82	-0,120 93
28	-0,112 37	0,074 17	0,037 98	-0,035 73	120	-0,313 80	2,527 41	1,913 22	-0,070 67
30	-0,127 82	0,090 59	0,046 55	-0,043 39	122	-0,275 83	2,578 70	1,976 41	-0,016 19
32	-0,144 01	0,109 11	0,056 28	-0,051 94	124	-0,235 02	2,627 80	2,039 25	0,042 54
34	-0,160 87	0,129 82	0,067 23	-0,061 38	126	-0,191 34	2,674 64	2,101 62	0,105 55
36	-0,178 33	0,152 79	0,079 46	-0,071 72	128	-0,144 77	2,719 17	2,163 41	0,172 85
38	-0,196 33	0,178 08	0,093 03	-0,082 95	130	-0,095 31	2,761 33	2,224 48	0,244 44
40	-0,214 79	0,205 73	0,107 99	-0,095 04	132	-0,042 95	2,801 10	2,284 71	0,320 28
42	-0,233 64	0,235 78	0,124 38	-0,107 96	134	0,012 31	2,838 44	2,343 97	0,400 37
44	-0,252 80	0,268 25	0,142 25	-0,121 68	136	0,070 47	2,873 34	2,402 12	0,484 64
46	-0,272 18	0,303 16	0,161 63	-0,136 13	138	0,131 51	2,905 82	2,459 04	0,573 03
48	-0,291 71	0,340 50	0,182 58	-0,151 27	140	0,195 42	2,935 86	2,514 59	0,665 48
50	-0,311 29	0,380 26	0,205 11	-0,167 02	142	0,262 18	2,963 52	2,568 64	0,761 90
52	-0,330 84	0,422 42	0,229 25	-0,183 30	144	0,331 75	2,988 80	2,621 07	0,862 18
54	-0,350 27	0,466 95	0,255 04	-0,200 03	146	0,404 11	3,011 77	2,671 73	0,966 20
56	-0,369 48	0,513 79	0,282 49	-0,217 10	148	0,479 22	3,032 48	2,720 50	1,073 85
58	-0,388 39	0,562 89	0,311 62	-0,234 41	150	0,557 03	3,051 01	2,767 25	1,184 98
60	-0,406 90	0,614 18	0,342 43	-0,251 84	152	0,637 49	3,067 42	2,811 84	1,299 44
62	-0,424 91	0,667 59	0,374 93	-0,269 27	154	0,720 54	3,081 81	2,854 16	1,417 06
64	-0,442 33	0,723 01	0,409 13	-0,286 57	156	0,806 12	3,094 29	2,894 06	1,537 67
66	-0,459 07	0,780 34	0,445 02	-0,303 60	158	0,894 16	3,104 95	2,931 43	1,661 08
68	-0,475 01	0,839 49	0,482 59	-0,320 21	160	0,984 59	3,113 92	2,966 14	1,787 09
70	-0,490 07	0,900 34	0,521 84	-0,336 26	162	1,077 33	3,121 33	2,998 07	1,915 51
72	-0,504 15	0,962 74	0,562 73	-0,351 58	164	1,172 29	3,127 30	3,027 10	2,046 11
74	-0,517 15	1,026 58	0,605 26	-0,366 02	166	1,269 39	3,131 98	3,053 11	2,178 67
76	-0,528 97	1,091 71	0,649 40	-0,379 41	168	1,368 52	3,135 52	3,075 99	2,312 96
78	-0,539 52	1,157 99	0,695 11	-0,391 57	170	1,469 58	3,138 07	3,095 63	2,448 75
80	-0,548 70	1,225 25	0,742 35	-0,402 34	172	1,572 48	3,139 78	3,111 92	2,585 80
82	-0,556 42	1,293 35	0,791 09	-0,411 55	174	1,677 08	3,140 83	3,124 77	2,723 86
84	-0,562 57	1,362 12	0,841 28	-0,419 01	176	1,783 29	3,141 37	3,134 05	2,862 68
86	-0,567 08	1,431 40	0,892 86	-0,424 56	178	1,890 97	3,141 56	3,139 69	3,002 01
88	-0,569 85	1,501 01	0,945 79	-0,428 01	180	2	3,141 59	3,141 59	3,141 59
90	-0,570 80	1,570 80	1	-0,429 20					

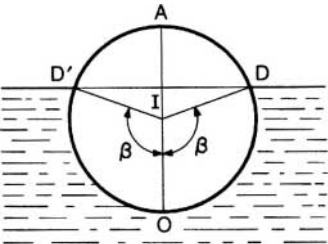
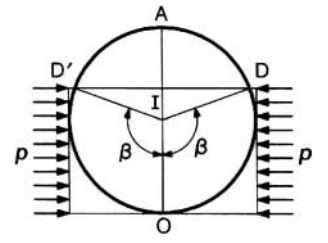
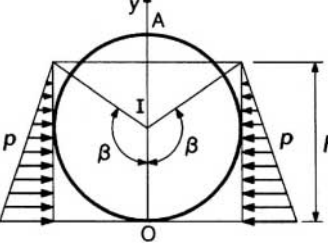
(1) Dans les formules données tableau 34,  $\alpha$  est exprimé en radians.

**Tableau 36 – Anneau circulaire soumis à divers systèmes de forces**

	<p><b>Poids propre.</b> <math>P = 2\pi r\rho</math> désigne le poids total de l'anneau :</p> $M_1 = -\frac{Pr}{4\pi} \quad N_1 = -\frac{P}{4\pi}$ $v_1 = -\frac{Pr^3}{EI} \left( \frac{\pi}{8} - \frac{1}{\pi} \right) \approx -0,074\ 39 \frac{Pr^3}{EI}$ <p>Le moment et l'effort normal en O ont pour valeurs :</p> $M_O = -\frac{3Pr}{4\pi} \quad N_O = \frac{P}{4\pi}$
	<p>L'anneau est soumis au <b>poids d'un terrain</b>, de poids spécifique <math>\Delta</math>, réparti sur les zones ABC et AB'C' :</p> $M_1 = -\Delta r^3 \left( \frac{4}{9\pi} - \frac{5}{48} \right) \approx -0,037\ 30 \Delta r^3$ $N_1 = -\Delta r^2 \left( \frac{1}{3\pi} - \frac{1}{16} \right) \approx -0,043\ 60 \Delta r^2$ $v_1 = -\frac{\Delta r^5}{EI} \left( \frac{1}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{9\pi} - \frac{3\pi^2}{32} \right) = -0,039\ 39 \frac{\Delta r^5}{EI}$
	<p>La partie supérieure de l'anneau est soumise à une <b>densité de charge p dirigée vers le bas</b> :</p> $M_1 = -pr^2 \left( \frac{4}{3\pi} - \frac{1}{8} \right) \approx -0,299\ 41 pr^2$ $N_1 = -\frac{pr}{3\pi} \approx -0,106\ 10 pr$ $v_1 = -\frac{pr^4}{EI} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{1}{12} - \frac{2}{\pi} \right) \approx -0,232\ 11 \frac{pr^4}{EI}$
	<p>La partie inférieure de l'anneau est soumise à une <b>densité de charge p dirigée vers le haut</b> :</p> $M_1 = pr^2 \left( \frac{4}{3\pi} - \frac{3}{8} \right) \approx 0,049\ 41 pr^2$ $N_1 = \frac{pr}{3\pi} \approx 0,106\ 10 pr$ $v_1 = -\frac{pr^4}{EI} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{1}{12} - \frac{2}{\pi} \right) \approx -0,065\ 45 \frac{pr^4}{EI}$
	<p>L'anneau est soumis à une <b>pression uniforme p sur l'arc DD'</b> d'ouverture <math>2\beta</math> :</p> $M_1 = \frac{pr^2}{\pi} [2 \sin \beta - \beta(1 + \cos \beta)]$ $N_1 = \frac{pr}{\pi} [\sin \beta - \beta \cos \beta]$ $v_1 = \frac{pr^4}{EI} \left[ \frac{2}{\pi} (\beta - \sin \beta) + \frac{1}{2} \beta \sin \beta - (1 - \cos \beta) \right]$ <p>Lorsque <math>\beta = \frac{\pi}{2}</math> :</p> $M_1 = pr^2 \left( \frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \approx 0,136\ 62 pr^2$ $N_1 = \frac{pr}{\pi} \approx 0,318\ 31 pr$ $v_1 = \frac{pr^4}{EI} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \right) \approx 0,148\ 78 \frac{pr^4}{EI}$

(1) Dans les formules,  $\beta$  est exprimé en radians.

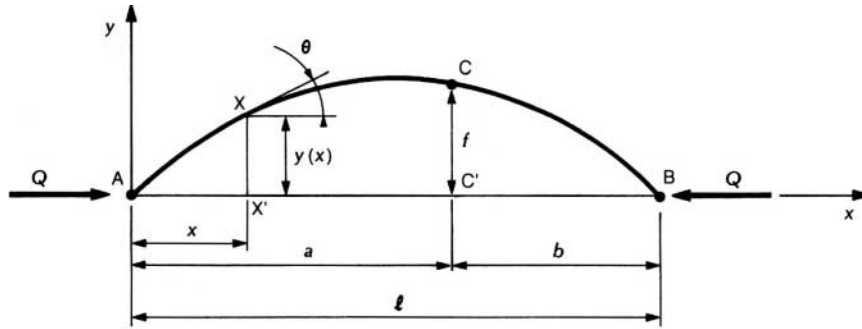
Tableau 36 – Anneau circulaire soumis à divers systèmes de forces (suite)

	<p><b>Pression d'un liquide extérieur</b> de poids spécifique <math>\Delta</math> au-dessous de DD'. (Remplacer <math>\Delta</math> par <math>-\Delta</math> pour un liquide intérieur) :</p> $M_1 = K\Delta r^3 \quad N_1 = K'\Delta r^2 \quad v_1 = K'' \frac{\Delta r^5}{EI}$ $K = \frac{1}{4\pi} [\beta(3 + 4 \cos \beta + 2 \cos^2 \beta) - \sin \beta(4 + 5 \cos \beta)]$ $K' = \frac{1}{4\pi} [\beta(1 + 2 \cos^2 \beta) - 3 \sin \beta \cos \beta]$ $K'' = \frac{1}{\pi} [\sin \beta(2 + \cos \beta) - \beta(1 + 2 \cos \beta)] - \frac{1}{4} \beta \sin \beta \cos \beta - \frac{1}{8} (3 - 5 \cos \beta)(1 - \cos \beta) + \frac{1}{8} \beta^2$																															
<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>\beta</math> (1)</th> <th>0°</th> <th>30°</th> <th>60°</th> <th>90°</th> <th>120°</th> <th>150°</th> <th>180°</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>0</td> <td>0,000 39</td> <td>0,010 38</td> <td>0,056 69</td> <td>0,146 63</td> <td>0,228 95</td> <td>0,25</td> </tr> <tr> <td>K'</td> <td>0</td> <td>0,000 79</td> <td>0,021 63</td> <td>0,125</td> <td>0,353 37</td> <td>0,624 21</td> <td>0,75</td> </tr> <tr> <td>K''</td> <td>0</td> <td>0,000 66</td> <td>0,014 96</td> <td>0,070 04</td> <td>0,157 28</td> <td>0,220 89</td> <td>0,233 70</td> </tr> </tbody> </table>	$\beta$ (1)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	K	0	0,000 39	0,010 38	0,056 69	0,146 63	0,228 95	0,25	K'	0	0,000 79	0,021 63	0,125	0,353 37	0,624 21	0,75	K''	0	0,000 66	0,014 96	0,070 04	0,157 28	0,220 89	0,233 70
$\beta$ (1)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°																									
K	0	0,000 39	0,010 38	0,056 69	0,146 63	0,228 95	0,25																									
K'	0	0,000 79	0,021 63	0,125	0,353 37	0,624 21	0,75																									
K''	0	0,000 66	0,014 96	0,070 04	0,157 28	0,220 89	0,233 70																									
	<p><b>Poussée horizontale</b> de densité constante <math>p</math> de part et d'autre de l'anneau au-dessous de DD' :</p> $M_1 = Kpr^2 \quad N_1 = K'pr \quad v_1 = K'' \frac{pr^4}{EI}$ $K = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{1}{6} \sin \beta(4 + 5 \cos \beta + 2 \cos^2 \beta) - \frac{1}{4} \beta(1 + 4 \cos \beta + 2 \cos^2 \beta) \right]$ $K' = \frac{1}{\pi} \left[ \sin \beta \left( 1 - \frac{1}{3} \sin^2 \beta \right) - \beta \cos \beta \right]$ $K'' = \frac{1}{2\pi} [\beta(1 + 2 \cos^2 \beta) - 3 \sin \beta \cos \beta] - \frac{1}{6} (1 - \cos \beta)^3$																															
<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>\beta</math> (1)</th> <th>0°</th> <th>30°</th> <th>60°</th> <th>90°</th> <th>120°</th> <th>150°</th> <th>180°</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>0</td> <td>0,012 25</td> <td>0,029 94</td> <td>0,087 21</td> <td>0,175 22</td> <td>0,231 89</td> <td>0,25</td> </tr> <tr> <td>K'</td> <td>0</td> <td>0,001 55</td> <td>0,040 08</td> <td>0,212 21</td> <td>0,540 08</td> <td>0,867 58</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>K''</td> <td>0</td> <td>0,001 18</td> <td>0,022 42</td> <td>0,083 33</td> <td>0,144 25</td> <td>0,165 48</td> <td>0,166 67</td> </tr> </tbody> </table>	$\beta$ (1)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	K	0	0,012 25	0,029 94	0,087 21	0,175 22	0,231 89	0,25	K'	0	0,001 55	0,040 08	0,212 21	0,540 08	0,867 58	1	K''	0	0,001 18	0,022 42	0,083 33	0,144 25	0,165 48	0,166 67
$\beta$ (1)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°																									
K	0	0,012 25	0,029 94	0,087 21	0,175 22	0,231 89	0,25																									
K'	0	0,001 55	0,040 08	0,212 21	0,540 08	0,867 58	1																									
K''	0	0,001 18	0,022 42	0,083 33	0,144 25	0,165 48	0,166 67																									
	<p><b>Poussée horizontale d'un remblai</b> de densité <math>p = \lambda(h - y)</math> s'exerçant de part et d'autre de l'anneau :</p> $M_1 = K\lambda r^3 \quad N_1 = K'\lambda r^2 \quad v_1 = K'' \frac{\lambda r^5}{EI}$ $K = \frac{\beta}{24\pi} (3 + 6 \cos \beta + 12 \cos^2 \beta + 4 \cos^3 \beta) - \frac{\sin \beta}{72\pi} (8 + 39 \cos \beta + 22 \cos^2 \beta + 6 \cos^3 \beta)$ $K' = \frac{1}{24\pi} [3\beta(1 + 4 \cos^2 \beta) - \sin \beta \cos \beta(13 + 2 \cos^2 \beta)]$ $K'' = \frac{1}{18\pi} [\sin \beta(4 + 11 \cos^2 \beta) - 3\beta \cos \beta(3 + 2 \cos^2 \beta)] - \frac{1}{24} (1 - \cos \beta)^4$																															
<table border="1"> <thead> <tr> <th><math>\beta</math> (1)</th> <th>0°</th> <th>30°</th> <th>60°</th> <th>90°</th> <th>120°</th> <th>150°</th> <th>180°</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>K</td> <td>0</td> <td>0,000 039</td> <td>0,002 73</td> <td>0,027 13</td> <td>0,095 29</td> <td>0,175 15</td> <td>0,208 33</td> </tr> <tr> <td>K'</td> <td>0</td> <td>0,000 060</td> <td>0,005 80</td> <td>0,062 5</td> <td>0,244 20</td> <td>0,499 94</td> <td>0,625</td> </tr> <tr> <td>K''</td> <td>0</td> <td>0,000 047</td> <td>0,003 55</td> <td>0,029 07</td> <td>0,086 88</td> <td>0,144 38</td> <td>0,166 67</td> </tr> </tbody> </table>	$\beta$ (1)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	K	0	0,000 039	0,002 73	0,027 13	0,095 29	0,175 15	0,208 33	K'	0	0,000 060	0,005 80	0,062 5	0,244 20	0,499 94	0,625	K''	0	0,000 047	0,003 55	0,029 07	0,086 88	0,144 38	0,166 67
$\beta$ (1)	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°																									
K	0	0,000 039	0,002 73	0,027 13	0,095 29	0,175 15	0,208 33																									
K'	0	0,000 060	0,005 80	0,062 5	0,244 20	0,499 94	0,625																									
K''	0	0,000 047	0,003 55	0,029 07	0,086 88	0,144 38	0,166 67																									

(1) Dans les formules,  $\beta$  est exprimé en radians.

## 9. Arcs

Tableau 37 – Arc à trois articulations soumis à des charges verticales



**Formules générales**

Les articulations d'extrémité sont situées sur une même horizontale.

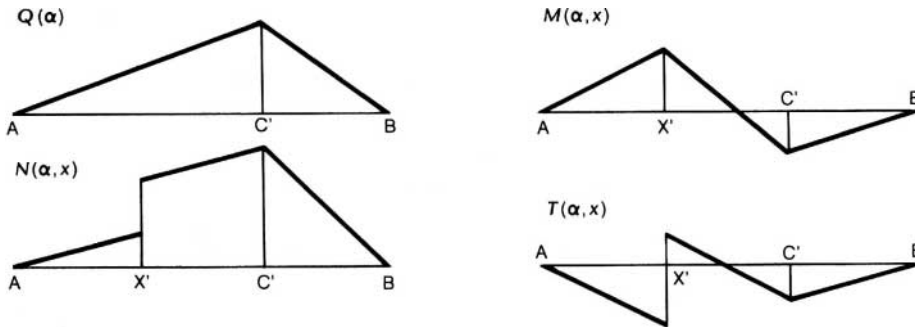
Outre les notations indiquées sur la figure, soit  $\mu(x)$  le moment fléchissant produit par les charges appliquées à l'arc dans la poutre sur appuis simples AB de même portée que l'arc.

La poussée  $Q$  a pour valeur :

$$Q = \frac{\mu(a)}{f}$$

Le moment fléchissant  $M(x)$ , l'effort normal  $N(x)$  et l'effort tranchant  $T(x)$  ont pour valeurs :

$$\begin{cases} M(x) = \mu(x) - Qy(x) \\ N(x) = \frac{d\mu}{dx} \sin \theta + Q \cos \theta \\ T(x) = \frac{d\mu}{dx} \cos \theta - Q \sin \theta \end{cases}$$



**Équations des lignes d'influence** de  $Q$ , et de  $M$ ,  $N$  et  $T$  dans la section  $X$  d'abscisse  $x$  ; la charge unité est appliquée dans la section d'abscisse  $\alpha$  :

$$Q(\alpha) = \frac{1}{f} \mu(\alpha, a)$$

$$M(\alpha, x) = \mu(\alpha, x) - Q(\alpha) y(x)$$

$$N(\alpha, x) = \mu_{,x}(\alpha, x) \sin \theta + Q(\alpha) \cos \theta$$

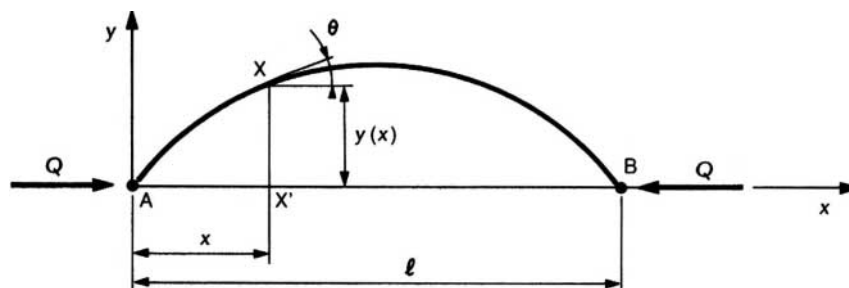
$$T(\alpha, x) = \mu_{,x}(\alpha, x) \cos \theta - Q(\alpha) \sin \theta$$

avec :

$$\mu(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{\alpha(\ell-x)}{\ell} & \text{si } \alpha < x \\ \frac{x(\ell-\alpha)}{\ell} & \text{si } \alpha > x \end{cases}$$

$$\mu_{,x}(\alpha, x) = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\ell} & \text{si } \alpha < x \\ 1 - \frac{\alpha}{\ell} & \text{si } \alpha > x \end{cases}$$

Tableau 38 – Arc à deux articulations soumis à des charges verticales



### Formules générales

Les articulations d'extrémité sont situées sur une même horizontale.

Outre les notations indiquées sur la figure, soit :

- $S(x)$  et  $I(x)$  l'aire et le moment d'inertie *réduits* de la section  $X$  d'abscisse  $x$  de l'arc (les valeurs réduites sont les valeurs réelles multipliées par  $\cos \theta$ ),
- $\mu(x)$  le moment fléchissant produit par les charges appliquées à l'arc dans la poutre sur appuis simples  $AB$  de même portée que l'arc.

La poussée  $Q$  est donnée par la formule :

$$Q = \frac{\gamma}{D} \int_0^{\ell} \frac{\mu(x)y(x)}{EI(x)} dx$$

dans laquelle :

$$\gamma = \frac{D}{D+d} \quad D = \int_0^{\ell} \frac{y^2(x)}{EI(x)} dx \quad d = \int_0^{\ell} \frac{dx}{ES(x)}$$

Le moment fléchissant  $M(x)$ , l'effort normal  $N(x)$  et l'effort tranchant  $T(x)$  ont pour valeurs :

$$\begin{cases} M(x) = \mu(x) - Qy(x) \\ N(x) = \frac{d\mu}{dx} \sin \theta + Q \cos \theta \\ T(x) = \frac{d\mu}{dx} \cos \theta - Q \sin \theta \end{cases}$$

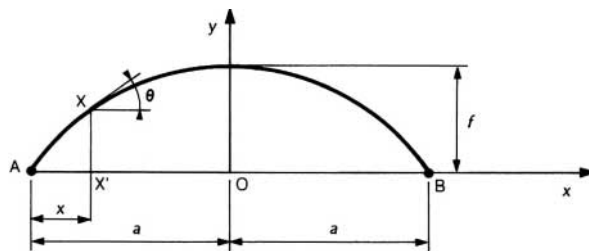
Une dilatation  $\varepsilon$  due à une élévation de température provoque une poussée :

$$Q_{\varepsilon} = \gamma \frac{\varepsilon \ell}{D}$$

et des efforts :

$$M(x) = -Q_{\varepsilon} y(x) \quad N(x) = Q_{\varepsilon} \cos \theta \quad T(x) = -Q_{\varepsilon} \sin \theta$$

**Tableau 39 – Arc parabolique à deux articulations, de section réduite constante, soumis à des charges verticales**



Les notations sont indiquées sur la figure ; l'axe Oy est axe de symétrie de l'arc. Nous avons :

$$y = f \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad \tan \theta = \frac{dy}{dx} = - \frac{2fx}{a^2}$$

On trouve, en posant  $r^2 = I/S$  ( $r$  rayon de giration de la section de clef) :

$$D = \frac{16}{15} \frac{af^2}{EI} \quad \gamma = \frac{1}{1 + \frac{15}{8} \left( \frac{r}{f} \right)^2}$$

La **ligne d'influence** de  $Q$  a pour ordonnée, en posant  $\alpha = ma$  :

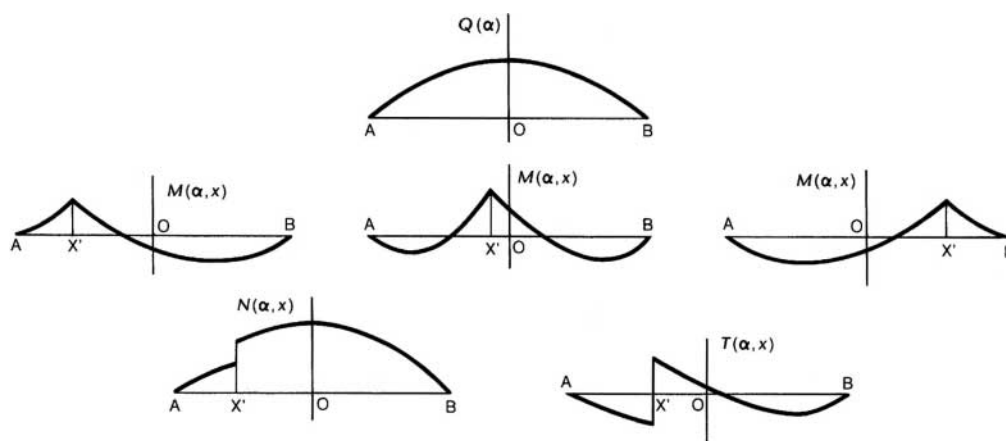
$$Q(\alpha) = \frac{5}{64} \gamma \frac{a}{f} (1 - m^2) (5 - m^2)$$

La poussée due à une charge de densité uniforme  $p$  appliquée sur toute la portée de l'arc est :

$$Q = \frac{pa^2}{2f} \gamma$$

La poussée  $Q_\varepsilon$  due à une dilatation  $\varepsilon$  est :

$$Q_\varepsilon = \frac{15}{8} \gamma \varepsilon \frac{EI}{f^2}$$



**Équations des lignes d'influence** de  $Q$ , et de  $M$ ,  $N$  et  $T$  dans la section  $X$  d'abscisse  $x$  ; la charge unité est appliquée dans la section d'abscisse  $\alpha$  :

$$Q(\alpha) = \frac{\gamma}{D} \int_0^\ell \mu(\alpha, x) \frac{y(x)}{EI(x)} dx \quad N(\alpha, x) = \mu_{,x}(\alpha, x) \sin \theta + Q(\alpha) \cos \theta$$

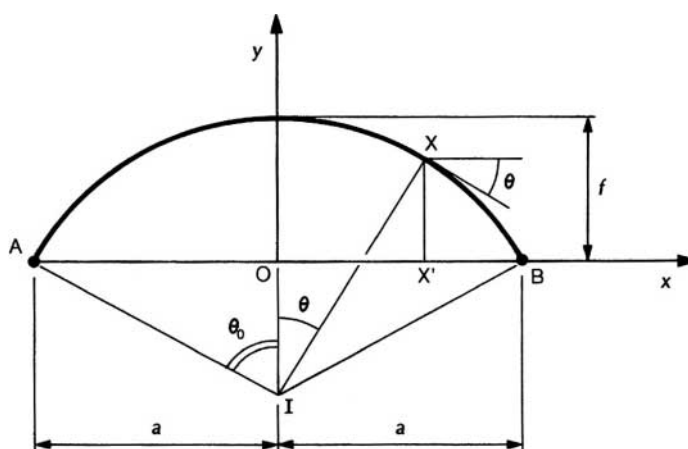
$$M(\alpha, x) = \mu(\alpha, x) - Q(\alpha) y(x) \quad T(\alpha, x) = \mu_{,x}(\alpha, x) \cos \theta - Q(\alpha) \sin \theta$$

avec ( $\ell = 2a$ ) :

$$\mu(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{\alpha(\ell - x)}{\ell} & \text{si } \alpha < x \\ \frac{x(\ell - \alpha)}{\ell} & \text{si } \alpha > x \end{cases} \quad \mu_{,x}(\alpha, x) = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\ell} & \text{si } \alpha < x \\ 1 - \frac{\alpha}{\ell} & \text{si } \alpha > x \end{cases}$$



Tableau 40 – Arc circulaire à deux articulations, de section réelle constante, soumis à des charges verticales



L'ouverture angulaire de l'arc est  $2\theta_0$ .

Outre les notations indiquées sur la figure, soit :

- $S$  la section *réelle* et  $I$  l'inertie *réelle* de la section de l'arc,
- $r = \sqrt{I/S}$  le rayon de giration de la section de l'arc.

On a :

$$D = \frac{af^2}{EI} f(\theta_0) \quad \gamma = \frac{1}{1 + k(\theta_0) \left(\frac{r}{f}\right)^2}$$

avec

$$f(\theta_0) = \frac{\theta_0(1 + 2\cos^2\theta_0) - 3\sin\theta_0\cos\theta_0}{\sin\theta_0(1 - \cos\theta_0)^2} \quad k(\theta_0) = \frac{2}{f(\theta_0)}$$

Table donnant  $f(\theta_0)$  et  $k(\theta_0)$ 

$\theta_0$ (1) (degré)	$f(\theta_0)$	$k(\theta_0)$	$\theta_0$ (1) (degré)	$f(\theta_0)$	$k(\theta_0)$
15	1,077 84	1,855 57	55	1,221 92	1,636 77
20	1,085 41	1,842 62	60	1,255 20	1,593 37
25	1,096 26	1,824 39	65	1,292 94	1,546 87
30	1,109 66	1,802 35	70	1,335 65	1,497 40
35	1,125 81	1,776 49	75	1,383 96	1,445 13
40	1,144 90	1,746 88	80	1,438 61	1,390 23
45	1,167 10	1,713 66	85	1,500 51	1,332 88
50	1,192 67	1,676 90	90	1,570 80	1,273 24

Une charge unité appliquée à la section d'abscisse  $\alpha = ma$  donne la poussée :

$$Q(\alpha) = \gamma \frac{\sin^2\theta_0 - \sin^2\theta + 2\cos\theta_0(\theta\sin\theta + \cos\theta - \theta_0\sin\theta_0 - \cos\theta_0)}{2\theta_0(1 + 2\cos^2\theta_0) - 6\sin\theta_0\cos\theta_0}$$

soit :

$$Q(\alpha) = \gamma H(m) \quad \text{avec } \theta = \arcsin(m \sin \theta_0)$$

$H(m)$  est une fonction paire :  $H(-m) = H(m)$ .

(1) Dans les formules,  $\theta_0$  est exprimé en radians.

**Tableau 40 – Arc circulaire à deux articulations, de section réelle constante, soumis à des charges verticales (suite)**

Table de la fonction $H(m)$								
$m$	$\theta_0$ (1)							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0	2,954 45	2,201 01	1,743 83	1,435 96	1,213 28	1,043 80	0,909 76	0,800 48
0,1	2,919 35	2,174 86	1,723 29	1,419 17	1,199 21	1,031 82	0,899 43	0,791 49
0,2	2,814 72	2,097 04	1,661 99	1,369 06	1,157 22	0,996 03	0,868 56	0,764 64
0,3	2,642 01	1,969 08	1,561 09	1,286 46	1,087 94	0,936 92	0,817 53	0,720 21
0,4	2,404 75	1,793 26	1,422 31	1,172 77	0,992 46	0,855 36	0,747 01	0,658 72
0,5	2,108 67	1,572 94	1,248 25	1,029 99	0,872 35	0,752 56	0,657 95	0,580 89
0,6	1,758 68	1,312 58	1,042 35	0,860 76	0,729 72	0,630 22	0,551 70	0,487 80
0,7	1,362 65	1,017 81	0,808 83	0,668 46	0,567 27	0,490 52	0,430 01	0,380 83
0,8	0,930 55	0,695 29	0,552 85	0,457 29	0,388 45	0,336 29	0,295 24	0,261 92
0,9	0,472 29	0,352 97	0,280 78	0,232 38	0,197 56	0,171 20	0,150 49	0,133 72
1	0	0	0	0	0	0	0	0

$m$	$\theta_0$ (1)							
	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0	0,709 15	0,631 26	0,563 65	0,504 06	0,450 85	0,402 76	0,358 83	0,318 31
0,1	0,701 30	0,624 37	0,557 58	0,498 72	0,446 14	0,398 62	0,355 19	0,315 13
0,2	0,677 81	0,603 73	0,539 41	0,482 71	0,432 04	0,386 20	0,344 29	0,305 58
0,3	0,638 90	0,569 52	0,509 27	0,456 11	0,408 58	0,365 54	0,326 12	0,289 66
0,4	0,584 95	0,522 01	0,467 33	0,419 07	0,375 86	0,336 67	0,300 72	0,267 38
0,5	0,516 54	0,461 63	0,413 92	0,371 78	0,334 00	0,299 68	0,268 11	0,238 73
0,6	0,434 46	0,388 98	0,349 46	0,314 54	0,283 20	0,254 67	0,228 34	0,203 72
0,7	0,339 84	0,304 92	0,274 59	0,247 80	0,223 75	0,201 80	0,181 46	0,162 34
0,8	0,234 21	0,210 65	0,190 23	0,172 23	0,156 07	0,141 32	0,127 60	0,114 59
0,9	0,119 80	0,108 01	0,097 83	0,088 90	0,080 93	0,073 68	0,066 93	0,060 48
1	0	0	0	0	0	0	0	0

Une charge de densité uniforme  $p$  appliquée sur toute la portée de l'arc donne la poussée :

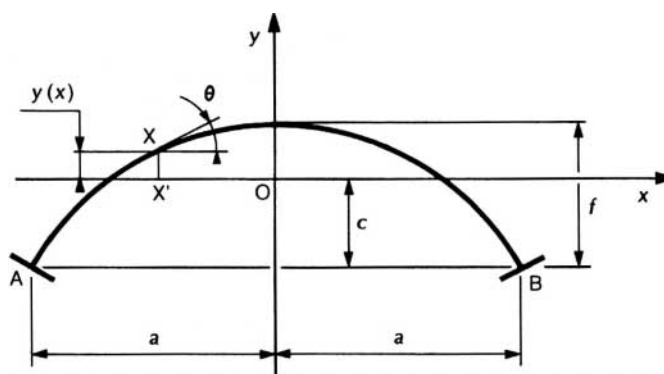
$$Q = \gamma \frac{pa^2}{2f} \varphi(\theta_0) \quad \text{avec} \quad \varphi(\theta_0) = \frac{-\sin \theta_0 + \frac{7}{3} \sin^3 \theta_0 + \theta_0 \cos \theta_0 (1 - 2 \sin^2 \theta_0)}{(1 + \cos \theta_0) [\theta_0 (1 + 2 \cos^2 \theta_0) - 3 \sin \theta_0 \cos \theta_0]}$$

**Table donnant  $\varphi(\theta_0)$**

$\theta_0$ (1) (degré)	$\varphi(\theta_0)$	$\theta_0$ (1) (degré)	$\varphi(\theta_0)$	$\theta_0$ (1) (degré)	$\varphi(\theta_0)$	$\theta_0$ (1) (degré)	$\varphi(\theta_0)$
15	0,996 92	35	0,985 67	55	0,960 44	75	0,912 47
20	0,995 59	40	0,980 86	60	0,951 14	80	0,894 77
25	0,992 96	45	0,975 13	65	0,940 25	85	0,873 81
30	0,989 68	50	0,968 37	70	0,927 48	90	0,848 83

(1) Dans les formules,  $\theta_0$  est exprimé en radians.

Tableau 41 – Arc encastré symétrique soumis à des charges verticales



### Formules générales

Outre les notations indiquées sur la figure, soit :

- $S(x)$  et  $I(x)$  l'aire et le moment d'inertie réduits de la section X d'abscisse  $x$  de l'arc (les valeurs réduites sont les valeurs réelles multipliées par  $\cos \theta$ ),
- $\mu(x)$  le moment fléchissant produit par les charges appliquées à l'arc dans la poutre sur appuis simples AB de même portée que l'arc.

Les axes Oxy sont issus du centre élastique ; Oy est l'axe de symétrie de l'arc. Si Y est l'ordonnée de la fibre moyenne comptée à partir de AB, la distance  $c$  du centre élastique à AB est :

$$c = \int_0^a \frac{Y dx}{I} / \int_0^a \frac{dx}{I}$$

Le moment fléchissant  $M(x)$ , l'effort normal  $N(x)$  et l'effort tranchant  $T(x)$  ont pour valeurs :

$$\begin{cases} M(x) = \mu(x) + \Gamma + R x - Q y \\ N(x) = \left( \frac{d\mu}{dx} + R \right) \sin \theta + Q \cos \theta \\ T(x) = \left( \frac{d\mu}{dx} + R \right) \cos \theta - Q \sin \theta \end{cases}$$

Pour déterminer les inconnues  $\Gamma$ ,  $R$  et  $Q$ , on calcule les constantes :

$$\begin{cases} A = \int_{-a}^a \frac{dx}{EI(x)} & B = \int_{-a}^a \frac{x^2 dx}{EI(x)} & D = \int_{-a}^a \frac{y^2(x) dx}{EI(x)} \\ d = \int_{-a}^a \frac{dx}{ES(x)} & \gamma = \frac{D}{D+d} \end{cases}$$

$\Gamma$ ,  $R$  et  $Q$  sont alors définis par les formules :

$$\Gamma = -\frac{1}{A} \int_{-a}^a \frac{\mu(x) dx}{EI(x)} \quad R = -\frac{1}{B} \int_{-a}^a \frac{\mu(x) \cdot x dx}{EI(x)} \quad Q = \frac{\gamma}{D} \int_{-a}^a \frac{\mu(x) y(x) dx}{EI(x)}$$

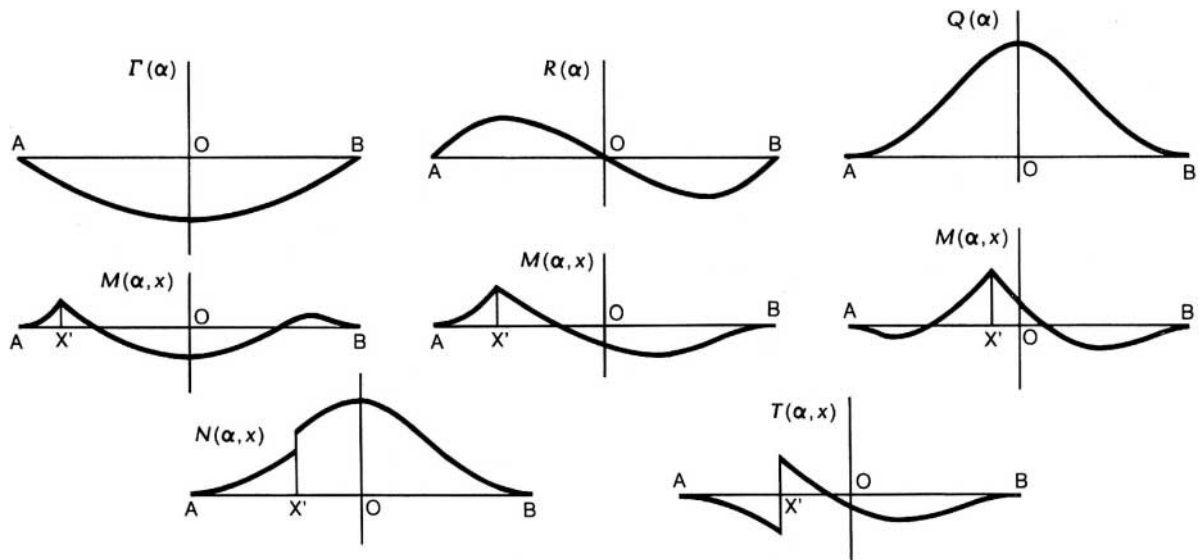
Une dilatation uniforme due à une élévation de température donne une poussée :

$$Q_\varepsilon = \gamma \frac{2\varepsilon a}{D}$$

et des efforts :

$$M(x) = -Q_\varepsilon y(x) \quad N(x) = Q_\varepsilon \cos \theta \quad T(x) = -Q_\varepsilon \sin \theta$$

Tableau 41 – Arc encastré symétrique soumis à des charges verticales (suite)



■ Lignes d'influence

La charge unité est appliquée à la section d'abscisse  $\alpha$ . Les ordonnées des lignes d'influence de  $\Gamma$ ,  $R$  et  $Q$  sont données par :

$$\begin{cases} \Gamma(\alpha) = -\frac{1}{A} \int_{-a}^a \frac{\mu(\alpha, x) dx}{EI(x)} \\ R(\alpha) = -\frac{1}{B} \int_{-a}^a \frac{\mu(\alpha, x) x dx}{EI(x)} \\ Q(\alpha) = \frac{\gamma}{D} \int_{-a}^a \frac{\mu(\alpha, x) y(x) dx}{EI(x)} \end{cases}$$

$\Gamma(\alpha)$  et  $Q(\alpha)$  sont des fonctions paires ;  $R(\alpha)$  est une fonction impaire.

