

Réseaux de poutres croisées

par **Jean COURBON**

Ingénieur en Chef des Ponts et Chaussées

Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées

1. Théorie générale	C 2 025 - 2
1.1 Définition des structures étudiées.....	— 2
1.1.1 Poutres principales et poutres secondaires	— 2
1.1.2 Caractéristiques mécaniques des poutres principales	— 2
1.1.3 Caractéristiques mécaniques des poutres secondaires	— 2
1.2 Systèmes de charges propres des poutres principales.....	— 3
1.3 Méthode de calcul du réseau.....	— 4
1.3.1 Report des charges appliquées aux nœuds	— 4
1.3.2 Équations d'équilibre du réseau.....	— 4
1.3.3 Méthode de résolution des équations d'équilibre	— 4
1.3.4 Généralisation	— 5
1.4 Calcul d'une poutre sur appuis élastiques par approximations successives	— 5
1.4.1 Généralités	— 5
1.4.2 Utilisation de la matrice $[a_{jk}]$	— 5
1.4.3 Utilisation de la matrice $[\alpha_{ik}]$	— 6
1.4.4 Exemples numériques.....	— 6
2. Réseaux réguliers de poutres de section constante	— 7
2.1 Poutres principales simplement appuyées	— 7
2.1.1 Calcul des flèches en fonction des charges.....	— 7
2.1.2 Charges propres des poutres principales.....	— 7
2.1.3 Calcul des charges en fonction des flèches.....	— 8
2.2 Poutres principales encastrées.....	— 10
2.2.1 Calcul des flèches en fonction des charges.....	— 10
2.2.2 Charges propres des poutres principales.....	— 11
2.2.3 Calcul des charges en fonction des flèches.....	— 11
3. Réseaux dont les poutres de l'un des ensembles sont infiniment rapprochées	— 12
3.1 Réseaux dont les poutres principales sont infiniment rapprochées	— 12
3.2 Réseaux dont les poutres secondaires sont infiniment rapprochées	— 12
3.2.1 Équations différentielles de l'équilibre	— 12
3.2.2 Charges propres des poutres principales.....	— 13
3.2.3 Résolution des équations d'équilibre	— 14
Références bibliographiques	— 14

Dans cet article, nous étudierons la capacité de résistance de différents types de réseaux de poutres croisées principales et secondaires.

1. Théorie générale

1.1 Définition des structures étudiées

1.1.1 Poutres principales et poutres secondaires

Les réseaux de poutres croisées sont des structures constituées de deux ensembles de poutres :

- m poutres (A_j) ($j = 1, 2, \dots, m$) parallèles, toutes identiques, donc ayant même loi d'inertie et mêmes liaisons extérieures ;
- n poutres (B_i) ($i = 1, 2, \dots, n$) parallèles, toutes identiques, donc ayant même loi d'inertie et mêmes liaisons extérieures.

Les poutres (A_j) et (B_i) sont liées les unes aux autres en leurs points de croisement appelés **nœuds** du réseau N_{ij} ; au nœud N_{ij} les poutres (A_j) et (B_i) ont donc même flèche.

Les forces extérieures sont des charges verticales normales au plan du réseau. Nous supposons la rigidité à la torsion des poutres négligeable, donc les réactions mutuelles qui s'exercent entre les poutres aux nœuds sont normales au plan du réseau.

Nous supposons le réseau tel que les poutres (A_j) restent stables si l'on supprime les poutres (B_i) ; les poutres (A_j) seront appelées **poutres principales** et les poutres (B_i) **poutres secondaires**. Dans le cas du réseau de la figure 1 on peut choisir l'un ou l'autre des ensembles de poutres comme poutres principales ; mais on aura intérêt, pour diminuer le volume des calculs, à choisir comme poutres principales les poutres les plus nombreuses ($m \geq n$). Dans le cas de la figure 2, qui représente un pont à poutres multiples solidarisiées par des entretoises, les poutres principales sont les poutres du pont et les poutres secondaires sont les entretoises. Enfin si l'un des ensembles de poutres comporte un nombre infini de poutres (figure 3), celles-ci sont nécessairement les poutres principales.

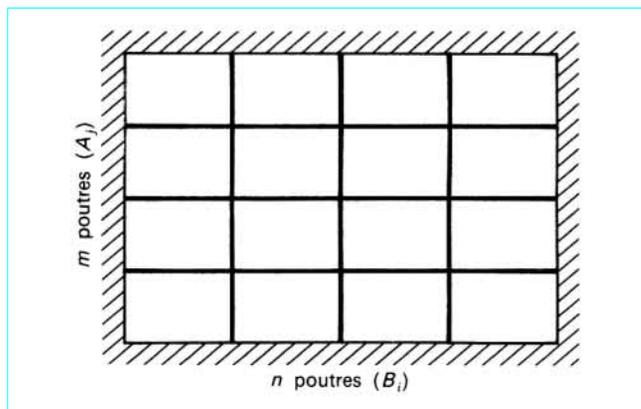


Figure 1 - Réseau de poutres croisées

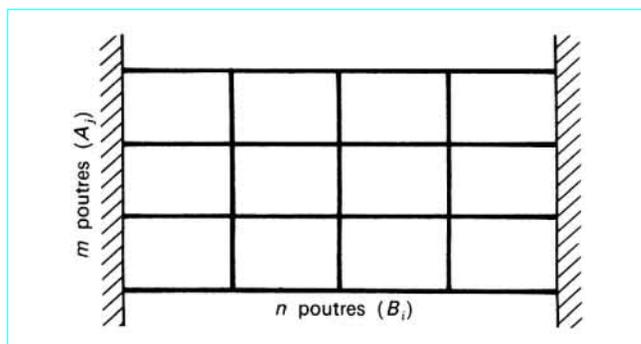


Figure 2 - Pont à poutres multiples solidarisiées par des entretoises

1.1.2 Caractéristiques mécaniques des poutres principales

Appelons (A) la poutre identique à toutes les poutres (A_j) et soient B_1, B_2, \dots, B_n les sections de cette poutre correspondant aux nœuds du réseau (figure 4). Un système de charges P_1, P_2, \dots, P_n appliquées dans ces sections produit dans celles-ci des flèches v_1, v_2, \dots, v_n données par la formule :

$$v_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} P_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

Nous comptons les flèches et les charges positivement vers le bas.