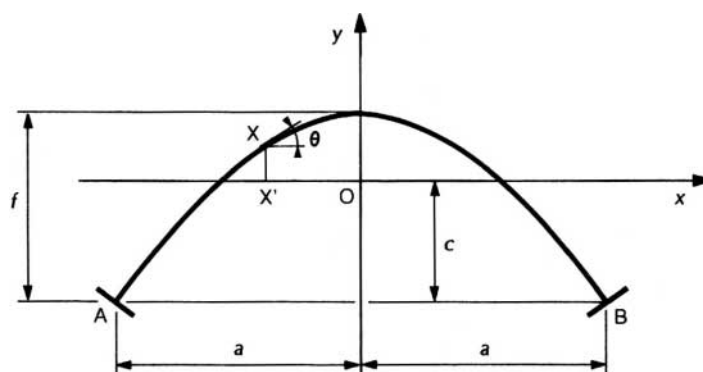
Les ordonnées des lignes d'influence de  $M$ ,  $N$  et  $T$  dans la section  $X$  d'abscisse  $x$  sont données par :

$$\begin{cases} M(\alpha, x) = \mu(\alpha, x) + \Gamma(\alpha) + R(\alpha) x - Q(\alpha) y(x) \\ N(\alpha, x) = [\mu_{,x}(\alpha, x) + R(\alpha)] \sin \theta + Q(\alpha) \cos \theta \\ T(\alpha, x) = [\mu_{,x}(\alpha, x) + R(\alpha)] \cos \theta - Q(\alpha) \sin \theta \end{cases}$$

avec ( $\ell = 2a$ ) :

$$\mu(\alpha, x) = \begin{cases} \frac{\alpha(\ell-x)}{\ell} & \text{si } \alpha < x \\ \frac{x(\ell-\alpha)}{\ell} & \text{si } \alpha > x \end{cases} \quad \mu_{,x}(\alpha, x) = \frac{\partial \mu}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{\alpha}{\ell} & \text{si } \alpha < x \\ 1 - \frac{\alpha}{\ell} & \text{si } \alpha > x \end{cases}$$

Tableau 42 – Arc encastré symétrique, de section réduite constante, à fibre moyenne parabolique, soumis à des charges verticales



Les notations sont indiquées sur la figure. On a :

$$c = \frac{2}{3} f \quad y = f \left( \frac{1}{3} - \frac{x^2}{a^2} \right) \quad \tan \theta = \frac{dy}{dx} = -\frac{2fx}{a^2}$$

On trouve, en posant  $r^2 = I/S$  (avec  $r$  rayon de giration de la section de clef) :

$$D = \frac{8}{45} \frac{af^2}{EI} \quad \gamma = \frac{1}{1 + \frac{45}{4} \left( \frac{r}{f} \right)^2}$$

En posant  $\alpha = ma$ , les **lignes d'influence** de  $\Gamma$ ,  $R$  et  $Q$  sont définies par :

$$\begin{cases} \Gamma(\alpha) = -\frac{1}{4} a(1-m^2) \\ R(\alpha) = -\frac{1}{4} m(1-m^2) \\ Q(\alpha) = \frac{15}{32} \gamma \frac{a}{f} (1-m^2)^2 \end{cases}$$

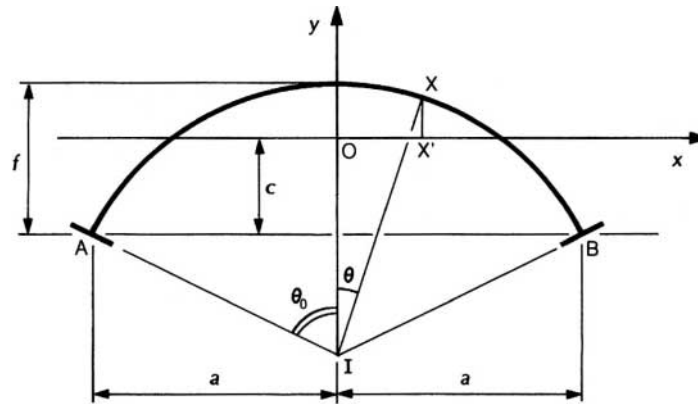
Dans le cas d'une charge de densité constante  $p$  appliquée sur toute la portée de l'arc, on a :

$$\Gamma = -\frac{1}{3} pa^2 \quad R = 0 \quad Q = \gamma \frac{pa^2}{2f}$$

La poussée  $Q_\varepsilon$  due à une dilatation uniforme  $\varepsilon$  est :

$$Q_\varepsilon = \frac{45}{4} \gamma \varepsilon \frac{EI}{f^2}$$

**Tableau 43 – Arc encastré symétrique, de section réelle constante, à fibre moyenne circulaire, soumis à des charges verticales**



L'ouverture angulaire de l'arc est  $2\theta_0$ .

Outre les notations indiquées sur la figure, soit :

- $S$  la section *réelle* et  $I$  l'inertie *réelle* de la section de l'arc,
- $r = \sqrt{I/S}$  le rayon de giration de la section de l'arc.

On a :

$$c = f\varphi(\theta_0) \quad D = \frac{af^2}{EI} f(\theta_0) \quad \gamma = \frac{1}{1 + k(\theta_0)\left(\frac{r}{f}\right)^2}$$

avec

$$\varphi(\theta_0) = \frac{\sin \theta_0 - \theta_0 \cos \theta_0}{\theta_0(1 - \cos \theta_0)} \quad f(\theta_0) = \frac{\theta_0^2 + \theta_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - 2 \sin^2 \theta_0}{\theta_0 \sin \theta_0 (1 - \cos \theta_0)^2} \quad k(\theta_0) = \frac{2}{f(\theta_0)}$$

**Table donnant  $\varphi(\theta_0)$ ,  $f(\theta_0)$  et  $k(\theta_0)$**

$\theta_0$ (1) (degré)	$\varphi(\theta_0)$	$f(\theta_0)$	$k(\theta_0)$	$\theta_0$ (1) (degré)	$\varphi(\theta_0)$	$f(\theta_0)$	$k(\theta_0)$
15	0,665 90	0,180 319	11,091 5	55	0,656 08	0,213 084	9,386 0
20	0,665 31	0,181 885	10,996 0	60	0,653 99	0,220 852	9,055 9
25	0,664 54	0,184 405	10,845 7	65	0,651 68	0,229 739	8,705 5
30	0,663 53	0,187 398	10,672 5	70	0,649 15	0,239 898	8,336 9
35	0,662 46	0,191 046	10,468 7	75	0,646 39	0,251 509	7,952 0
40	0,661 16	0,195 370	10,237 0	80	0,643 39	0,264 796	7,553 0
45	0,659 66	0,200 434	9,978 4	85	0,640 14	0,280 032	7,142 0
50	0,657 97	0,206 318	9,693 8	90	0,636 62	0,297 557	6,721 4

■ **Lignes d'influence de  $\Gamma$ ,  $R$  et  $Q$**

La charge unité est appliquée dans la section d'abscisse  $\alpha = ma$  correspondant à l'angle  $\theta = \arcsin(m \sin \theta_0)$  :

$$\Gamma(\alpha) = -a \frac{\theta_0 \sin \theta_0 + \cos \theta_0 - \theta \sin \theta - \cos \theta}{2 \theta_0 \sin \theta_0} = -a F(m)$$

$F(m)$  est une fonction paire :  $F(m) = F(-m)$ .

(1) Dans les formules,  $\theta_0$  est exprimé en radians.

**Tableau 43 – Arc encastré symétrique, de section réelle constante, à fibre moyenne circulaire, soumis à des charges verticales (suite)**

**Table de la fonction  $F(m)$**

$m$	$\theta_0$ (1)							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0	0,248 56	0,247 43	0,245 96	0,244 13	0,241 92	0,239 33	0,236 30	0,232 83
0,1	0,246 09	0,244 98	0,243 53	0,241 74	0,239 58	0,237 02	0,234 05	0,230 63
0,2	0,238 67	0,237 63	0,236 27	0,234 57	0,232 52	0,230 11	0,227 29	0,224 03
0,3	0,226 31	0,225 36	0,224 13	0,222 60	0,220 75	0,218 54	0,215 97	0,212 99
0,4	0,208 98	0,208 18	0,207 12	0,205 80	0,204 20	0,202 29	0,200 04	0,197 43
0,5	0,186 69	0,186 04	0,185 19	0,184 13	0,182 83	0,181 27	0,179 42	0,177 26
0,6	0,159 41	0,158 93	0,158 31	0,157 52	0,156 55	0,155 38	0,153 99	0,152 33
0,7	0,127 12	0,126 82	0,126 42	0,125 91	0,125 28	0,124 51	0,123 58	0,122 46
0,8	0,089 81	0,089 66	0,089 46	0,089 20	0,088 87	0,088 47	0,087 98	0,087 38
0,9	0,047 45	0,047 40	0,047 35	0,047 27	0,047 18	0,047 06	0,046 91	0,046 73
1	0	0	0	0	0	0	0	0

$m$	$\theta_0$ (1)							
	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0	0,228 85	0,224 34	0,219 22	0,213 44	0,206 90	0,199 52	0,191 17	0,181 69
0,1	0,226 72	0,222 27	0,217 22	0,211 51	0,205 06	0,197 75	0,189 49	0,180 10
0,2	0,220 30	0,216 04	0,211 21	0,205 72	0,199 50	0,192 44	0,184 43	0,175 30
0,3	0,209 55	0,205 62	0,201 13	0,196 01	0,190 18	0,183 53	0,175 94	0,167 26
0,4	0,194 40	0,190 91	0,186 90	0,182 29	0,177 00	0,170 92	0,163 93	0,155 87
0,5	0,174 73	0,171 79	0,168 38	0,164 41	0,159 82	0,154 47	0,148 26	0,141 00
0,6	0,150 38	0,148 08	0,145 37	0,142 17	0,138 41	0,133 96	0,128 70	0,122 45
0,7	0,121 12	0,119 51	0,117 59	0,115 26	0,112 46	0,109 07	0,104 94	0,099 91
0,8	0,086 64	0,085 74	0,084 62	0,083 23	0,081 48	0,079 27	0,076 47	0,072 88
0,9	0,046 50	0,046 20	0,045 81	0,045 31	0,044 62	0,043 68	0,042 35	0,040 46
1	0	0	0	0	0	0	0	0

$$R(\alpha) = \frac{\sin \theta (\theta_0 + \sin \theta_0 \cos \theta_0) - \sin \theta_0 (\theta + \sin \theta \cos \theta)}{2 \sin \theta_0 (\theta_0 - \sin \theta_0 \cos \theta_0)} = -G(m)$$

$G(m)$  est une fonction impaire :  $G(-m) = -G(+m)$ .

**Table de la fonction  $G(m)$**

$m$	$\theta_0$ (1)							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,024 497	0,024 298	0,024 039	0,023 719	0,023 334	0,022 883	0,022 361	0,021 764
0,2	0,047 523	0,047 148	0,046 660	0,046 055	0,045 327	0,044 471	0,043 479	0,042 341
0,3	0,067 607	0,067 099	0,066 438	0,065 616	0,064 624	0,063 453	0,062 090	0,060 521
0,4	0,083 268	0,082 689	0,081 931	0,080 987	0,079 842	0,078 484	0,076 893	0,075 052
0,5	0,093 019	0,092 438	0,091 676	0,090 720	0,089 556	0,088 164	0,086 523	0,084 605
0,6	0,095 359	0,094 848	0,094 174	0,093 323	0,092 279	0,091 020	0,089 520	0,087 747
0,7	0,088 774	0,088 392	0,087 885	0,087 240	0,086 442	0,085 468	0,084 293	0,082 884
0,8	0,071 728	0,071 508	0,071 214	0,070 837	0,070 365	0,069 781	0,069 065	0,068 188
0,9	0,042 664	0,042 597	0,042 501	0,042 379	0,042 224	0,042 029	0,041 785	0,041 478
1	0	0	0	0	0	0	0	0

$m$	$\theta_0$ (1)							
	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0	0	0	0	0	0	0	0	0
0,1	0,021 087	0,020 326	0,019 472	0,018 520	0,017 462	0,016 289	0,014 990	0,013 556
0,2	0,041 048	0,039 588	0,037 948	0,036 113	0,034 067	0,031 792	0,029 267	0,026 470
0,3	0,058 730	0,056 698	0,054 404	0,051 824	0,048 933	0,045 701	0,042 095	0,038 081
0,4	0,072 934	0,070 515	0,067 764	0,064 646	0,061 124	0,057 155	0,052 692	0,047 684
0,5	0,082 381	0,079 813	0,076 861	0,073 478	0,069 612	0,065 205	0,060 191	0,054 499
0,6	0,085 665	0,083 227	0,080 383	0,077 071	0,073 222	0,068 757	0,063 590	0,057 622
0,7	0,081 199	0,079 189	0,076 792	0,073 936	0,070 532	0,066 479	0,061 659	0,055 940
0,8	0,067 115	0,065 798	0,064 178	0,062 176	0,059 691	0,056 600	0,052 748	0,047 956
0,9	0,041 089	0,040 592	0,039 947	0,039 099	0,037 961	0,036 412	0,034 274	0,031 307
1	0	0	0	0	0	0	0	0

(1) Dans les formules,  $\theta_0$  est exprimé en radians.

**Tableau 43 – Arc encastré symétrique, de section réelle constante, à fibre moyenne circulaire, soumis à des charges verticales (suite)**

$$Q(\alpha) = \gamma \frac{2 \sin \theta_0 (\theta \sin \theta + \cos \theta - \theta_0 \sin \theta_0 - \cos \theta_0) + \theta_0 (\sin^2 \theta_0 - \sin^2 \theta)}{2(\theta_0^2 + \theta_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - 2 \sin^2 \theta_0)} = \gamma H(m)$$

$H(m)$  est une fonction paire :  $H(-m) = H(m)$ .

**Table de la fonction  $H(m)$**

$m$	$\theta_0$ (1)							
	15°	20°	25°	30°	35°	40°	45°	50°
0	3,554 75	2,657 50	2,111 22	1,745 92	1,482 63	1,283 26	1,126 52	0,999 49
0,1	3,485 16	2,605 14	2,070 31	1,712 57	1,454 73	1,259 55	1,106 10	0,981 78
0,2	3,280 73	2,452 08	1,949 95	1,614 30	1,372 46	1,189 49	1,045 77	0,929 39
0,3	2,949 97	2,207 74	1,757 24	1,456 49	1,240 11	1,076 64	0,948 39	0,844 67
0,4	2,515 03	1,886 42	1,503 27	1,248 26	1,065 09	0,926 94	0,818 80	0,731 54
0,5	2,010 37	1,508 87	1,204 64	1,002 69	0,857 93	0,749 13	0,664 22	0,595 98
0,6	1,466 52	1,103 02	0,882 91	0,737 00	0,632 90	0,554 93	0,494 48	0,446 20
0,7	0,931 20	0,703 77	0,565 12	0,473 38	0,408 25	0,359 88	0,322 69	0,293 36
0,8	0,465 83	0,352 67	0,284 01	0,239 07	0,207 28	0,183 93	0,166 26	0,152 62
0,9	0,130 70	0,099 16	0,079 71	0,067 60	0,059 03	0,052 80	0,048 26	0,044 86
1	0	0	0	0	0	0	0	0

$m$	$\theta_0$ (1)							
	55°	60°	65°	70°	75°	80°	85°	90°
0	0,894 20	0,805 10	0,728 48	0,661 63	0,602 59	0,549 87	0,502 35	0,459 14
0,1	0,878 74	0,791 58	0,716 61	0,651 21	0,593 45	0,541 86	0,495 35	0,453 04
0,2	0,833 00	0,751 49	0,681 40	0,620 27	0,566 27	0,518 03	0,474 49	0,434 86
0,3	0,758 84	0,686 34	0,624 06	0,569 77	0,521 80	0,478 94	0,440 23	0,404 93
0,4	0,659 51	0,598 78	0,546 72	0,501 39	0,461 39	0,425 65	0,393 35	0,363 84
0,5	0,539 88	0,492 79	0,452 59	0,417 73	0,387 07	0,359 75	0,335 08	0,312 53
0,6	0,406 81	0,374 04	0,346 34	0,322 57	0,301 88	0,283 61	0,267 26	0,252 37
0,7	0,269 78	0,250 54	0,234 65	0,221 41	0,210 26	0,200 79	0,192 62	0,185 45
0,8	0,142 00	0,133 73	0,127 36	0,122 56	0,119 12	0,116 84	0,115 55	0,115 07
0,9	0,042 43	0,040 79	0,039 88	0,039 69	0,040 25	0,041 64	0,043 96	0,047 31
1	0	0	0	0	0	0	0	0

■ Charge de densité constante  $p$  appliquée sur toute la portée de l'arc

On trouve :

$$\Gamma = -pa^2 \psi(\theta_0) \quad R = 0 \quad Q = \gamma \frac{pa^2}{2f} \varphi(\theta_0)$$

avec 
$$\psi(\theta_0) = \frac{\sin 2\theta_0 - 2\theta_0 \cos 2\theta_0}{8\theta_0 \sin^2 \theta_0}$$

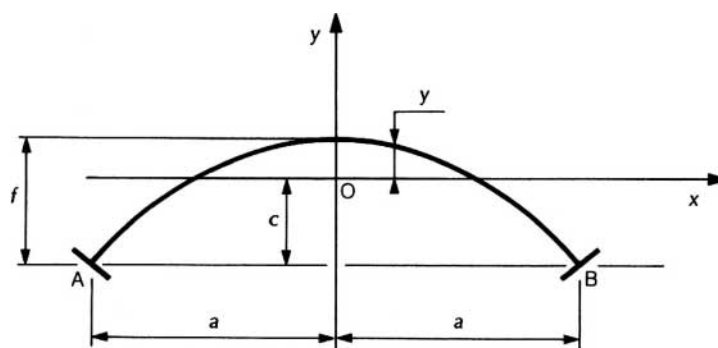
$$\varphi(\theta_0) = \frac{[\theta_0(2 \cos^2 \theta_0 + 1) - 3 \sin \theta_0 \cos \theta_0](1 - \cos \theta_0)}{3 \sin \theta_0 (\theta_0^2 + \theta_0 \sin \theta_0 \cos \theta_0 - 2 \sin^2 \theta_0)}$$

**Table donnant  $\psi(\theta_0)$  et  $\varphi(\theta_0)$**

$\theta_0$ (1) (degré)	$\psi(\theta_0)$	$\varphi(\theta_0)$	$\theta_0$ (1) (degré)	$\psi(\theta_0)$	$\varphi(\theta_0)$
15	0,331 80	1,001 96	55	0,309 79	1,036 59
20	0,330 58	1,004 82	60	0,304 50	1,044 48
25	0,328 98	1,006 83	65	0,298 40	1,053 46
30	0,326 99	1,010 08	70	0,291 36	1,063 64
35	0,324 58	1,013 89	75	0,283 23	1,075 20
40	0,321 70	1,018 39	80	0,273 80	1,088 32
45	0,318 31	1,023 64	85	0,262 83	1,103 23
50	0,314 36	1,029 66	90	0,25	1,120 23

(1) Dans les formules,  $\theta_0$  est exprimé en radians.



Tableau 44 – Arc encastré symétrique, à fibre moyenne du 4<sup>e</sup> degré, soumis à des charges verticales

L'équation de la fibre moyenne de l'arc est :

$$y = f \left[ 1 - \frac{x^2}{a^2} + \lambda \frac{x^2}{a^2} \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right] - c$$

$\lambda$  désignant un paramètre et  $c$  la distance du centre élastique O à AB.

L'inertie réduite et la section réduite de l'arc sont définies par :

$$I = \frac{I_0}{1 - k \left( \frac{x}{a} \right)^2} \quad S = \frac{S_0}{1 - k \left( \frac{x}{a} \right)^2}$$

L'inertie de la section de clef ( $x = 0$ ) est  $I_0$ , et l'inertie des sections des naissances ( $x = \pm a$ ) est  $I_1 = I_0 / (1 - k)$ . On choisit en général  $k = 2/3$  ou  $k = 4/5$  correspondant aux valeurs 3 ou 5 du rapport  $I_1/I_0$ .

■ Centre élastique :

$$\frac{c}{f} = \frac{2(5-k)}{5(3-k)} + \frac{2(7-3k)}{35(3-k)} \lambda$$

soit :

$$\frac{c}{f} = \frac{26}{35} + \frac{6}{49} \lambda \quad \text{pour } k = \frac{2}{3}$$

$$\frac{c}{f} = \frac{42}{55} + \frac{46}{385} \lambda \quad \text{pour } k = \frac{4}{5}$$

■ Constantes  $D$ ,  $d$  et  $\gamma$  :

$$D = \frac{8af^2}{EI_0} \left[ \frac{35-30k+3k^2}{525(3-k)} - \frac{2(15-6k-6k^2)}{1575(3-k)} \lambda + \frac{693-434k+53k^2}{121275(3-k)} \lambda^2 \right]$$

soit :

$$D = \frac{af^2}{EI_0} \left( \frac{8}{75} - \frac{16}{441} \lambda + \frac{6152}{509355} \lambda^2 \right) \quad \text{pour } k = \frac{2}{3}$$

$$D = \frac{af^2}{EI_0} \left( \frac{2584}{28875} - \frac{848}{28875} \lambda + \frac{6904}{606375} \lambda^2 \right) \quad \text{pour } k = \frac{4}{5}$$

$$d = \frac{2a}{ES_0} \left( 1 - \frac{1}{3} \beta \right) \quad \gamma = \frac{D}{D+d}$$

**Remarque :** on effectue les calculs en laissant  $\lambda$  indéterminé. On peut alors, au vu des résultats, choisir  $\lambda$  de façon à obtenir la distribution la plus satisfaisante des contraintes dans l'arc (par exemple, dans le cas d'un arc en béton armé, réduire le plus possible, voire même supprimer, les contraintes de traction).

**Tableau 44 – Arc encastré symétrique, à fibre moyenne du 4<sup>e</sup> degré, soumis à des charges verticales (suite)**

■ Lignes d'influence de  $\Gamma$ ,  $R$  et  $Q$

La charge unité est appliquée à la section d'abscisse  $\alpha = ma$  :

$$\Gamma(\alpha) = -a F(m) \quad \text{avec } F(m) = \frac{(1-m^2)[6-k(1+m^2)]}{8(3-k)}$$

$$R(\alpha) = -G(m) \quad \text{avec } G(m) = \frac{m(1-m^2)[10-3k(1+m^2)]}{8(5-3k)}$$

$$Q(\alpha) = \left(\frac{\gamma}{D}\right) \frac{a^2 f}{EI_0} [\Phi(m) - \lambda \Psi(m)]$$

avec 
$$\Phi(m) = (1-m^2)^2 \left[ \frac{15-12k+k^2}{60(3-k)} - \frac{k}{30} m^2 \right]$$

$$\Psi(m) = (1-m^2)^2 \left[ \frac{(2-k)(21+k)}{840(3-k)} - \frac{14-k}{420} m^2 + \frac{k}{56} m^4 \right]$$

Les fonctions  $F(m)$ ,  $\Phi(m)$  et  $\Psi(m)$  sont paires ; la fonction  $G(m)$  est impaire.

**Table des fonctions  $F(m)$ ,  $G(m)$ ,  $\Phi(m)$  et  $\Psi(m)$**

$k = 2/3$					$k = 4/5$				
$m$	$F(m)$	$G(m)$	$\Phi(m)$	$\Psi(m)$	$m$	$F(m)$	$G(m)$	$\Phi(m)$	$\Psi(m)$
0	0,285 71	0	0,053 175	0,014 739	0	0,295 45	0	0,045 758	0,014 156
0,1	0,282 50	0,032 918	0,051 899	0,014 136	0,1	0,292 05	0,036 059	0,044 586	0,013 568
0,2	0,272 91	0,063 360	0,048 187	0,012 431	0,2	0,281 89	0,069 268	0,041 187	0,011 909
0,3	0,257 08	0,088 953	0,042 378	0,009 919	0,3	0,265 14	0,096 915	0,035 904	0,009 476
0,4	0,235 20	0,107 520	0,035 011	0,007 031	0,4	0,242 07	0,116 566	0,029 276	0,006 698
0,5	0,207 59	0,117 188	0,026 786	0,004 245	0,5	0,213 07	0,126 202	0,021 989	0,004 045
0,6	0,174 63	0,116 480	0,018 504	0,001 988	0,6	0,178 62	0,124 357	0,014 810	0,001 922
0,7	0,136 79	0,104 423	0,010 999	0,000 531	0,7	0,139 32	0,110 258	0,008 503	0,000 569
0,8	0,094 63	0,080 640	0,005 048	-0,000 091	0,8	0,095 89	0,083 963	0,003 718	-0,000 014
0,9	0,048 79	0,045 458	0,001 270	-0,000 114	0,9	0,049 14	0,046 499	0,000 872	-0,000 070
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0

**Remarque** : on effectue les calculs en laissant  $\lambda$  indéterminé. On peut alors, au vu des résultats, choisir  $\lambda$  de façon à obtenir la distribution la plus satisfaisante des contraintes dans l'arc (par exemple, dans le cas d'un arc en béton armé, réduire le plus possible, voire même supprimer, les contraintes de traction).

## 10. Plaques

Tableau 45 – Plaques minces élastiques. Notations et formules générales

## ■ Notations

$E$  module d'élasticité  
 $\nu$  coefficient de Poisson  
 $h$  épaisseur de la plaque

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  rigidité à la flexion de la plaque

$p$  densité superficielle de charge, positive vers le bas  
 $w$  flèche de la plaque, positive vers le haut

Une plaque peut être considérée comme mince si les deux conditions suivantes sont remplies :

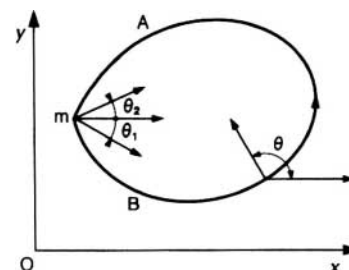
- $h$  est petit devant les dimensions en plan de la plaque ;
- $w$  est petit devant l'épaisseur  $h$  de la plaque.

## ■ Formules générales en coordonnées cartésiennes

## ● Composantes du tenseur flexion

Une section normale à  $Ox$  supporte, par unité de longueur, un moment fléchissant  $M_1$  et un couple de torsion  $C$  ; une section normale à  $Oy$  supporte, par unité de longueur, un moment fléchissant  $M_2$  et un couple de torsion  $C$  :

$$M_1 = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad M_2 = D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad C = D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$



## ● Efforts tranchants

Une section normale à  $Ox$  supporte, par unité de longueur, un effort tranchant  $T_1$  et une section normale à  $Oy$  supporte, par unité de longueur, un effort tranchant  $T_2$  :

$$T_1 = D \frac{\partial (\Delta w)}{\partial x} \quad T_2 = D \frac{\partial (\Delta w)}{\partial y} \quad \text{avec } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

## ● Réactions d'appui

Soit  $\theta$  l'angle de  $Ox$  et de la normale intérieure au bord de la plaque, et  $s$  l'abscisse curviligne du bord. L'effort tranchant et le couple de torsion, par unité de longueur, qui s'exercent sur un élément de la plaque tangent au contour sont des fonctions  $T(\theta)$  et  $C(\theta)$ . La densité de réaction  $R(\theta)$  est donnée par la formule de Kirchhoff :

$$R(\theta) = T(\theta) + \frac{dC(\theta)}{ds}$$

En un point anguleux  $m$  du contour, il existe une réaction concentrée  $R_m$  :

$$R_m = C(\theta_2) - C(\theta_1)$$

avec  $\theta_1$  angle de  $Ox$  avec la normale intérieure en  $m$  à l'arc  $Am$ ,

$\theta_2$  angle de  $Ox$  avec la normale intérieure en  $m$  à l'arc  $mB$ ,

$AmB$  est parcouru dans le sens trigonométrique sur le contour.

● Calcul de  $w$ 

$w$  est l'intégrale de l'équation de Lagrange :

$$\Delta \Delta w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = -\frac{1}{D} p(x, y)$$

qui vérifie les conditions aux limites sur le bord de la plaque :

— bord encastré :

$$w = 0 \text{ et } \partial w / \partial n = 0$$

— bord simplement appuyé :

$$w = 0 \text{ et } M(\theta) = 0$$

— bord libre :

$$M(\theta) = 0 \text{ et } R(\theta) = 0$$

avec  $\partial w / \partial n$  dérivée suivant la normale intérieure,

$M(\theta)$  moment fléchissant, par unité de longueur, qui s'exerce sur un élément tangent au contour.

Tableau 45 – Plaques minces élastiques. Notations et formules générales (suite)

■ Formules générales en coordonnées polaires

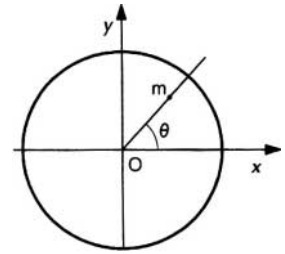
- Cas d'une plaque circulaire ou annulaire supportant une charge de densité  $p(r)$  ne dépendant pas de  $\theta$

$w(r)$  n'est fonction que de  $r$ .

— Moments fléchissants

En  $m$ , la section normale à  $Om$  supporte un moment fléchissant  $M_r$  par unité de longueur, et la section dirigée suivant  $Om$  supporte un moment fléchissant  $M_\theta$  par unité de longueur :

$$M_r = D \left( \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad \text{et} \quad M_\theta = D \left( \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} + \nu \frac{d^2 w}{dr^2} \right)$$



— Effort tranchant

La section normale à  $Om$  supporte un effort tranchant :

$$T = D \frac{d(\Delta w)}{dr} = D \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right)$$

— Calcul de  $w$

La flèche  $w(r)$  est une intégrale de l'équation de Lagrange :

$$\Delta \Delta w = \frac{d^4 w}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw}{dr} = - \frac{p(r)}{D}$$

donc, si  $w_0(r)$  est une intégrale particulière :

$$w(r) = w_0(r) + A_1 + A_2 r^2 + A_3 \ln r + A_4 r^2 \ln r$$

$A_1, A_2, A_3$  et  $A_4$  étant des constantes déterminées par les conditions aux limites sur le bord de la plaque :

— bord  $r = a$  encastré :

$$w(a) = 0 \quad \text{et} \quad w'(a) = 0$$

— bord  $r = a$  simplement appuyé :

$$w(a) = 0 \quad \text{et} \quad w''(a) + \frac{\nu}{a} w'(a) = 0$$

— bord  $r = a$  libre :

$$w''(a) + \frac{\nu}{a} w'(a) = 0 \quad \text{et} \quad w'''(a) + \frac{1}{a} w''(a) - \frac{1}{a^2} w'(a) = 0$$

● Cas général

La flèche est une fonction  $w(r, \theta)$  de  $r$  et de  $\theta$ . On trouve :

$$M_r = D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right]$$

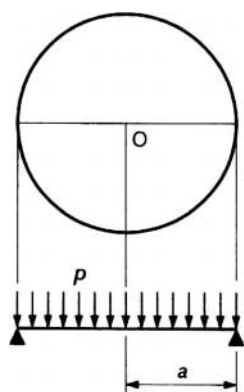
$$M_\theta = D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right]$$

$$C = D(1 - \nu) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right]$$

$$T_r = D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 w}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right]$$

$$T_\theta = D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial^3 w}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right]$$

Tableau 46 – Plaques circulaires simplement appuyées



■ **Plaque simplement appuyée supportant une charge de densité constante  $\rho$  :**

$$w(r) = -\frac{\rho}{64D} (a^2 - r^2) \left( \frac{5+\nu}{1+\nu} a^2 - r^2 \right)$$

$$M_r(r) = \frac{3+\nu}{16} \rho (a^2 - r^2)$$

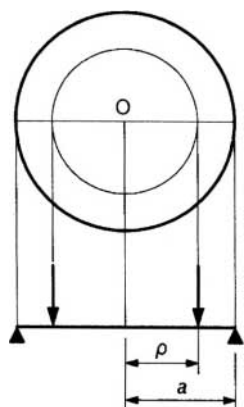
$$M_\theta(r) = \frac{1}{16} \rho [(3+\nu) a^2 - (1+3\nu) r^2]$$

$$T(r) = -\frac{1}{2} \rho r$$

En particulier :

$$w(0) = -\left( \frac{5+\nu}{1+\nu} \right) \frac{\rho a^4}{64D}$$

$$M_r(0) = M_\theta(0) = \frac{3+\nu}{16} \rho a^2 \text{ et } M_\theta(a) = \frac{1-\nu}{8} \rho a^2$$



■ **Plaque simplement appuyée supportant une charge totale  $Q$  uniformément répartie sur une circonférence de rayon  $\rho$  :**

$$w(r) = \begin{cases} -\frac{Q}{8\pi D} \left[ \frac{(a^2 - \rho^2) [(3+\nu)a^2 - (1-\nu)r^2]}{2(1+\nu)a^2} + (r^2 + \rho^2) \ln \frac{\rho}{a} \right] & \text{si } r < \rho \\ -\frac{Q}{8\pi D} \left[ \frac{(a^2 - r^2) [(3+\nu)a^2 - (1-\nu)\rho^2]}{2(1+\nu)a^2} + (r^2 + \rho^2) \ln \frac{r}{a} \right] & \text{si } r > \rho \end{cases}$$

$$M_r(r) = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi} \left[ (1-\nu) \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2(1+\nu) \ln \frac{\rho}{a} \right] & \text{si } r < \rho \\ \frac{Q}{8\pi} \left[ (1-\nu) \left( \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2(1+\nu) \ln \frac{r}{a} \right] & \text{si } r > \rho \end{cases}$$

$$M_\theta(r) = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi} \left[ (1-\nu) \left( 1 - \frac{\rho^2}{a^2} \right) - 2(1+\nu) \ln \frac{\rho}{a} \right] & \text{si } r < \rho \\ \frac{Q}{8\pi} \left[ (1-\nu) \left( 2 - \frac{\rho^2}{a^2} - \frac{\rho^2}{r^2} \right) - 2(1+\nu) \ln \frac{r}{a} \right] & \text{si } r > \rho \end{cases}$$

$$T(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < \rho \\ -\frac{Q}{2\pi r} & \text{si } r > \rho \end{cases}$$

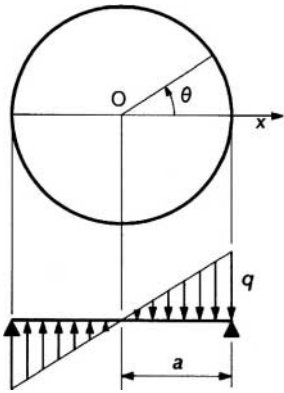
En particulier :

$$w(0) = -\frac{Q}{16\pi D} \left[ \frac{3+\nu}{1+\nu} (a^2 - \rho^2) + 2\rho^2 \ln \frac{\rho}{a} \right]$$

La flèche due à une charge  $Q$  appliquée au centre de la plaque est ( $\rho = 0$ ) :

$$w(0) = -\left( \frac{3+\nu}{1+\nu} \right) \frac{Qa^2}{16\pi D}$$

Tableau 46 – Plaques circulaires simplement appuyées (suite)



■ Plaque simplement appuyée soumise à une densité de charge linéaire :

$$p(r, \theta) = q \frac{r}{a} \cos \theta$$

$$w(r, \theta) = -\frac{qa^4}{192D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \left(\frac{7+\nu}{3+\nu} - \frac{r^2}{a^2}\right) \frac{r}{a} \cos \theta$$

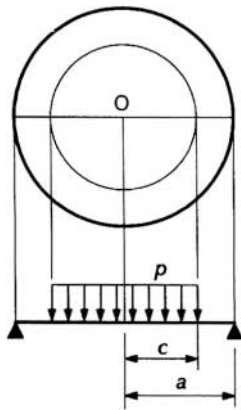
$$M_r(r, \theta) = \frac{(5+\nu)qa^2}{48} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \frac{r}{a} \cos \theta$$

$$M_\theta(r, \theta) = \frac{qa^2}{48(3+\nu)} \left[ (1+3\nu)(5+\nu) - (1+5\nu)(3+\nu) \frac{r^2}{a^2} \right] \frac{r}{a} \cos \theta$$

$$C(r, \theta) = \frac{qa^2}{48} (1-\nu) \left[ \frac{r^2}{a^2} - \frac{5+\nu}{3+\nu} \right] \frac{r}{a} \sin \theta$$

$$T_r(r, \theta) = \frac{1}{24} qa \left[ \frac{2(5+\nu)}{3+\nu} - 9 \frac{r^2}{a^2} \right] \cos \theta$$

$$T_\theta(r, \theta) = \frac{1}{24} qa \left[ 3 \frac{r^2}{a^2} - \frac{2(5+\nu)}{3+\nu} \right] \sin \theta$$



■ Plaque simplement appuyée supportant une charge de densité constante  $p$  pour  $c < a$  :

$$w(r) = \begin{cases} -\frac{pc^2}{16D} \left[ \frac{r^4}{4c^2} + \frac{4a^4 - 3a^2c^2 - 2c^2r^2}{4a^2} + \frac{a^2 - r^2}{1+\nu} \left( 2 - \frac{c^2}{a^2} \right) + (2r^2 + c^2) \ln \frac{c}{a} \right] & \text{si } r < c \\ -\frac{pc^2}{16D} \left[ \frac{(a^2 - r^2)(2a^2 + c^2)}{2a^2} + \frac{a^2 - r^2}{1+\nu} \left( 2 - \frac{c^2}{a^2} \right) + (2r^2 + c^2) \ln \frac{r}{a} \right] & \text{si } r > c \end{cases}$$

$$M_r(r) = \begin{cases} -\frac{pc^2}{16} \left[ (3+\nu) \frac{r^2}{c^2} - 2 \left( 2 - \frac{c^2}{a^2} \right) - (1+\nu) \left( \frac{c^2}{a^2} - 4 \ln \frac{c}{a} \right) \right] & \text{si } r < c \\ -\frac{pc^2}{16} \left[ 2 \frac{c^2}{a^2} - (1-\nu) \frac{c^2}{r^2} - (1+\nu) \left( \frac{c^2}{a^2} - 4 \ln \frac{r}{a} \right) \right] & \text{si } r > c \end{cases}$$

$$M_\theta(r) = \begin{cases} -\frac{pc^2}{16} \left[ (1+3\nu) \frac{r^2}{c^2} - 2 \left( 2 - \frac{c^2}{a^2} \right) - (1+\nu) \left( \frac{c^2}{a^2} - 4 \ln \frac{c}{a} \right) \right] & \text{si } r < c \\ -\frac{pc^2}{16} \left[ 4\nu + (1-\nu) \frac{c^2}{r^2} - 2 \left( 2 - \frac{c^2}{a^2} \right) - (1+\nu) \left( \frac{c^2}{a^2} - 4 \ln \frac{r}{a} \right) \right] & \text{si } r > c \end{cases}$$

$$T(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2} pr & \text{si } r < c \\ -\frac{1}{2} \frac{pc^2}{r} & \text{si } r > c \end{cases}$$

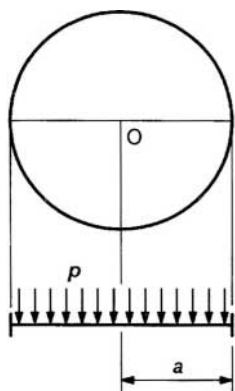
En particulier :

$$w(0) = -\frac{pc^2}{16D} \left[ \frac{4a^2 - 3c^2}{4} + \frac{a^2}{1+\nu} \left( 2 - \frac{c^2}{a^2} \right) + c^2 \ln \frac{c}{a} \right]$$

$$M_r(0) = M_\theta(0) = \frac{pc^2}{16} \left[ 2 \left( 2 - \frac{c^2}{a^2} \right) + (1+\nu) \left( \frac{c^2}{a^2} - 4 \ln \frac{c}{a} \right) \right]$$

$$M_\theta(a) = \frac{(1-\nu)}{8} pc^2 \left( 2 - \frac{c^2}{a^2} \right)$$

Tableau 47 – Plaques circulaires encastées

■ **Plaque encastée supportant une charge de densité constante  $p$  :**

$$w(r) = -\frac{p}{64D} (a^2 - r^2)^2$$

$$M_r(r) = \frac{1}{16} p [(1 + \nu) a^2 - (3 + \nu) r^2]$$

$$M_\theta(r) = \frac{1}{16} p [(1 + \nu) a^2 - (1 + 3\nu) r^2]$$

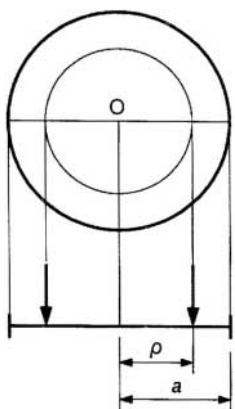
$$T(r) = -\frac{1}{2} pr$$

En particulier :

$$w(0) = -\frac{pa^4}{64D}$$

$$M_r(0) = M_\theta(0) = \frac{1 + \nu}{16} pa^2$$

$$M_r(a) = -\frac{1}{8} pa^2 \text{ et } M_\theta(a) = -\frac{\nu}{8} pa^2$$

■ **Plaque encastée supportant une charge totale  $Q$  uniformément répartie sur une circonférence de rayon  $\rho$  :**

$$w(r) = \begin{cases} -\frac{Q}{8\pi D} \left[ \frac{(a^2 + r^2)(a^2 - \rho^2)}{2a^2} + (r^2 + \rho^2) \ln \frac{\rho}{a} \right] & \text{si } r < \rho \\ -\frac{Q}{8\pi D} \left[ \frac{(a^2 - r^2)(a^2 + \rho^2)}{2a^2} + (r^2 + \rho^2) \ln \frac{r}{a} \right] & \text{si } r > \rho \end{cases}$$

$$M_r(r) = \begin{cases} -\frac{Q}{8\pi} (1 + \nu) \left[ 1 - \frac{\rho^2}{a^2} + 2 \ln \frac{\rho}{a} \right] & \text{si } r < \rho \\ -\frac{Q}{8\pi} \left[ 2 - (1 - \nu) \frac{\rho^2}{r^2} - (1 + \nu) \left( \frac{\rho^2}{a^2} - 2 \ln \frac{r}{a} \right) \right] & \text{si } r > \rho \end{cases}$$

$$M_\theta(r) = \begin{cases} \frac{Q}{8\pi} (1 + \nu) \left[ 1 - \frac{\rho^2}{a^2} + 2 \ln \frac{\rho}{a} \right] & \text{si } r < \rho \\ -\frac{Q}{8\pi} \left[ 2\nu + (1 - \nu) \frac{\rho^2}{r^2} - (1 + \nu) \left( \frac{\rho^2}{a^2} - 2 \ln \frac{r}{a} \right) \right] & \text{si } r > \rho \end{cases}$$

$$T(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r < \rho \\ -\frac{Q}{2\pi r} & \text{si } r > \rho \end{cases}$$

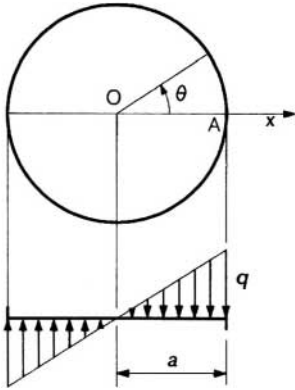
En particulier :

$$w(0) = -\frac{Q}{8\pi D} \left[ \frac{1}{2} (a^2 - \rho^2) + \rho^2 \ln \frac{\rho}{a} \right]$$

La flèche due à une charge concentrée  $Q$  appliquée au centre de la plaque est ( $\rho = 0$ ) :

$$w(0) = -\frac{Qa^2}{16\pi D}$$

**Tableau 47 – Plaques circulaires encadrées (suite)**



■ **Plaque encadrée soumise à une densité de charge linéaire :**

$$p(r, \theta) = q \frac{x}{a} = q \frac{r}{a} \cos \theta$$

$$w(r, \theta) = -\frac{qa^4}{192D} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^2 \frac{r}{a} \cos \theta$$

$$M_r(r, \theta) = \frac{1}{48} qa^2 \left[ (3 + \nu) - (5 + \nu) \frac{r^2}{a^2} \right] \frac{r}{a} \cos \theta$$

$$M_\theta(r, \theta) = \frac{1}{48} qa^2 \left[ (1 + 3\nu) - (1 + 5\nu) \frac{r^2}{a^2} \right] \frac{r}{a} \cos \theta$$

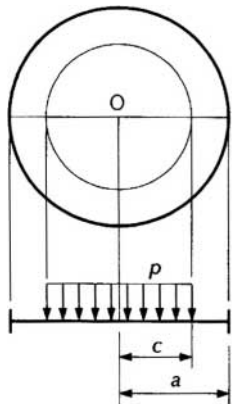
$$C(r, \theta) = -\frac{1}{48} qa^2 (1 - \nu) \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) \frac{r}{a} \sin \theta$$

$$T_r(r, \theta) = \frac{1}{24} qa \left(2 - 9 \frac{r^2}{a^2}\right) \cos \theta$$

$$T_\theta(r, \theta) = \frac{1}{24} qa \left(3 \frac{r^2}{a^2} - 2\right) \sin \theta$$

En particulier, le moment d'encastrement en A a pour valeur :

$$M_r(a, 0) = -\frac{1}{24} qa^2$$



■ **Plaque encadrée supportant une charge de densité constante p pour c < a :**

$$w(r) = \begin{cases} -\frac{pc^2}{16D} \left[ \frac{r^4}{4c^2} + \frac{4a^4 - 3a^2c^2 - 2c^2r^2}{4a^2} + (2r^2 + c^2) \ln \frac{c}{a} \right] & \text{si } r < c \\ -\frac{pc^2}{16D} \left[ \frac{(a^2 - r^2)(2a^2 + c^2)}{2a^2} + (2r^2 + c^2) \ln \frac{r}{a} \right] & \text{si } r > c \end{cases}$$

$$M_r(r) = \begin{cases} -\frac{pc^2}{16} \left[ (3 + \nu) \frac{r^2}{c^2} - (1 + \nu) \left( \frac{c^2}{a^2} - 4 \ln \frac{c}{a} \right) \right] & \text{si } r < c \\ -\frac{pc^2}{16} \left[ 4 - (1 - \nu) \frac{c^2}{r^2} - (1 + \nu) \left( \frac{c^2}{a^2} - 4 \ln \frac{r}{a} \right) \right] & \text{si } r > c \end{cases}$$

$$M_\theta(r) = \begin{cases} -\frac{pc^2}{16} \left[ (1 + 3\nu) \frac{r^2}{c^2} - (1 + \nu) \left( \frac{c^2}{a^2} - 4 \ln \frac{c}{a} \right) \right] & \text{si } r < c \\ -\frac{pc^2}{16} \left[ 4\nu + (1 - \nu) \frac{c^2}{r^2} - (1 + \nu) \left( \frac{c^2}{a^2} - 4 \ln \frac{r}{a} \right) \right] & \text{si } r > c \end{cases}$$

$$T(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2} pr & \text{si } r < c \\ -\frac{1}{2} \frac{pc^2}{r} & \text{si } r > c \end{cases}$$

En particulier :

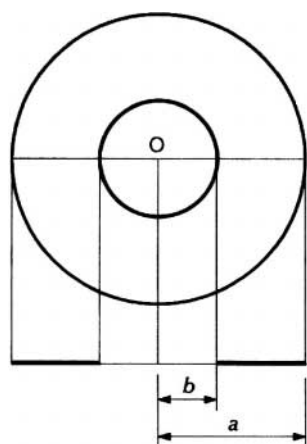
$$w(0) = -\frac{pc^2}{16D} \left[ \frac{4a^2 - 3c^2}{4} + c^2 \ln \frac{c}{a} \right]$$

$$M_r(0) = M_\theta(0) = \frac{1 + \nu}{16} pc^2 \left( \frac{c^2}{a^2} - 4 \ln \frac{c}{a} \right)$$

$$M_r(a) = -\frac{1}{8} pc^2 \left( 2 - \frac{c^2}{a^2} \right) \text{ et } M_\theta(a) = \nu M_r(a)$$



Tableau 48 – Plaques annulaires



### ■ Coefficients caractéristiques

La plaque est limitée par les cercles  $r = b$  et  $r = a$  avec  $a > b$ . On désigne par  $w(r)$  la flèche de la plaque et par  $\omega(r)$  la rotation  $dw/dr$ .

Il est intéressant de faire intervenir dans le calcul les coefficients caractéristiques sans dimensions :

$$\begin{cases} A_1 = \frac{(1-\nu)a^2 + (1+\nu)b^2}{(1-\nu^2)(a^2-b^2)} \\ A_2 = \frac{(1-\nu)b^2 + (1+\nu)a^2}{(1-\nu^2)(a^2-b^2)} \\ A_3 = \frac{2ab}{(1-\nu^2)(a^2-b^2)} \end{cases} \quad \begin{cases} B_1 = \frac{1}{2(1+\nu)} + \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{b^2}{a^2-b^2} \right) \ln \frac{a}{b} \\ B_2 = \frac{1}{2(1+\nu)} + \frac{1}{1-\nu} \left( \frac{a^2}{a^2-b^2} \right) \ln \frac{a}{b} \end{cases}$$

$$K = \frac{1}{2} \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} \right) \frac{a^2-b^2}{ab} + \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \frac{2ab}{a^2-b^2} \left( \ln \frac{a}{b} \right)^2$$

### ■ Premier problème fondamental

Le bord  $r = a$  est sollicité par une densité de couple  $M_1$  et le bord  $r = b$  est sollicité par une densité de couple  $M_2$ .

La flèche  $w_1(r)$  n'est définie qu'à une constante additive près que l'on peut déterminer en supposant fixe l'un des bords.

Si le bord  $r = a$  est fixe, on a  $w_1(r) = w'_1(r)$  :

$$w'_1(r) = -\frac{1}{D} \left[ \frac{M_1 a^2 - M_2 b^2}{2(1+\nu)} \left( \frac{a^2 - r^2}{a^2 - b^2} \right) + \frac{(M_1 - M_2) a^2 b^2}{(1-\nu)(a^2 - b^2)} \ln \frac{a}{r} \right]$$

Si le bord  $r = b$  est fixe, on a  $w_1(r) = w''_1(r)$  :

$$w''_1(r) = \frac{1}{D} \left[ \frac{M_1 a^2 - M_2 b^2}{2(1+\nu)} \left( \frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2} \right) + \frac{(M_1 - M_2) a^2 b^2}{(1-\nu)(a^2 - b^2)} \ln \frac{r}{b} \right]$$

donc :

$$w'_1(b) = -w''_1(a) = -\frac{M_1 a^2}{D} B_1 + \frac{M_2 b^2}{D} B_2$$

La rotation  $\omega_1(r)$  a pour valeur :

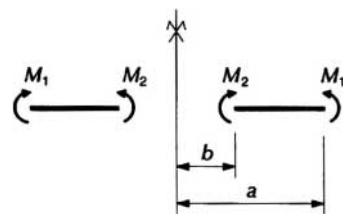
$$\omega_1(r) = \frac{1}{D} \left[ \frac{M_1 a^2 - M_2 b^2}{(1+\nu)(a^2 - b^2)} r + \frac{(M_1 - M_2) a^2 b^2}{(1-\nu)(a^2 - b^2)} \left( \frac{1}{r} \right) \right]$$

donc :

$$\begin{cases} \omega_1(a) = \frac{M_1 a}{D} A_1 - \frac{M_2 b}{D} A_3 \\ \omega_1(b) = \frac{M_1 a}{D} A_3 - \frac{M_2 b}{D} A_2 \end{cases}$$

Enfin :

$$\begin{cases} M_{1r}(r) = \frac{M_1 a^2 - M_2 b^2}{a^2 - b^2} - \frac{(M_1 - M_2) a^2 b^2}{a^2 - b^2} \left( \frac{1}{r^2} \right) \\ M_{1\theta}(r) = \frac{M_1 a^2 - M_2 b^2}{a^2 - b^2} + \frac{(M_1 - M_2) a^2 b^2}{a^2 - b^2} \left( \frac{1}{r^2} \right) \end{cases}$$



**Remarque :** la solution de tout problème pour la plaque annulaire ( $b < r < a$ ) s'obtient en ajoutant la solution de ce problème pour la plaque circulaire simplement appuyée ou encastree de rayon  $a$  et les solutions des deux problèmes fondamentaux ; les paramètres  $M_1$ ,  $M_2$  et  $Q$  sont déterminés par les conditions aux limites.

**Tableau 48 – Plaques annulaires (suite)**

■ **Deuxième problème fondamental**

La plaque est soumise à une charge totale  $Q$  uniformément répartie le long du bord  $r = a$  et à une charge totale  $-Q$  uniformément répartie le long du bord  $r = b$ .

La flèche  $w_2(r)$  n'est définie qu'à une constante additive près que l'on peut déterminer en supposant fixe l'un des bords.

Si le bord  $r = a$  est fixe, on a  $w_2(r) = w'_2(r)$  :

$$w'_2(r) = \frac{Q}{8\pi D} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} \right) + \frac{b^2}{a^2-b^2} \ln \frac{a}{b} \right] (a^2-r^2) + \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \frac{2a^2b^2}{a^2-b^2} \ln \frac{a}{b} \ln \frac{a}{r} - r^2 \ln \frac{a}{r} \right\}$$

Si le bord  $r = b$  est fixe, on a  $w_2(r) = w''_2(r)$  :

$$w''_2(r) = -\frac{Q}{8\pi D} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{3+\nu}{1+\nu} \right) + \frac{a^2}{a^2-b^2} \ln \frac{a}{b} \right] (r^2-b^2) + \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \frac{2a^2b^2}{a^2-b^2} \ln \frac{a}{b} \ln \frac{r}{b} - r^2 \ln \frac{r}{b} \right\}$$

donc :

$$w'_2(b) = -w''_2(a) = \frac{Qab}{8\pi D} K$$

La rotation  $\omega_2(r)$  a pour valeur :

$$\omega_2(r) = -\frac{Q}{4\pi D} \left\{ \frac{r}{1+\nu} + \frac{a^2}{a^2-b^2} \ln \frac{a}{b} \left[ r + \left( \frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \frac{b^2}{r} \right] - r \ln \frac{r}{b} \right\}$$

donc :

$$\omega_2(a) = -\frac{Qa}{2\pi D} B_1 \text{ et } \omega_2(b) = -\frac{Qb}{2\pi D} B_2$$

Enfin :

$$\begin{cases} M_{2r}(r) = -\frac{Q(1+\nu)}{4\pi} \left[ \frac{a^2}{a^2-b^2} \ln \frac{a}{b} \left( \frac{r^2-b^2}{r^2} \right) - \ln \frac{r}{b} \right] \\ M_{2\theta}(r) = -\frac{Q(1+\nu)}{4\pi} \left[ \frac{1-\nu}{1+\nu} + \frac{a^2}{a^2-b^2} \ln \frac{a}{b} \left( \frac{r^2+b^2}{r^2} \right) - \ln \frac{r}{b} \right] \end{cases}$$

**Remarque :** la solution de tout problème pour la plaque annulaire ( $b < r < a$ ) s'obtient en ajoutant la solution de ce problème pour la plaque circulaire simplement appuyée ou encastrée de rayon  $a$  et les solutions des deux problèmes fondamentaux ; les paramètres  $M_1$ ,  $M_2$  et  $Q$  sont déterminés par les conditions aux limites.

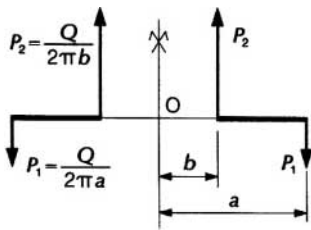
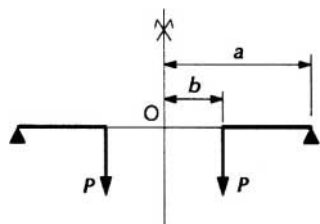


Tableau 48 – Plaques annulaires (suite)

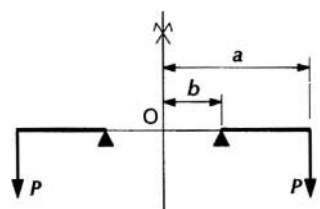
■ Plaques annulaires ayant un bord libre sollicité par une densité linéaire de charge constante  $P$ 

$w'_1(r)$ ,  $w''_1(r)$ ,  $w'_2(r)$  et  $w''_2(r)$  sont les solutions des problèmes fondamentaux.

● Bord  $r = a$  simplement appuyé et bord  $r = b$  libre :

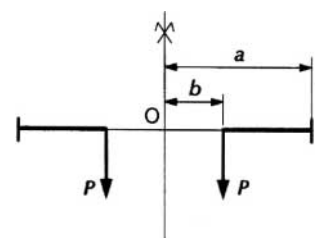
$$w(r) = w'_2(r) \quad \text{avec : } Q = -2\pi b P$$

$$w(b) = -\frac{Pab^2}{4D} K \quad \omega(a) = \frac{Pab}{D} B_1 \quad \omega(b) = \frac{Pb^2}{D} B_2$$

● Bord  $r = b$  simplement appuyé et bord  $r = a$  libre :

$$w(r) = w''_2(r) \quad \text{avec : } Q = 2\pi a P$$

$$w(a) = -\frac{Pa^2b}{4D} K \quad \omega(a) = -\frac{Pa^2}{D} B_1 \quad \omega(b) = -\frac{Pab}{D} B_2$$

● Bord  $r = a$  encasté et bord  $r = b$  libre :

avec

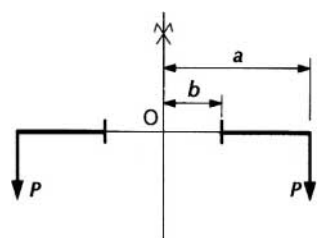
$$w(r) = w'_1(r) + w'_2(r)$$

$$M_1 = -Pb \frac{B_1}{A_1} \quad M_2 = 0 \quad Q = -2\pi b P$$

$$w(b) = -\frac{Pab^2}{4D} \left[ K - 4 \left( \frac{a}{b} \right) \frac{B_1^2}{A_1} \right]$$

$$\omega(b) = \frac{Pb^2}{D} \left[ B_2 - \left( \frac{a}{b} \right) \frac{B_1 A_3}{A_1} \right]$$

$$M_r(a) = -Pb \frac{B_1}{A_1}$$

● Bord  $r = b$  encasté et bord  $r = a$  libre :

avec

$$w(r) = w''_1(r) + w''_2(r)$$

$$M_1 = 0 \quad M_2 = -Pa \frac{B_2}{A_2} \quad Q = 2\pi a P$$

$$w(a) = -\frac{Pab^2}{4D} \left[ K - 4 \left( \frac{b}{a} \right) \frac{B_2^2}{A_2} \right]$$

$$\omega(a) = -\frac{Pa^2}{D} \left[ B_1 - \left( \frac{b}{a} \right) \frac{B_2 A_3}{A_2} \right]$$

$$M_r(b) = -Pa \frac{B_2}{A_2}$$

**Remarque :** la solution de tout problème pour la plaque annulaire ( $b < r < a$ ) s'obtient en ajoutant la solution de ce problème pour la plaque circulaire simplement appuyée ou encastée de rayon  $a$  et les solutions des deux problèmes fondamentaux ; les paramètres  $M_1$ ,  $M_2$  et  $Q$  sont déterminés par les conditions aux limites.

**Tableau 48 – Plaques annulaires (suite)**

■ **Plaques annulaires supportant une charge de densité  $p$  constante**

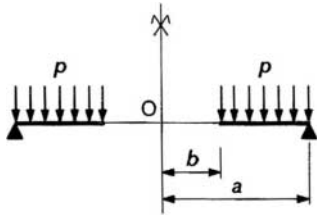
Dans les formules données pour chaque cas :

$w_1'(r)$ ,  $w_1''(r)$ ,  $w_2'(r)$  et  $w_2''(r)$  sont les solutions des problèmes fondamentaux,  
 $w_0(r)$  est la solution relative à la plaque encastree de rayon  $a$  :

$$w_0(r) = -\frac{p}{64D} (a^2 - r^2)^2 \quad \omega_0(r) = \frac{p}{16D} r(a^2 - r^2)$$

$$M_0(r) = M_r(r) = \frac{1}{16} p [(1 + \nu) a^2 - (3 + \nu) r^2]$$

Nous nous bornons à donner dans chaque cas l'expression de  $w(r)$ .

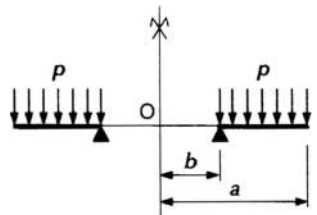


● **Bord  $r = a$  simplement appuyé et bord  $r = b$  libre :**

avec

$$w(r) = w_0(r) + w_1'(r) + w_2'(r)$$

$$M_1 = -M_0(a) \quad M_2 = -M_0(b) \quad Q = \pi b^2 p$$

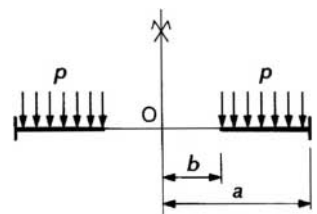


● **Bord  $r = a$  libre et bord  $r = b$  simplement appuyé :**

avec

$$w(r) = w_0(r) + w_1''(r) + w_2''(r)$$

$$M_1 = -M_0(a) \quad M_2 = -M_0(b) \quad Q = \pi a^2 p$$



● **Bord  $r = a$  encastré et bord  $r = b$  libre :**

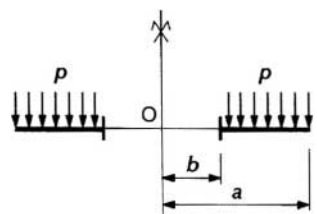
avec

$$w(r) = w_0(r) + w_1'(r) + w_2'(r)$$

$$M_2 = -M_0(b) \quad \text{et} \quad Q = \pi b^2 p$$

et  $M_1$  défini par l'équation :

$$\frac{M_1 a}{D} A_1 - \frac{M_2 b}{D} A_3 - \frac{Q a}{2\pi D} B_1 = 0$$



● **Bord  $r = a$  libre et bord  $r = b$  encastré :**

avec

$$w(r) = w_0(r) + w_1''(r) + w_2''(r)$$

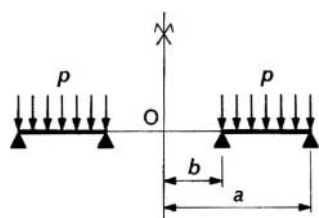
$$M_1 = -M_0(a) \quad \text{et} \quad Q = \pi a^2 p$$

et  $M_2$  défini par l'équation :

$$\omega_0(b) + \frac{M_1 a}{D} A_3 - \frac{M_2 b}{D} A_2 - \frac{Q b}{2\pi D} B_2 = 0$$

**Remarque :** la solution de tout problème pour la plaque annulaire ( $b < r < a$ ) s'obtient en ajoutant la solution de ce problème pour la plaque circulaire simplement appuyée ou encastree de rayon  $a$  et les solutions des deux problèmes fondamentaux ; les paramètres  $M_1$ ,  $M_2$  et  $Q$  sont déterminés par les conditions aux limites.

Tableau 48 – Plaques annulaires (suite)



- Bords  $r = a$  et  $r = b$  simplement appuyés :

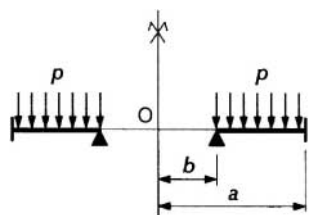
$$w(r) = w_0(r) + w'_1(r) + w'_2(r)$$

avec

$$M_1 = -M_0(a) \quad \text{et} \quad M_2 = -M_0(b)$$

et  $Q$  défini par l'équation :

$$w_0(b) - \frac{M_1 a^2}{D} B_1 + \frac{M_2 b^2}{D} B_2 + \frac{Qab}{8\pi D} K = 0$$



- Bord  $r = a$  encasté et bord  $r = b$  simplement appuyé :

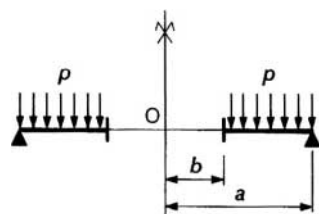
$$w(r) = w_0(r) + w'_1(r) + w'_2(r)$$

avec

$$M_2 = -M_0(b)$$

et  $M_1$  et  $Q$  définis par les équations :

$$\begin{cases} \frac{M_1 a}{D} A_1 - \frac{M_2 b}{D} A_3 - \frac{Qa}{2\pi D} B_1 = 0 \\ w_0(b) - \frac{M_1 a^2}{D} B_1 + \frac{M_2 b^2}{D} B_2 - \frac{Qab}{8\pi D} K = 0 \end{cases}$$



- Bord  $r = a$  simplement appuyé et bord  $r = b$  encasté :

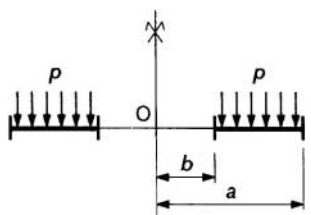
$$w(r) = w_0(r) + w'_1(r) + w'_2(r)$$

avec

$$M_1 = -M_0(a)$$

et  $M_2$  et  $Q$  définis par les équations :

$$\begin{cases} w_0(b) + \frac{M_1 a}{D} A_3 - \frac{M_2 b}{D} A_2 - \frac{Qb}{2\pi D} B_2 = 0 \\ w_0(b) - \frac{M_1 a^2}{D} B_1 + \frac{M_2 b^2}{D} B_2 + \frac{Qab}{8\pi D} K = 0 \end{cases}$$



- Bords  $r = a$  et  $r = b$  encastés :

$$w(r) = w_0(r) + w'_1(r) + w'_2(r)$$

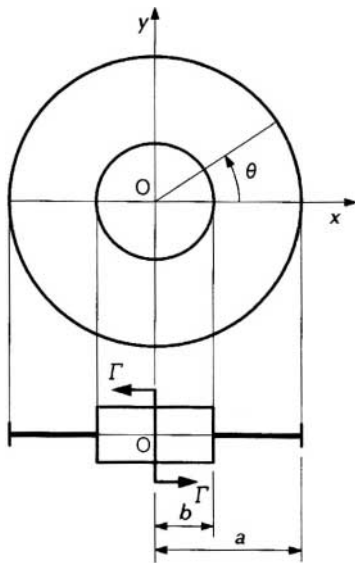
 $M_1$ ,  $M_2$  et  $Q$  sont définis par les équations :

$$\begin{cases} \frac{M_1 a}{D} A_1 - \frac{M_2 b}{D} A_3 - \frac{Qa}{2\pi D} B_1 = 0 \\ w_0(b) + \frac{M_1 a}{D} A_3 - \frac{M_2 b}{D} A_2 - \frac{Qb}{2\pi D} B_2 = 0 \\ w_0(b) - \frac{M_1 a^2}{D} B_1 + \frac{M_2 b^2}{D} B_2 + \frac{Qab}{8\pi D} K = 0 \end{cases}$$

**Remarque :** la solution de tout problème pour la plaque annulaire ( $b < r < a$ ) s'obtient en ajoutant la solution de ce problème pour la plaque circulaire simplement appuyée ou encastée de rayon  $a$  et les solutions des deux problèmes fondamentaux ; les paramètres  $M_1$ ,  $M_2$  et  $Q$  sont déterminés par les conditions aux limites.

Tableau 48 – Plaques annulaires (suite)

■ Plaques annulaires soumises à des charges quelconques



- **Plaque annulaire encastree le long du bord  $r = a$  et solidaire le long du bord  $r = b$  d'un bloc indéformable sollicité par un couple  $\Gamma$  :**

$$w(r, \theta) = -\frac{\Gamma}{8\pi D} \left[ Ar + \frac{B}{r} + Cr^3 + 2r \ln \frac{r}{b} \right] \cos \theta$$

avec

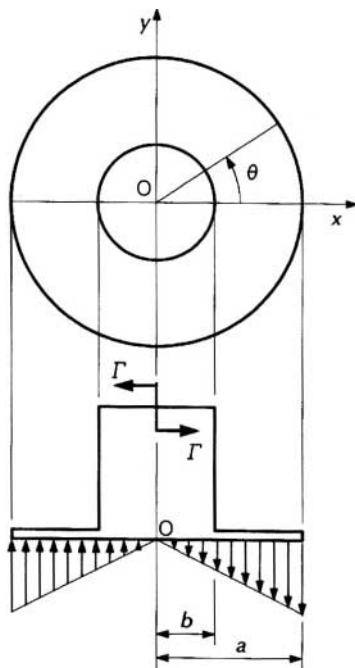
$$A = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} - 2 \ln \frac{a}{b}$$

$$B = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}$$

$$C = -\frac{1}{a^2 + b^2}$$

Le plus grand moment fléchissant en valeur absolue est obtenu le long du bord  $r = b$  pour  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$  :

$$(M_r)_{max} = \frac{\Gamma}{2\pi b} \left( \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \right)$$



- **Dalle de fondation annulaire soumise à un couple de renversement  $\Gamma$**

On peut assimiler la dalle de fondation à une plaque annulaire libre pour  $r = a$  et encastree sur un poteau circulaire pour  $r = b$ .

On peut admettre que cette plaque est soumise à la densité de charge :

$$p(r, \theta) = q \frac{x}{a} = q \frac{r}{a} \cos \theta \quad \text{avec } q = \frac{4\Gamma}{\pi a^2}$$

On trouve :

$$w(r, \theta) = -\frac{\Gamma a^2}{48\pi D} \left[ \left( \frac{r}{a} \right)^5 + A \frac{r}{a} + B \frac{a}{r} + C \left( \frac{r}{a} \right)^3 + 12 \frac{r}{a} \ln \frac{r}{a} \right] \cos \theta$$

avec, en posant  $b = ka$  :

$$\begin{cases} B = 2k^2 \frac{(3+\nu)(3+k^2) - 4(2+\nu)k^2}{(3+\nu) + (1-\nu)k^4} \\ C = -2 \frac{4(2+\nu) + (1-\nu)(3+k^4)k^2}{(3+\nu) + (1-\nu)k^4} \end{cases}$$

La constante  $A$ , qui correspond à une rotation d'ensemble, ne peut être déterminée que si l'on connaît le module de réaction du sol de fondation. Mais la constante  $A$  n'intervient pas dans le calcul des efforts. Ainsi :

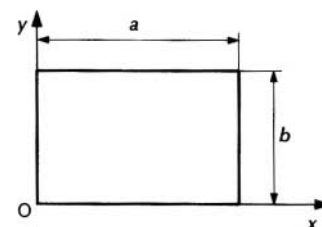
$$M_r(r, \theta) = -\frac{\Gamma}{48\pi} \left[ 5(4+\nu) \frac{r^3}{a^3} + 12(1+\nu) \frac{a}{r} + 2B(1-\nu) \frac{a^3}{r^3} + 2C(3+\nu) \frac{r}{a} \right] \cos \theta$$

Ce moment est maximal en valeur absolue pour  $r = b$  et  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ .

**Remarque :** la solution de tout problème pour la plaque annulaire ( $b < r < a$ ) s'obtient en ajoutant la solution de ce problème pour la plaque circulaire simplement appuyée ou encastree de rayon  $a$  et les solutions des deux problèmes fondamentaux ; les paramètres  $M_1$ ,  $M_2$  et  $Q$  sont déterminés par les conditions aux limites.

Tableau 49 – Plaques rectangulaires. Généralités

Soit une plaque rectangulaire de côtés  $a$  et  $b$  soumise à une densité de charge  $p(x, y)$ .  
On connaît deux solutions formelles  $w(x, y)$  de l'équation de Lagrange.



■ **Solution de Navier (valable seulement pour une plaque simplement appuyée sur ses quatre côtés)**

La flèche est donnée par la série trigonométrique double :

$$w(x, y) = -\frac{1}{\pi^4 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{m,n}}{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (1)$$

avec

$$A_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy \quad (2)$$

Cette solution n'est pas pratique, car elle exige le calcul de la somme de séries doubles qui ne convergent pas toujours rapidement.

■ **Solution de Maurice Lévy (valable seulement pour une plaque simplement appuyée sur deux côtés opposés  $x = 0$  et  $x = a$ )**

La flèche est donnée par une série trigonométrique simple :

$$w(x, y) = -\frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} F_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (3)$$

Si l'on pose :

$$p_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} dx \quad (4)$$

la fonction  $F_m(y)$  est une intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{d^4 F_m}{dy^4} - 2 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \frac{d^2 F_m}{dy^2} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 F_m = p_m(y) \quad (5)$$

donc, en posant  $Y = \frac{m\pi y}{a}$ , on voit que  $F_m(y)$  est de la forme :

$$F_m(y) = \varphi_m(Y) + (A_m \operatorname{ch} Y + B_m Y \operatorname{sh} Y) + (C_m \operatorname{sh} Y + D_m Y \operatorname{ch} Y) \quad (6)$$

$\varphi_m\left(\frac{m\pi y}{a}\right)$  étant une intégrale particulière de l'équation (5).

On peut alors déterminer les constantes  $A_m$ ,  $B_m$ ,  $C_m$  et  $D_m$  pour satisfaire aux conditions d'appui le long des côtés  $y = 0$  et  $y = b$ .

La solution de Maurice Lévy conduit au calcul de somme de séries simples convergeant presque toujours rapidement.

■ **Notations**

On pose, pour simplifier l'écriture :

$$\sum_m f(m) = \sum_{m=1}^{\infty} f(m)$$

$$\sum'_m f(m) = \sum_{m=1, 3, 5, \dots}^{\infty} f(m)$$

$$\sum''_m f(m) = \sum_{m=2, 4, 6, \dots}^{\infty} f(m)$$

**Remarque** : lorsque la plaque n'est pas simplement appuyée sur deux côtés opposés (par exemple encadrée sur ses quatre côtés), on doit recourir à des méthodes numériques d'approximation très longues telles que la méthode des éléments finis.

**Tableau 50 – Plaques rectangulaires infiniment longues**

■ **Plaque simplement appuyée sur ses bords  $x = 0$  et  $x = a$  supportant une densité linéaire de charge constante  $P$  sur l'axe  $Ox$**

On peut, en raison de la symétrie, supposer  $y > 0$ .

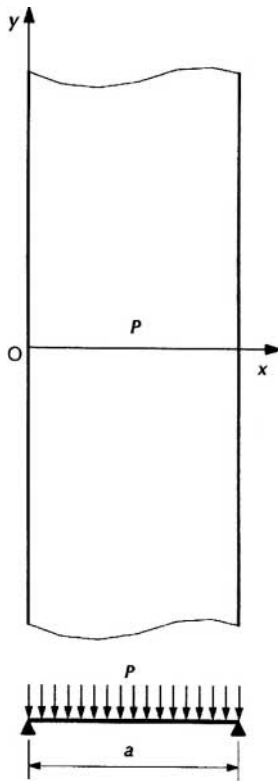
- La **flèche**  $w(x, y)$  a pour valeur :

$$w(x, y) = -\frac{Pa^3}{D} f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)$$

avec 
$$f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) = \sum_m' \frac{1}{m^4 \pi^4} \left(1 + \frac{m \pi y}{a}\right) \exp\left(-\frac{m \pi y}{a}\right) \sin \frac{m \pi x}{a}$$

La table suivante donne les valeurs de  $f\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)$  le long de  $Ox$  et le long de l'axe longitudinal

$x = \frac{a}{2}$  de la plaque.