Les coefficients a_{ik} , caractéristiques de la poutre (A) , sont les éléments d'une **matrice** $a = [a_{ik}]$ **régulière** et **symétrique** ($a_{ik} = a_{ki}$) en vertu du théorème de réciprocité de Maxwell-Betti. Le déterminant de la matrice a étant différent de zéro, l'équation (1) peut être résolue par rapport aux charges :

$$P_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} v_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2)$$

Les coefficients α_{ik} sont les éléments de la matrice $\alpha = [\alpha_{ik}]$ inverse de la matrice a . La matrice α est régulière et symétrique.

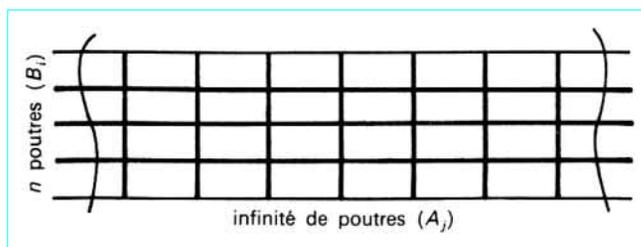


Figure 3 - Infinité de poutres de l'un des ensembles

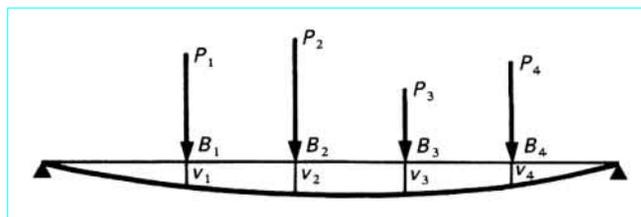


Figure 4 - Caractéristiques mécaniques d'une poutre principale

1.1.3 Caractéristiques mécaniques des poutres secondaires

Appelons (B) la poutre identique à toutes les poutres (B_i) et soient A_1, A_2, \dots, A_m les sections de cette poutre correspondant aux nœuds du réseau.

Dans le cas où les poutres secondaires pourraient être considérées comme poutres principales, par exemple dans le cas de la figure 1, des charges P_j ($j = 1, 2, \dots, m$) appliquées dans les sections A_j produisent dans ces sections des flèches v_j données par la formule :

$$v_j = \sum_{h=1}^m b_{jh} P_h \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (3)$$

Les coefficients b_{jh} caractéristiques de la poutre (B) sont les éléments d'une matrice b régulière et symétrique ; les équations (3) peuvent donc être résolues par rapport aux charges :

$$P_j = \sum_{h=1}^m \beta_{jh} v_h \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

Les coefficients β_{jh} sont les éléments de la matrice $\beta = [\beta_{jh}]$ inverse de la matrice b .

Dans le cas où les poutres (B_j) ne pourraient être considérées comme poutres principales, par exemple dans le cas des figures 2 et 3, nous ne pouvons plus écrire la relation (3), mais nous avons encore la relation (4) donnant les charges en fonction des flèches. Par exemple, dans le cas où la poutre (B) n'est soumise à aucune liaison extérieure (figure 5), les charges P_j forment un système de forces parallèles en équilibre, donc vérifient deux relations linéaires et homogènes. Il en résulte que la matrice β symétrique d'ordre m n'est plus régulière ; son rang est $m - 2$.

1.2 Systèmes de charges propres des poutres principales

Nous dirons qu'un système de charges q_1, q_2, \dots, q_n appliquées dans les sections B_1, B_2, \dots, B_n de la poutre (A) est un **système de charges propres** si les flèches v_1, v_2, \dots, v_n au droit de ces sections sont proportionnelles aux charges :

$$\frac{v_1}{q_1} = \frac{v_2}{q_2} = \dots = \frac{v_n}{q_n} = S$$

La formule (1) montre que tout système de charges propres q_i vérifie les équations linéaires et homogènes :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} q_k = S q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

Le système d'équation (5) n'a de solution non nulle que si S est un **valeur caractéristique**, racine de l'**équation caractéristique** de degré n :

$$D_n(S) = \begin{vmatrix} a_{11} - S & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - S & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - S \end{vmatrix} = 0$$

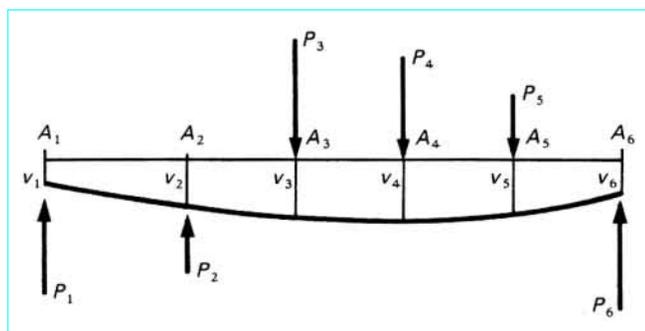


Figure 5 – Caractéristiques mécaniques d'une poutre secondaire

L'énergie de déformation W de la poutre (A) soumise aux charges P_i appliquées dans les sections B_i a pour valeur :

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i v_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} P_i P_k$$

L'équation caractéristique est donc l'équation en S de la forme quadratique définie positive $2W$. Elle a donc toutes ses racines réelles et positives ; nous désignerons par S_1, S_2, \dots, S_n ces racines rangées par ordre de grandeur décroissante :

$$S_1 > S_2 > \dots > S_r > \dots > S_n$$

La formule (2) montre que les systèmes de charges propres q_i vérifient également les équations linéaires et homogènes :

$$S \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} q_k = q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

Nous supposons les valeurs S_r **distinctes**, autrement dit que l'équation caractéristique n'a pas de racines multiples. À toute valeur caractéristique S_r correspond un système de charges propres

$q_{1r}, q_{2r}, \dots, q_{nr}$ qui sont les composantes d'un vecteur \vec{q}_r d'un espace vectoriel à n dimensions appelé **espace des charges**. Les vecteurs \vec{q}_r sont les vecteurs propres de la matrice a .