$\frac{x}{a}$	$f\left(\frac{x}{a}, 0\right)$
0	0
0,05	0,001 682
0,10	0,003 295
0,15	0,004 795
0,20	0,006 150
0,25	0,007 335
0,30	0,008 330
0,35	0,009 119
0,40	0,009 691
0,45	0,010 037
0,50	0,010 152

$\frac{y}{a}$	$f\left(\frac{1}{2}, \frac{y}{a}\right)$	$\frac{y}{a}$	$f\left(\frac{1}{2}, \frac{y}{a}\right)$
0	0,010 152	1,2	0,001 129
0,1	0,009 766	1,4	0,000 682
0,2	0,008 865	1,6	0,000 406
0,3	0,007 743	1,8	0,000 239
0,4	0,006 580	2	0,000 140
0,5	0,005 480	2,2	0,000 081
0,6	0,004 494	2,4	0,000 047
0,7	0,003 641	2,6	0,000 027
0,8	0,002 921	2,8	0,000 015
0,9	0,002 324	3	0,000 009
1	0,001 837	3,2	0,000 005

- Les **moments fléchissants**  $M_1(x, y)$  et  $M_2(x, y)$  ont pour valeurs :

$$\begin{cases} M_1(x, y) = Pa \left[ (1 + \nu) F\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) + (1 - \nu) G\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) \right] \\ M_2(x, y) = Pa \left[ (1 + \nu) F\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) - (1 - \nu) G\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) \right] \end{cases}$$

avec 
$$\begin{cases} F\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) = \sum_m' \frac{1}{m^2 \pi^2} \exp\left(-\frac{m \pi y}{a}\right) \sin \frac{m \pi x}{a} \\ G\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) = \sum_m' \frac{1}{m^2 \pi^2} \left(\frac{m \pi y}{a}\right) \exp\left(-\frac{m \pi y}{a}\right) \sin \frac{m \pi x}{a} \end{cases}$$

En particulier :

$$M_1(x, 0) = M_2(x, 0) = (1 + \nu) Pa F\left(\frac{x}{a}, 0\right)$$

$\frac{x}{a}$	$F\left(\frac{x}{a}, 0\right)$
0	0
0,05	0,028 198
0,10	0,045 331
0,15	0,058 234
0,20	0,068 333
0,25	0,076 283
0,30	0,082 454
0,35	0,087 074
0,40	0,090 286
0,45	0,092 180
0,50	0,092 807

$\frac{y}{a}$	$F\left(\frac{1}{2}, \frac{y}{a}\right)$	$G\left(\frac{1}{2}, \frac{y}{a}\right)$
0	0,092 807	0
0,1	0,070 286	0,020 080
0,2	0,052 498	0,031 199
0,3	0,038 849	0,035 482
0,4	0,028 585	0,035 304
0,5	0,020 963	0,032 620
0,6	0,015 345	0,028 779
0,7	0,011 221	0,024 610
0,8	0,008 201	0,020 582
0,9	0,005 992	0,016 930
1	0,004 378	0,013 747



Tableau 50 – Plaques rectangulaires infiniment longues (suite)

- **Plaque simplement appuyée sur ses bords  $x = 0$  et  $x = a$  supportant une densité superficielle de charge constante  $p$  pour  $-ka \leq y \leq ka$**

- La flèche au centre  $C \left( \frac{a}{2}, 0 \right)$  de la zone chargée a pour valeur :

$$w = -\frac{5}{384} \frac{pa^4}{D} f(k)$$

avec 
$$f(k) = 1 - \frac{768}{5} \sum_m \frac{2 + m\pi k}{m^5 \pi^5} \exp(-m\pi k) \sin \frac{m\pi}{2}$$

$k$	$f(k)$	$k$	$f(k)$	$k$	$f(k)$	$k$	$f(k)$
0	0	0,35	0,482 30	0,90	0,856 65	2,5	0,998 08
0,05	0,077 69	0,40	0,535 05	1	0,888 48	3	0,999 54
0,10	0,153 87	0,45	0,583 41	1,2	0,933 23	3,5	0,999 89
0,15	0,227 37	0,50	0,627 54	1,4	0,960 50	4	0,999 97
0,20	0,297 39	0,60	0,703 98	1,6	0,976 86	4,5	0,999 99
0,25	0,363 40	0,70	0,766 28	1,8	0,986 55	5	1,000 00
0,30	0,425 08	0,80	0,816 51	2	0,992 24	$\infty$	1

- Les moments fléchissants  $M_1$  et  $M_2$  au centre de la zone chargée ont pour valeurs :

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{8} p a^2 [F(k) - (1 - \nu) G(k)] \\ M_2 = \frac{1}{8} p a^2 [F(k) + (1 - \nu) G(k)] \end{cases}$$

avec 
$$\begin{cases} F(k) = 1 - \sum_m \frac{32k}{m^3 \pi^3} \exp(-m\pi k) \sin \frac{m\pi}{2} \\ G(k) = \sum_m \frac{16k}{m^3 \pi^3} \exp(-m\pi k) \sin \frac{m\pi}{2} \end{cases}$$

$k$	$F(k)$	$G(k)$	$k$	$F(k)$	$G(k)$
0	0	0	0,90	0,938 95	0,086 29
0,05	0,138 82	0,064 74	1	0,955 40	0,070 04
0,10	0,259 64	0,112 46	1,2	0,976 21	0,044 85
0,15	0,364 37	0,146 00	1,4	0,987 31	0,027 91
0,20	0,454 89	0,167 99	1,6	0,993 23	0,017 02
0,25	0,532 92	0,180 81	1,8	0,996 39	0,010 21
0,30	0,600 04	0,186 47	2	0,998 07	0,006 05
0,35	0,657 69	0,186 71	2,5	0,999 60	0,001 57
0,40	0,707 14	0,182 94	3	0,999 92	0,000 39
0,45	0,749 51	0,176 30	3,5	0,999 98	0,000 10
0,50	0,785 80	0,167 70	4	1,000 00	0,000 02
0,60	0,843 43	0,147 31	4,5	1,000 00	0,000 01
0,70	0,885 60	0,125 68	5	1,000 00	0,000 00
0,80	0,916 42	0,104 98	$\infty$	1	0

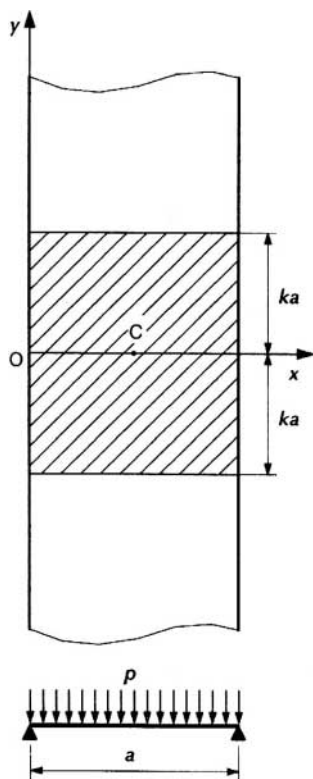
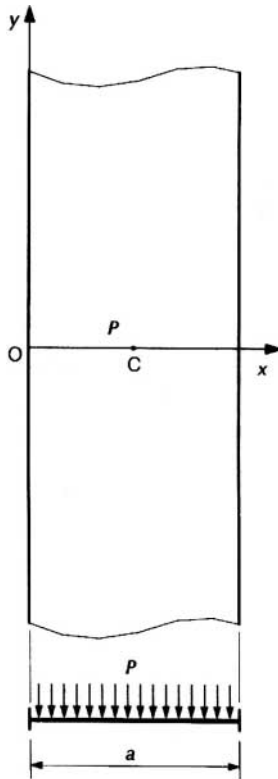


Tableau 50 – Plaques rectangulaires infiniment longues (suite)



■ **Plaque encastree sur ses bords  $x = 0$  et  $x = a$  supportant une densite lineaire de charge constante  $P$  sur l'axe  $Ox$**

La solution de ce probleme s'obtient en etudiant, au moyen de la solution de Maurice Levy, la plaque rectangulaire encastree sur les cotes  $x = 0$  et  $x = a$ , et simplement appuiee sur les cotes  $y = -\frac{1}{2}b$  et  $y = \frac{1}{2}b$ , et ensuite en faisant tendre  $b$  vers l'infini (avec  $\rho = a/b$ ).

- La **flèche**  $w$  au centre  $C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$  de la zone chargee a pour valeur :

$$w = -\frac{Pa^3}{D} f$$

avec 
$$f = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \rho^3 \left[ \frac{1}{48} - \sum_m \frac{2}{m^4 \pi^4} \frac{\frac{m\pi}{2\rho} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2\rho} + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2\rho}}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2\rho} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2\rho} + \frac{m\pi}{2\rho}} \right] \right\}$$

On trouve :

$$f \approx 0,003\,452\,5$$

- Les **moments fléchissants**  $M_1$  et  $M_2$  au centre  $C$  de la zone chargee ont pour valeurs :

$$M_1 = Pa [F + \nu G] \text{ et } M_2 = Pa [\nu F + G]$$

avec 
$$F = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \rho \left[ \sum_m \frac{2}{m^2 \pi^2} \frac{\frac{m\pi}{2\rho} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2\rho} - \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2\rho}}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2\rho} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2\rho} + \frac{m\pi}{2\rho}} \right] \right\}$$

$$G = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \rho \left[ \frac{1}{4} - \sum_m \frac{2}{m^2 \pi^2} \frac{\frac{m\pi}{2\rho} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2\rho} + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2\rho}}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2\rho} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2\rho} + \frac{m\pi}{2\rho}} \right] \right\}$$

On trouve :

$$F \approx 0,049\,016 \text{ et } G \approx 0,070\,269$$

- Le **moment d'encastrement**  $\bar{M}_1$  en  $O$  a pour valeur :

$$\bar{M}_1 = -PaH$$

avec 
$$H = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ \rho \left[ \frac{1}{4} - \sum_m \frac{4}{m^2 \pi^2} \frac{\frac{m\pi}{\rho}}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2\rho} + \frac{m\pi}{\rho}} \right] \right\}$$

On trouve :

$$H \approx 0,163\,87$$

Tableau 50 – Plaques rectangulaires infiniment longues (suite)

- **Plaque encadrée sur ses bords  $x = 0$  et  $x = a$  supportant une densité superficielle de charge constante  $p$  pour  $-ka \leq y \leq ka$**

La solution de ce problème s'obtient en étudiant, au moyen de la solution de Maurice Lévy, la plaque rectangulaire encadrée sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$ , et simplement appuyée sur les côtés  $y = -\frac{1}{2}b$  et  $y = \frac{1}{2}b$ , et ensuite en faisant tendre  $b$  vers l'infini.

- **La flèche  $w$  au centre  $C(a/2, 0)$  de la zone chargée a pour valeur :**

$$w = -\frac{pa^4}{384D} f(k)$$

$$\text{avec } f(k) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ 768 \rho^4 \left[ \varphi\left(\frac{k}{\rho}\right) - \sum'_m \frac{2}{m^5 \pi^5} \frac{\frac{m\pi}{2\rho} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2\rho} + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2\rho}}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2\rho} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2\rho} + \frac{m\pi}{2\rho}} \sin \frac{m\pi k}{\rho} \right] \right\}$$

$$\varphi\left(\frac{k}{\rho}\right) = \frac{1}{768} \left[ 5 - \left(1 - \frac{2k}{\rho}\right)^2 \left(5 + 4 \frac{k}{\rho} - 4 \frac{k^2}{\rho^2}\right) \right]$$

$k$	$f(k)$	$k$	$f(k)$	$k$	$f(k)$	$k$	$f(k)$
0	0	0,5	0,870 2	1	1,001 3	2	1,000 2
0,1	0,257 6	0,6	0,927 7	1,2	1,003 9	2,5	1,000 1
0,2	0,480 3	0,7	0,963 4	1,4	1,002 8	3	1,000 0
0,3	0,654 8	0,8	0,984 4	1,6	1,001 5	3,5	1,000 0
0,4	0,782 3	0,9	0,995 7	1,8	1,000 6	$\infty$	1

- **Les moments fléchissants  $M_1$  et  $M_2$  au centre  $C$  de la zone chargée ont pour valeurs :**

$$M_1 = \frac{1}{24} pa^2 [F(k) + \nu G(k)] \text{ et } M_2 = \frac{1}{24} pa^2 [\nu F(k) + G(k)]$$

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} F(k) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ 24 \rho^2 \sum'_m \frac{4}{m^3 \pi^3} \frac{\frac{m\pi}{2\rho} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2\rho} - \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2\rho}}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2\rho} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2\rho} + \frac{m\pi}{2\rho}} \sin \frac{m\pi k}{\rho} \right\} \\ G(k) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ 24 \rho^2 \left[ \frac{k}{2\rho} \left(1 - \frac{k}{\rho}\right) - \sum'_m \frac{4}{m^3 \pi^3} \frac{\frac{m\pi}{2\rho} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2\rho} + \operatorname{sh} \frac{m\pi}{2\rho}}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{2\rho} \operatorname{ch} \frac{m\pi}{2\rho} + \frac{m\pi}{2\rho}} \sin \frac{m\pi k}{\rho} \right] \right\} \end{array} \right.$$

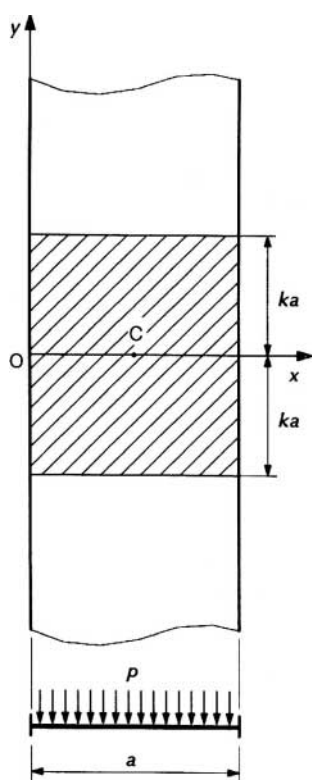
$k$	$F(k)$	$G(k)$	$k$	$F(k)$	$G(k)$
0	0	0	1	0,998 6	0,020 5
0,1	0,231 4	0,231 9	1,2	1,003 3	0,005 0
0,2	0,441 1	0,307 7	1,4	1,002 8	0,000 1
0,3	0,614 9	0,297 1	1,6	1,001 6	-0,000 9
0,4	0,748 3	0,248 1	1,8	1,000 7	-0,000 7
0,5	0,844 1	0,189 4	2	1,000 2	-0,000 4
0,6	0,909 1	0,135 4	2,5	1,000 0	0,000 0
0,7	0,951 0	0,091 6	3	1,000 0	0,000 0
0,8	0,970 4	0,058 8	3,5	1,000 0	0,000 0
0,9	0,991 0	0,035 8	$\infty$	1	0

- **Le moment d'encastrement  $\overline{M}_1$  en  $O$  a pour valeur :**

$$\overline{M}_1 = -\frac{1}{12} pa^2 H(k)$$

$$\text{avec } H(k) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \left\{ 12 \rho^2 \left[ \frac{k}{2\rho} \left(1 - \frac{k}{\rho}\right) - \sum'_m \frac{8}{m^3 \pi^3} \frac{\frac{m\pi}{2\rho}}{\operatorname{sh} \frac{m\pi}{\rho} + \frac{m\pi}{\rho}} \sin \frac{m\pi k}{\rho} \right] \right\}$$

$k$	$H(k)$	$k$	$H(k)$	$k$	$H(k)$	$k$	$H(k)$
0	0	0,5	0,920 8	1	1,005 6	2	1,000 1
0,1	0,337 2	0,6	0,962 4	1,2	1,004 7	2,5	1,000 0
0,2	0,577 5	0,7	0,985 9	1,4	1,002 6	3	1,000 0
0,3	0,742 6	0,8	0,998 2	1,6	1,001 1	3,5	1,000 0
0,4	0,851 7	0,9	1,003 8	1,8	1,000 4	$\infty$	1



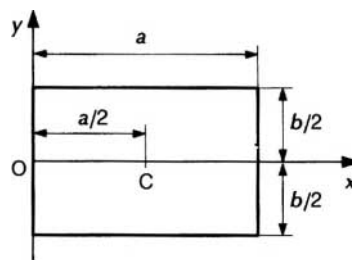
**Tableau 51 – Plaques rectangulaires appuyées sur 4 côtés**

La plaque est simplement appuyée sur ses côtés :

$$x = 0, x = a, y = -\frac{1}{2}b, y = \frac{1}{2}b$$

On pose :

$$\rho = \frac{a}{b} \text{ et } \lambda = \frac{m\pi b}{2a} = \frac{m\pi}{2\rho}$$



■ **Plaque supportant une densité de charge constante  $p$  sur toute sa surface**

- La **flèche**  $w$  au centre C de la plaque a pour valeur :

$$w = -\frac{5\rho a^2 b^2}{384D} f(\rho) = -\frac{5\rho a^4}{384D} g(\rho) = -\frac{5\rho b^4}{384D} h(\rho)$$

avec

$$g(\rho) = 1 - \frac{768}{5} \sum_m \frac{1}{m^5 \pi^5} \left( \frac{2 + \lambda \operatorname{th} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda} \right) \sin \frac{m\pi}{2}$$

$$f(\rho) = \rho^2 g(\rho), \quad h(\rho) = \rho^2 f(\rho), \quad f\left(\frac{1}{\rho}\right) = f(\rho), \quad g\left(\frac{1}{\rho}\right) = h(\rho)$$

On peut donc supposer  $\rho < 1$ .

$\rho$	$f(\rho)$	$g(\rho)$	$h(\rho)$
0	0	1	0
0,1	0,010 00	1,000 00	0,000 10
0,2	0,039 85	0,996 16	0,001 59
0,3	0,086 52	0,961 35	0,007 79
0,4	0,141 26	0,882 88	0,022 60
0,5	0,194 47	0,777 88	0,048 62
0,6	0,239 63	0,665 65	0,086 27
0,7	0,273 70	0,558 57	0,134 11
0,8	0,296 24	0,462 88	0,189 59
0,9	0,308 39	0,380 73	0,249 79
1	0,311 99	0,311 99	0,311 99

- Les **moments fléchissants** au centre C de la plaque ont pour valeurs :

$$M_1 = \rho ab [F(\rho) + \nu G(\rho)] \text{ et } M_2 = \rho ab [\nu F(\rho) + G(\rho)]$$

avec

$$\begin{cases} F(\rho) = \rho \left[ \frac{1}{8} - \sum_m \frac{2}{m^3 \pi^3} \left( \frac{2 + \lambda \operatorname{th} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda} \right) \sin \frac{m\pi}{2} \right] \\ G(\rho) = \sum_m \frac{1}{m^3 \pi^3} \left( \frac{\operatorname{th} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda} \right) \sin \frac{m\pi}{2} \end{cases}$$

En permutant  $a$  et  $b$ , on voit que  $F\left(\frac{1}{\rho}\right) = G(\rho)$  ; on peut donc supposer  $\rho < 1$ .

$\rho$	$F(\rho)$	$G(\rho)$	$\rho$	$F(\rho)$	$G(\rho)$
0	0	0	0,55	0,049 086	0,011 532
0,05	0,006 250	0,000 000	0,60	0,049 229	0,014 540
0,10	0,012 500	0,000 000	0,65	0,048 771	0,017 638
0,15	0,018 743	0,000 006	0,70	0,047 821	0,020 749
0,20	0,024 901	0,000 079	0,75	0,046 484	0,023 805
0,25	0,030 751	0,000 378	0,80	0,044 853	0,026 755
0,30	0,036 010	0,001 078	0,85	0,043 009	0,029 557
0,35	0,040 457	0,002 277	0,90	0,041 021	0,032 183
0,40	0,043 980	0,003 988	0,95	0,038 947	0,034 613
0,45	0,046 586	0,006 159	1	0,036 836	0,036 836
0,50	0,048 230	0,008 706			

Tableau 51 – Plaques rectangulaires appuyées sur 4 côtés (suite)

- Plaque supportant une densité linéaire de charge constante  $P$  sur  $x = \frac{1}{2} a$

- La flèche au centre de la plaque a pour valeur :

$$w = -\frac{Pa^3}{48D} f(\rho)$$

avec

$$f(\rho) = 1 - \sum_m' \frac{48}{m^4 \pi^4} \left( \frac{2 + \lambda \operatorname{th} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda} \right)$$

$\rho$	$f(\rho)$	$f(1/\rho)$	$\rho$	$f(\rho)$	$f(1/\rho)$
0	1	0	0,6	0,671 69	0,098 27
0,1	1,000 00	0,000 49	0,7	0,566 46	0,146 71
0,2	0,996 23	0,003 90	0,8	0,472 33	0,202 21
0,3	0,962 05	0,013 15	0,9	0,391 40	0,262 02
0,4	0,885 01	0,030 97	1	0,323 56	0,323 56
0,5	0,781 92	0,059 25			

- Les moments fléchissants au centre de la plaque ont pour valeurs :

$$M_1 = \frac{1}{4} Pa [F(\rho) + \nu G(\rho)] \text{ et } M_2 = \frac{1}{4} Pa [\nu F(\rho) + G(\rho)]$$

avec

$$F(\rho) = 1 - \sum_m' \frac{4}{m^2 \pi^2} \left( \frac{2 + \lambda \operatorname{th} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda} \right) \text{ et } G(\rho) = \sum_m' \frac{4}{m^2 \pi^2} \left( \frac{\lambda \operatorname{th} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda} \right)$$

$\rho$	$F(\rho)$	$G(\rho)$	$F(1/\rho)$	$G(1/\rho)$
0	1	0	0	0
0,1	1,000 00	0,000 00	0,037 12	0,037 12
0,2	0,996 90	0,002 47	0,074 25	0,074 24
0,3	0,968 79	0,022 58	0,111 43	0,111 29
0,4	0,905 42	0,062 65	0,149 35	0,147 38
0,5	0,820 56	0,109 50	0,189 60	0,180 12
0,6	0,729 67	0,152 63	0,233 57	0,206 75
0,7	0,642 59	0,187 21	0,281 55	0,225 55
0,8	0,564 24	0,212 10	0,332 70	0,236 21
0,9	0,496 31	0,228 06	0,385 60	0,239 46
1	0,438 70	0,236 61	0,438 70	0,236 61

**Tableau 51 – Plaques rectangulaires appuyées sur 4 côtés (suite)**

■ Plaque supportant une densité de charge  $p(x, y) = p \left(1 - \frac{2x}{a}\right)$

● La flèche  $w(x)$  le long de Ox a pour valeur :

$$w(x) = -\frac{pa^4}{360D} f\left(\rho, \frac{x}{a}\right)$$

avec

$$f\left(\rho, \frac{x}{a}\right) = \varphi\left(\frac{x}{a}\right) - \sum_m'' \frac{720}{m^5 \pi^5} \left(\frac{2 + \lambda \operatorname{th} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda}\right) \sin \frac{m \pi x}{a}$$

$$\varphi\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{2x}{a}\right) \left[1 + 3 \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right)\right]$$

$\frac{x}{a}$	$f\left(\frac{1}{2}, \frac{x}{a}\right)$	$f\left(1, \frac{x}{a}\right)$	$f\left(2, \frac{x}{a}\right)$
0	0	0	0
0,05	0,048 14	0,038 75	0,017 06
0,10	0,090 10	0,072 25	0,031 18
0,15	0,121 55	0,097 00	0,040 85
0,20	0,139 92	0,111 09	0,045 62
0,25	0,144 21	0,113 95	0,045 70
0,30	0,134 76	0,106 02	0,041 65
0,35	0,112 99	0,088 57	0,034 22
0,40	0,081 22	0,063 50	0,024 23
0,45	0,042 42	0,033 11	0,012 54
0,50	0	0	0

● Les moments fléchissants  $M_1(x)$  et  $M_2(x)$  le long de Ox ont pour valeurs :

$$M_1(x) = \frac{1}{6} pa^2 \left[ F\left(\rho, \frac{x}{a}\right) + \nu G\left(\rho, \frac{x}{a}\right) \right] \quad \text{et} \quad M_2(x) = \frac{1}{6} pa^2 \left[ \nu F\left(\rho, \frac{x}{a}\right) + G\left(\rho, \frac{x}{a}\right) \right]$$

avec

$$\begin{cases} F\left(\rho, \frac{x}{a}\right) = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{2x}{a}\right) - \sum_m' \frac{12}{m^3 \pi^3} \left(\frac{2 + \lambda \operatorname{th} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda}\right) \sin \frac{m \pi x}{a} \\ G\left(\rho, \frac{x}{a}\right) = \frac{1}{\rho} \sum_m' \frac{6}{m^3 \pi^3} \left(\frac{\operatorname{th} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda}\right) \sin \frac{m \pi x}{a} \end{cases}$$

$\frac{x}{a}$	$F\left(\frac{1}{2}, \frac{x}{a}\right)$	$G\left(\frac{1}{2}, \frac{x}{a}\right)$	$F\left(1, \frac{x}{a}\right)$	$G\left(1, \frac{x}{a}\right)$	$F\left(2, \frac{x}{a}\right)$	$G\left(2, \frac{x}{a}\right)$
0	0	0	0	0	0	0
0,05	0,042 287	0,000 351	0,039 022	0,004 122	0,020 478	0,009 685
0,10	0,071 120	0,000 668	0,059 235	0,007 815	0,030 244	0,018 034
0,15	0,088 039	0,000 919	0,071 751	0,010 703	0,032 988	0,024 058
0,20	0,094 576	0,001 080	0,075 531	0,012 505	0,031 486	0,027 271
0,25	0,092 253	0,001 135	0,072 345	0,013 059	0,027 627	0,027 627
0,30	0,082 577	0,001 079	0,063 751	0,012 338	0,022 588	0,025 384
0,35	0,067 040	0,000 918	0,051 107	0,010 433	0,017 050	0,020 974
0,40	0,047 121	0,000 667	0,035 591	0,007 545	0,011 362	0,014 908
0,45	0,024 288	0,000 351	0,018 242	0,003 955	0,005 669	0,007 731
0,50	0	0	0	0	0	0

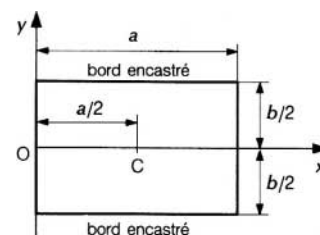
Tableau 52 – Plaques rectangulaires appuyées sur 2 côtés et encastrées sur les 2 autres

La plaque est simplement appuyée sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$ , et encastrée sur les côtés :

$$y = -\frac{1}{2}b, y = \frac{1}{2}b$$

On pose :

$$\rho = \frac{a}{b} \text{ et } \lambda = \frac{m\pi b}{2a} = \frac{m\pi}{2\rho}$$



■ **Plaque supportant une densité de charge constante  $p$  sur toute sa surface**

- La **flèche**  $w$  au centre  $C$  de la plaque a pour valeur :

$$w = -\frac{5pa^4}{384D} f(\rho) = -\frac{pb^4}{384D} g(\rho)$$

avec  $f(\rho) = 1 - \frac{1536}{5} \sum_m \frac{1}{m^5 \pi^5} \left( \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda + \operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda + \lambda} \right) \sin \frac{m\pi}{2}$  et  $g(\rho) = 5\rho^4 f(\rho)$

$\rho$	$f(\rho)$	$g(\rho)$	$f(1/\rho)$	$g(1/\rho)$
0	1	0	0	1
0,1	0,999 99	0,000 50	0,000 02	1,000 04
0,2	0,993 10	0,007 94	0,000 32	0,999 98
0,3	0,933 41	0,037 80	0,001 62	1,002 19
0,4	0,806 24	0,103 20	0,005 16	1,007 50
0,5	0,648 58	0,202 68	0,012 53	1,002 55
0,6	0,496 90	0,321 99	0,025 35	0,997 98
0,7	0,370 00	0,444 19	0,044 86	0,934 20
0,8	0,272 04	0,557 13	0,071 75	0,875 90
0,9	0,199 64	0,654 92	0,106 07	0,808 37
1	0,147 24	0,736 18	0,147 24	0,736 18

- Les **moments fléchissants**  $M_1$  et  $M_2$  au centre de la plaque et le **moment d'encastrement**  $\bar{M}_2$  au milieu des cotés encastrés ont pour valeurs :

$$\begin{cases} M_1 = \frac{1}{8} pa^2 [F(\rho) + \nu G(\rho)] = \frac{1}{24} pb^2 [F_1(\rho) + \nu G_1(\rho)] \\ M_2 = \frac{1}{8} pa^2 [\nu F(\rho) + G(\rho)] = \frac{1}{24} pb^2 [\nu F_1(\rho) + G_1(\rho)] \\ \bar{M}_2 = -\frac{1}{8} pa^2 H(\rho) = -\frac{1}{12} pb^2 H_1(\rho) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F(\rho) = 1 - \sum_m \frac{32}{m^3 \pi^3} \left( \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda + \operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda + \lambda} \right) \sin \frac{m\pi}{2} \text{ et } F_1(\rho) = 3\rho^2 F(\rho) \\ G(\rho) = \sum_m \frac{32}{m^3 \pi^3} \left( \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda - \operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda + \lambda} \right) \sin \frac{m\pi}{2} \text{ et } G_1(\rho) = 3\rho^2 G(\rho) \\ H(\rho) = 1 - \sum_m \frac{64}{m^3 \pi^3} \left( \frac{2\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda} \right) \sin \frac{m\pi}{2} \text{ et } H_1(\rho) = \frac{3}{2} \rho^2 H(\rho) \end{cases}$$

$\rho$	$F(\rho)$	$G(\rho)$	$H(\rho)$	$F(1/\rho)$	$G(1/\rho)$	$H(1/\rho)$
0	1	0	1	0	0	0
0,1	0,999 99	0,000 00	1,000 00	0,000 00	0,003 33	0,006 67
0,2	0,992 91	0,005 49	0,999 99	0,000 00	0,013 33	0,026 67
0,3	0,931 54	0,046 50	0,998 78	-0,000 05	0,030 07	0,060 10
0,4	0,800 80	0,118 39	0,987 49	0,000 33	0,053 70	0,107 55
0,5	0,638 76	0,187 27	0,952 67	0,003 41	0,083 10	0,168 53
0,6	0,483 00	0,233 32	0,891 04	0,012 05	0,115 75	0,240 31
0,7	0,352 93	0,254 07	0,810 77	0,028 24	0,148 75	0,318 98
0,8	0,252 88	0,255 46	0,723 31	0,052 89	0,179 62	0,400 56
0,9	0,173 39	0,244 82	0,637 60	0,085 97	0,206 44	0,481 45
1	0,126 72	0,227 94	0,558 70	0,126 72	0,227 94	0,558 70

$\rho$	$F_1(\rho)$	$G_1(\rho)$	$H_1(\rho)$	$F_1(1/\rho)$	$G_1(1/\rho)$	$H_1(1/\rho)$
0	0	0	0	0	1	1
0,1	0,030 00	0,000 00	0,015 00	0,000 00	1,000 00	1,000 00
0,2	0,119 15	0,000 66	0,060 00	-0,000 06	0,999 99	0,999 97
0,3	0,251 52	0,012 56	0,134 83	-0,001 74	1,002 45	1,001 65
0,4	0,384 38	0,056 83	0,237 00	0,006 18	1,006 79	1,008 24
0,5	0,479 07	0,140 45	0,357 25	0,040 95	0,997 22	1,011 15
0,6	0,521 64	0,251 98	0,481 16	0,100 40	0,964 55	1,001 28
0,7	0,518 81	0,373 48	0,595 92	0,172 91	0,910 73	0,976 48
0,8	0,485 52	0,490 48	0,694 38	0,247 94	0,841 98	0,938 81
0,9	0,435 92	0,594 90	0,774 69	0,318 42	0,764 61	0,891 57
1	0,380 15	0,683 83	0,838 05	0,380 15	0,683 83	0,838 05

**Tableau 52 – Plaques rectangulaires appuyées sur 2 côtés et encastrées sur les 2 autres (suite)**

■ **Plaque supportant une densité linéaire de charge constante  $P$  sur  $x = \frac{1}{2} a$**

● La **flèche** au centre de la plaque a pour valeur :

$$w = -\frac{Pa^3}{48D} f(\rho) = -\frac{Pb^3}{192D} g(\rho)$$

avec

$$f(\rho) = 1 - \sum'_m \frac{96}{m^4 \pi^4} \left( \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda + \operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda + \lambda} \right) \text{ et } g(\rho) = 4\rho^3 f(\rho)$$

$\rho$	$f(\rho)$	$g(\rho)$	$f(1/\rho)$	$g(1/\rho)$
0	1	0	0	0,662 88
0,1	1,000 00	0,004 00	0,000 17	0,662 88
0,2	0,993 23	0,031 78	0,001 33	0,662 88
0,3	0,934 63	0,100 94	0,004 47	0,662 87
0,4	0,809 77	0,207 30	0,010 61	0,662 89
0,5	0,654 96	0,327 48	0,020 73	0,663 50
0,6	0,505 97	0,437 16	0,035 92	0,665 19
0,7	0,381 20	0,523 01	0,057 16	0,666 58
0,8	0,284 70	0,583 07	0,085 12	0,665 00
0,9	0,213 17	0,621 60	0,119 93	0,658 07
1	0,161 13	0,644 52	0,161 13	0,644 52

● Les **moments fléchissants**  $M_1$  et  $M_2$  au centre de la plaque et le **moment d'encastrement**  $\bar{M}_2$  au milieu des côtés encastrés ont pour valeurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = \frac{1}{4} Pa [F(\rho) + \nu G(\rho)] = \frac{1}{4} Pb [F_1(\rho) + \nu G_1(\rho)] \\ M_2 = \frac{1}{4} Pa [\nu F(\rho) + G(\rho)] = \frac{1}{4} Pb [\nu F_1(\rho) + G_1(\rho)] \\ \bar{M}_2 = -\frac{1}{4} Pa H(\rho) = -\frac{1}{4} Pb H_1(\rho) \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} F(\rho) = 1 - \sum'_m \frac{8}{m^2 \pi^2} \left( \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda + \operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda + \lambda} \right) \text{ et } F_1(\rho) = \rho F(\rho) \\ G(\rho) = \sum'_m \frac{8}{m^2 \pi^2} \left( \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda - \operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda + \lambda} \right) \text{ et } G_1(\rho) = \rho G(\rho) \\ H(\rho) = 1 - \sum'_m \frac{16}{m^2 \pi^2} \left( \frac{2\lambda}{\operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda} \right) \text{ et } H_1(\rho) = \rho H(\rho) \end{array} \right.$$

$\rho$	$F(\rho)$	$G(\rho)$	$H(\rho)$	$F(1/\rho)$	$G(1/\rho)$	$H(1/\rho)$
0	1	0	1	0	0	0
0,1	1,000 00	0,000 00	1,000 00	0,028 11	0,019 61	0,065 65
0,2	0,994 43	0,004 31	0,999 99	0,056 21	0,039 21	0,131 10
0,3	0,946 23	0,036 52	0,999 04	0,084 32	0,058 82	0,196 65
0,4	0,843 53	0,093 00	0,990 17	0,112 42	0,078 43	0,262 19
0,5	0,716 08	0,147 24	0,962 83	0,140 42	0,098 15	0,327 88
0,6	0,593 12	0,183 89	0,914 42	0,168 57	0,118 12	0,394 11
0,7	0,489 57	0,201 19	0,851 37	0,197 76	0,137 99	0,460 87
0,8	0,408 60	0,203 91	0,782 65	0,229 17	0,156 86	0,527 29
0,9	0,347 45	0,197 76	0,715 23	0,263 69	0,173 59	0,591 89
1	0,301 63	0,187 17	0,653 04	0,301 63	0,187 17	0,653 04

$\rho$	$F_1(\rho)$	$G_1(\rho)$	$H_1(\rho)$	$F_1(1/\rho)$	$G_1(1/\rho)$	$H_1(1/\rho)$
0	0	0	0	0,281 07	0,196 06	0,655 49
0,1	0,100 00	0,000 00	0,100 00	0,281 07	0,196 06	0,655 49
0,2	0,198 89	0,000 86	0,200 00	0,281 07	0,196 06	0,655 49
0,3	0,283 87	0,010 96	0,299 71	0,281 08	0,196 06	0,655 48
0,4	0,337 41	0,037 20	0,396 07	0,281 04	0,196 07	0,655 48
0,5	0,358 04	0,073 62	0,481 41	0,280 85	0,196 30	0,655 77
0,6	0,355 87	0,110 33	0,548 65	0,280 95	0,196 86	0,656 85
0,7	0,342 70	0,140 84	0,595 96	0,282 51	0,197 13	0,658 38
0,8	0,326 88	0,163 13	0,626 12	0,286 46	0,196 08	0,659 11
0,9	0,312 70	0,177 98	0,643 71	0,292 99	0,192 88	0,657 66
1	0,301 63	0,187 17	0,653 04	0,301 63	0,187 17	0,653 04



Tableau 53 – Plaques rectangulaires appuyées sur 2 côtés et libres sur les 2 autres

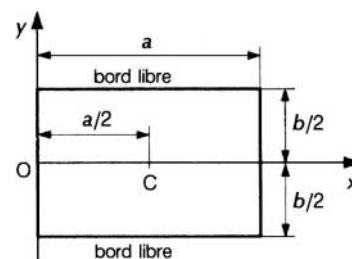
La plaque est simplement appuyée sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$ , et libre sur les côtés :

$$y = -\frac{1}{2}b \text{ et } y = \frac{1}{2}b$$

On pose :

$$\rho = \frac{a}{b} \text{ et } \lambda = \frac{m\pi b}{2a} = \frac{m\pi}{2\rho}$$

(c'est le cas d'un pont-dalle simplement appuyé).



■ Plaque soumise à une densité de charge  $p(x, y) = p \frac{2y}{b}$

- La flèche  $w$  au milieu du côté libre  $y = \frac{1}{2}b$  a pour valeur :

$$w = -\frac{5pa^4}{384D} f(\rho)$$

$$\text{avec } f(\rho) = \frac{3-\nu}{(3+\nu)(1-\nu)} + \rho \frac{2-\nu}{(3+\nu)(1-\nu)} \left[ \sum_m \frac{3,072}{5m^6\pi^6} \frac{2\lambda \left(2 + \frac{2\nu\lambda}{2-\nu}\right) + 2 \frac{3+\nu}{1-\nu} (1-e^{-2\lambda})}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \text{sh } 2\lambda + 2\lambda} \sin \frac{m\pi}{2} - A \right]$$

$$A = \sum_m \frac{6,144}{5m^6\pi^6} \sin \frac{m\pi}{2} = 1,276\,469\,934$$

$\rho$	$f(\rho)$			$f(1/\rho)$		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	1,039 43	1,093 75	1,168 83	0	0	0
0,1	0,952 50	1,004 00	1,074 89	0,004 43	0,004 98	0,005 69
0,2	0,865 57	0,914 25	0,980 95	0,017 51	0,019 66	0,022 42
0,3	0,778 71	0,824 57	0,887 10	0,038 63	0,043 27	0,049 24
0,4	0,692 73	0,735 81	0,794 19	0,066 80	0,074 58	0,084 58
0,5	0,609 83	0,650 19	0,704 50	0,100 64	0,111 97	0,126 49
0,6	0,532 76	0,570 43	0,620 74	0,138 81	0,153 69	0,172 89
0,7	0,463 49	0,498 38	0,544 86	0,179 67	0,198 06	0,221 82
0,8	0,402 80	0,435 12	0,477 69	0,221 89	0,243 54	0,271 60
0,9	0,350 53	0,380 24	0,419 16	0,264 25	0,288 90	0,320 88
1	0,305 96	0,333 16	0,368 66	0,305 96	0,333 16	0,368 66

- Le moment  $M_1$  au milieu du côté libre  $y = \frac{1}{2}b$  a pour valeur :

$$M_1 = \frac{1}{8} pa^2 F(\rho)$$

$$\text{avec } F(\rho) = \frac{(1+\nu)(3-\nu)}{3+\nu} + \rho \frac{(1+\nu)(2-\nu)}{3+\nu} \left[ \sum_m \frac{64}{m^4\pi^4} \frac{2\lambda \left(2 + \frac{2\nu\lambda}{2-\nu}\right) + 2 \frac{3+\nu}{1-\nu} (1-e^{-2\lambda})}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \text{sh } 2\lambda + 2\lambda} \sin \frac{m\pi}{2} - B \right]$$

$$B = \sum_m \frac{128}{5m^4\pi^4} \sin \frac{m\pi}{2} = 1,299\,518\,360$$

$\rho$	$F(\rho)$			$F(1/\rho)$		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	1,029 03	1,05	1,063 64	0	0	0
0,1	0,941 42	0,962 28	0,976 61	0,003 67	0,004 00	0,004 33
0,2	0,853 81	0,874 56	0,889 58	0,014 67	0,016 00	0,017 33
0,3	0,766 27	0,786 92	0,802 63	0,032 98	0,035 96	0,038 92
0,4	0,679 61	0,700 18	0,716 57	0,058 38	0,063 48	0,068 53
0,5	0,596 10	0,616 55	0,633 52	0,089 99	0,097 46	0,104 80
0,6	0,518 52	0,538 69	0,556 01	0,126 44	0,136 28	0,145 85
0,7	0,448 88	0,468 54	0,485 87	0,166 17	0,178 20	0,189 78
0,8	0,387 97	0,406 87	0,423 89	0,207 68	0,221 63	0,234 89
0,9	0,335 64	0,353 26	0,369 99	0,249 67	0,265 22	0,279 83
1	0,291 13	0,307 96	0,323 59	0,291 13	0,307 96	0,323 59

**Tableau 53 – Plaques rectangulaires appuyées sur 2 côtés et libres sur les 2 autres (suite)**

■ Plaque supportant une densité de charge linéaire  $P \frac{2y}{b}$  sur  $x = \frac{1}{2} a$

● La flèche  $w$  au milieu du côté libre  $y = \frac{1}{2} b$  a pour valeur :

$$w = -\frac{Pa^3}{48D} f(\rho)$$

avec

$$f(\rho) = \frac{3-\nu}{(3+\nu)(1-\nu)} + \rho \frac{2-\nu}{(3+\nu)(1-\nu)} \left[ \sum'_m \frac{192}{m^5 \pi^5} \frac{2\lambda \left(2 + \frac{2\nu\lambda}{2-\nu}\right) + 2 \frac{3+\nu}{1-\nu} (1-e^{-2\lambda})}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda} - A' \right]$$

$$A' = \sum'_m \frac{384}{m^5 \pi^5} = 1,260\,497\,747$$

$\rho$	$f(\rho)$			$f(1/\rho)$		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	1,039 43	1,093 75	1,168 83	0	0	0
0,1	0,953 59	1,005 12	1,076 07	0,005 31	0,005 96	0,006 80
0,2	0,867 75	0,916 49	0,983 30	0,020 26	0,022 68	0,025 79
0,3	0,781 98	0,827 94	0,890 62	0,043 38	0,048 42	0,054 90
0,4	0,697 06	0,740 28	0,798 87	0,073 21	0,081 44	0,092 05
0,5	0,615 18	0,655 71	0,710 28	0,108 26	0,120 01	0,135 16
0,6	0,539 01	0,576 90	0,627 51	0,147 09	0,162 43	0,182 24
0,7	0,470 51	0,515 74	0,552 47	0,188 29	0,207 11	0,231 47
0,8	0,410 43	0,443 02	0,485 99	0,230 60	0,252 64	0,281 26
0,9	0,358 62	0,388 62	0,427 99	0,272 91	0,297 87	0,330 37
1	0,314 36	0,341 89	0,377 87	0,314 36	0,341 89	0,377 87

● Le moment  $M_1$  au milieu du côté libre  $y = \frac{1}{2} b$  a pour valeur :

$$M_1 = \frac{1}{4} Pa F(\rho)$$

avec

$$F(\rho) = \frac{(1+\nu)(3-\nu)}{3+\nu} + \rho \frac{(1+\nu)(2-\nu)}{3+\nu} \left[ \sum'_m \frac{16}{m^3 \pi^3} \frac{2\lambda \left(2 + \frac{2\nu\lambda}{2-\nu}\right) + 2 \frac{3+\nu}{1-\nu} (1-e^{-2\lambda})}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda} - B' \right]$$

$$B' = \sum'_m \frac{32}{m^3 \pi^3} = 1,085\,509\,028$$

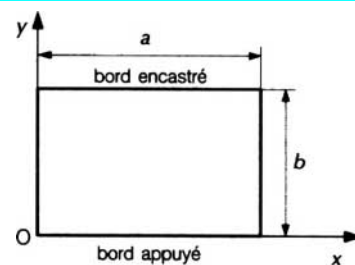
$\rho$	$F(\rho)$			$F(1/\rho)$		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	1,029 03	1,05	1,063 64	0	0	0
0,1	0,955 85	0,976 73	0,990 94	0,041 43	0,043 48	0,045 34
0,2	0,882 66	0,903 46	0,918 24	0,082 85	0,086 95	0,090 69
0,3	0,809 54	0,830 24	0,845 61	0,124 28	0,130 43	0,136 03
0,4	0,737 10	0,757 74	0,773 67	0,165 70	0,173 90	0,181 36
0,5	0,667 14	0,687 67	0,704 10	0,207 11	0,217 33	0,226 61
0,6	0,601 84	0,622 15	0,638 88	0,248 40	0,260 53	0,271 51
0,7	0,542 77	0,562 67	0,579 45	0,289 30	0,303 18	0,315 68
0,8	0,490 56	0,509 86	0,526 43	0,329 44	0,344 83	0,358 61
0,9	0,445 09	0,463 62	0,479 76	0,368 40	0,385 05	0,399 84
1	0,405 77	0,423 44	0,438 99	0,405 77	0,423 44	0,438 99

Tableau 54 – Plaques rectangulaires appuyées sur 3 côtés et encadrées sur le 4<sup>e</sup>

La plaque est simplement appuyée sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$ ,  $y = 0$  et encadrée sur le côté  $y = b$ .

On pose :

$$\rho = \frac{a}{b} \text{ et } \lambda = \frac{m\pi b}{a} = \frac{m\pi}{\rho}$$



■ **Plaque supportant une densité de charge constante  $p$  sur toute sa surface**

- Le moment d'encastrement  $\bar{M}_2$  au milieu du côté  $y = b$  a pour valeur :

$$\bar{M}_2 = -\frac{1}{8} p a^2 F(\rho) = -\frac{1}{8} p b^2 G(\rho) \quad \text{avec} \quad F(\rho) = 1 - \sum_m' \frac{32}{m^3 \pi^3} \left( \frac{\lambda(\operatorname{ch} \lambda - 2) + \operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda - \lambda} \right) \sin \frac{m\pi}{2} \text{ et } G(\rho) = \rho^2 F(\rho)$$

$\rho$	$F(\rho)$	$G(\rho)$	$F(1/\rho)$	$G(1/\rho)$
0	1	0	0	1
0,1	1,000 00	0,010 00	0,010 00	1,000 00
0,2	0,999 99	0,040 00	0,040 01	1,000 19
0,3	0,999 33	0,089 94	0,090 11	1,001 28
0,4	0,992 92	0,158 87	0,159 11	0,994 43
0,5	0,972 10	0,243 03	0,242 38	0,969 52
0,6	0,932 69	0,335 77	0,333 47	0,926 30
0,7	0,877 04	0,429 75	0,426 15	0,869 70
0,8	0,811 02	0,519 05	0,515 42	0,805 35
0,9	0,740 76	0,600 02	0,597 74	0,737 95
1	0,671 00	0,671 00	0,671 00	0,671 00

■ **Plaque supportant une densité linéaire de charge constante  $P$  sur  $x = \frac{1}{2} a$**

- Le moment d'encastrement  $\bar{M}_2$  au milieu du côté  $y = b$  a pour valeur :

$$\bar{M}_2 = -\frac{1}{4} P a F(\rho) = -\frac{1}{4} P b G(\rho) \quad \text{avec} \quad F(\rho) = 1 - \sum_m' \frac{8}{m^2 \pi^2} \left( \frac{\lambda(\operatorname{ch} \lambda - 2) + \operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda - \lambda} \right) \sin \frac{m\pi}{2} \text{ et } G(\rho) = \rho F(\rho)$$

$\rho$	$F(\rho)$	$G(\rho)$	$F(1/\rho)$	$G(1/\rho)$
0	1	0	0	0,785 12
0,1	1,000 00	0,010 00	0,078 51	0,785 12
0,2	1,000 00	0,020 00	0,157 02	0,785 12
0,3	0,999 47	0,299 84	0,235 54	0,785 12
0,4	0,994 44	0,397 77	0,314 11	0,785 29
0,5	0,978 09	0,489 05	0,392 80	0,785 61
0,6	0,947 13	0,568 28	0,470 93	0,784 89
0,7	0,903 42	0,632 39	0,546 81	0,781 16
0,8	0,851 55	0,681 24	0,618 32	0,772 90
0,9	0,796 32	0,716 68	0,683 59	0,759 15
1	0,741 40	0,741 40	0,741 40	0,741 40

■ **Plaque soumise à la pression hydrostatique  $p(x, y) = \Delta y$**

- Le moment d'encastrement  $\bar{M}_2$  au milieu du côté  $y = b$  a pour valeur :

$$\bar{M}_2 = -\frac{1}{8} \Delta a^2 b F(\rho) = -\frac{1}{15} \Delta b^3 G(\rho)$$

$$\text{avec} \quad F(\rho) = 1 - C\rho + \rho \sum_m' \frac{32}{m^4 \pi^4} \left( \frac{2\lambda(2\lambda - 2) + 2(1 - e^{-2\lambda})}{\operatorname{sh} 2\lambda - 2\lambda} \right) \sin \frac{m\pi}{2} \quad C = \sum_m' \frac{64}{m^4 \pi^4} \sin \frac{m\pi}{2} = 0,649 759 181 \text{ et } G(\rho) = \frac{15}{8} \rho^2 F(\rho)$$

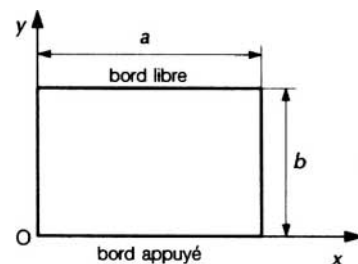
$\rho$	$F(\rho)$	$G(\rho)$	$F(1/\rho)$	$G(1/\rho)$
0	1	0	0	1
0,1	0,935 02	0,017 53	0,005 33	1,000 01
0,2	0,870 05	0,065 25	0,021 34	1,000 15
0,3	0,805 07	0,135 86	0,048 06	1,001 18
0,4	0,740 10	0,222 03	0,085 01	0,996 16
0,5	0,675 27	0,316 54	0,130 21	0,976 61
0,6	0,611 16	0,412 53	0,180 81	0,941 72
0,7	0,548 93	0,504 33	0,233 90	0,895 04
0,8	0,490 04	0,588 05	0,287 04	0,840 93
0,9	0,435 69	0,661 70	0,338 34	0,783 20
1	0,386 56	0,724 80	0,386 56	0,724 80

**Tableau 55 – Plaques rectangulaires appuyées sur 3 côtés et libres sur le 4<sup>e</sup>**

La plaque est simplement appuyée sur les côtés  $x = 0, x = a, y = 0$  et libre sur le côté  $y = b$ .

On pose :

$$\rho = \frac{a}{b} \text{ et } \lambda = \frac{m\pi b}{a} = \frac{m\pi}{\rho}$$



■ **Plaque supportant une densité de charge constante  $p$  sur toute sa surface**

- La **flèche**  $w$  au milieu du côté libre  $y = b$  a pour valeur :

$$w = -\frac{5pa^4}{384D} f(\rho)$$

avec

$$f(\rho) = \frac{1}{1-\nu} \left[ \frac{3-\nu}{3+\nu} - \sum_m' \frac{1536}{5m^5\pi^5} \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda + \frac{3-\nu}{1-\nu} \operatorname{sh} \lambda - \frac{2\nu\lambda}{3+\nu}}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda + \lambda} \sin \frac{m\pi}{2} \right]$$

$\rho$	$f(\rho)$			$f(1/\rho)$		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	1,039 43	1,093 75	1,168 83	0	0	0
0,1	1,039 43	1,093 75	1,168 83	0,026 26	0,029 48	0,033 62
0,2	1,039 42	1,093 75	1,168 83	0,100 14	0,111 73	0,126 65
0,3	1,039 18	1,093 50	1,168 58	0,207 81	0,229 81	0,258 19
0,4	1,036 64	1,090 98	1,166 06	0,331 24	0,362 86	0,403 86
0,5	1,027 93	1,082 29	1,157 32	0,454 62	0,493 72	0,544 83
0,6	1,010 29	1,064 61	1,139 43	0,567 52	0,611 89	0,670 41
0,7	0,983 37	1,037 52	1,111 90	0,664 94	0,712 84	0,776 54
0,8	0,948 48	1,002 32	1,075 98	0,745 78	0,795 97	0,863 25
0,9	0,907 67	0,961 00	1,033 67	0,811 12	0,862 80	0,932 52
1	0,863 02	0,915 66	0,987 06	0,863 02	0,915 66	0,987 06

- Le **moment**  $M_1$  au milieu du côté libre  $y = b$  a pour valeur :

$$M_1 = \frac{1}{8} pa^2 F(\rho)$$

avec

$$F(\rho) = (1+\nu) \left[ \frac{3-\nu}{3+\nu} - \sum_m' \frac{32}{m^3\pi^3} \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda + \frac{3-\nu}{1-\nu} \operatorname{sh} \lambda - \frac{2\nu\lambda}{3+\nu}}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda + \lambda} \sin \frac{m\pi}{2} \right]$$

$\rho$	$f(\rho)$			$f(1/\rho)$		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	1,029 03	1,05	1,063 64	0	0	0
0,1	1,029 03	1,050 00	1,063 64	0,022 00	0,024 00	0,026 00
0,2	1,029 03	1,050 00	1,063 64	0,087 61	0,095 25	0,102 81
0,3	1,028 78	1,049 80	1,063 40	0,189 92	0,204 50	0,218 65
0,4	1,026 20	1,047 27	1,061 05	0,311 64	0,331 95	0,351 16
0,5	1,017 33	1,038 69	1,052 86	0,435 34	0,459 27	0,481 27
0,6	0,999 38	1,024 24	1,036 13	0,549 39	0,575 08	0,597 95
0,7	0,971 78	0,994 51	1,010 37	0,648 17	0,674 34	0,696 89
0,8	0,936 47	0,959 76	0,976 77	0,730 28	0,756 22	0,777 86
0,9	0,894 94	0,918 99	0,937 19	0,796 72	0,822 11	0,842 60
1	0,849 50	0,870 26	0,893 60	0,849 50	0,870 26	0,893 60

Tableau 55 – Plaques rectangulaires appuyées sur 3 côtés et libres sur le 4<sup>e</sup> (suite)

- Plaque supportant une densité linéaire de charge constante  $P$  sur  $x = \frac{1}{2} a$

- La flèche  $w$  au milieu du côté libre  $y = b$  a pour valeur :

$$w = -\frac{Pa^3}{48D} f(\rho)$$

avec

$$f(\rho) = \frac{1}{1-\nu} \left[ \frac{3-\nu}{3+\nu} - \sum_m \frac{96}{m^4 \pi^4} \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda + \frac{3-\nu}{1-\nu} \operatorname{sh} \lambda - \frac{2\nu\lambda}{3+\nu}}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda + \lambda} \right]$$

$\rho$	$f(\rho)$			$f(1/\rho)$		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	1,039 43	1,093 75	1,168 83	0	0	0
0,1	1,039 43	1,093 75	1,168 83	0,030 34	0,033 95	0,038 60
0,2	1,039 43	1,093 75	1,168 83	0,109 40	0,121 61	0,137 36
0,3	1,039 18	1,093 51	1,168 59	0,219 23	0,241 78	0,270 93
0,4	1,036 69	1,091 04	1,166 12	0,342 37	0,374 49	0,416 09
0,5	1,028 14	1,082 50	1,157 52	0,464 54	0,503 92	0,555 46
0,6	1,010 82	1,065 14	1,139 96	0,575 81	0,620 36	0,679 18
0,7	0,984 39	1,038 55	1,112 94	0,671 64	0,719 66	0,783 56
0,8	0,950 14	1,003 98	1,077 67	0,751 08	0,801 35	0,868 76
0,9	0,910 07	0,963 42	1,036 13	0,815 27	0,866 99	0,936 81
1	0,866 23	0,918 90	0,990 37	0,866 23	0,918 90	0,990 37

- Le moment  $M_1$  au milieu du côté libre  $y = b$  a pour valeur :

$$M_1 = \frac{1}{4} Pa F(\rho)$$

avec

$$F(\rho) = (1+\nu) \left[ \frac{3-\nu}{3+\nu} - \sum_m \frac{8}{m^2 \pi^2} \frac{\lambda \operatorname{ch} \lambda + \frac{3-\nu}{1+\nu} \operatorname{sh} \lambda - \frac{2\nu\lambda}{3+\nu}}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \lambda + \lambda} \right]$$

$\rho$	$F(\rho)$			$F(1/\rho)$		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	1,029 03	1,05	1,063 64	0	0	0
0,1	1,029 03	1,050 00	1,063 64	0,113 93	0,119 53	0,124 60
0,2	1,029 03	1,050 00	1,063 64	0,227 87	0,239 05	0,249 19
0,3	1,028 83	1,049 81	1,063 46	0,341 60	0,358 11	0,373 00
0,4	1,026 81	1,047 86	1,061 60	0,452 96	0,473 72	0,492 18
0,5	1,019 84	1,041 12	1,055 18	0,557 21	0,580 67	0,601 09
0,6	1,005 74	1,027 41	1,042 03	0,649 92	0,674 67	0,695 67
0,7	0,984 22	1,006 41	1,021 80	0,728 88	0,753 96	0,774 65
0,8	0,956 33	0,979 12	0,995 40	0,793 96	0,818 85	0,838 78
0,9	0,923 69	0,947 08	0,964 30	0,846 39	0,870 84	0,889 87
1	0,887 95	0,911 90	0,930 02	0,887 95	0,911 90	0,930 02

**Tableau 55 – Plaques rectangulaires appuyées sur 3 côtés et libres sur le 4<sup>e</sup> (suite)**

■ **Plaque soumise à la pression hydrostatique  $p(x, y) = \Delta y$**

- La **flèche**  $w$  au milieu du côté libre  $y = b$  a pour valeur :

$$w = - \frac{5\Delta a^4 b}{384D} f(\rho)$$

$$\text{avec } f(\rho) = \frac{1}{(1-\nu)(3+\nu)} \left\{ (3-\nu) + \rho(2-\nu) \left[ \sum_m' \frac{1536}{5m^6\pi^6} \frac{2\lambda \left( 2 + \frac{2\nu\lambda}{2-\nu} \right) + 2 \frac{3+\nu}{1-\nu} (1-e^{-2\lambda})}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda} \sin \frac{m\pi}{2} - A \right] \right\}$$

$$A = \sum_m' \frac{3072}{5m^6\pi^6} \sin \frac{m\pi}{2} = 0,638\ 234\ 967$$

$\rho$	$f(\rho)$			$f(1/\rho)$		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	1,039 43	1,093 75	1,168 83	0	0	0
0,1	0,995 66	1,048 87	1,121 86	0,017 51	0,019 66	0,022 42
0,2	0,952 50	1,004 00	1,074 89	0,066 80	0,074 58	0,084 58
0,3	0,909 03	0,959 12	1,027 92	0,138 81	0,153 69	0,172 89
0,4	0,865 57	0,914 25	0,980 95	0,221 89	0,243 54	0,271 60
0,5	0,822 12	0,869 38	0,933 99	0,305 96	0,333 16	0,368 66
0,6	0,778 41	0,824 57	0,887 10	0,384 47	0,415 91	0,457 24
0,7	0,735 50	0,779 96	0,840 41	0,454 29	0,488 89	0,534 72
0,8	0,692 73	0,735 81	0,794 19	0,514 66	0,551 66	0,600 98
0,9	0,650 71	0,692 43	0,748 76	0,566 14	0,605 01	0,657 08
1	0,609 83	0,650 19	0,704 50	0,609 83	0,650 19	0,704 50

- Le **moment**  $M_1$  au milieu du côté libre a pour valeur :

$$M_1 = \frac{1}{8} \Delta a^2 b F(\rho)$$

$$\text{avec } F(\rho) = \frac{1+\nu}{3+\nu} \left\{ (3-\nu) + \rho(2-\nu) \left[ \sum_m' \frac{32}{m^4\pi^4} \frac{2\lambda \left( 2 + \frac{2\nu\lambda}{2-\nu} \right) + 2 \frac{3+\nu}{1-\nu} (1-e^{-2\lambda})}{\frac{3+\nu}{1-\nu} \operatorname{sh} 2\lambda + 2\lambda} \sin \frac{m\pi}{2} - C \right] \right\}$$

$$C = \sum_m' \frac{64}{m^4\pi^4} \sin \frac{m\pi}{2} = 0,649\ 759\ 181$$

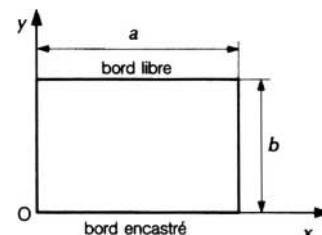
$\rho$	$F(\rho)$			$F(1/\rho)$		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	1,029 03	1,05	1,063 64	0	0	0
0,1	0,985 23	1,006 14	1,020 12	0,014 67	0,016 00	0,017 33
0,2	0,941 42	0,962 28	0,976 61	0,058 38	0,063 48	0,068 53
0,3	0,897 61	0,918 42	0,933 09	0,126 44	0,136 28	0,145 85
0,4	0,853 81	0,874 56	0,889 58	0,207 68	0,221 63	0,234 89
0,5	0,810 01	0,830 72	0,846 08	0,291 13	0,307 96	0,323 59
0,6	0,766 27	0,786 92	0,802 63	0,369 60	0,388 19	0,405 04
0,7	0,722 72	0,743 33	0,759 38	0,439 64	0,459 20	0,476 51
0,8	0,679 61	0,700 18	0,716 57	0,500 32	0,520 38	0,537 74
0,9	0,637 28	0,657 80	0,674 50	0,552 12	0,572 43	0,589 63
1	0,596 10	0,616 55	0,633 52	0,596 10	0,616 55	0,633 52

Tableau 56 – Plaques rectangulaires appuyées sur 2 côtés, encastées sur le 3<sup>e</sup> et libres sur le 4<sup>e</sup>

La plaque est simplement appuyée sur les côtés  $x = 0$  et  $x = a$ , encastée sur le côté  $y = 0$  et libre sur le côté  $y = b$ .

On pose :

$$\rho = \frac{a}{b} \text{ et } \lambda = \frac{m\pi b}{a} = \frac{m\pi}{\rho}$$



■ Plaque supportant une densité de charge constante  $p$  sur toute sa surface

- La flèche  $w$  au milieu du côté libre  $y = b$  a pour valeur :  $w = -\frac{5\rho a^4}{384 D} f(\rho)$

$$\text{avec } f(\rho) = \frac{1}{(3+v)(1-v)} \left[ 3-v - \sum_m \frac{3072}{5m^5\pi^5} \frac{(3+v)\lambda \operatorname{sh} \lambda + 2 \frac{3+v}{1-v} \operatorname{ch} \lambda - v\lambda^2 + \frac{2v(1+v)}{(1-v)^2}}{\frac{3+v}{1-v} \operatorname{sh}^2 \lambda + \lambda^2 + \frac{4}{(1-v)^2}} \sin \frac{m\pi}{2} \right]$$

$\rho$	$f(\rho)$			$f(1/\rho)$		
	$v = 0,1$	$v = 0,2$	$v = 0,3$	$v = 0,1$	$v = 0,2$	$v = 0,3$
0	1,039 43	1,093 75	1,168 83	0	0	0
0,1	1,039 43	1,093 75	1,168 83	0,000 96	0,000 96	0,000 96
0,2	1,039 42	1,093 74	1,168 83	0,013 99	0,014 34	0,014 70
0,3	1,038 96	1,093 29	1,168 37	0,057 05	0,059 21	0,063 13
0,4	1,034 36	1,088 71	1,163 77	0,135 24	0,144 23	0,154 92
0,5	1,018 87	1,073 19	1,148 09	0,239 64	0,257 46	0,279 49
0,6	0,988 13	1,042 24	1,116 61	0,356 11	0,383 25	0,417 72
0,7	0,942 22	0,995 79	1,069 04	0,471 87	0,507 11	0,552 73
0,8	0,884 22	0,936 78	1,008 19	0,578 28	0,619 74	0,674 18
0,9	0,813 33	0,869 31	0,938 11	0,670 96	0,716 82	0,777 72
1	0,748 66	0,797 50	0,862 02	0,748 66	0,797 50	0,862 02

- Le moment  $M_1$  au milieu du côté libre  $y = b$  et le moment d'encastement  $\bar{M}_2$  au milieu du côté encasté  $y = 0$  ont pour valeurs :

$$M_1 = \frac{1}{8} \rho a^2 F(\rho) \text{ et } \bar{M}_2 = -\frac{1}{8} \rho a^2 G(\rho)$$

$$\text{avec } F(\rho) = \frac{1+v}{3+v} \left[ 3-v - \sum_m \frac{64}{m^3\pi^3} \frac{(3+v)\lambda \operatorname{sh} \lambda + 2 \frac{3+v}{1-v} \operatorname{ch} \lambda - v\lambda^2 + \frac{2v(1+v)}{(1-v)^2}}{\frac{3+v}{1-v} \operatorname{sh}^2 \lambda + \lambda^2 + \frac{4}{(1-v)^2}} \sin \frac{m\pi}{2} \right]$$

$$G(\rho) = 1 - \sum_m \frac{64}{m^3\pi^3} \frac{v\lambda \operatorname{sh} \lambda + 2 \frac{1+v(1-\operatorname{ch} \lambda)}{1-v} + (1-v)\lambda^2}{(3+v)\operatorname{sh}^2 \lambda + (1-v)\lambda^2 + \frac{4}{(1-v)}} \sin \frac{m\pi}{2}$$

$\rho$	$F(\rho)$			$F(1/\rho)$		
	$v = 0,1$	$v = 0,2$	$v = 0,3$	$v = 0,1$	$v = 0,2$	$v = 0,3$
0	1,029 03	1,05	1,063 64	0	0	0
0,1	1,029 03	1,050 00	1,063 64	0,000 06	0,000 03	0,000 01
0,2	1,029 03	1,050 00	1,063 63	0,006 23	0,005 77	0,005 07
0,3	1,028 56	1,049 54	1,063 21	0,040 92	0,041 31	0,040 68
0,4	1,023 88	1,045 02	1,058 91	0,114 50	0,118 52	0,120 57
0,5	1,008 11	1,029 71	1,044 23	0,217 67	0,227 21	0,234 10
0,6	0,976 82	0,999 17	1,014 78	0,334 74	0,349 92	0,362 03
0,7	0,930 10	0,953 32	0,970 28	0,451 89	0,471 52	0,487 72
0,8	0,871 07	0,895 08	0,913 35	0,559 91	0,582 39	0,601 07
0,9	0,804 02	0,828 50	0,847 80	0,654 10	0,678 08	0,697 81
1	0,733 13	0,757 66	0,777 48	0,733 13	0,757 66	0,777 48

$\rho$	$G(\rho)$			$G(1/\rho)$		
	$v = 0,1$	$v = 0,2$	$v = 0,3$	$v = 0,1$	$v = 0,2$	$v = 0,3$
0	1	1	1	0	0	0
0,1	1,000 00	1,000 00	1,000 00	0,039 93	0,039 97	0,040 00
0,2	1,000 00	1,000 00	1,000 00	0,152 17	0,154 51	0,156 90
0,3	0,999 97	0,999 94	0,999 92	0,304 58	0,312 95	0,322 41
0,4	0,999 69	0,999 44	0,999 25	0,461 24	0,475 28	0,492 25
0,5	0,998 64	0,997 87	0,997 33	0,600 66	0,617 03	0,637 95
0,6	0,995 82	0,994 43	0,993 63	0,714 33	0,729 50	0,750 02
0,7	0,989 72	0,988 04	0,987 52	0,801 41	0,813 26	0,830 45
0,8	0,978 83	0,977 57	0,978 17	0,864 96	0,872 92	0,885 72
0,9	0,962 32	0,962 27	0,964 86	0,909 63	0,914 12	0,922 75
1	0,940 13	0,942 00	0,947 25	0,940 13	0,942 00	0,947 25

**Tableau 56 – Plaques rectangulaires appuyées sur 2 côtés, encastées sur le 3<sup>e</sup> et libres sur le 4<sup>e</sup> (suite)**

■ **Plaque soumise à la pression hydrostatique  $p(x, y) = \Delta y$**

Soit :

$$K = (3 + \nu)(1 - \nu) \text{sh}^2 \lambda + (1 - \nu)^2 \lambda^2 + 4$$

$$\varphi(\lambda) = (3 + \nu)(1 - \nu) [(1 - \nu) \lambda \text{ch} \lambda + (1 + \nu) \text{sh} \lambda + (2 - \nu) e^{-\lambda} \text{sh} \lambda] - (1 - \nu)^2 (2 - \nu + \nu \lambda) \lambda^2 - (6 - 9\nu - 2\nu^2 + \nu^3) \lambda - 4(2 - \nu)$$

$$\psi(\lambda) = \nu(1 - \nu) \lambda^2 \text{sh} \lambda + (2 - 5\nu + \nu^2) \lambda \text{ch} \lambda + (2 - \nu)(1 + \nu) \text{sh} \lambda - (3 + \nu)(1 - \nu) e^{-\lambda} \text{sh} \lambda + (1 - \nu)^2 (\lambda^2 - \lambda) + 4$$

$$B = \sum_m \frac{3 \cdot 072}{5 m^6 \pi^6} \sin \frac{m\pi}{2} = 0,638 \ 234 \ 967 \quad \text{et} \quad C = \sum_m \frac{64}{m^4 \pi^4} \sin \frac{m\pi}{2} = 0,649 \ 759 \ 181$$

● **La flèche  $w$  au milieu du côté libre  $y = b$  a pour valeur :**

$$w = -\frac{5 \Delta a^4 b}{384 D} f(\rho)$$

avec 
$$f(\rho) = \frac{\rho}{(3 + \nu)(1 - \nu)} \left[ \frac{3 - \nu}{\rho} - (2 - \nu) B - \sum_m \frac{3 \cdot 072}{5 m^6 \pi^6} \frac{\varphi(\lambda)}{K} \sin \frac{m\pi}{2} \right]$$

$\rho$	$F(\rho)$			$F(1/\rho)$		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	1,039 43	1,093 15	1,168 83	0	0	0
0,1	0,995 96	1,048 87	1,121 86	0,000 70	0,000 70	0,000 70
0,2	0,952 50	1,004 00	1,074 89	0,010 25	0,010 51	0,010 77
0,3	0,908 99	0,959 08	1,027 88	0,041 69	0,043 81	0,046 20
0,4	0,864 99	0,913 67	0,980 37	0,098 63	0,105 31	0,113 26
0,5	0,819 28	0,866 54	0,931 12	0,174 54	0,187 85	0,204 30
0,6	0,770 62	0,816 42	0,878 78	0,259 31	0,279 72	0,305 60
0,7	0,718 62	0,762 85	0,822 83	0,343 97	0,370 70	0,405 22
0,8	0,663 94	0,706 43	0,763 76	0,422 59	0,453 35	0,495 92
0,9	0,607 92	0,648 45	0,702 79	0,492 24	0,527 78	0,574 75
1	0,552 15	0,590 45	0,641 47	0,552 15	0,590 45	0,641 47

● **Le moment  $M_1$  au milieu du côté libre  $y = b$  et le moment d'encastrement  $\bar{M}_2$  au milieu du côté encasté  $y = 0$  ont pour valeurs :**

$$M_1 = \frac{1}{8} \Delta a^2 b F(\rho) \quad \text{et} \quad \bar{M}_2 = -\frac{1}{3} \Delta b^3 G(\rho)$$

avec 
$$F(\rho) = \rho \frac{1 + \nu}{3 + \nu} \left[ \frac{3 - \nu}{\rho} - (2 - \nu) C - \sum_m \frac{64}{m^4 \pi^4} \frac{\varphi(\lambda)}{K} \sin \frac{m\pi}{2} \right] \quad \text{et} \quad G(\rho) = \frac{3}{8} \rho^3 \left[ C - \sum_m \frac{64}{m^4 \pi^4} \frac{\psi(\lambda)}{K} \sin \frac{m\pi}{2} \right]$$

$\rho$	$F(\rho)$			$F(1/\rho)$		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	1,029 03	1,05	1,063 64	0	0	0
0,1	0,985 23	1,006 14	1,020 12	0,000 04	0,000 02	0,000 01
0,2	0,941 42	0,962 28	0,976 61	0,004 61	0,004 26	0,003 74
0,3	0,897 57	0,918 38	0,933 06	0,029 97	0,030 24	0,029 76
0,4	0,853 22	0,874 00	0,889 04	0,083 32	0,086 29	0,087 83
0,5	0,807 13	0,827 91	0,843 38	0,157 82	0,164 99	0,170 25
0,6	0,758 03	0,778 88	0,794 85	0,242 39	0,253 95	0,263 34
0,7	0,705 54	0,726 44	0,742 93	0,327 42	0,342 61	0,355 42
0,8	0,650 31	0,671 19	0,688 09	0,406 64	0,424 37	0,439 47
0,9	0,593 72	0,614 39	0,631 49	0,476 91	0,496 22	0,512 61
1	0,537 40	0,557 59	0,574 55	0,537 40	0,557 59	0,574 55

$\rho$	$G(\rho)$			$G(1/\rho)$		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	0	0	0	1	1	1
0,1	0,000 24	0,000 24	0,000 24	0,997 95	0,999 15	0,999 93
0,2	0,001 95	0,001 95	0,001 95	0,945 35	0,961 58	0,978 10
0,3	0,006 58	0,006 57	0,006 57	0,828 29	0,854 21	0,883 50
0,4	0,015 51	0,015 50	0,015 49	0,690 11	0,714 79	0,744 54
0,5	0,029 83	0,029 78	0,029 75	0,559 76	0,578 39	0,602 10
0,6	0,050 06	0,049 94	0,049 89	0,448 05	0,460 26	0,476 63
0,7	0,076 09	0,075 93	0,075 93	0,356 61	0,363 83	0,374 12
0,8	0,107 30	0,107 20	0,107 45	0,283 60	0,287 51	0,293 54
0,9	0,142 70	0,142 90	0,143 70	0,226 11	0,228 02	0,231 38
1	0,181 16	0,181 97	0,183 74	0,181 16	0,181 97	0,183 74



Tableau 56 – Plaques rectangulaires appuyées sur 2 côtés, encastées sur le 3<sup>e</sup> et libres sur le 4<sup>e</sup> (suite)■ Plaque supportant une charge concentrée  $Q$  appliquée au milieu du côté libre  $y = b$ Le moment d'encastrement  $\bar{M}_2$  au milieu du côté encastré  $y = 0$  a pour valeur :

$$\bar{M}_2 = -\frac{1}{2} Q F(\rho)$$

avec

$$F(\rho) = \sum_m' \left( \frac{8}{m\pi} \right) \frac{(1-\nu) \lambda \operatorname{ch} \lambda + (1+\nu) \operatorname{sh} \lambda}{(3+\nu)(1-\nu) \operatorname{sh}^2 \lambda + (1-\nu)^2 \lambda^2 + 4}$$

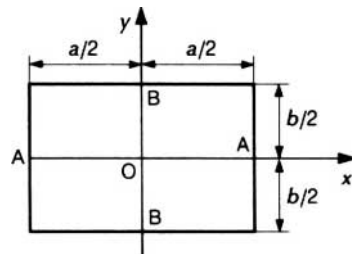
$\rho$	$F(\rho)$			$F(1/\rho)$		
	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$	$\nu = 0,1$	$\nu = 0,2$	$\nu = 0,3$
0	0	0	0	0,953 57	0,982 36	1,017 43
0,1	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,953 56	0,982 36	1,017 43
0,2	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,950 21	0,980 75	1,017 17
0,3	0,000 54	0,000 54	0,000 54	0,923 85	0,961 95	1,006 86
0,4	0,005 79	0,005 78	0,005 82	0,863 43	0,907 23	0,960 40
0,5	0,023 02	0,023 13	0,023 46	0,775 44	0,817 80	0,871 06
0,6	0,056 41	0,057 00	0,058 21	0,672 56	0,708 35	0,754 80
0,7	0,105 13	0,106 84	0,109 81	0,566 86	0,594 49	0,631 42
0,8	0,165 38	0,168 97	0,174 74	0,467 04	0,487 19	0,514 88
0,9	0,232 43	0,238 73	0,248 30	0,378 10	0,392 25	0,412 30
1	0,301 98	0,311 71	0,325 92	0,301 98	0,311 71	0,325 92

**Tableau 57 – Plaque rectangulaire encastree sur 4 cotes**

■ La plaque est encastree sur ses quatre cotes et supporte une densite de charge constante  $p$  sur toute sa surface

La fleche  $w$  au centre  $O$  de la plaque, les moments  $M_1$  et  $M_2$  au centre  $O$  de la plaque et les moments d'encastrement  $\bar{M}_1$  et  $\bar{M}_2$  aux milieux  $A$  et  $B$  des cotes de la plaque ont pour valeurs,  $h$  designant l'epaisseur de la plaque :

$$w = -\frac{pa^4}{Eh^3} \alpha, \quad M_1 = pa^2 \beta_1, \quad M_2 = pb^2 \beta_2, \quad \bar{M}_1 = -pa^2 \gamma_1, \quad \bar{M}_2 = -pb^2 \gamma_2$$



Les coefficients  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \gamma_1$  et  $\gamma_2$  sont donnees par les tables suivantes extraites de l'ouvrage de R. Bares : *Tables pour le calcul des dalles et des parois*. Dunod. (1969).