Puisque les charges propres ne sont définies qu'à un facteur près, nous pouvons choisir ce facteur de façon que la norme (ou longueur) des vecteurs \vec{q}_r soit égale à l'unité. Nous désignerons par \vec{Q}_r les **vecteurs charges propres normés** dont les composantes Q_{ir} définies par :

$$Q_{ir} = \frac{q_{ir}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n q_{ir}^2}}$$

vérifient les relations :

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} Q_{kr} = S_r Q_{ir} \quad (7)$$

$$S_r \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} Q_{kr} = Q_{ir} \quad (8)$$

On démontre que deux vecteurs charges propres normés sont tels que :

$$\vec{Q}_r \cdot \vec{Q}_s = \sum_{i=1}^n Q_{ir} Q_{is} = \begin{cases} 0 & \text{si } r \neq s \\ 1 & \text{si } r = s \end{cases} \quad (9)$$

Il en résulte que la matrice $Q = [Q_{ir}]$ est une matrice **orthogonale** ($Q^t = Q^{-1}$) et que les **vecteurs charges propres normés forment une base orthonormée de l'espace vectoriel des charges**.

Tout vecteur \vec{P} de composantes P_1, P_2, \dots, P_n peut donc s'écrire :

$$\vec{P} = \Pi_1 \vec{Q}_1 + \Pi_2 \vec{Q}_2 + \dots + \Pi_n \vec{Q}_n \quad (10)$$

les coefficients Π_r ayant pour valeurs :

$$\Pi_r = \vec{P} \cdot \vec{Q}_r = \sum_{i=1}^n P_i Q_{ir} \quad (11)$$

Nous obtenons ainsi la décomposition d'un système de charges quelconques en une somme de systèmes de charges propres.

Les flèches v_1, v_2, \dots, v_n produites par les charges P_1, P_2, \dots, P_n sont les composantes d'un vecteur \vec{v} ; la décomposition précédente montre que :

$$\vec{v} = S_1 \Pi_1 \vec{Q}_1 + S_2 \Pi_2 \vec{Q}_2 + \dots + S_n \Pi_n \vec{Q}_n$$

L'énergie de déformation W a pour valeur :

$$W = \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^n S_r \Pi_r^2$$

1.3 Méthode de calcul du réseau

1.3.1 Report des charges appliquées aux nœuds

Montrons qu'on peut supposer que les charges sont appliquées aux nœuds. Deux méthodes peuvent être employées.

1.3.1.1 Première méthode

Plaçons un appui sous chaque nœud du réseau ; les poutres (A_j) et (B_i) sont alors des poutres continues et l'on sait calculer les efforts dans ces poutres et, par suite, les réactions R_{ij} exercées par les appuis sur les nœuds N_{ij} du réseau. Pour obtenir les efforts dans le réseau sous l'effet des charges appliquées aux poutres, il suffit d'ajouter aux efforts calculés dans le réseau appuyé aux nœuds les efforts dans le réseau soumis à des charges P_{ij} opposées aux réactions R_{ij} .

1.3.1.2 Deuxième méthode

Supposons une poutre principale (A_j) seule chargée ; les réactions exercées sur cette poutre par les poutres (B_i) ne dépendent que des flèches aux nœuds N_{ij} communs à la poutre (A_j) et aux poutres (B_i). Les réactions mutuelles ne seront donc pas changées si l'on remplace les charges directement appliquées à la poutre (A_j) par des **charges équivalentes** Z'_{ij} appliquées aux nœuds N_{ij} et déterminées de la façon suivante : les charges directement appliquées et les charges équivalentes produisent les mêmes flèches aux nœuds N_{ij} de la poutre (A_j) supposée désolidarisée des poutres (B_i).

Le calcul des charges équivalentes s'effectue donc de la manière suivante :

— déterminer les flèches V_{ij} aux nœuds N_{ij} de la poutre (A_j) supposée désolidarisée des poutres (B_i) sous l'effet des charges qui lui sont appliquées ;

— calculer les charges équivalentes au moyen de la formule :

$$Z'_{ij} = \sum_{r=1}^n \alpha_{ik} V_{kj}$$

Cette méthode s'applique également aux poutres secondaires (B_i) lorsqu'elles sont susceptibles d'être considérées comme poutres principales. Une légère difficulté se présente lorsque les poutres (B_i) désolidarisées des poutres (A_j) ne sont pas stables. Pour déterminer les charges équivalentes Z''_{ij} relatives à la poutre (B_i), il faut alors procéder de la façon suivante :

— déterminer les flèches (V_{ij}) aux nœuds N_{ij} de la poutre (B_i) désolidarisée des poutres (A_j) et sur appuis simples à ses extrémités (donc $V_{i1} = 0$ et $V_{im} = 0$) sous l'effet des charges qui lui sont appliquées ;

— calculer les charges équivalentes au moyen de la formule :

$$Z''_{ij} = \sum_{h=1}^m \beta_{jh} V_{ih}$$

1.3.2 Équations d'équilibre du réseau

Supposons donc le réseau soumis à des charges concentrées P_{ij} appliquées aux nœuds N_{ij} et prenons pour inconnues les flèches v_{ij} des nœuds. Dans ces conditions la charge supportée par la poutre (A_j) aux nœuds N_{ij} est d'après la formule (2) :

$$P'_{ij} = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} v_{kj} \quad (12)$$

et la charge supportée par la poutre (B_i) au nœud N_{ij} est, d'après la formule (4) :

$$P''_{ij} = \sum_{h=1}^m \beta_{jh} v_{ih} \quad (13)$$

Les équations d'équilibre s'obtiennent en écrivant que :

$$P_{ij} = P'_{ij} + P''_{ij}$$

Nous obtenons ainsi le système de mn équations linéaires à mn inconnues :

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ik} v_{kj} + \sum_{h=1}^m \beta_{jh} v_{ih} = P_{ij} \quad \begin{cases} i = 1, 2, \dots, n \\ j = 1, 2, \dots, m \end{cases} \quad (14)$$

Remarque : l'équation (14) s'écrit sous forme matricielle :

$$\alpha v + v \beta = P$$

avec $v = [v_{ij}]$, c'est la (n, m) matrice d'éléments v_{ij} ,

$P = [P_{ij}]$, c'est la (n, m) matrice d'éléments P_{ij} ,

α matrice symétrique d'ordre n régulière,

β matrice symétrique d'ordre m régulière ou non.