$\nu = 0,15$					
$a/b$	$\alpha$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
1	0,014 9	0,020 2	0,020 2	0,051 5	0,051 5
1,1	0,012 1	0,016 4	0,024 2	0,044 9	0,058 5
1,2	0,009 8	0,013 1	0,028 7	0,038 8	0,064 3
1,3	0,007 8	0,010 5	0,030 6	0,033 6	0,069 0
1,4	0,006 3	0,008 4	0,033 2	0,029 1	0,072 8
1,5	0,005 1	0,006 6	0,035 3	0,025 4	0,075 7
1,6	0,004 1	0,005 3	0,036 9	0,022 3	0,077 9
1,7	0,003 3	0,004 2	0,038 3	0,019 8	0,079 7
1,8	0,002 7	0,003 5	0,039 2	0,017 6	0,081 2
1,9	0,002 2	0,002 8	0,039 9	0,015 8	0,082 4
2	0,001 8	0,002 4	0,040 5	0,014 3	0,083 3

$\nu = 0,25$					
$a/b$	$\alpha$	$\beta_1$	$\beta_2$	$\gamma_1$	$\gamma_2$
1	0,014 3	0,022 0	0,022 0	0,051 5	0,051 5
1,1	0,011 6	0,018 2	0,025 8	0,044 9	0,058 5
1,2	0,009 4	0,014 9	0,029 2	0,038 8	0,064 3
1,3	0,007 5	0,012 2	0,032 0	0,033 6	0,069 0
1,4	0,006 1	0,010 0	0,034 3	0,029 1	0,072 8
1,5	0,004 9	0,008 2	0,036 3	0,025 4	0,075 7
1,6	0,003 9	0,006 7	0,037 7	0,022 3	0,077 9
1,7	0,003 2	0,005 5	0,038 9	0,019 8	0,079 7
1,8	0,002 6	0,004 6	0,039 8	0,017 6	0,081 2
1,9	0,002 1	0,003 9	0,040 4	0,015 8	0,082 4
2	0,001 8	0,003 4	0,040 9	0,014 3	0,083 3

**Tableau 58 – Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses bords supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque**

On suppose les côtés  $u$  et  $v$  du rectangle uniformément chargé parallèles aux côtés  $a$  et  $b$  de la plaque. On suppose  $\rho = a/b$ .

Les formules suivantes donnent les moments fléchissants  $M_1$  et  $M_2$  au centre  $O$  de la plaque.

■ **Cas général  $\rho \neq 0$**

$$\begin{cases} M_1 = P[F(\rho, \alpha, \beta) + vG(\rho, \alpha, \beta)] \\ M_2 = P[G(\rho, \alpha, \beta) + vF(\rho, \alpha, \beta)] \end{cases}$$

$F$  et  $G$  sont des fonctions de  $\rho$ , de  $\alpha = u/a$  et de  $\beta = v/b$ . Si l'on pose :

$$\lambda = \frac{m\pi b}{2a} = \frac{m\pi}{2\rho}, \quad U = \frac{m\pi u}{2a} = \frac{m\pi\alpha}{2}, \quad V = \frac{m\pi v}{2a} = \frac{m\pi\beta}{2\rho}$$

les fonctions  $F$  et  $G$  sont définies par les relations :

● **lorsque  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$**

$$F + G = \frac{\rho}{\beta} \left[ \frac{1}{8} (2 - \alpha) - \frac{1}{\alpha} \sum'_m \frac{4}{m^3 \pi^3} \frac{\text{ch}(\lambda - v)}{\text{ch} \lambda} \sin U \right]$$

$$G = \frac{1}{\alpha\beta} \sum'_m \frac{2}{m^3 \pi^3} \frac{\lambda \text{ch} \lambda \text{ch}(\lambda - V) - (\lambda - V) \text{sh}(\lambda - V)}{\text{ch} \lambda} \sin U$$

● **lorsque  $\alpha = 0$  et  $\beta \neq 0$**

$$F + G = \frac{\rho}{4\beta} \left[ 1 - \sum'_m \frac{8}{m^2 \pi^2} \frac{\text{ch}(\lambda - V)}{\text{ch} \lambda} \right]$$

$$G = \frac{\rho}{\beta} \sum'_m \frac{1}{m^2 \pi^2} \frac{\lambda \text{ch} \lambda \text{ch}(\lambda - V) - (\lambda - V) \text{sh}(\lambda - V)}{\text{ch} \lambda}$$

● **lorsque  $\alpha \neq 0$  et  $\beta = 0$**

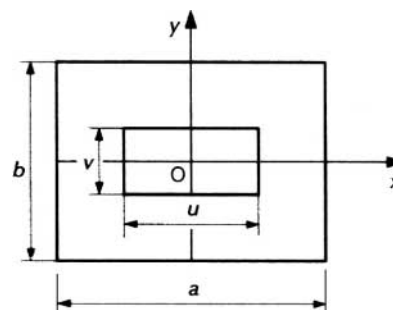
$$F + G = \frac{1}{\alpha} \left[ 2\varphi(\alpha) - \sum'_m \frac{2}{m^2 \pi^2} (1 - \text{th} \lambda) \sin U \right]$$

$$G = \frac{1}{\alpha} \left[ \varphi(\alpha) + \sum'_m \frac{1}{m^2 \pi^2} (1 - \text{th} \lambda) [\lambda(1 + \text{th} \lambda) - 1] \sin U \right]$$

avec

$$\varphi(\alpha) = \sum'_m \frac{1}{m^2 \pi^2} \sin U$$

● **lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  tendent vers zéro,  $F$  et  $G$  tendent vers l'infini.**



**Tableau 58 – Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses bords supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque (suite)**

■ Cas particulier  $\rho = 0$

$$\begin{cases} M_1 = P[F(\alpha, \beta) + \nu G(\alpha, \beta)] \\ M_2 = P[G(\alpha, \beta) + \nu F(\alpha, \beta)] \end{cases}$$

$F$  et  $G$  sont des fonctions de  $\alpha = u/a$  et de  $\beta = v/b$  définies par les relations suivantes :

● lorsque  $\alpha \neq 0$  et  $\beta \neq 0$

$$F = \frac{1}{\alpha\beta} \left[ \frac{1}{8} \alpha(2-\alpha) - \sum'_m \frac{2}{m^3 \pi^3} \left( 2 + \frac{m\pi\beta}{2} \right) \exp\left(-\frac{m\pi\beta}{2}\right) \sin \frac{m\pi\alpha}{2} \right]$$

$$G = \frac{1}{\alpha} \sum'_m \frac{1}{m^2 \pi^2} \exp\left(-\frac{m\pi\beta}{2}\right) \sin \frac{m\pi\alpha}{2}$$

● lorsque  $\alpha = 0$  et  $\beta \neq 0$

$$F = \frac{1}{\beta} \left[ \frac{1}{4} - \sum'_m \frac{1}{m^2 \pi^2} \left( 2 + \frac{m\pi\beta}{2} \right) \exp\left(-\frac{m\pi\beta}{2}\right) \right]$$

$$G = \frac{1}{2} \sum'_m \frac{1}{m \pi} \exp\left(-\frac{m\pi\beta}{2}\right)$$

● lorsque  $\alpha \neq 0$  et  $\beta = 0$

$$F = G = \frac{1}{\alpha} \sum'_m \frac{1}{m^2 \pi^2} \sin \frac{m\pi\alpha}{2} = \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha}$$

● lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  tendent vers zéro,  $F$  et  $G$  tendent vers l'infini.

■ Remarque

On peut déduire des résultats précédents les moments  $M_1$  et  $M_2$  au centre de la plaque sous l'effet d'une charge de densité  $p$  répartie sur le rectangle  $A A_1 A_3 A_2$  de côtés parallèles aux côtés de la plaque, mais non concentrique.

Soit  $B B_1 B_3 B_2$ ,  $C C_1 C_3 C_2$  et  $D D_1 D_3 D_2$  les rectangles symétriques du rectangle  $A A_1 A_3 A_2$  par rapport aux axes de symétrie et au centre de la plaque. Ajoutons les moments au centre de la plaque pour les quatre rectangles concentriques uniformément chargés suivants :

- 1) charge de densité  $p$  sur le grand rectangle  $A B C D$
- 2) charge de densité  $p$  sur le petit rectangle  $A_3 B_3 C_3 D_3$
- 3) charge de densité  $-p$  sur le rectangle moyen  $A_1 B_1 C_1 D_1$
- 4) charge de densité  $-p$  sur le rectangle moyen  $A_2 B_2 C_2 D_2$

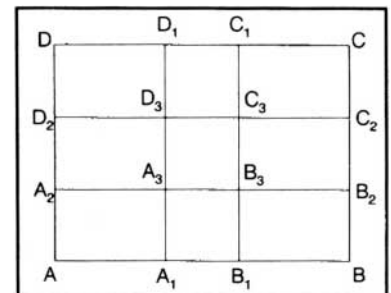
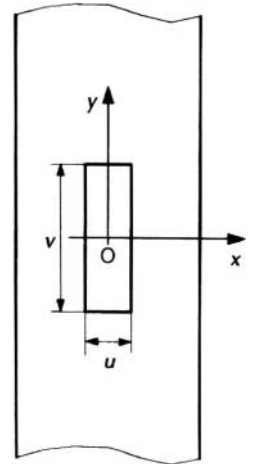
Nous obtenons ainsi les moments au centre de la plaque sous l'effet de la charge de densité  $p$  répartie sur les quatre rectangles symétriques  $A A_1 A_3 A_2$ ,  $B B_1 B_3 B_2$ ,  $C C_1 C_3 C_2$  et  $D D_1 D_3 D_2$ . Il suffit de diviser par quatre les valeurs obtenues pour avoir les moments  $M_1$  et  $M_2$  cherchés.

Nota : on peut montrer qu'en posant  $t = \tan \frac{\pi\alpha}{4}$  on a :

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\pi} \left[ t - \frac{t^3}{3^2} + \frac{t^5}{5^2} - \frac{t^7}{7^2} + \dots - \ln t \arctan t \right]$$

et cette série converge rapidement.

Les tables des fonctions  $F$  et  $G$  (on peut supposer  $\rho \leq 1$ ) sont données dans la suite de ce tableau.



**Tableau 58 – Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses bords supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque (suite)**

$F(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 1$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,109 68	0,097 80	0,087 15	0,077 69	0,063 94	0,062 01	0,055 60	0,049 98	0,045 06	0,040 72	0,036 84
0,9	0,120 94	0,107 75	0,095 95	0,085 47	0,076 24	0,068 15	0,061 08	0,054 90	0,049 48	0,044 71	0,040 44
0,8	0,132 92	0,118 11	0,104 92	0,093 27	0,083 06	0,074 14	0,066 38	0,059 61	0,053 71	0,048 51	0,043 88
0,7	0,145 88	0,129 02	0,114 12	0,101 08	0,089 74	0,079 92	0,071 43	0,064 07	0,057 68	0,052 07	0,047 09
0,6	0,160 20	0,140 65	0,123 60	0,108 88	0,096 25	0,085 43	0,076 17	0,068 21	0,061 33	0,055 33	0,050 04
0,5	0,176 47	0,153 22	0,133 38	0,116 60	0,102 47	0,090 57	0,080 51	0,071 95	0,064 61	0,058 24	0,052 66
0,4	0,195 68	0,167 06	0,143 44	0,124 10	0,108 27	0,095 21	0,084 34	0,075 20	0,067 43	0,060 74	0,054 90
0,3	0,219 72	0,182 56	0,153 62	0,131 14	0,113 42	0,099 18	0,087 54	0,077 87	0,069 73	0,062 77	0,056 72
0,2	0,252 81	0,200 04	0,163 39	0,137 20	0,117 57	0,102 26	0,089 97	0,079 87	0,071 44	0,064 26	0,058 06
0,1	0,308 46	0,218 55	0,171 30	0,141 50	0,120 33	0,104 24	0,091 49	0,081 11	0,072 48	0,065 18	0,058 88
0	$\infty$	0,229 22	0,174 55	0,143 10	0,121 30	0,104 92	0,092 01	0,081 53	0,072 84	0,065 49	0,059 15

$G(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 1$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,059 15	0,058 88	0,058 06	0,056 72	0,054 90	0,052 66	0,050 04	0,047 09	0,043 88	0,040 44	0,036 84
0,9	0,065 49	0,065 18	0,064 26	0,062 77	0,060 74	0,058 24	0,055 33	0,052 07	0,048 51	0,044 71	0,040 72
0,8	0,072 84	0,072 48	0,071 44	0,069 73	0,067 43	0,064 61	0,061 33	0,057 68	0,053 71	0,049 48	0,045 06
0,7	0,081 53	0,081 11	0,079 87	0,077 87	0,075 20	0,071 95	0,068 21	0,064 07	0,059 61	0,054 90	0,049 98
0,6	0,092 01	0,091 49	0,089 97	0,087 54	0,084 34	0,080 51	0,076 17	0,071 43	0,066 38	0,061 08	0,055 60
0,5	0,104 92	0,104 24	0,102 26	0,099 18	0,095 21	0,090 57	0,085 43	0,079 92	0,074 14	0,068 15	0,062 01
0,4	0,121 30	0,120 33	0,117 57	0,113 42	0,108 27	0,102 47	0,096 25	0,089 74	0,083 06	0,076 24	0,069 34
0,3	0,143 10	0,141 50	0,134 20	0,131 14	0,124 10	0,116 60	0,108 88	0,101 08	0,093 27	0,085 47	0,077 69
0,2	0,174 55	0,171 30	0,163 39	0,153 62	0,143 44	0,133 38	0,123 60	0,114 12	0,104 92	0,095 95	0,087 15
0,1	0,229 22	0,218 55	0,200 04	0,182 56	0,167 06	0,153 22	0,140 65	0,129 02	0,118 11	0,107 75	0,097 80
0	$\infty$	0,308 46	0,252 81	0,219 72	0,195 68	0,176 47	0,160 20	0,145 88	0,132 92	0,120 94	0,109 68

**Tableau 58 – Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses bords supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque (suite)**

$F(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0,9$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,111 67	0,100 91	0,091 13	0,082 28	0,074 33	0,067 20	0,060 82	0,055 10	0,045 95	0,045 29	0,041 02
0,9	0,123 13	0,111 18	0,100 33	0,090 54	0,081 74	0,073 87	0,066 83	0,060 53	0,054 86	0,049 74	0,045 05
0,8	0,135 30	0,121 88	0,109 75	0,098 85	0,089 10	0,080 41	0,072 67	0,065 77	0,059 58	0,054 00	0,048 90
0,7	0,148 44	0,133 16	0,119 44	0,107 22	0,096 37	0,086 78	0,078 29	0,070 76	0,064 05	0,058 02	0,052 54
0,6	0,162 92	0,145 20	0,129 47	0,115 63	0,103 51	0,092 90	0,083 61	0,075 44	0,068 20	0,061 74	0,055 89
0,5	0,179 34	0,158 25	0,139 89	0,124 05	0,110 42	0,098 68	0,088 53	0,079 71	0,071 96	0,065 09	0,058 91
0,4	0,198 64	0,172 68	0,150 72	0,132 34	0,116 94	0,103 97	0,092 94	0,083 46	0,075 23	0,067 99	0,061 51
0,3	0,222 83	0,188 98	0,161 87	0,140 26	0,122 84	0,108 56	0,096 66	0,086 58	0,077 92	0,070 36	0,063 64
0,2	0,256 00	0,207 67	0,172 84	0,147 26	0,127 70	0,112 19	0,099 52	0,088 94	0,079 93	0,072 12	0,065 22
0,1	0,311 70	0,228 19	0,182 05	0,152 36	0,130 99	0,114 54	0,101 34	0,090 42	0,081 18	0,073 20	0,066 19
0	$\infty$	0,240 81	0,185 99	0,154 29	0,132 17	0,115 36	0,101 96	0,090 92	0,081 60	0,073 57	0,066 52

$G(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0,9$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,051 31	0,051 08	0,050 40	0,049 28	0,047 75	0,045 85	0,043 61	0,041 09	0,038 81	0,035 33	0,032 18
0,9	0,056 88	0,056 62	0,055 86	0,054 61	0,052 90	0,050 79	0,048 30	0,045 50	0,042 42	0,039 11	0,035 63
0,8	0,063 51	0,063 22	0,062 34	0,060 91	0,058 97	0,056 57	0,053 77	0,050 62	0,047 17	0,043 48	0,039 61
0,7	0,071 53	0,071 18	0,070 15	0,068 47	0,066 21	0,063 44	0,060 22	0,056 63	0,052 74	0,048 60	0,044 25
0,6	0,081 39	0,080 96	0,079 70	0,077 66	0,074 94	0,071 66	0,067 90	0,063 75	0,059 30	0,054 60	0,049 70
0,5	0,093 76	0,093 20	0,091 56	0,088 96	0,085 57	0,081 56	0,077 06	0,072 18	0,067 02	0,061 65	0,056 10
0,4	0,109 69	0,108 89	0,106 59	0,103 07	0,098 63	0,093 55	0,088 02	0,082 18	0,076 12	0,069 92	0,063 60
0,3	0,131 11	0,129 80	0,126 20	0,121 00	0,114 82	0,108 11	0,101 12	0,093 98	0,086 79	0,079 57	0,072 34
0,2	0,162 30	0,159 62	0,152 89	0,144 27	0,135 06	0,125 80	0,116 72	0,107 86	0,099 20	0,090 74	0,082 43
0,1	0,216 80	0,207 83	0,191 29	0,175 06	0,160 41	0,147 22	0,125 17	0,124 01	0,113 53	0,103 57	0,094 00
0	$\infty$	0,304 39	0,243 79	0,215 79	0,191 87	0,172 81	0,156 72	0,142 60	0,129 86	0,118 12	0,107 11

**Tableau 58 – Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses bords supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque (suite)**

$F(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0,8$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,112 85	0,103 22	0,094 33	0,086 14	0,078 64	0,071 78	0,065 49	0,059 72	0,054 40	0,049 47	0,044 85
0,9	0,124 42	0,113 73	0,103 87	0,094 81	0,086 51	0,078 92	0,071 98	0,065 63	0,059 77	0,054 35	0,049 27
0,8	0,136 72	0,124 71	0,113 67	0,103 58	0,094 37	0,085 99	0,078 35	0,071 38	0,064 98	0,059 06	0,053 54
0,7	0,149 98	0,136 30	0,123 82	0,112 48	0,102 21	0,092 93	0,084 54	0,076 91	0,069 95	0,063 55	0,057 60
0,6	0,164 59	0,148 71	0,134 37	0,121 51	0,109 99	0,099 69	0,090 46	0,082 16	0,074 64	0,067 76	0,061 40
0,5	0,181 13	0,162 22	0,145 44	0,130 64	0,117 63	0,106 17	0,096 03	0,087 02	0,078 93	0,071 59	0,064 86
0,4	0,200 58	0,177 24	0,157 08	0,139 79	0,124 97	0,112 19	0,101 10	0,091 36	0,082 72	0,074 96	0,067 88
0,3	0,224 82	0,194 35	0,169 27	0,148 71	0,131 74	0,117 53	0,105 45	0,095 02	0,085 88	0,077 74	0,070 38
0,2	0,258 06	0,214 34	0,181 61	0,156 84	0,137 47	0,121 84	0,108 86	0,097 83	0,088 27	0,079 83	0,072 25
0,1	0,313 81	0,237 15	0,192 44	0,162 98	0,141 46	0,124 69	0,111 05	0,099 60	0,089 77	0,081 14	0,073 42
0	$\infty$	0,252 26	0,197 30	0,165 36	0,142 92	0,125 70	0,111 81	0,100 21	0,090 28	0,081 58	0,073 81

$G(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0,8$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,042 42	0,042 24	0,041 69	0,040 79	0,039 55	0,038 01	0,036 19	0,034 12	0,031 84	0,029 37	0,026 76
0,9	0,047 12	0,046 91	0,046 30	0,045 29	0,043 92	0,042 20	0,040 17	0,037 86	0,035 32	0,032 58	0,029 68
0,8	0,052 91	0,052 68	0,051 97	0,050 82	0,049 25	0,047 30	0,045 00	0,042 40	0,039 54	0,036 46	0,033 22
0,7	0,060 15	0,059 87	0,059 04	0,057 68	0,055 85	0,053 57	0,050 92	0,047 93	0,044 67	0,041 18	0,037 51
0,6	0,069 30	0,068 95	0,067 93	0,066 28	0,064 05	0,061 34	0,058 20	0,054 71	0,050 93	0,046 92	0,042 72
0,5	0,081 02	0,080 57	0,079 24	0,077 13	0,074 33	0,070 98	0,067 17	0,063 00	0,058 56	0,053 89	0,049 05
0,4	0,096 40	0,095 76	0,093 90	0,091 00	0,087 29	0,082 97	0,078 21	0,073 12	0,067 80	0,062 31	0,056 69
0,3	0,117 38	0,116 33	0,113 40	0,109 06	0,103 78	0,097 94	0,091 77	0,085 40	0,078 93	0,072 40	0,065 83
0,2	0,148 23	0,146 08	0,140 51	0,133 11	0,124 96	0,116 64	0,108 96	0,100 21	0,092 22	0,084 38	0,076 66
0,1	0,202 54	0,195 18	0,180 74	0,165 95	0,152 30	0,139 87	0,128 46	0,117 86	0,107 90	0,098 43	0,089 34
0	$\infty$	0,299 45	0,243 91	0,211 02	0,187 24	0,168 36	0,152 48	0,138 60	0,126 19	0,114 67	0,103 97

**Tableau 58 – Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses bords supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque (suite)**

$F(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0,7$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,112 45	0,103 97	0,096 00	0,088 54	0,081 56	0,075 04	0,068 93	0,063 21	0,057 81	0,052 70	0,047 82
0,9	0,124 00	0,114 58	0,105 74	0,097 47	0,089 75	0,082 54	0,075 81	0,069 49	0,063 55	0,057 93	0,052 56
0,8	0,136 29	0,125 70	0,115 81	0,106 60	0,098 02	0,090 05	0,082 62	0,075 68	0,069 18	0,063 04	0,057 19
0,7	0,149 58	0,137 51	0,126 31	0,115 95	0,106 37	0,097 52	0,089 34	0,081 74	0,074 64	0,067 98	0,061 67
0,6	0,164 23	0,150 22	0,137 34	0,125 55	0,114 77	0,104 92	0,095 88	0,087 57	0,079 88	0,072 70	0,065 93
0,5	0,180 83	0,164 14	0,149 03	0,135 42	0,123 17	0,112 14	0,102 16	0,093 08	0,084 77	0,077 08	0,069 88
0,4	0,200 36	0,179 72	0,161 50	0,145 48	0,131 41	0,119 00	0,107 99	0,098 12	0,089 18	0,081 00	0,073 41
0,3	0,224 67	0,197 68	0,174 82	0,155 55	0,139 22	0,125 25	0,113 13	0,102 46	0,092 93	0,084 30	0,076 38
0,2	0,257 98	0,219 03	0,188 73	0,165 03	0,146 06	0,130 44	0,117 24	0,105 85	0,095 82	0,086 84	0,078 64
0,1	0,313 77	0,244 45	0,201 58	0,172 54	0,150 98	0,133 97	0,119 95	0,108 04	0,097 66	0,088 43	0,080 07
0	$\infty$	0,262 81	0,207 72	0,175 57	0,152 83	0,135 24	0,120 90	0,108 80	0,098 29	0,088 98	0,080 56

$G(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0,7$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,032 76	0,032 62	0,032 21	0,031 53	0,030 59	0,029 42	0,028 03	0,026 44	0,024 68	0,022 77	0,020 75
0,9	0,036 50	0,036 44	0,035 88	0,035 12	0,034 08	0,032 76	0,031 21	0,029 44	0,027 48	0,025 35	0,023 10
0,8	0,041 37	0,041 19	0,040 66	0,039 78	0,038 58	0,037 08	0,035 31	0,033 29	0,031 06	0,028 66	0,026 11
0,7	0,047 72	0,047 51	0,046 87	0,045 84	0,044 42	0,042 66	0,040 58	0,038 24	0,035 66	0,032 88	0,029 96
0,6	0,056 03	0,055 77	0,054 98	0,053 70	0,051 97	0,049 84	0,047 35	0,044 56	0,041 52	0,038 26	0,034 85
0,5	0,067 00	0,066 65	0,065 62	0,063 97	0,061 76	0,059 08	0,056 00	0,052 60	0,048 93	0,045 06	0,041 02
0,4	0,081 70	0,081 21	0,079 76	0,077 47	0,074 49	0,070 97	0,067 02	0,062 75	0,058 25	0,053 56	0,048 75
0,3	0,102 13	0,101 32	0,099 02	0,095 53	0,091 19	0,086 28	0,081 01	0,075 50	0,069 85	0,064 10	0,058 30
0,2	0,132 58	0,130 90	0,126 45	0,120 30	0,113 92	0,106 03	0,098 67	0,091 35	0,084 13	0,077 00	0,069 97
0,1	0,186 62	0,180 80	0,168 57	0,155 41	0,142 93	0,131 41	0,120 75	0,110 81	0,101 44	0,092 54	0,083 99
0	$\infty$	0,294 10	0,238 63	0,205 84	0,182 22	0,163 52	0,147 87	0,134 25	0,122 07	0,110 92	0,100 55



**Tableau 58 – Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses bords supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque (suite)**

$F(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0,6$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,109 45	0,102 12	0,095 12	0,088 45	0,082 09	0,076 02	0,070 23	0,064 69	0,059 36	0,054 22	0,049 23
0,9	0,120 72	0,112 58	0,104 82	0,097 43	0,090 39	0,083 68	0,077 28	0,071 17	0,065 30	0,059 64	0,054 15
0,8	0,132 80	0,123 66	0,114 96	0,106 72	0,098 89	0,091 46	0,084 40	0,077 67	0,071 23	0,065 04	0,059 05
0,7	0,145 94	0,135 52	0,125 67	0,116 39	0,107 63	0,099 37	0,091 57	0,084 17	0,077 13	0,070 39	0,063 89
0,6	0,160 53	0,148 42	0,137 08	0,126 49	0,116 61	0,107 37	0,098 72	0,090 60	0,082 92	0,075 62	0,068 63
0,5	0,177 12	0,162 68	0,149 35	0,137 08	0,125 78	0,115 38	0,105 77	0,096 84	0,088 49	0,080 62	0,073 14
0,4	0,196 68	0,178 81	0,162 66	0,148 13	0,135 04	0,123 23	0,112 51	0,102 71	0,093 66	0,085 23	0,077 30
0,3	0,221 06	0,197 62	0,177 21	0,159 51	0,144 11	0,130 61	0,118 66	0,107 93	0,098 20	0,089 24	0,080 90
0,2	0,254 43	0,220 44	0,192 95	0,170 69	0,152 38	0,136 98	0,123 75	0,112 15	0,101 79	0,092 39	0,083 72
0,1	0,310 27	0,248 83	0,208 39	0,180 04	0,158 62	0,141 49	0,127 21	0,114 94	0,104 13	0,094 41	0,085 52
0	$\infty$	0,271 56	0,216 37	0,184 04	0,161 05	0,143 15	0,128 44	0,115 91	0,104 94	0,095 12	0,086 15

$G(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0,6$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,022 89	0,022 80	0,022 51	0,022 04	0,021 40	0,020 59	0,019 62	0,018 52	0,017 29	0,015 96	0,014 54
0,9	0,025 64	0,025 54	0,025 22	0,024 69	0,023 97	0,023 05	0,021 97	0,020 73	0,019 36	0,017 86	0,016 28
0,8	0,029 52	0,029 39	0,029 02	0,028 41	0,027 56	0,026 51	0,025 26	0,023 83	0,022 24	0,020 52	0,018 70
0,7	0,034 87	0,034 72	0,034 27	0,033 53	0,032 52	0,031 26	0,029 76	0,028 06	0,026 19	0,024 16	0,022 01
0,6	0,042 20	0,042 02	0,041 45	0,040 52	0,039 26	0,037 70	0,035 86	0,033 78	0,031 50	0,029 04	0,026 46
0,5	0,052 24	0,051 99	0,051 24	0,050 02	0,048 37	0,046 35	0,044 01	0,041 39	0,038 54	0,035 52	0,032 34
0,4	0,066 10	0,065 74	0,064 66	0,062 95	0,060 67	0,057 94	0,054 83	0,051 43	0,047 80	0,043 98	0,040 04
0,3	0,085 81	0,085 21	0,083 48	0,080 80	0,077 39	0,073 45	0,069 13	0,065 55	0,060 80	0,054 92	0,049 96
0,2	0,115 70	0,114 46	0,111 05	0,106 16	0,100 42	0,094 26	0,087 91	0,081 53	0,075 16	0,068 83	0,062 56
0,1	0,169 39	0,164 98	0,155 05	0,143 72	0,132 62	0,122 15	0,112 36	0,103 17	0,094 48	0,086 20	0,078 24
0	$\infty$	0,289 04	0,233 63	0,200 95	0,177 46	0,158 95	0,143 51	0,130 14	0,118 22	0,107 38	0,097 32

**Tableau 58 – Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses bords supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque (suite)**

**$F(\rho, \alpha, \beta)$  avec  $\rho = 0,5$**

$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,102 57	0,096 41	0,090 44	0,084 64	0,079 02	0,073 56	0,068 25	0,063 08	0,058 03	0,053 09	0,048 23
0,9	0,113 21	0,106 37	0,099 74	0,093 32	0,087 10	0,081 06	0,075 19	0,069 48	0,063 91	0,058 46	0,053 11
0,8	0,124 77	0,117 09	0,109 67	0,102 50	0,095 57	0,088 87	0,082 38	0,076 09	0,069 26	0,063 98	0,058 12
0,7	0,137 54	0,128 79	0,120 37	0,112 28	0,104 52	0,097 05	0,089 85	0,082 91	0,076 18	0,069 64	0,063 25
0,6	0,151 90	0,141 72	0,132 02	0,122 78	0,113 98	0,105 59	0,097 58	0,089 90	0,082 52	0,075 38	0,068 45
0,5	0,163 39	0,156 25	0,144 82	0,134 07	0,123 97	0,114 45	0,105 48	0,096 97	0,088 87	0,081 11	0,073 63
0,4	0,187 98	0,172 93	0,159 03	0,146 21	0,134 40	0,123 48	0,113 35	0,103 90	0,095 03	0,086 63	0,078 61
0,3	0,212 44	0,192 67	0,174 96	0,159 16	0,145 03	0,132 34	0,120 85	0,110 36	0,100 67	0,091 64	0,083 11
0,2	0,245 93	0,217 11	0,192 85	0,172 48	0,155 22	0,140 37	0,127 38	0,115 80	0,105 34	0,095 73	0,086 78
0,1	0,301 87	0,248 90	0,211 64	0,184 45	0,163 43	0,146 38	0,132 01	0,119 55	0,108 48	0,098 45	0,089 21
0	$\infty$	0,277 68	0,222 41	0,189 96	0,166 80	0,148 68	0,133 72	0,120 90	0,109 59	0,099 41	0,090 06

**$G(\rho, \alpha, \beta)$  avec  $\rho = 0,5$**

$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,013 69	0,013 63	0,013 46	0,013 18	0,012 80	0,012 32	0,011 74	0,011 08	0,010 35	0,009 56	0,008 71
0,9	0,015 48	0,015 42	0,015 22	0,014 91	0,014 48	0,013 93	0,013 28	0,012 53	0,011 70	0,010 80	0,009 84
0,8	0,018 31	0,018 24	0,018 01	0,017 64	0,017 12	0,016 47	0,015 70	0,014 82	0,013 83	0,012 77	0,011 63
0,7	0,022 55	0,022 46	0,022 17	0,021 71	0,021 06	0,020 26	0,019 30	0,018 21	0,017 00	0,015 69	0,014 29
0,6	0,028 71	0,028 58	0,028 21	0,027 60	0,026 77	0,025 73	0,024 50	0,023 10	0,021 55	0,019 89	0,018 12
0,5	0,037 54	0,037 37	0,036 86	0,036 03	0,034 90	0,033 50	0,031 85	0,030 00	0,027 96	0,025 78	0,023 49
0,4	0,050 24	0,049 98	0,049 24	0,048 03	0,046 41	0,044 43	0,042 14	0,039 60	0,036 86	0,033 95	0,030 91
0,3	0,068 90	0,068 48	0,067 25	0,065 32	0,062 79	0,059 80	0,056 45	0,052 84	0,049 04	0,045 08	0,041 03
0,2	0,097 96	0,097 08	0,094 62	0,090 95	0,086 48	0,081 52	0,076 28	0,070 92	0,065 48	0,060 03	0,054 57
0,1	0,151 11	0,147 95	0,140 34	0,131 06	0,121 54	0,112 32	0,103 54	0,095 20	0,087 25	0,076 64	0,072 30
0	$\infty$	0,285 10	0,229 73	0,197 13	0,173 76	0,155 38	0,140 11	0,126 92	0,115 22	0,104 61	0,094 80

**Tableau 58 – Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses bords supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque (suite)**

$F(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0,4$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,090 54	0,085 58	0,080 70	0,075 89	0,071 15	0,066 48	0,061 88	0,057 34	0,052 84	0,048 39	0,043 98
0,9	0,100 06	0,094 55	0,089 13	0,083 80	0,078 55	0,073 39	0,068 29	0,063 27	0,058 30	0,053 39	0,048 52
0,8	0,110 70	0,104 51	0,098 43	0,092 47	0,086 62	0,080 88	0,075 23	0,069 66	0,064 18	0,058 76	0,053 40
0,7	0,122 77	0,115 71	0,108 81	0,102 08	0,095 50	0,089 07	0,082 77	0,076 59	0,070 53	0,064 55	0,058 65
0,6	0,136 68	0,128 47	0,120 51	0,112 79	0,105 30	0,098 04	0,090 97	0,084 08	0,077 36	0,070 77	0,064 29
0,5	0,152 99	0,143 19	0,133 78	0,124 76	0,116 11	0,107 80	0,099 80	0,092 08	0,084 60	0,077 34	0,070 24
0,4	0,172 62	0,160 46	0,148 98	0,138 14	0,127 92	0,118 26	0,109 10	0,100 40	0,092 07	0,084 07	0,076 32
0,3	0,197 30	0,181 29	0,166 55	0,153 01	0,140 58	0,129 12	0,118 52	0,108 63	0,099 36	0,090 58	0,088 19
0,2	0,231 08	0,207 60	0,187 07	0,169 16	0,153 48	0,139 63	0,127 26	0,116 05	0,105 78	0,096 24	0,087 28
0,1	0,287 24	0,243 40	0,210 31	0,184 95	0,164 77	0,148 11	0,133 90	0,121 47	0,110 35	0,100 21	0,090 82
0	$\infty$	0,280 89	0,225 58	0,193 06	0,169 81	0,151 58	0,136 48	0,123 50	0,112 03	0,101 66	0,092 11

$G(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0,4$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,006 26	0,006 24	0,006 16	0,006 04	0,005 86	0,005 64	0,005 38	0,005 08	0,004 74	0,004 38	0,003 99
0,9	0,007 22	0,007 20	0,007 11	0,006 96	0,006 76	0,006 50	0,006 20	0,005 85	0,005 47	0,005 05	0,004 60
0,8	0,009 02	0,008 98	0,008 87	0,008 68	0,008 43	0,008 11	0,007 74	0,007 30	0,006 82	0,006 29	0,005 74
0,7	0,011 98	0,011 93	0,011 78	0,011 53	0,011 20	0,010 77	0,010 27	0,009 69	0,009 05	0,008 35	0,007 61
0,6	0,016 62	0,016 56	0,016 35	0,016 00	0,015 53	0,014 94	0,014 24	0,013 43	0,012 54	0,011 57	0,010 54
0,5	0,023 76	0,023 66	0,023 36	0,022 86	0,022 17	0,021 31	0,020 29	0,019 13	0,017 85	0,016 47	0,015 00
0,4	0,034 68	0,034 53	0,034 05	0,033 28	0,032 23	0,030 93	0,029 40	0,027 69	0,025 81	0,023 79	0,021 67
0,3	0,051 63	0,051 36	0,050 56	0,049 27	0,047 54	0,045 45	0,043 06	0,040 42	0,037 59	0,034 61	0,031 51
0,2	0,079 24	0,078 67	0,077 02	0,074 48	0,071 25	0,067 54	0,063 49	0,059 23	0,054 83	0,050 33	0,045 78
0,1	0,131 42	0,129 33	0,123 97	0,116 91	0,109 24	0,101 50	0,093 93	0,086 59	0,079 50	0,072 64	0,065 96
0	$\infty$	0,282 82	0,227 49	0,194 93	0,171 62	0,153 33	0,138 15	0,125 08	0,113 50	0,103 01	0,093 34

**Tableau 58 – Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses bords supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque (suite)**