1.3.3 Méthode de résolution des équations d'équilibre

Par analogie avec la théorie des plaques (article *Plaques minces élastiques* [A 310] dans le traité *Sciences fondamentales*) où l'on exprime la solution de l'équation de Lagrange sous forme d'une somme de solutions particulières qui sont le produit d'une fonction de x par une fonction de y , cherchons les solutions de l'équation (14) de la forme :

$$v_{ij} = C_i V_j$$

Portons cette expression dans l'équation (14), nous trouvons :

$$V_j \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} C_k + C_i \sum_{h=1}^m \beta_{jh} V_h = P_{ij}$$

Supposons que les coefficients C_i soient les composantes d'un vecteur propre normé \vec{Q}_r - soit $C_i = Q_{ir}$ - l'équation précédente devient, compte tenu de la relation (8) :

$$Q_{ir} \left[\frac{V_j}{S_r} + \sum_{h=1}^m \beta_{jh} V_h \right] = P_{ij}$$

Il en résulte que P_{ij} est de la forme :

$$P_{ij} = \Pi_{jr} Q_{ir}$$

Dans ces conditions la solution de l'équation (14) s'écrit :

$$v_{ij} = V_{jr} Q_{ir}$$

V_{jr} ($j = 1, 2, \dots, m$) satisfaisant au système de m équations linéaires :

$$\frac{V_{jr}}{S_r} + \sum_{h=1}^m \beta_{jh} V_{hr} = \Pi_{jr} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (15)$$

L'interprétation mécanique des équations (15) est immédiate : ce sont les équations qui permettent de calculer les flèches V_{jr} de la poutre (B) dans les sections A_j lorsque cette poutre est soumise aux charges Π_{jr} appliquées aux sections A_j et qu'elle repose en A_1, A_2, \dots, A_m sur des **appuis élastiques identiques** ayant pour coefficient d'élasticité $1/S_r$. En effet, les deux termes du premier membre de l'équation (15) représentent, le premier la réaction des appuis élastiques, le second les charges nécessaires pour maintenir les flèches V_{jr} ; la somme de ces deux termes est égale aux charges appliquées.

Il résulte des considérations précédentes que la méthode de résolution des équations (14) est la suivante :

— décomposer les charges P_{ij} appliquées aux nœuds en somme de charges propres de la poutre (A) :

$$P_{ij} = \sum_{r=1}^n \Pi_{jr} Q_{ir} \quad (16)$$

les coefficients Π_{jr} ont pour valeurs, d'après la formule (11) :

$$\Pi_{jr} = \sum_{i=1}^n P_{ij} Q_{ir} \quad (17)$$

— étudier pour chaque valeur S_r la poutre (B) sur appuis élastiques A_1, A_2, \dots, A_m de coefficients d'élasticité $1/S_r$ soumise aux charges Π_{jr} ; on peut, pour calculer les flèches V_{jr} , résoudre l'équation (15) en utilisant les méthodes d'approximations successives données dans le paragraphe 1.4 ; la solution de l'équation (14) a alors pour expression :

$$V_{ij} = \sum_{r=1}^n V_{jr} Q_{ir} \quad (18)$$

Connaissant les flèches aux nœuds du réseau, les formules (12) et (13) donnent les parts P'_{ij} et P''_{ij} des charges supportées par les poutres (A_j) et (B_i) ; nous savons donc calculer les efforts dans ces poutres puisque toutes les forces qui leur sont appliquées sont connues.

On notera que plus S_r est petit, plus les appuis sont raides ; donc, en général, les valeurs V_{jr} décroîtront en valeur absolue et même assez vite à mesure que r croîtra.

■ Remarque sur le calcul des réactions mutuelles

Nous avons :

$$P_{ij} = Z'_{ij} + Z''_{ij} = P'_{ij} + P''_{ij}$$

La réaction R'_{ij} exercée au nœud N_{ij} par la poutre (B_i) sur la poutre (A_j) et la réaction R''_{ij} exercée au nœud N_{ij} par la poutre (A_j) sur la poutre (B_i) ont pour valeurs :

$$R'_{ij} = Z'_{ij} - P'_{ij} \quad \text{et} \quad R''_{ij} = Z''_{ij} - P''_{ij}$$

On vérifie bien que l'on a :

$$R'_{ij} + R''_{ij} = 0$$

1.3.4 Généralisation

Supposons que les poutres (A_j) et (B_i) soient à lois d'inertie proportionnelles, ce qui signifie que la loi d'inertie de la poutre (A_j) est λ_j fois la loi d'inertie de la poutre (A), et que la loi d'inertie de la poutre (B_i) est μ_i fois la loi d'inertie de la poutre (B). Les formules (12) et (13) deviennent dans ce cas :

$$P'_{ij} = \lambda_j \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} V_{kj} \quad \text{et} \quad P''_{ij} = \mu_i \sum_{h=1}^m \beta_{jh} V_{ih}$$

et les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\lambda_j \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} V_{kj} + \mu_i \sum_{h=1}^m \beta_{jh} V_{ih} = P_{ij} \quad (19)$$

Pour résoudre les équations (19), on décompose les charges P_{ij} en somme de charges propres de la poutre (A) selon la formule (17). La solution des équations (19) est encore représentée par la formule (18) dans laquelle les coefficients V_{jr} vérifient les équations :

$$\lambda_j \frac{V_{jr}}{S_r} + \mu_i \sum_{h=1}^m \beta_{jh} V_{hr} = \Pi_{jr} \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (20)$$

Les coefficients V_{jr} sont donc les flèches de la poutre (B_i), dont l'inertie est μ_i fois celle de la poutre (B), soumise aux charges Π_{jr} appliquées aux nœuds N_{ij} et reposant en ces nœuds sur des appuis élastiques de coefficients d'élasticité λ_j/S_r .

1.4 Calcul d'une poutre sur appuis élastiques par approximations successives

1.4.1 Généralités

Les méthodes d'approximations successives présentent, sur la méthode qui consiste à employer la relation des cinq moments, l'avantage d'une plus grande rapidité et aussi celui d'une plus grande souplesse. Elles peuvent s'appliquer facilement au calcul des poutres reposant sur des appuis d'élasticités différentes et des appuis fixes. Elles permettent également de traiter le cas des poutres soumises à des charges quelconques.

Deux méthodes peuvent être utilisées selon que l'on parte de la matrice $[a_{ik}]$ ou de la matrice $[\alpha_{ik}]$.

1.4.2 Utilisation de la matrice $[a_{ik}]$

La méthode fondée sur l'utilisation de la matrice $[a_{ik}]$ ne peut être employée que pour une poutre qui reste stable si l'on supprime les appuis élastiques.

Soit donc une poutre reposant sur des appuis fixes en nombre suffisant et sur n appuis élastiques A_1, A_2, \dots, A_n . La réaction exercée par l'appui A_j est proportionnelle à l'abaissement v_j de l'appui :

$$v_j = S_j R_j \quad (21)$$

Cette poutre étant soumise à un système de charges quelconques (F), appelons v'_1, v'_2, \dots, v'_n les flèches produites par (F) en A_1, A_2, \dots, A_n . Les flèches v_j de la poutre sur appuis élastiques ont pour expression :

$$v_j = v'_j - \sum_{k=1}^n a_{jk} R_k$$

Nous déduisons des deux relations précédentes un système de n équations linéaires que l'on peut mettre sous la forme :

$$(S_j + a_{jj}) R_j = v'_j - \sum_{k \neq j} a_{jk} R_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (22)$$

Ce système peut être résolu par la méthode d'approximations successives de Gauss-Seidel : la réaction R_i étant isolée au premier membre de l'équation de rang i , on porte dans le second membre de l'équation un système de valeurs approchées des inconnues R_j et l'on en déduit un système de valeurs plus approchées ; on gagne du temps en modifiant le système de valeurs approchées après chaque équation.

La convergence est d'autant plus rapide que le coefficient de la réaction isolée au premier membre est plus grand ; la méthode converge donc rapidement lorsque les appuis élastiques sont souples (S_i grand).

1.4.3 Utilisation de la matrice $[\alpha_{ik}]$

Cette méthode peut être employée que la poutre comporte ou non des appuis fixes puisque la matrice α est toujours définie. En revanche, la méthode ne peut être appliquée commodément qu'aux poutres supportant des charges concentrées au droit des appuis élastiques. Dans le cas de charges quelconques, il faut déterminer les charges équivalentes comme il a été indiqué dans le paragraphe 1.3.1.2.

Soit donc une poutre reposant sur n appuis élastiques A_i de coefficients d'élasticité S_i soumise à des charges P_i appliquées au droit des appuis élastiques. La charge totale appliquée à la poutre dans la section A_i est $P_i - R_i$, donc :

$$P_i - R_i = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} v_k$$

v_i désignant la flèche au droit de l'appui A_i . En tenant compte de la relation (21), nous obtenons pour calculer les réactions R_i un système de n équations linéaires que l'on peut mettre sous la forme :

$$R_i (1 + \alpha_{ii} S_i) = P_i - \sum_{k \neq i} \alpha_{ik} S_k R_k \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

Ce système se résout par la méthode d'approximations successives de Gauss-Seidel, de la même façon que le système (22).

Les coefficients d'élasticité S_i figurent dans tous les coefficients des inconnues au second membre des équations. La convergence est d'autant plus rapide que les coefficients d'élasticité S_i sont plus faibles, donc que les appuis élastiques sont plus raides.

1.4.4 Exemples numériques

Soit à calculer la poutre représentée sur la figure 6 comportant quatre travées de même longueur ℓ et d'inertie constante I . Les appuis extrêmes sont fixes et les appuis intermédiaires ont le même coefficient d'élasticité. La poutre supporte une charge P au droit de l'appui A_1 .

1.4.4.1 Premier cas

Supposons l'élasticité des appuis faible et définie par :

$$v_i = 0,1 \frac{R_i}{K} \quad \text{avec} \quad K = \frac{6EI}{\ell^3}$$

Les appuis étant raides, utilisons la matrice $[\alpha_{ik}]$. Les formules données dans le paragraphe 2.1.3.2 conduisent immédiatement au système :

$$\begin{cases} -56R_0 = -3,4R_1 + 2,4R_2 - 0,6R_3 \\ 56P - 56R_1 = 9,2R_1 - 8,8R_2 + 3,6R_3 \\ -56R_2 = -8,8R_1 + 12,8R_2 - 8,8R_3 \\ -56R_3 = 3,6R_1 - 8,8R_2 + 9,2R_3 \\ -56R_4 = -0,6R_1 + 2,4R_2 - 3,4R_3 \end{cases}$$

R_0 et R_4 n'interviennent que dans la première et la dernière équations ; R_1, R_2 et R_3 sont donnés par les équations, écrites sous la forme (23) :

$$\begin{cases} 65,2R_1 = 56P + 8,8R_2 - 3,6R_3 \\ 68,8R_2 = 8,8R_1 + 8,8R_3 \\ 65,2R_3 = -3,6R_1 + 8,8R_2 \end{cases}$$

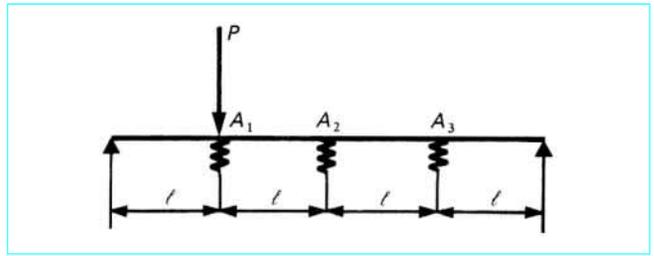


Figure 6 - Poutre à quatre travées sur appuis élastiques

Le tableau ci-après montre qu'il faut cinq approximations pour obtenir les résultats avec six chiffres significatifs :