$F(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0,3$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,072 66	0,068 92	0,065 20	0,061 50	0,057 81	0,054 14	0,050 49	0,046 85	0,043 23	0,039 62	0,036 01
0,9	0,080 47	0,076 32	0,072 18	0,068 08	0,063 99	0,059 92	0,055 88	0,051 85	0,047 83	0,043 83	0,039 84
0,8	0,089 60	0,084 93	0,080 29	0,075 69	0,071 12	0,066 57	0,062 06	0,057 57	0,053 11	0,048 66	0,044 23
0,7	0,100 42	0,095 09	0,089 82	0,084 60	0,079 43	0,074 31	0,069 23	0,064 20	0,059 20	0,054 23	0,049 29
0,6	0,113 43	0,107 23	0,101 12	0,095 10	0,089 18	0,083 34	0,077 57	0,071 88	0,066 25	0,060 67	0,055 14
0,5	0,129 26	0,121 85	0,114 61	0,107 53	0,100 61	0,093 85	0,087 22	0,080 72	0,074 33	0,068 04	0,061 82
0,4	0,148 88	0,139 66	0,130 78	0,122 20	0,113 92	0,105 93	0,098 19	0,090 69	0,083 39	0,076 26	0,069 27
0,3	0,173 95	0,161 79	0,150 29	0,139 43	0,129 17	0,119 46	0,110 25	0,101 47	0,093 08	0,085 00	0,077 17
0,2	0,208 36	0,190 44	0,174 15	0,159 38	0,145 97	0,133 74	0,122 53	0,112 17	0,102 50	0,093 39	0,084 73
0,1	0,265 11	0,231 08	0,203 45	0,180 98	0,162 37	0,146 60	0,132 92	0,120 80	0,109 88	0,099 85	0,090 51
0	$\infty$	0,281 88	0,226 56	0,194 02	0,170 74	0,152 47	0,137 34	0,124 31	0,112 78	0,102 35	0,092 74

$G(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0,3$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,001 69	0,001 69	0,001 67	0,001 63	0,001 58	0,001 52	0,001 45	0,001 37	0,001 28	0,001 18	0,001 08
0,9	0,002 04	0,002 03	0,002 01	0,001 97	0,001 91	0,001 84	0,001 75	0,001 66	0,001 55	0,001 43	0,001 30
0,8	0,002 86	0,002 85	0,002 81	0,002 76	0,002 68	0,002 57	0,002 45	0,002 32	0,002 16	0,002 00	0,001 82
0,7	0,004 40	0,004 38	0,004 33	0,004 24	0,004 12	0,003 96	0,003 78	0,003 57	0,003 33	0,003 07	0,002 80
0,6	0,007 12	0,007 10	0,007 01	0,006 86	0,006 66	0,006 41	0,006 11	0,005 77	0,005 39	0,004 97	0,004 53
0,5	0,011 82	0,011 76	0,011 62	0,011 38	0,011 04	0,010 62	0,010 13	0,009 56	0,008 92	0,008 24	0,007 50
0,4	0,019 84	0,019 76	0,019 50	0,019 09	0,018 52	0,017 80	0,016 96	0,015 99	0,014 92	0,013 77	0,012 55
0,3	0,033 69	0,033 54	0,033 07	0,032 32	0,031 30	0,030 03	0,028 55	0,026 88	0,025 05	0,023 10	0,021 04
0,2	0,058 43	0,058 09	0,057 11	0,055 55	0,053 49	0,051 03	0,048 24	0,045 21	0,041 99	0,038 62	0,035 15
0,1	0,128 53	0,107 31	0,103 99	0,099 25	0,093 71	0,087 80	0,081 76	0,075 72	0,069 73	0,063 82	0,057 99
0	$\infty$	0,282 06	0,226 74	0,194 20	0,170 91	0,152 64	0,137 50	0,124 46	0,112 92	0,102 48	0,092 86

**Tableau 58 – Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses bords supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque (suite)**

$F(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0,2$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,049 84	0,047 35	0,044 85	0,042 35	0,039 86	0,037 36	0,034 87	0,032 37	0,029 88	0,027 39	0,024 90
0,9	0,055 34	0,052 56	0,049 79	0,047 01	0,044 24	0,041 47	0,038 70	0,035 94	0,033 17	0,030 40	0,027 64
0,8	0,062 08	0,058 96	0,055 84	0,052 72	0,049 61	0,046 50	0,043 39	0,040 29	0,037 19	0,034 08	0,030 99
0,7	0,070 53	0,066 96	0,063 40	0,059 84	0,056 30	0,052 76	0,049 23	0,045 70	0,042 17	0,038 66	0,035 14
0,6	0,081 29	0,077 13	0,072 99	0,068 86	0,064 76	0,060 66	0,056 58	0,052 51	0,048 45	0,044 40	0,040 36
0,5	0,095 26	0,090 28	0,085 34	0,080 44	0,075 57	0,070 74	0,065 93	0,061 16	0,056 42	0,051 69	0,046 98
0,4	0,113 74	0,107 53	0,101 42	0,095 40	0,089 46	0,083 61	0,077 84	0,072 13	0,066 48	0,060 88	0,055 33
0,3	0,138 72	0,130 50	0,122 52	0,114 76	0,107 21	0,099 87	0,092 72	0,085 74	0,078 90	0,072 19	0,065 59
0,2	0,174 09	0,161 93	0,150 43	0,139 56	0,129 30	0,119 58	0,110 37	0,101 59	0,093 18	0,085 10	0,077 26
0,1	0,232 26	0,208 78	0,188 23	0,170 30	0,154 59	0,140 70	0,128 27	0,117 01	0,106 67	0,097 07	0,088 03
0	$\infty$	0,281 98	0,226 66	0,194 11	0,170 83	0,152 56	0,137 42	0,124 39	0,112 86	0,102 42	0,092 81

$G(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0,2$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,000 12	0,000 12	0,000 12	0,000 12	0,000 12	0,000 11	0,000 11	0,000 10	0,000 09	0,000 09	0,000 08
0,9	0,000 17	0,000 17	0,000 17	0,000 16	0,000 16	0,000 15	0,000 15	0,000 14	0,000 13	0,000 12	0,000 11
0,8	0,000 32	0,000 32	0,000 31	0,000 30	0,000 30	0,000 28	0,000 27	0,000 26	0,000 24	0,000 22	0,000 20
0,7	0,000 66	0,000 66	0,000 65	0,000 64	0,000 62	0,000 60	0,000 57	0,000 54	0,000 50	0,000 46	0,000 42
0,6	0,001 44	0,001 43	0,001 41	0,001 38	0,001 34	0,001 29	0,001 23	0,001 16	0,001 09	0,001 00	0,000 91
0,5	0,003 14	0,003 13	0,003 09	0,003 02	0,002 94	0,002 83	0,002 70	0,002 54	0,002 38	0,002 19	0,002 00
0,4	0,006 88	0,006 86	0,006 77	0,006 63	0,006 44	0,006 20	0,005 91	0,005 58	0,005 21	0,004 81	0,004 38
0,3	0,015 13	0,015 07	0,014 88	0,014 57	0,014 14	0,013 60	0,012 96	0,012 22	0,011 41	0,010 53	0,009 60
0,2	0,033 58	0,033 42	0,032 96	0,032 21	0,031 19	0,029 93	0,028 45	0,026 79	0,024 97	0,023 02	0,020 96
0,1	0,078 33	0,077 76	0,076 13	0,073 60	0,070 40	0,066 72	0,062 71	0,058 49	0,054 14	0,049 70	0,045 20
0	$\infty$	0,281 98	0,226 66	0,194 12	0,170 83	0,152 57	0,137 42	0,124 39	0,112 86	0,102 42	0,092 81

**Tableau 58 – Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses bords supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque (suite)**

**$F(\rho, \alpha, \beta)$  avec  $\rho = 0,1$**

$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,025 00	0,023 75	0,022 50	0,021 25	0,020 00	0,018 75	0,017 50	0,016 25	0,015 00	0,013 75	0,012 50
0,9	0,027 78	0,026 39	0,025 00	0,023 61	0,022 22	0,020 83	0,019 44	0,018 06	0,016 67	0,015 28	0,013 89
0,8	0,031 25	0,029 69	0,028 12	0,026 56	0,025 00	0,023 44	0,021 87	0,020 31	0,018 75	0,017 19	0,015 62
0,7	0,035 71	0,033 92	0,032 14	0,030 35	0,028 57	0,026 78	0,025 00	0,023 21	0,021 43	0,019 64	0,017 86
0,6	0,041 65	0,039 57	0,037 48	0,035 40	0,033 32	0,031 24	0,029 15	0,027 07	0,024 99	0,022 91	0,020 82
0,5	0,049 92	0,047 42	0,044 92	0,042 42	0,039 93	0,037 43	0,034 93	0,032 44	0,029 94	0,027 45	0,024 95
0,4	0,062 11	0,058 99	0,055 86	0,052 75	0,049 63	0,046 52	0,043 41	0,040 31	0,037 20	0,034 10	0,031 00
0,3	0,081 30	0,077 14	0,073 00	0,068 87	0,064 76	0,060 67	0,056 58	0,052 52	0,048 46	0,044 41	0,040 37
0,2	0,113 74	0,107 54	0,101 42	0,095 40	0,089 47	0,083 61	0,077 84	0,072 13	0,066 48	0,060 89	0,055 34
0,1	0,174 10	0,161 93	0,150 43	0,139 56	0,129 30	0,119 59	0,110 37	0,101 59	0,093 18	0,085 10	0,077 26
0	$\infty$	0,281 98	0,226 66	0,194 12	0,170 83	0,152 57	0,137 42	0,124 39	0,112 86	0,102 42	0,092 81

**$G(\rho, \alpha, \beta)$  avec  $\rho = 0,1$**

$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
1	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00
0,9	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00
0,8	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00
0,7	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00	0,000 00
0,6	0,000 01	0,000 01	0,000 01	0,000 01	0,000 01	0,000 01	0,000 01	0,000 01	0,000 01	0,000 01	0,000 01
0,5	0,000 06	0,000 06	0,000 06	0,000 06	0,000 06	0,000 06	0,000 05	0,000 05	0,000 05	0,000 04	0,000 04
0,4	0,000 30	0,000 30	0,000 29	0,000 29	0,000 28	0,000 27	0,000 26	0,000 24	0,000 22	0,000 21	0,000 19
0,3	0,001 43	0,001 42	0,001 41	0,001 38	0,001 34	0,001 29	0,001 23	0,001 16	0,001 08	0,001 00	0,000 91
0,2	0,006 88	0,006 85	0,006 77	0,006 63	0,006 44	0,006 20	0,005 90	0,005 57	0,005 20	0,004 80	0,004 38
0,1	0,033 57	0,033 42	0,032 96	0,032 21	0,031 19	0,029 93	0,028 45	0,026 79	0,024 96	0,023 02	0,020 96
0	$\infty$	0,281 98	0,226 66	0,194 12	0,170 83	0,152 57	0,137 42	0,124 39	0,112 86	0,102 42	0,092 81

**Tableau 58 – Plaque rectangulaire simplement appuyée sur ses bords supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie sur un rectangle concentrique à la plaque (suite)**

$F(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
5	0,049 92	0,047 42	0,044 92	0,042 42	0,039 93	0,037 43	0,034 93	0,032 44	0,029 94	0,027 45	0,024 95
4,5	0,055 38	0,052 60	0,049 83	0,047 06	0,044 28	0,041 51	0,038 74	0,035 97	0,033 20	0,030 43	0,027 67
4	0,062 11	0,058 98	0,055 86	0,052 75	0,049 63	0,046 52	0,043 41	0,040 31	0,037 20	0,034 10	0,031 00
3,5	0,070 54	0,066 97	0,063 41	0,059 86	0,056 31	0,052 77	0,049 24	0,045 71	0,042 18	0,038 67	0,035 15
3	0,081 30	0,077 14	0,073 00	0,068 87	0,064 76	0,060 67	0,056 58	0,052 52	0,048 46	0,044 41	0,040 37
2,5	0,095 27	0,090 29	0,085 34	0,080 44	0,076 57	0,070 74	0,065 94	0,061 16	0,056 42	0,051 69	0,046 99
2	0,113 74	0,107 54	0,101 42	0,095 40	0,089 47	0,083 61	0,077 84	0,072 13	0,066 48	0,060 89	0,055 34
1,8	0,122 80	0,115 92	0,109 17	0,102 56	0,096 06	0,089 69	0,083 42	0,077 25	0,071 17	0,065 16	0,059 21
1,6	0,133 06	0,125 35	0,117 82	0,110 48	0,103 32	0,096 33	0,089 50	0,082 80	0,076 23	0,069 77	0,063 39
1,4	0,144 77	0,135 99	0,127 48	0,119 25	0,111 28	0,103 56	0,096 06	0,088 76	0,081 65	0,074 69	0,067 85
1,2	0,158 27	0,148 07	0,138 29	0,128 92	0,119 95	0,111 33	0,103 05	0,095 07	0,087 34	0,079 84	0,072 51
1	0,174 10	0,161 93	0,150 43	0,139 56	0,129 30	0,119 59	0,110 37	0,101 59	0,093 18	0,085 10	0,077 26
0,9	0,183 14	0,169 68	0,157 06	0,145 26	0,134 21	0,123 84	0,114 09	0,104 86	0,096 09	0,087 70	0,079 61
0,8	0,193 16	0,178 09	0,164 12	0,151 20	0,139 24	0,128 14	0,117 80	0,108 10	0,098 95	0,090 25	0,081 90
0,7	0,204 40	0,187 29	0,171 65	0,157 38	0,144 36	0,132 43	0,121 44	0,111 24	0,101 70	0,092 69	0,084 10
0,6	0,217 24	0,197 44	0,179 68	0,163 77	0,149 51	0,136 65	0,124 96	0,114 24	0,104 30	0,094 98	0,086 16
0,5	0,232 26	0,208 78	0,188 23	0,170 30	0,154 59	0,140 70	0,128 27	0,117 01	0,106 67	0,097 07	0,088 03
0,4	0,250 46	0,221 61	0,197 30	0,176 84	0,159 46	0,144 45	0,131 26	0,119 47	0,108 76	0,098 89	0,089 66
0,3	0,273 71	0,236 33	0,206 71	0,183 12	0,163 87	0,147 72	0,133 80	0,121 53	0,110 49	0,100 38	0,090 99
0,2	0,306 24	0,253 25	0,215 94	0,188 65	0,167 51	0,150 31	0,135 76	0,123 08	0,111 78	0,101 50	0,091 98
0,1	0,361 56	0,271 42	0,223 51	0,192 63	0,169 96	0,151 98	0,137 00	0,124 06	0,112 58	0,102 19	0,092 60
0	$\infty$	0,281 98	0,226 66	0,194 12	0,170 83	0,152 57	0,137 42	0,124 39	0,112 86	0,102 42	0,092 81

$G(\rho, \alpha, \beta)$ avec $\rho = 0$											
$\beta$	$\alpha$										
	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
5	0,000 06	0,000 06	0,000 06	0,000 06	0,000 06	0,000 06	0,000 05	0,000 05	0,000 05	0,000 04	0,000 04
4,5	0,000 14	0,000 14	0,000 13	0,000 13	0,000 13	0,000 12	0,000 12	0,000 11	0,000 10	0,000 10	0,000 09
4	0,000 30	0,000 30	0,000 29	0,000 28	0,000 28	0,000 27	0,000 26	0,000 24	0,000 22	0,000 21	0,000 19
3,5	0,000 65	0,000 65	0,000 64	0,000 63	0,000 61	0,000 59	0,000 56	0,000 53	0,000 49	0,000 46	0,000 42
3	0,001 43	0,001 42	0,001 41	0,001 38	0,001 34	0,001 29	0,001 23	0,001 16	0,001 08	0,001 00	0,000 91
2,5	0,003 14	0,003 12	0,003 08	0,003 02	0,002 93	0,002 82	0,002 69	0,002 54	0,002 37	0,002 19	0,002 00
2	0,006 88	0,006 85	0,006 77	0,006 63	0,006 44	0,006 19	0,005 90	0,005 57	0,005 20	0,004 80	0,004 38
1,8	0,009 43	0,009 39	0,009 27	0,009 08	0,008 81	0,008 48	0,008 08	0,007 63	0,007 12	0,006 58	0,005 99
1,6	0,012 92	0,012 87	0,012 70	0,012 44	0,012 08	0,011 62	0,011 07	0,010 44	0,009 75	0,009 00	0,008 20
1,4	0,017 72	0,017 65	0,017 42	0,017 06	0,016 55	0,015 91	0,015 16	0,014 30	0,013 35	0,012 32	0,011 22
1,2	0,024 35	0,024 25	0,023 93	0,023 41	0,022 70	0,021 81	0,020 76	0,019 57	0,018 26	0,016 84	0,015 34
1	0,033 57	0,033 42	0,032 96	0,032 21	0,031 19	0,029 93	0,028 45	0,026 79	0,024 96	0,023 02	0,020 96
0,9	0,039 50	0,039 31	0,038 75	0,037 84	0,036 60	0,035 08	0,033 31	0,031 33	0,029 18	0,026 89	0,024 49
0,8	0,046 58	0,046 35	0,045 64	0,044 51	0,042 99	0,041 14	0,039 00	0,036 64	0,034 09	0,030 30	0,028 58
0,7	0,055 10	0,054 80	0,053 90	0,052 47	0,050 57	0,048 28	0,045 68	0,042 84	0,039 81	0,036 63	0,033 34
0,6	0,065 48	0,065 07	0,063 89	0,062 02	0,059 59	0,056 72	0,053 52	0,050 07	0,046 45	0,042 70	0,038 85
0,5	0,078 33	0,077 76	0,076 13	0,073 60	0,070 40	0,066 72	0,062 71	0,058 49	0,054 14	0,049 70	0,045 20
0,4	0,094 70	0,093 84	0,091 42	0,087 81	0,083 43	0,078 58	0,073 49	0,068 28	0,063 02	0,057 75	0,052 50
0,3	0,116 49	0,115 01	0,111 04	0,105 53	0,099 25	0,092 70	0,086 11	0,079 60	0,073 22	0,066 97	0,060 83
0,2	0,147 95	0,144 80	0,137 24	0,128 01	0,118 58	0,109 47	0,100 82	0,092 64	0,084 86	0,077 43	0,070 29
0,1	0,202 62	0,192 06	0,173 89	0,156 96	0,142 21	0,129 32	0,117 87	0,107 53	0,098 05	0,089 24	0,080 93
0	$\infty$	0,281 98	0,226 66	0,194 12	0,170 83	0,152 57	0,137 42	0,124 39	0,112 86	0,102 42	0,092 81

**Tableau 59 – Charges limites des plaques minces. Généralités**

■ **Mécanismes de ruine**

On suppose les déformations élastiques négligeables devant les déformations plastiques au moment de la ruine. Cette hypothèse est justifiée dans le cas des dalles en béton.

La ruine se produit lorsque la plaque est transformée en un **mécanisme** à un ou plusieurs degrés de liberté ; la plaque est alors divisée en un certain nombre de morceaux qui se raccordent le long des **charnières plastiques**. Si le nombre des morceaux est fini, les charnières sont rectilignes puisqu'elles se trouvent à l'intersection de deux plans. Si le nombre des morceaux est infini, le mécanisme de ruine comporte une infinité de charnières rectilignes et un nombre fini de charnières curvilignes.

On distingue les **charnières positives** qui transmettent par unité de longueur un moment limite positif  $m$ , et les **charnières négatives** qui transmettent par unité de longueur un moment limite négatif  $-m'$ .

■ **Détermination des charges limites**

Supposons la plaque homogène et isotrope ; autrement dit,  $m$  et  $m'$  sont des constantes qui ne dépendent ni des coordonnées  $(x, y)$  du plan moyen de la plaque ni de l'orientation des charnières.

La plaque étant soumise à une densité de charge  $p(x, y)$ , proposons-nous de déterminer la **densité limite de charge**  $s p(x, y)$  que peut supporter la plaque ;  $s$  est le coefficient de sécurité. Pour cela, considérons un mécanisme de ruine R. Au cours d'un déplacement de ce mécanisme, un point  $(x, y)$  du plan moyen de la plaque subit un déplacement vertical  $w(x, y)$ , deux morceaux situés de part et d'autre d'un élément de charnière positive  $A_i B_i$  tournent d'un angle  $\theta_i$  l'un par rapport à l'autre, et deux morceaux situés de part et d'autre d'un élément de charnière négative  $A'_j B'_j$  tournent d'un angle  $\theta'_j$  l'un par rapport à l'autre. Le théorème des travaux virtuels permet d'associer au mécanisme R le nombre  $s(R)$  défini par l'équation :

$$m \sum_i |\overline{A_i B_i} \cdot \theta_i| + m' \sum_j |\overline{A'_j B'_j} \cdot \theta'_j| = s(R) \iint_P p(x, y) w(x, y) dx dy$$

l'intégrale double étant étendue à la surface de la plaque P.

**Le coefficient de sécurité  $s$  est le plus petit des nombres  $s(R)$  relatifs à tous les mécanismes de ruine possibles.**

En supposant  $m' = Km$ ,  $K$  étant une constante, on peut déterminer  $m$  de façon que la plaque puisse supporter la densité de charge  $p(x, y)$  avec le coefficient de sécurité  $s$ . À tout mécanisme de ruine R, le théorème des travaux virtuels permet d'associer le nombre  $m(R)$  défini par l'équation :

$$m(R) \left[ \sum_i |\overline{A_i B_i} \cdot \theta_i| + K \sum_j |\overline{A'_j B'_j} \cdot \theta'_j| \right] = s \iint_P p(x, y) w(x, y) dx dy$$

**Le moment limite  $m$  est le plus grand des nombres  $m(R)$  relatifs à tous les mécanismes de ruine possibles.**

■ **Principe de superposition**

Le principe de superposition, exact dans la théorie élastique, n'est pas applicable au calcul des moments limites. On a cependant l'important résultat suivant.

Soit  $m_1$  le moment fléchissant limite que doit avoir la plaque pour supporter le système de charges  $S_1$ ,  $m_2$  le moment fléchissant limite que doit avoir la plaque pour supporter le système de charges  $S_2$ , et  $m$  le moment fléchissant limite que doit avoir la plaque pour supporter le système de charges  $S_1 + S_2$ . On a l'inégalité :

$$m \leq m_1 + m_2$$

qui est une égalité lorsque les mécanismes de ruine relatifs à  $S_1$  et  $S_2$  sont identiques.

■ **Plaques anisotropes**

La plaque étant anisotrope, les moments limites ont pour valeurs :

- $m$  pour toute charnière positive parallèle à Ox
- $-m'$  pour toute charnière négative parallèle à Ox
- $\alpha m$  pour toute charnière positive parallèle à Oy
- $-\alpha m'$  pour toute charnière négative parallèle à Oy

$\alpha$  étant une constante.

Le coefficient de sécurité pour une densité de charge donnée de cette plaque anisotrope est égal au coefficient de sécurité d'une plaque isotrope, de moments limites  $m$  et  $m'$ , déduite de la plaque anisotrope par une affinité parallèle à Ox de rapport  $1/\sqrt{\alpha}$ , et soumise à la même densité de charge.

La charge totale sur la plaque isotrope correspondante est donc la charge totale sur la plaque anisotrope multipliée par  $1/\sqrt{\alpha}$ . Toute charge concentrée est multipliée par  $1/\sqrt{\alpha}$ . Une densité de charge linéaire est multipliée par  $1/\sqrt{\alpha sm^2 \varphi + \cos^2 \varphi}$ ,  $\varphi$  désignant, dans la plaque anisotrope, l'angle de Ox et de la tangente à la courbe sur laquelle est distribuée la densité de charge.



Tableau 60 – Mécanismes de ruine des plaques minces sans charnières négatives

■ **Plaque polygonale appuyée bilatéralement sur son contour supportant une charge concentrée  $P$  en  $O$**

On suppose le contour convexe. Le mécanisme de ruine comporte les charnières radiales positives  $OA_i$ .

La charge limite a pour valeur :

$$P_{max} = m \sum_i (\cot \alpha_i + \cot \alpha'_i) = m \sum_i \frac{\ell_i}{h_i}$$

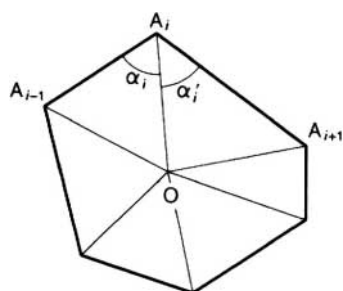
$h_i$  désignant la distance de  $O$  au côté  $A_{i-1}A_i$  de longueur  $\ell_i$ .

Par exemple, si le contour de la plaque est un **polygone régulier** de centre  $O$  ayant  $n$  côtés :

$$P_{max} = 2mn \tan \frac{\pi}{n}$$

en particulier :

si $n = 3$ (triangle équilatéral)	$P_{max} = 6m\sqrt{3}$
si $n = 4$ (carré)	$P_{max} = 8m$
si $n = 6$ (hexagone régulier)	$P_{max} = 4m\sqrt{3}$
si $n = \infty$ (cercle)	$P_{max} = 2\pi m$



■ **Plaque polygonale appuyée bilatéralement sur son contour supportant une densité de charge  $p$**

Dans le cas où le contour de la plaque est un **polygone régulier** de sommets  $A_i$  et de centre  $O$ , le mécanisme de ruine comporte les charnières  $OA_i$ , et la densité de charge maximale a pour valeur :

$$p_{max} = 6mn \tan \frac{\pi}{n}$$

Dans le cas où le contour de la plaque est un **triangle quelconque**  $ABC$ , le mécanisme de ruine comporte les charnières  $OA$ ,  $OB$ , et  $OC$  dirigées suivant les bissectrices des angles  $A$ ,  $B$ ,  $C$  du triangle, et la densité de charge maximale a pour valeur :

$$p_{max} = 3m \frac{(\sin A + \sin B + \sin C)^2}{\sin A \sin B \sin C}$$

Dans le cas d'une **plaque rectangulaire** de côtés  $a$  et  $b > a$ , le mécanisme de ruine comporte les charnières  $IA$ ,  $IB$ ,  $JC$ ,  $JD$  et  $IJ$  ; en fonction du rapport  $\alpha = a/b$ ,  $x$  est défini par :

$$x = \frac{1}{2} a (\sqrt{3 + \alpha^2} - \alpha)$$

et la densité de charge maximale a pour valeur :

$$p_{max} = \frac{8m}{3a^2} (\sqrt{3 + \alpha^2} + \alpha)^2$$

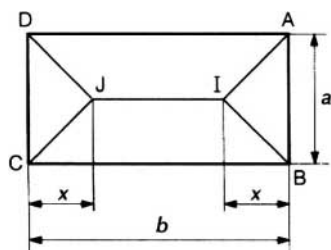
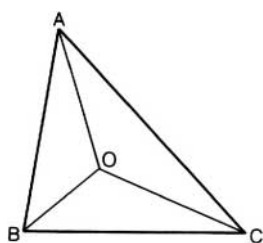
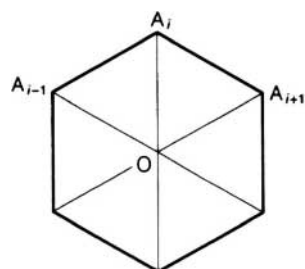
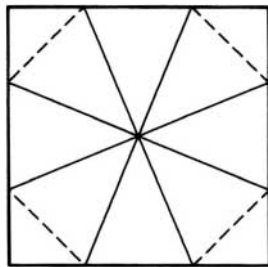
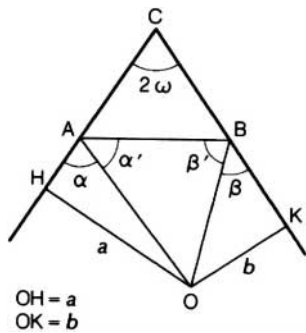


Tableau 60 – Mécanismes de ruine des plaques minces sans charnières négatives (suite)



■ **Plaque polygonale appuyée unilatéralement sur son contour supportant une charge concentrée P en O**

Dans ce cas où les angles peuvent se soulever, la charnière OC joignant O au sommet C du contour est remplacée par deux charnières OA et OB. On démontre que :

$$\alpha = \beta', \beta = \alpha', \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \omega, \frac{\sin^2 \alpha}{a} = \frac{\sin^2 \beta}{b}$$

et que la part  $\delta P_{max}$  de charge limite équilibrée par les moments le long des charnières OA et OB est :

$$\delta P_{max} = \frac{2m}{\cos \omega} \left( \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}} - 2 \sin \omega \right)$$

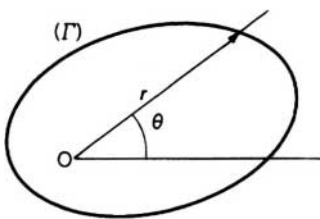
Lorsque O est sur la bissectrice de l'angle C,  $a = b$ , et :

$$\alpha = \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \text{ et } \delta P_{max} = 4m \cot \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2} \right)$$

La charge limite que peut supporter en son centre une plaque ayant la forme d'un **polygone régulier** de  $n$  côtés appuyée unilatéralement sur son contour est égale à la charge limite que peut supporter en son centre une plaque ayant la forme d'un polygone régulier de  $2n$  côtés appuyée bilatéralement sur son contour.

Ainsi, la charge limite que peut supporter en son centre une plaque carrée dont les bords peuvent se soulever est :

$$P_{max} = 16 (\sqrt{2} - 1) m \approx 6,63 m$$



■ **Plaque convexe appuyée bilatéralement sur son contour supportant une charge concentrée P en O**

Le mécanisme de rupture comporte une infinité de charnières issues de O. Si  $r = r(\theta)$  est l'équation polaire du contour, le pôle étant O, la charge limite est :

$$P_{max} = m \int_0^{2\pi} \left( 1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\theta \text{ avec } r' = \frac{dr}{d\theta}$$

Si le contour  $\Gamma$  est défini paramétriquement :

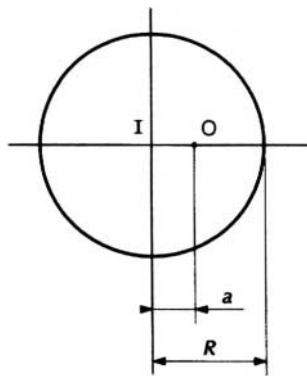
$$x = x(t) \text{ et } y = y(t)$$

on a

$$P_{max} = m \int_{\Gamma} \frac{x'^2 + y'^2}{|xy' - yx'|} dt$$

avec

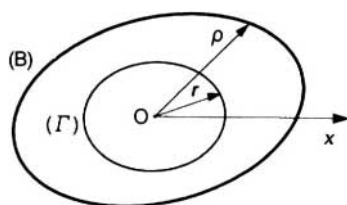
$$x' = \frac{dx}{dt} \text{ et } y' = \frac{dy}{dt}$$



Ainsi, dans le cas d'une **plaque circulaire** de rayon  $R$ , la charge limite qui peut être appliquée en O à la distance  $IO = a$  du centre a pour valeur :

$$P_{max} = \frac{2m\pi R}{\sqrt{R^2 - a^2}}$$

Tableau 60 – Mécanismes de ruine des plaques minces sans charnières négatives (suite)



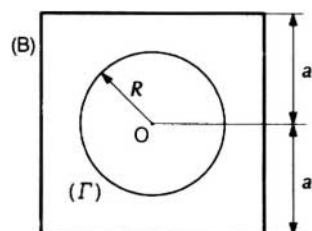
■ **Plaque de bord différent du contour d'appui supportant une charge concentrée en O**

Le pôle étant O, soit  $\rho = \rho(\theta)$  l'équation polaire du bord (B), et  $r = r(\theta)$  l'équation polaire du contour d'appui ( $\Gamma$ ) ; la charge limite a pour valeur :

$$P_{max} = m \int_0^{2\pi} \frac{\rho}{r} \left( 1 + \frac{r'^2}{r^2} \right) d\theta \text{ avec } r' = \frac{dr}{d\theta}$$

Par exemple, dans le cas d'une **plaque carrée** de centre O et de côté  $2a$  appuyée le long d'un cercle de centre O et de rayon  $R < a$ , on trouve :

$$P_{max} = 8 \ln(1 + \sqrt{2}) \frac{ma}{R} \approx 7,05 \frac{ma}{R}$$



■ **Plaque annulaire dont un bord est libre et l'autre simplement appuyé**

La plaque est limitée par les cercles de rayons  $a$  et  $b < a$ .

● Lorsque le **bord  $r = a$  est simplement appuyé** et que le **bord  $r = b$  est libre**, la densité superficielle limite que peut supporter la plaque est :

$$p_{max} = \frac{6m}{(a-b)(a+2b)}$$

et la densité linéaire limite que peut supporter la plaque le long du bord libre  $r = b$  est :

$$Q_{max} = \frac{m}{b}$$

Pour supporter à la fois la densité superficielle  $p$  et la densité linéaire  $Q$  le long du bord libre, le moment limite  $m$  de la plaque doit vérifier l'inégalité :

$$m \geq a \left[ \frac{1}{6} p (a-b)(a+2b) + Qb \right]$$

● Lorsque le **bord  $r = a$  est libre** et que le **bord  $r = b$  est simplement appuyé**, la densité superficielle limite que peut supporter la plaque est :

$$p_{max} = \frac{6m'}{(a-b)(2a+b)}$$

et la densité linéaire limite que peut supporter la plaque le long du bord libre  $r = a$  est :

$$Q_{max} = \frac{m'}{a}$$

**Nota** : nous avons mis  $m'$  au lieu de  $m$  dans les deux dernières formules parce que, dans ce cas, toutes les charnières sont négatives.

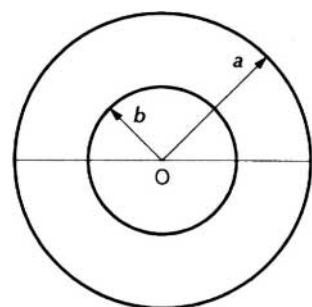
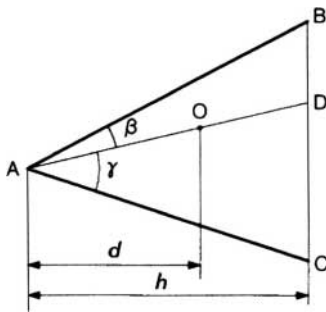
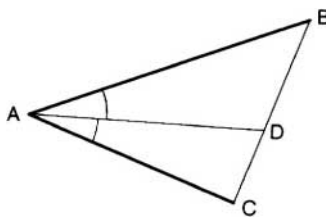


Tableau 60 – Mécanismes de ruine des plaques minces sans charnières négatives (suite)



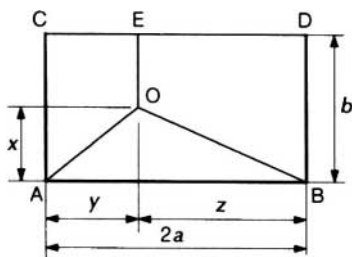
- **Plaque triangulaire appuyée le long des côtés AB et AC, et libre le long du côté BC**
- Dans le cas d'une **charge concentrée** appliquée en O, le mécanisme de ruine comporte la seule charnière AOD, et la charge limite a pour valeur :

$$P_{max} = m \frac{h}{d} (\cot \beta + \cot \gamma)$$



- Dans le cas d'une **densité de charge répartie** sur la surface de la plaque, le mécanisme de ruine comporte la seule charnière AD dirigée suivant la bissectrice de l'angle A, et la densité de charge limite a pour valeur :

$$p_{max} = 6m \cot \frac{A}{2}$$



- **Plaque rectangulaire appuyée le long des côtés AB, AC et BD, et libre le long du côté CD**
- Soit  $AB = CD = 2a$ ,  $AC = BD = b$ ,  $\alpha = a/b$ .

- Dans le cas d'une **charge concentrée** appliquée en O, le mécanisme de ruine comporte trois charnières OA, OB et OE, et la charge limite a pour valeur :

$$P_{max} = m \left( \frac{2a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{b}{z} \right)$$

- Dans le cas d'une **densité de charge répartie** sur la surface de la plaque, deux mécanismes de ruine sont possibles.

Le premier mécanisme comporte les charnières EA, EB et EF avec :

$$x = a(\sqrt{3 + \alpha^2} - \alpha)$$

et la densité de charge limite a pour valeur :

$$p_{max} = \frac{2m}{3a^2} (\sqrt{3 + \alpha^2} + \alpha)^2 \tag{7}$$

Le second mécanisme comporte les charnières AE et BF avec :

$$x = a \frac{\sqrt{1 + 9\alpha^2} - 1}{3\alpha^2}$$

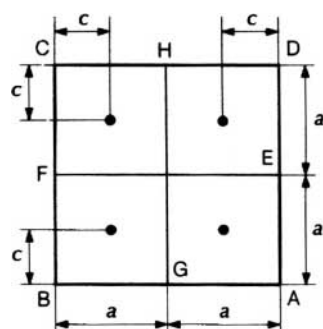
et la densité de charge limite a pour valeur :

$$p_{max} = \frac{4m}{3a^2} (\sqrt{1 + 9\alpha^2} + 1) \tag{8}$$

Le premier mécanisme n'est possible que si  $\alpha < 1$  ; le second mécanisme n'est possible que si  $\alpha > 1/\sqrt{3}$  ; il existe une valeur  $\alpha_0 \approx 0,7328$  telle que la densité de charge limite est donnée :

- par la formule (7) lorsque  $\alpha < \alpha_0$  ;
- par la formule (8) lorsque  $\alpha > \alpha_0$ .

Tableau 60 – Mécanismes de ruine des plaques minces sans charnières négatives (suite)

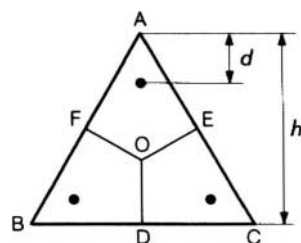


■ **Plaque carrée sur quatre appuis ponctuels supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie**

Les appuis ponctuels sont à la distance  $c$  des côtés de la plaque.

Le mécanisme de ruine comporte deux charnières EF et GH. Pour supporter la charge totale  $P$  uniformément répartie, la plaque doit avoir un moment limite au moins égal à :

$$m = \frac{1}{8} P \left( 1 - \frac{2c}{a} \right)$$



■ **Plaque triangulaire sur trois appuis ponctuels supportant une charge totale  $P$  uniformément répartie**

Nous supposons que le contour de la plaque est un triangle équilatéral de hauteur  $h$ , et que les appuis ponctuels sont à la distance  $d$  des sommets du triangle.

Soit  $m$  le moment limite que doit avoir la plaque pour supporter la charge totale  $P$  uniformément répartie.

Deux mécanismes de ruine peuvent être envisagés.

Le premier mécanisme, qui comporte les charnières OD, OE et OF, conduit à la formule :

$$m = \frac{P}{\sqrt{3}} \left( \frac{7}{18} - \frac{d}{h} \right) \quad (9)$$

Le second mécanisme, qui comporte les charnières  $A'A''$ ,  $B'B''$  et  $C'C''$ , conduit à la formule :

$$m = \frac{P}{2\sqrt{3}} \left[ 1 - 3 \sqrt[3]{\left( \frac{d}{2h} \right)^2} \right] \quad (10)$$

On doit retenir la plus grande des deux valeurs données par les formules (9) et (10).