	R_1/P	R_2/P	R_3/P
1 ^{re} approximation	0,858 896	0,109 859	- 0,032 596
2 ^e approximation	0,875 723	0,107 816	- 0,033 790
3 ^e approximation	0,875 313	0,107 637	- 0,033 803
4 ^e approximation	0,875 290	0,107 632	- 0,033 802
5 ^e approximation	0,875 289	0,107 632	- 0,033 802

Nous trouvons ensuite :

$$R_0 = 0,048 168 P \quad \text{et} \quad R_4 = 0,002 713 P$$

1.4.4.2 Deuxième cas

Supposons l'élasticité des appuis forte et définie par :

$$v_i = 10 \frac{R_i}{K} \quad \text{avec} \quad K = \frac{6EI}{\ell^3}$$

Les appuis étant souples, utilisons la matrice $[a_{ik}]$. La poutre étant soumise aux charges $P - R_1, -R_2$ et $-R_3$, les formules données dans le paragraphe 2.1.1 conduisent immédiatement aux équations écrites sous la forme (22) :

$$\begin{cases} 29R_1 = 9P - 11R_2 - 7R_3 \\ 36R_2 = 11P - 11R_1 - 11R_3 \\ 29R_3 = 7P - 7R_1 - 11R_2 \end{cases}$$

Le tableau ci-après donne les approximations nécessaires pour obtenir les résultats avec six chiffres significatifs :

	R_1/P	R_2/P	R_3/P
1 ^{re} approximation	0,313 345	0,210 728	0,086 537
2 ^e approximation	0,209 525	0,215 092	0,109 218
3 ^e approximation	0,202 395	0,210 340	0,112 741
4 ^e approximation	0,203 347	0,208 973	0,113 030
5 ^e approximation	0,203 796	0,208 748	0,113 007
6 ^e approximation	0,203 887	0,208 727	0,112 993
7 ^e approximation	0,203 898	0,208 728	0,112 990
8 ^e approximation	0,203 899	0,208 728	0,112 989
9 ^e approximation	0,203 899	0,208 729	0,112 989

Les équations de la statique donnent ensuite les réactions extrêmes :

$$R_0 = 0,464 464 P \quad \text{et} \quad R_4 = 0,009 919 P$$

2. Réseaux réguliers de poutres de section constante

Un réseau **régulier** est un réseau dont les poutres principales et les poutres secondaires sont également espacées.

2.1 Poutres principales simplement appuyées

2.1.1 Calcul des flèches en fonction des charges

La poutre (A) de portée $(n + 1) \ell$ et d'inertie I est soumise aux charges P_1, P_2, \dots, P_n dans les sections B_1, B_2, \dots, B_n espacées de ℓ (figure 7). En posant :

$$K = \frac{6EI}{\ell^3} \tag{24}$$

les formules qui donnent les flèches d'une poutre sur appuis simples soumise à une charge concentrée montre que l'élément a_{ik} de la matrice a a pour expression :

$$a_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{K} \frac{i(n+1-k)}{n+1} [k(2n-k+2) - i^2] & \text{lorsque } i \leq k \\ \frac{1}{K} \frac{k(n+1-i)}{n+1} [i(2n-i+2) - k^2] & \text{lorsque } i \geq k \end{cases} \tag{25}$$

Voici pour les premières valeurs de n les formules permettant de calculer les flèches en fonction des charges.

$n = 1 :$

$$Kv_1 = P_1$$

$n = 2 :$

$$\begin{cases} 3Kv_1 = 8P_1 + 7P_2 \\ 3Kv_2 = 7P_1 + 8P_2 \end{cases}$$

$n = 3 :$

$$\begin{cases} 2Kv_1 = 9P_1 + 11P_2 + 7P_3 \\ 2Kv_2 = 11P_1 + 16P_2 + 11P_3 \\ 2Kv_3 = 7P_1 + 11P_2 + 9P_3 \end{cases}$$

$n = 4 :$

$$\begin{cases} 5Kv_1 = 32P_1 + 45P_2 + 40P_3 + 23P_4 \\ 5Kv_2 = 45P_1 + 72P_2 + 68P_3 + 40P_4 \\ 5Kv_3 = 40P_1 + 68P_2 + 72P_3 + 45P_4 \\ 5Kv_4 = 23P_1 + 40P_2 + 45P_3 + 32P_4 \end{cases}$$

$n = 5 :$

$$\begin{cases} 3Kv_1 = 25P_1 + 38P_2 + 39P_3 + 31P_4 + 17P_5 \\ 3Kv_2 = 38P_1 + 64P_2 + 69P_3 + 56P_4 + 31P_5 \\ 3Kv_3 = 39P_1 + 69P_2 + 81P_3 + 69P_4 + 39P_5 \\ 3Kv_4 = 31P_1 + 56P_2 + 69P_3 + 64P_4 + 38P_5 \\ 3Kv_5 = 17P_1 + 31P_2 + 39P_3 + 38P_4 + 25P_5 \end{cases}$$

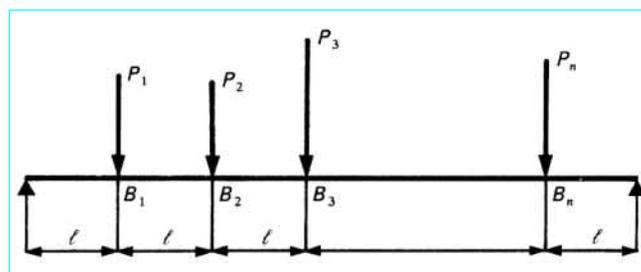


Figure 7 – Poutre principale simplement appuyée

$n = 6 :$

$$\begin{cases} 7Kv_1 = 72P_1 + 115P_2 + 128P_3 + 117P_4 + 88P_5 + 47P_6 \\ 7Kv_2 = 115P_1 + 200P_2 + 232P_3 + 216P_4 + 164P_5 + 88P_6 \\ 7Kv_3 = 128P_1 + 232P_2 + 288P_3 + 279P_4 + 216P_5 + 117P_6 \\ 7Kv_4 = 117P_1 + 216P_2 + 279P_3 + 288P_4 + 232P_5 + 128P_6 \\ 7Kv_5 = 88P_1 + 164P_2 + 216P_3 + 232P_4 + 200P_5 + 115P_6 \\ 7Kv_6 = 47P_1 + 88P_2 + 117P_3 + 128P_4 + 115P_5 + 72P_6 \end{cases}$$

2.1.2 Charges propres des poutres principales

Les charges propres sont données par le théorème suivant dont on trouvera la démonstration en [1] [2].

Les vecteurs charges propres normés \vec{Q}_r ont pour composantes :

$$Q_{ir} = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin \frac{ir\pi}{n+1} \tag{26}$$

et la valeur caractéristique S_r associée au vecteur \vec{Q}_r est :

$$S_r = \frac{1}{K} \frac{2 + \cos \frac{r\pi}{n+1}}{2 \left(1 - \cos \frac{r\pi}{n+1}\right)^2} \tag{27}$$

En laissant de côté le cas trivial $n = 1$, les tableaux ci-après donnent, pour les premières valeurs de n , les composantes des vecteurs propres normés \vec{Q}_r et les valeurs caractéristiques correspondantes.

$n = 2 :$

	$i = 1$	$i = 2$	KS_r
\vec{Q}_1	0,707 107	0,707 107	5
\vec{Q}_2	-0,707 107	-0,707 107	1/3

$n = 3 :$

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	KS_r
\vec{Q}_1	0,5	0,707 107	0,5	15,778 175
\vec{Q}_2	0,707 107	0	-0,707 107	1
\vec{Q}_3	0,5	-0,707 107	0,5	0,221 825

$n = 4 :$

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	KS_r
\vec{Q}_1	0,371 748	0,601 501	0,601 501	0,371 748	38,506 578
\vec{Q}_2	0,601 501	0,371 748	-0,371 748	-0,601 501	2,418 034
\vec{Q}_3	0,601 501	-0,371 748	-0,371 748	0,601 501	0,493 422
\vec{Q}_4	0,371 748	-0,601 501	0,601 501	-0,371 748	0,181 966

$n = 5 :$

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	KS_r
\vec{Q}_1	0,288 675	0,5	0,577 350	0,5	0,288 675	79,837 169
\vec{Q}_2	0,5	0,5	0	-0,5	-0,5	5
\vec{Q}_3	0,577 350	0	-0,577 350	0	0,577 350	1
\vec{Q}_4	0,5	-0,5	0	0,5	-0,5	1/3
\vec{Q}_5	0,288 675	-0,5	0,577 350	-0,5	0,288 675	0,162 831

$n = 6 :$

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$
\vec{Q}_1	0,231 921	0,417 907	0,521 121	0,521 121
\vec{Q}_2	0,417 907	0,521 121	0,231 921	-0,231 921
\vec{Q}_3	0,521 121	0,231 921	-0,417 907	-0,417 907
\vec{Q}_4	0,521 121	-0,231 921	-0,417 907	0,417 907
\vec{Q}_5	0,417 907	-0,521 121	0,231 921	0,231 921
\vec{Q}_6	0,231 921	-0,417 907	0,521 121	-0,521 121

	$i = 5$	$i = 6$	KS_r
\vec{Q}_1	0,417 907	0,231 921	147,900 481
\vec{Q}_2	-0,521 121	-0,417 907	9,253 284
\vec{Q}_3	0,231 921	0,521 121	1,838 393
\vec{Q}_4	0,231 921	-0,521 121	0,594 651
\vec{Q}_5	-0,521 121	0,417 907	0,261 126
\vec{Q}_6	0,417 907	-0,231 921	0,152 065

2.1.3 Calcul des charges en fonction des flèches

2.1.3.1 Méthode de calcul

Pour calculer les coefficients α_{ik} on pourrait résoudre les équations qui donnent les flèches v_i en fonction des charges P_j . Mais cette méthode est pénible et a l'inconvénient de ne pas tenir compte des flèches v_0 et v_{n+1} des extrémités de la poutre qui interviennent dans le calcul des coefficients β_{jh} relatifs à la poutre (B) libre. Pour trouver des formules générales nous utiliserons la méthode de calcul des dénivellations d'appuis d'une poutre continue (article *Structures élastiques à plan moyen* [C 2 015], dans le présent traité).

Considérons donc la poutre de la figure 7 comme une poutre continue à $n + 1$ travées égales de portée ℓ . Soient φ_i et φ'_i les rapports focaux relatifs à la i^e travée $B_{i-1} B_i$ et b le coefficient de souplesse :

$$b = \frac{\ell}{6EI} = \frac{1}{K\ell^2}$$

Supposons d'abord qu'un seul appui intermédiaire B_i subisse une dénivellation v_i comptée positivement vers le bas ; seules les travées contiguës à l'appui B_i subissent des rotations d'ensemble :

$$\Omega_i = -\frac{v_i}{\ell} \quad \Omega_{i+1} = \frac{v_i}{\ell}$$

La théorie des dénivellations d'appui nous donne immédiatement les valeurs des moments sur les appuis B_{i-1} , B_i et B_{i+1} :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{i-1} = -\frac{v_i}{b\ell} \left[\frac{\frac{1}{\varphi'_i} + 1}{\frac{1}{\varphi_i \varphi'_i} - 1} + \frac{\frac{1}{\varphi'_{i+1}} + 1}{\frac{1}{\varphi_{i+1} \varphi'_{i+1}} - 1} \varphi_i \right] \\ M_i = \frac{v_i}{b\ell} \left[\frac{\frac{1}{\varphi_i} + 1}{\frac{1}{\varphi_i \varphi'_i} - 1} + \frac{\frac{1}{\varphi'_{i+1}} + 1}{\frac{1}{\varphi_{i+1} \varphi'_{i+1}} - 1} \right] \\ M_{i+1} = -\frac{v_i}{b\ell} \left[\frac{\frac{1}{\varphi_i} + 1}{\frac{1}{\varphi_i \varphi'_i} - 1} \varphi'_{i+1} + \frac{\frac{1}{\varphi'_{i+1}} + 1}{\frac{1}{\varphi_{i+1} \varphi'_{i+1}} - 1} \right] \end{array} \right.$$