Il existe un nombre  $\beta \approx 0,1245$  tel que  $m$  est donné :

- par la formule (9) lorsque  $d/h > \beta$  ;
- par la formule (10) lorsque  $d/h < \beta$ .

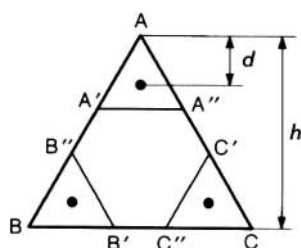
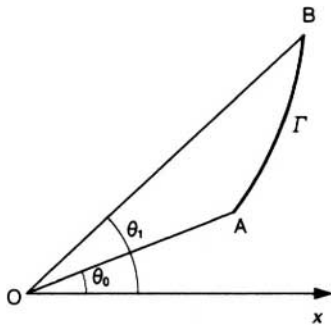


Tableau 61 – Mécanismes de ruine des plaques minces avec charnières négatives



■ Mécanisme radial avec charnière périphérique négative

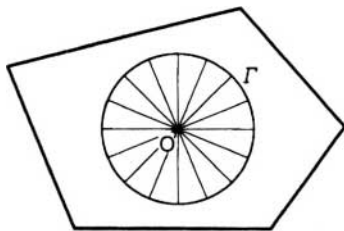
Le mécanisme de ruine d'une plaque supportant une charge concentrée  $P$  en  $O$  peut comporter, en partie, une infinité de charnières radiales positives issues de  $O$  limitées par un arc  $AB$  de charnière périphérique négative  $\Gamma$ . On démontre que  $\Gamma$  est une spirale logarithmique de pôle  $O$  :

$$r = ke^{c\theta}$$

qui se réduit à un cercle de centre  $O$  lorsque  $c = 0$ .

La part  $\delta P_{max}$  de charge limite équilibrée par les moments  $m$  le long des charnières radiales et par les moments  $m' = Km$  le long de l'arc  $AB$  de charnière périphérique a pour valeur :

$$\delta P_{max} = m(1 + K)(1 + c^2)(\theta_1 - \theta_0)$$

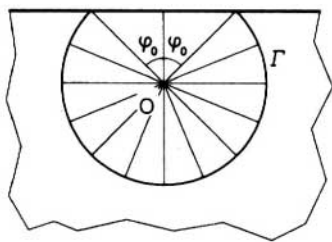


■ Plaque encastree supportant une charge concentree en O

Le mécanisme de ruine comporte une infinité de charnières radiales issues de  $O$  limitées par une charnière périphérique circulaire de centre  $O$ .

La charge limite a pour valeur :

$$P_{max} = 2\pi m(1 + K)$$



■ Charge concentree en un point O voisin du bord d'une plaque simplement appuiee

Le mécanisme de ruine comporte une infinité de charnières radiales issues de  $O$  limitées par une charnière périphérique circulaire  $\Gamma$  coupant le bord de la plaque sous l'angle  $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$  tel que :

$$\tan \varphi_0 = \sqrt{K}$$

Dans le cas d'un **bord rectiligne**, la charge limite est :

$$P_{max} = 2m[\sqrt{K} + (1 + K)(\pi - \arctan \sqrt{K})]$$

Dans le cas d'une **plaque circulaire** de rayon  $R$ , supportant une charge concentree en  $O$  tel que  $IO = a$ , le mécanisme n'est possible que si :

$$\frac{a}{R} > \sqrt{\frac{K}{K+1}}$$

et la charge limite correspondante a pour valeur :

$$P_{max} = 2m \left[ (1 + K)(\pi - \alpha) + \frac{R}{\sqrt{R^2 - a^2}} \arctan \left( \frac{\sqrt{R^2 - a^2}}{R} \tan \alpha \right) \right]$$

$\alpha$  étant défini par

$$\tan \alpha = \frac{R}{a} \sqrt{\frac{K}{K+1}}$$

On doit comparer la valeur ci-dessus et la valeur calculée dans le tableau 60 :

$$P_{max} = \frac{2m\pi R}{\sqrt{R^2 - a^2}}$$

et retenir la plus petite de ces deux valeurs.

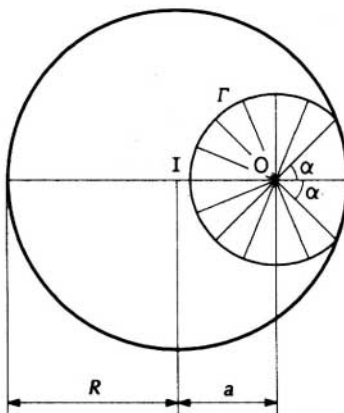
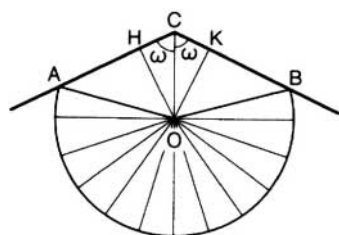
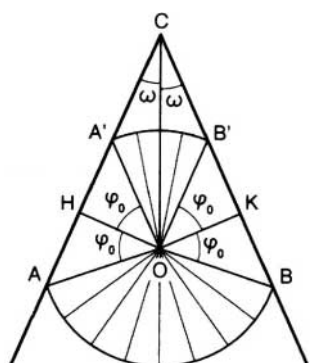


Tableau 61 – Mécanismes de ruine des plaques minces avec charnières négatives (suite)



■ **Plaque angulaire appuyée bilatéralement supportant une charge concentrée**

Nous supposons le point O d'application de la charge sur la bissectrice de l'angle C.

Selon les valeurs de l'angle  $C = 2\omega$  et du rapport  $K = m'/m$ , on a l'un ou l'autre mécanisme de ruine suivant.

- Si  $\tan \omega < 1/\sqrt{K}$ , le mécanisme de ruine comporte une infinité de charnières radiales issues de O limitées par deux charnières circulaires négatives AB et A'B'.

Dans ce cas, la charge limite a pour valeur :

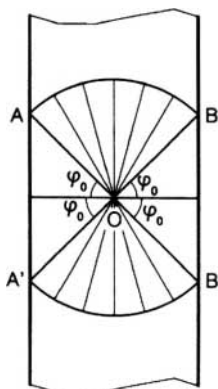
$$P_{max} = 2m \left[ 2\sqrt{K} + (1+K) (\pi - 2 \arctan \sqrt{K}) \right]$$

- Si  $\tan \omega > 1/\sqrt{K}$ , le mécanisme de ruine comporte la charnière radiale OC et une infinité de charnières radiales issues de O limitées par la charnière circulaire négative AB.

Dans ce cas, la charge limite a pour valeur :

$$P_{max} = 2m \left[ \sqrt{K} + \cot \omega + (1+K) \left( \frac{\pi}{2} + \omega - \arctan \sqrt{K} \right) \right]$$

**Nota :** lorsque O n'est pas sur la bissectrice de l'angle C, les charnières périphériques AB et A'B' sont des arcs de spirales logarithmiques de pôle O. Le calcul de la charge limite est alors assez compliqué.



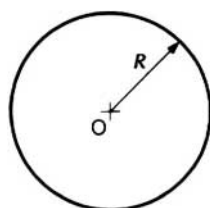
■ **Plaque infiniment longue appuyée bilatéralement supportant une charge concentrée en un point O de l'axe de la plaque**

Le mécanisme de ruine comporte une infinité de charnières radiales issues de O limitées par deux charnières circulaires négatives AB et A'B'.

La charge limite a pour valeur :

$$P_{max} = 2m \left[ 2\sqrt{K} + (1+K) (\pi - 2 \arctan \sqrt{K}) \right]$$

**Nota :** lorsque O n'est pas à égale distance des bords de la plaque, les charnières périphériques AB et A'B' sont des arcs de spirales logarithmiques de pôle O. Le calcul de la charge limite est alors assez compliqué.

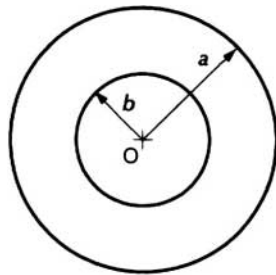


■ **Plaque circulaire encastree supportant une densité de charge uniformément répartie**

Le mécanisme de ruine comporte une infinité de charnières radiales issues du centre de la plaque et une charnière circulaire négative le long du bord. La densité de charge limite a pour valeur :

$$p_{max} = \frac{6m(1+K)}{R^2}$$

Tableau 61 – Mécanismes de ruine des plaques minces avec charnières négatives (suite)



■ **Plaque annulaire dont un bord est libre et l'autre encastré**

La plaque est comprise entre les cercles de rayons  $a$  et  $b < a$ .

Le mécanisme de ruine comporte une infinité de charnières radiales passant par O et une charnière circulaire négative le long du bord encastré.

● Lorsque le bord  $r = a$  est encastré et que le bord  $r = b$  est libre, la densité superficielle limite de charge a pour valeur :

$$p_{max} = \frac{6m(a-b+Ka)}{(a+2b)(a-b)^2}$$

et la densité linéaire limite de charge que peut supporter la plaque le long du bord libre a pour valeur :

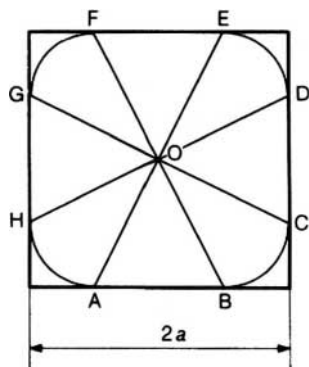
$$Q_{max} = \frac{m}{b} \left( 1 + \frac{Ka}{a-b} \right)$$

● Lorsque le bord  $r = a$  est libre et que le bord  $r = b$  est encastré, la densité superficielle limite de charge a pour valeur :

$$p_{max} = \frac{6mKa}{(2a+b)(a-b)^2}$$

et la densité linéaire limite de charge que peut supporter la plaque le long du bord libre a pour valeur :

$$Q_{max} = \frac{mK}{a-b}$$



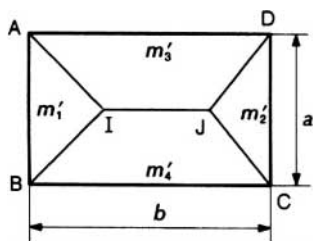
■ **Plaque carrée encastrée supportant une densité de charge uniformément répartie**

Le mécanisme de ruine comporte :

- une infinité de charnières radiales issues du centre de la plaque limitées par quatre arcs BC, DE, FG et HA raccordant les côtés de la plaque ;
- une charnière périphérique ABCDEFGHA dont certaines portions sont confondues avec le bord de la plaque.

La densité limite de charge a pour valeur :

$$p_{max} = 0,894 \frac{6m(1+K)}{a^2}$$



■ **Plaque rectangulaire encastrée supportant une densité de charge uniformément répartie**

On obtient une valeur approchée de la densité de charge limite en considérant le mécanisme de ruine *en enveloppe* comportant les charnières positives IA, IB, JC, JD et IJ, et les charnières négatives AB, BC, CD et DA.

Supposons que les valeurs limites  $m'$  soit différentes le long des côtés de la plaque :

$$m'_1 = K_1 m, m'_2 = K_2 m, m'_3 = K_3 m, m'_4 = K_4 m$$

On démontre que la densité limite de charge de la plaque encastrée est égale à la densité limite de charge que peut supporter une plaque rectangulaire simplement appuyée de côtés  $a'$  et  $b'$  :

$$a' = \frac{2a}{\sqrt{1+K_3} + \sqrt{1+K_4}} \text{ et } b' = \frac{2b}{\sqrt{1+K_1} + \sqrt{1+K_2}}$$

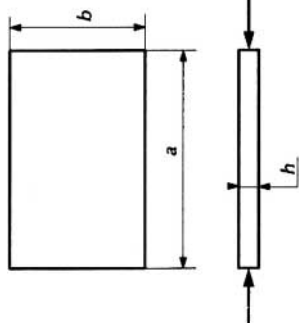
Donc si  $\alpha = a'/b'$ , la densité de charge limite a pour valeur :

$$p_{max} = \frac{8m}{3a'^2} (\sqrt{3+\alpha^2} + \alpha)^2$$



Tableau 62 – Contraintes critiques de flambement des plaques minces

■ Notations



$a$  côté de la plaque parallèle à la direction des efforts sollicitant ses bords  
 $b$  côté de la plaque sur lequel s'exercent ces efforts  
 $h$  épaisseur de la plaque  
 $E$  module d'élasticité  
 $S$  et  $I$  section et inertie d'un raidisseur  
 $S_1$  et  $I_1$  section et inertie transversale de la plaque :  $S_1 = bh$   
 et  $I_1 = \frac{bh^3}{12}$

$\rho$   $a/b$   
 $\sigma_{cr}$  contrainte critique de flambement

Nota : les formules données dans ce tableau ne sont, pour la plupart, que des formules approchées. Dans certains cas (recherches d'une grande précision), il sera nécessaire d'employer des formules plus exactes.

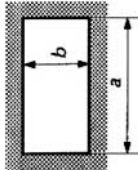
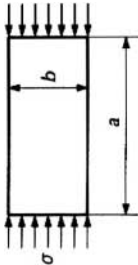

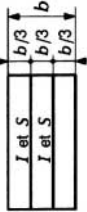
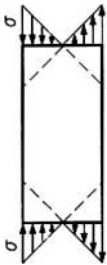
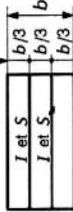

Conditions aux appuis	Cas de charges	Raidisseur	
		Position	Nombre
Plaque appuyée sur ses quatre côtés 	Compression simple 	Sans raidisseur	0
			1
			2
	Flexion simple 	Sans raidisseur	0
			2
			3

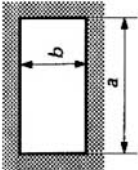
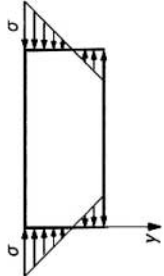
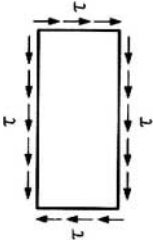
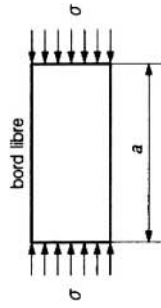
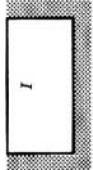
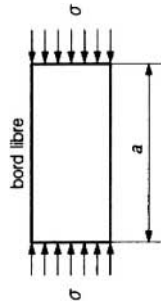
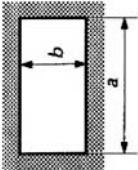
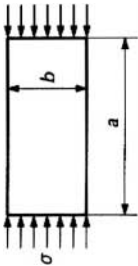
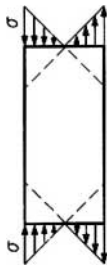
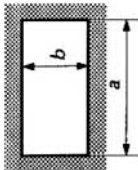
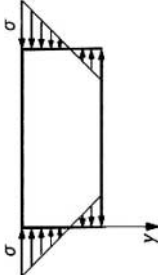
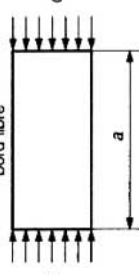
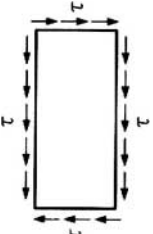
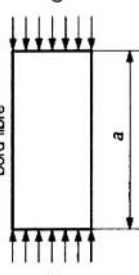
Tableau 62 – Contraintes critiques de flambement des plaques minces (suite)			
Conditions aux appuis	Cas de charges	Raidisseur	
		Position	Nombre
Plaque appuyée sur ses quatre côtés 	Flexion composée  $\sigma(y) = \sigma \left( 1 - \alpha \frac{y}{b} \right)$	Sans raidisseur	0
	Cisaillement simple 	Sans raidisseur	0
	Compression simple 		1
Plaque appuyée sur trois côtés et libre sur le quatrième	Compression simple 	Sans raidisseur	0

Tableau 62 – Contraintes critiques de flambement des plaques minces (suite)

Conditions aux appuis	Cas de charges	Contraintes critiques de flambement	
		Formules	Valeurs des coefficients
Plaque appuyée sur ses quatre côtés 	Compression simple 	$\sigma_{cr} = \frac{h^2}{b^2} \left\{ \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \frac{(m^2 + \rho^2)^2}{m^2 \rho^2} \right\}$ (figure 1)	$\rho$ de 0 à $\sqrt{2}$ → $m = 1$ $\rho$ de $\sqrt{2}$ à $\sqrt{6}$ → $m = 2$ $\rho$ de $\sqrt{6}$ à $\sqrt{12}$ → $m = 3$
		$\sigma_{cr} = \frac{h^2}{b^2} \left\{ \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{(m^2 + \rho^2)^2}{m^2 \rho^2} + 2 \frac{I}{I_1} (1 - \nu^2) \frac{m^2}{\rho^2} \right] \frac{S_1}{S_1 + 2S} \right\}$	$\rho$ de 0 à $\alpha\sqrt{2}$ → $m = 1$ $\rho$ de $\alpha\sqrt{2}$ à $\alpha\sqrt{6}$ → $m = 2$ $\rho$ de $\alpha\sqrt{6}$ à $\alpha\sqrt{12}$ → $m = 3$ avec $\alpha = \sqrt[4]{1 + \frac{2I}{I_1} (1 - \nu^2)}$
		$\sigma_{cr} = \frac{h^2}{b^2} \left\{ \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{(m^2 + \rho^2)^2}{m^2 \rho^2} + \frac{3I}{I_1} (1 - \nu^2) \frac{m^2}{\rho^2} \right] \frac{S_1}{S_1 + 3S} \right\}$	$\rho$ de 0 à $\alpha\sqrt{2}$ → $m = 1$ $\rho$ de $\alpha\sqrt{2}$ à $\alpha\sqrt{6}$ → $m = 2$ $\rho$ de $\alpha\sqrt{6}$ à $\alpha\sqrt{12}$ → $m = 3$ avec $\alpha = \sqrt[4]{1 + \frac{3I}{I_1} (1 - \nu^2)}$
	Flexion simple 	$\sigma_{cr} = \frac{h^2}{b^2} \left\{ \frac{3}{128} \frac{E\pi^4}{(1-\nu^2)} \frac{(m^2 + 4\rho^2)(m^2 + \rho^2)}{m^2 \rho^2} \right\}$ (figure 2)	$\rho$ de 0 à 1 → $m = 1$ $\rho$ de 1 à $\sqrt{3}$ → $m = 2$ $\rho$ de $\sqrt{3}$ à $\sqrt{6}$ → $m = 3$ $\rho$ de $\sqrt{6}$ à $\sqrt{10}$ → $m = 4$
		$\sigma_{cr} = \frac{h^2}{b^2} \left\{ \frac{3}{128} \frac{E\pi^4}{(1-\nu^2)} \left[ (m^2 + 4\rho^2)^2 + \frac{3I}{I_1} (1 - \nu^2) m^4 \right]^{1/2} \right. \\ \left. \left[ (m^2 + \rho^2)^2 + \frac{3I}{I_1} (1 - \nu^2) m^4 \right]^{1/2} \left[ m^2 \rho^2 \left( 1 + \frac{9\pi^2 S}{32 S_1} \right) \right]^{-1} \right\}$	Déterminer par quelques essais la valeur de $m$ donnant la valeur minimale de $\sigma_{cr}$
		$\sigma_{cr} = \frac{h^2}{b^2} \left\{ \frac{3}{128} \frac{E\pi^4}{(1-\nu^2)} \left[ (m^2 + 4\rho^2)^2 + \frac{4I}{I_1} (1 - \nu^2) m^4 \right]^{1/2} \right. \\ \left. \left[ (m^2 + \rho^2)^2 + \frac{4I}{I_1} (1 - \nu^2) m^4 \right]^{1/2} \left[ m^2 \rho^2 \left( 1 + \frac{9\sqrt{2}}{32} \pi^2 \frac{S}{S_1} \right) \right]^{-1} \right\}$	Déterminer par quelques essais la valeur de $m$ donnant la valeur minimale de $\sigma_{cr}$

**Tableau 62 – Contraintes critiques de flambement des plaques minces (suite)**

Conditions aux appuis		Cas de charges	Formules	Contraintes critiques de flambement	Valeurs des coefficients																																											
<p>Plaque appuyée sur ses quatres côtés</p> 	<p>Flexion composée</p> 	<p> <math display="block">\sigma(Y) = \sigma \left( 1 - \alpha \frac{Y}{b} \right)</math> </p>	<p> <math display="block">\sigma_{cr} = \frac{h^2}{b^2} \left\{ K \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \right\} \quad \text{(figure 4)}</math> </p> <p>Pour <math>\alpha = 0</math> ; compression simple (voir page précédente) :</p> $K = \frac{(m^2 + \rho^2)^2}{m^2 \rho^2}$ <p>Pour <math>0 &lt; \alpha &lt; 2</math> ; K est donné par la formule ci-dessous (<math>m = 1</math>) :</p> $m^4 K^2 \rho^4 (1 - 0,68 \alpha) (1 - 0,32 \alpha)$ $- m^2 K \rho^2 \left( 1 - \frac{\alpha}{2} \right) \left[ (m^2 + \rho^2)^2 + (m^2 + 4\rho^2)^2 \right]$ $+ (m^2 + \rho^2)^2 (m^2 + 4\rho^2)^2 = 0$ <p>Pour <math>\alpha = 2</math>, flexion simple ; K sera donné par la formule plus précise :</p> $(1 + \rho^2)^2 (1 + 4\rho^2)^2 (1 + 9\rho^2)^2 - 0,054 5 K^3 \rho^6 - 0,128 (1 + 9\rho^2)^2 K^2 \rho^4 = 0$	<table border="1"> <tr> <th colspan="2">Valeurs de K</th> </tr> <tr> <th><math>\alpha</math></th> <th><math>\rho</math></th> </tr> <tr> <td>0,4</td> <td>0,8</td> </tr> <tr> <td>0,6</td> <td>1,00</td> </tr> <tr> <td>0,8</td> <td>1,50</td> </tr> <tr> <td>29,1</td> <td>24,1</td> </tr> <tr> <td>24,4</td> <td>25,6</td> </tr> <tr> <td>11,2</td> <td>11,0</td> </tr> <tr> <td>11,5</td> <td>24,1</td> </tr> <tr> <td>1</td> <td>15,1</td> </tr> <tr> <td>9,7</td> <td>8,1</td> </tr> <tr> <td>7,8</td> <td>8,4</td> </tr> <tr> <td>4/5</td> <td>13,3</td> </tr> <tr> <td>8,3</td> <td>6,9</td> </tr> <tr> <td>6,6</td> <td>7,1</td> </tr> <tr> <td>2/3</td> <td>10,8</td> </tr> <tr> <td>7,1</td> <td>6,0</td> </tr> <tr> <td>5,8</td> <td>6,1</td> </tr> <tr> <td>0</td> <td>7,2</td> </tr> <tr> <td>5,1</td> <td>4,2</td> </tr> <tr> <td>4,0</td> <td>4,0</td> </tr> <tr> <td>4,3</td> <td>4,3</td> </tr> </table>	Valeurs de K		$\alpha$	$\rho$	0,4	0,8	0,6	1,00	0,8	1,50	29,1	24,1	24,4	25,6	11,2	11,0	11,5	24,1	1	15,1	9,7	8,1	7,8	8,4	4/5	13,3	8,3	6,9	6,6	7,1	2/3	10,8	7,1	6,0	5,8	6,1	0	7,2	5,1	4,2	4,0	4,0	4,3	4,3
			Valeurs de K																																													
$\alpha$	$\rho$																																															
0,4	0,8																																															
0,6	1,00																																															
0,8	1,50																																															
29,1	24,1																																															
24,4	25,6																																															
11,2	11,0																																															
11,5	24,1																																															
1	15,1																																															
9,7	8,1																																															
7,8	8,4																																															
4/5	13,3																																															
8,3	6,9																																															
6,6	7,1																																															
2/3	10,8																																															
7,1	6,0																																															
5,8	6,1																																															
0	7,2																																															
5,1	4,2																																															
4,0	4,0																																															
4,3	4,3																																															
<p>Plaque appuyée sur trois côtés et libre sur le quatrième</p> 	<p>Cisaillement simple</p> 	<p> <math display="block">\tau_{cr} = \frac{h^2}{b^2} K \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \quad \text{(figure 3)}</math> </p> <p>Le flambement de cette plaque est identique au flambement de deux plaques de côtés <math>b</math> et <math>a/2</math>, sous réserve d'adopter pour <math>I</math> une valeur au moins égale à :</p> $I = K \frac{a h^3}{12(1-\nu^2)}$	<table border="1"> <tr> <th><math>\rho</math></th> <th><math>K</math></th> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1,2</td> </tr> <tr> <td>1,4</td> <td>1,5</td> </tr> <tr> <td>1,6</td> <td>1,8</td> </tr> <tr> <td>2,0</td> <td>3,0</td> </tr> <tr> <td>9,4</td> <td>8,0</td> </tr> <tr> <td>7,3</td> <td>7,1</td> </tr> <tr> <td>7,0</td> <td>6,8</td> </tr> <tr> <td>6,6</td> <td>6,6</td> </tr> <tr> <td>6,1</td> <td>6,1</td> </tr> </table>	$\rho$	$K$	1	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	3,0	9,4	8,0	7,3	7,1	7,0	6,8	6,6	6,6	6,1	6,1	<table border="1"> <tr> <th><math>\rho</math></th> <th><math>K</math></th> </tr> <tr> <td>1</td> <td>1,25</td> </tr> <tr> <td>1,5</td> <td>2,0</td> </tr> <tr> <td>6,3</td> <td>2,9</td> </tr> <tr> <td>0,83</td> <td>0,83</td> </tr> </table>	$\rho$	$K$	1	1,25	1,5	2,0	6,3	2,9	0,83	0,83														
			$\rho$	$K$																																												
1	1,2																																															
1,4	1,5																																															
1,6	1,8																																															
2,0	3,0																																															
9,4	8,0																																															
7,3	7,1																																															
7,0	6,8																																															
6,6	6,6																																															
6,1	6,1																																															
$\rho$	$K$																																															
1	1,25																																															
1,5	2,0																																															
6,3	2,9																																															
0,83	0,83																																															
<p>Plaque appuyée sur trois côtés et libre sur le quatrième</p> 	<p>Compression simple</p>	<p> <math display="block">\sigma_{cr} = \frac{h^2}{b^2} \left\{ \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{1}{\rho^2} + \frac{6(1-\nu)}{\pi^2} \right] \right\} \quad \text{(figure 5)}</math> </p>	<p> <math display="block">\sigma_{cr} = \frac{h^2}{b^2} \left\{ \frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)} \left[ \frac{1}{\rho^2} + \frac{6(1-\nu)}{\pi^2} + \frac{3I}{I_1 \rho^2} (1-\nu^2) \right] \frac{S_1}{S_1 + 3S} \right\}</math> </p>																																													

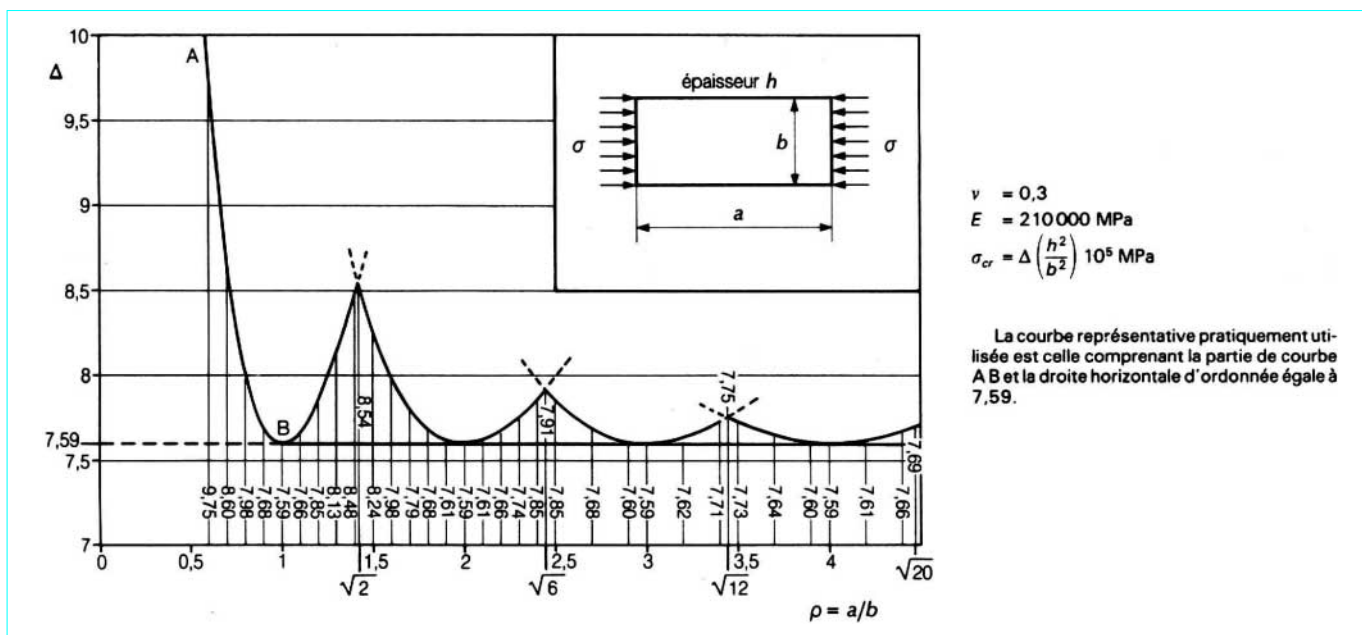


Figure 1 - Plaque rectangulaire sans raidisseur. Compression simple (tableau 62)

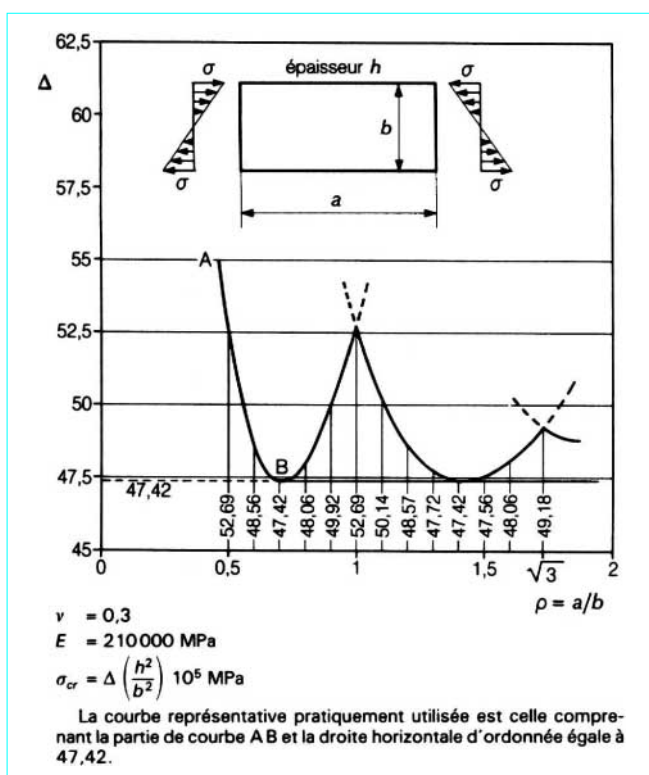


Figure 2 - Plaque rectangulaire sans raidisseur. Flexion simple (tableau 62)

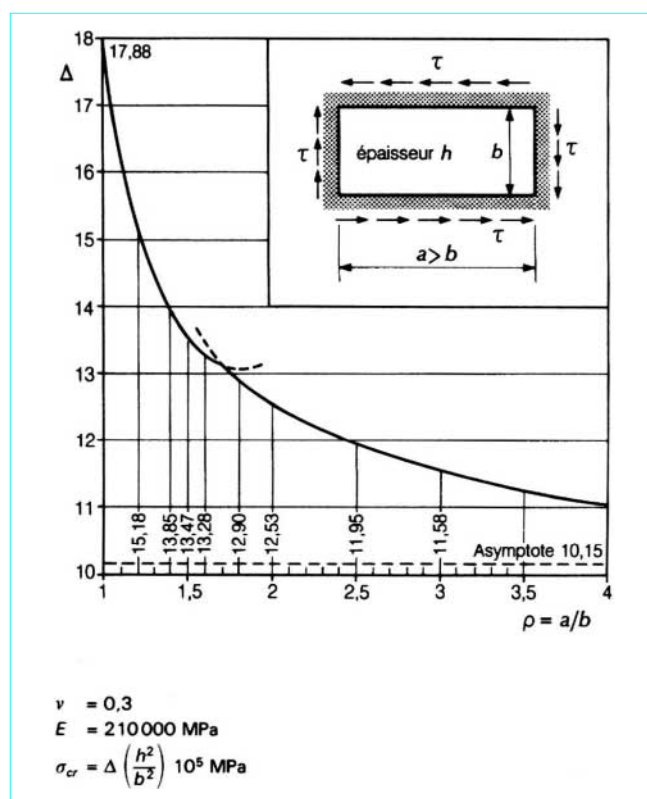


Figure 3 - Plaque rectangulaire sans raidisseur. Cisaillement simple (tableau 62)

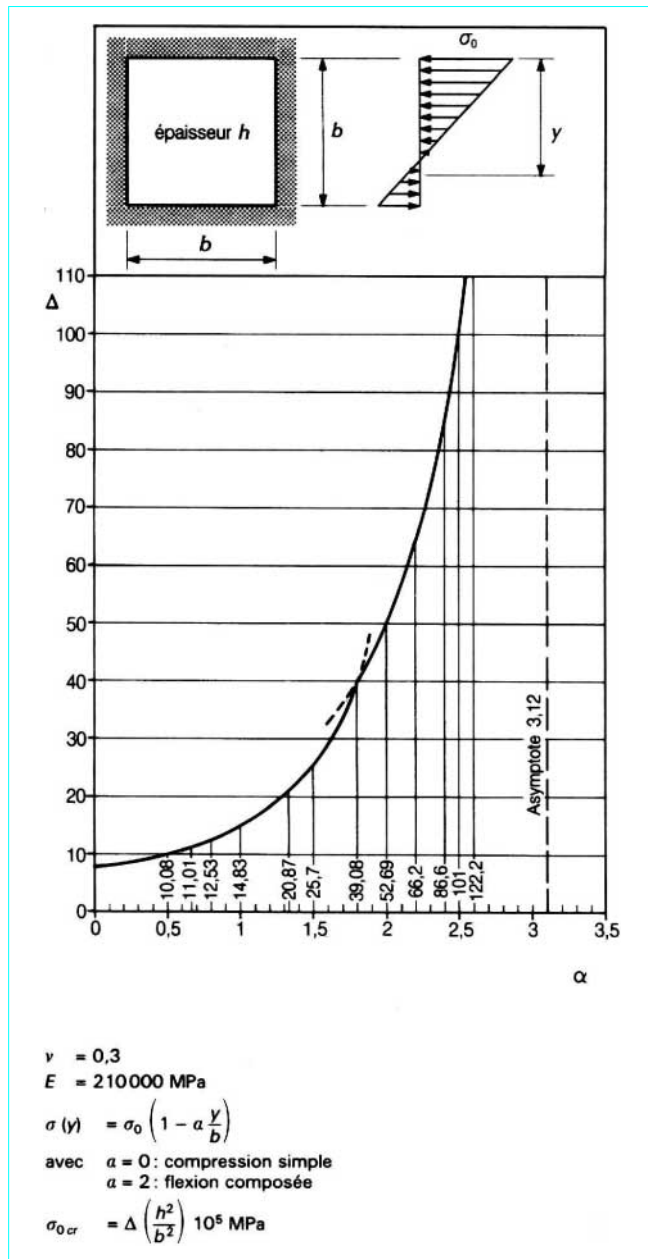


Figure 4 - Plaque carrée sans raidisseur. Flexion Composée (tableau 62)

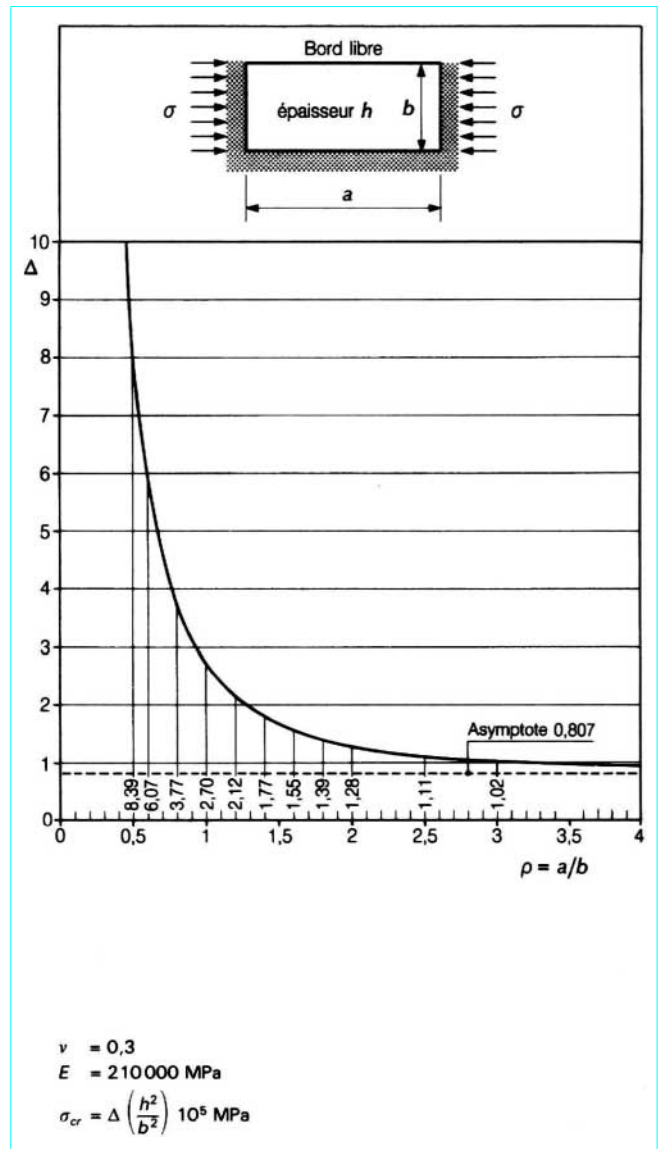


Figure 5 - Plaque rectangulaire sans raidisseur, libre sur un bord. Compression simple (tableau 62)