En tenant compte de ce que $b = 1/(K\ell^2)$ et des relations de récurrence entre les rapports focaux :

$$\frac{1}{\varphi_{i+1}} = 4 - \varphi_i \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varphi'_i} = 4 - \varphi'_{i+1}$$

un calcul facile permet de mettre les formules précédentes sous la forme :

$$\left. \begin{array}{l} M_{i-1} = -K\ell v_i \frac{6\varphi_i}{4 - (\varphi_i + \varphi'_{i+1})} \\ M_i = K\ell v_i \frac{2 + (\varphi_i + \varphi'_{i+1})}{4 - (\varphi_i + \varphi'_{i+1})} \\ M_{i+1} = -K\ell v_i \frac{6\varphi'_{i+1}}{4 - (\varphi_i + \varphi'_{i+1})} \end{array} \right\} \quad (28)$$

Les moments sur les autres appuis ont pour valeurs :

$$\left. \begin{array}{l} M_{i-2} = -\varphi_{i-1} M_{i-1} \quad M_{i-3} = -\varphi_{i-2} M_{i-2} \quad \text{etc.} \\ M_{i+2} = -\varphi'_{i+2} M_{i+1} \quad M_{i+3} = -\varphi'_{i+3} M_{i+2} \quad \text{etc.} \end{array} \right\} \quad (29)$$

Les charges P_k appliquées à la poutre sont égales aux réactions d'appui de la poutre continue ; comme nous comptons les charges positivement vers le bas, nous obtenons :

$$P_k = \frac{2M_k - (M_{k-1} + M_{k+1})}{\ell} \quad (30)$$

soit, compte tenu des formules (28) et (29) :

$$\left. \begin{aligned} P_{i-1} &= -Kv_i \frac{37\varphi_i + \varphi'_{i+1} - 4}{4 - (\varphi_i + \varphi'_{i+1})} \\ P_i &= 4Kv_i \frac{1 + 2(\varphi_i + \varphi'_{i+1})}{4 - (\varphi_i + \varphi'_{i+1})} \\ P_{i+1} &= -Kv_i \frac{37\varphi'_{i+1} + \varphi_i - 4}{4 - (\varphi_i + \varphi'_{i+1})} \\ P_k &= \frac{6M_k}{\ell} \text{ pour } k > i + 1 \text{ et } k < i - 1 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Examinons le cas où un appui extrême est dénivellé ; supposons, par exemple, que l'appui de gauche soit abaissé de v_0 , nous trouvons :

$$M_0 = 0 \quad M_1 = -K\ell v_0 \varphi'_1 \quad M_2 = -\varphi'_2 M_1 \quad \text{etc.} \quad (32)$$

puis, toujours en utilisant la formule (30) :

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= Kv_0 \varphi'_1 \quad P_1 = -Kv_0(6\varphi'_1 - 1) \\ P_k &= \frac{6M_k}{\ell} \text{ pour } k > 1 \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

2.1.3.2 Résultats numériques

Nous indiquons, pour les premières valeurs de n , les formules donnant les valeurs des moments M_i et des charges P_i en fonction des flèches v_i . Ces formules s'obtiennent au moyen des relations (29), (30), (31), (32) et (33) et des rapports focaux :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi'_{n+1} = 0, \quad \varphi_2 = \varphi'_n = \frac{1}{4}, \quad \varphi_3 = \varphi'_{n-1} = \frac{4}{15} \\ \varphi_4 &= \varphi'_{n-2} = \frac{15}{56}, \quad \varphi_5 = \varphi'_{n-3} = \frac{56}{209}, \quad \varphi_6 = \varphi'_{n-4} = \frac{209}{780} \\ \varphi_7 &= \varphi'_{n-5} = \frac{780}{2911} \end{aligned}$$

$n = 1$ (deux travées) :

$$\begin{aligned} 4M_1 &= K\ell(-v_0 + 2v_1 - v_2) \\ 4P_0 &= K(v_0 - 2v_1 + v_2) \\ 4P_1 &= K(-2v_0 + 4v_1 - 2v_2) \\ 4P_2 &= K(v_0 - 2v_1 + v_2) \end{aligned}$$

$n = 2$ (trois travées) :

$$\begin{aligned} 15M_1 &= K\ell(-4v_0 + 9v_1 - 6v_2 + v_3) \\ 15M_2 &= K\ell(v_0 - 6v_1 + 9v_2 - 4v_3) \\ 15P_0 &= K(4v_0 - 9v_1 + 6v_2 - v_3) \\ 15P_1 &= K(-9v_0 + 24v_1 - 21v_2 + 6v_3) \\ 15P_2 &= K(6v_0 - 21v_1 + 24v_2 - 9v_3) \\ 15P_3 &= K(-v_0 + 6v_1 - 9v_2 + 4v_3) \end{aligned}$$

$n = 3$ (quatre travées) :

$$\begin{aligned} 56M_1 &= K\ell(-15v_0 + 34v_1 - 24v_2 + 6v_3 - v_4) \\ 56M_2 &= K\ell(4v_0 - 24v_1 + 40v_2 - 24v_3 + 4v_4) \\ 56M_3 &= K\ell(-v_0 + 6v_1 - 24v_2 + 34v_3 - 15v_4) \\ 56P_0 &= K(15v_0 - 34v_1 + 24v_2 - 6v_3 + v_4) \\ 56P_1 &= K(-34v_0 + 92v_1 - 88v_2 + 36v_3 - 6v_4) \\ 56P_2 &= K(24v_0 - 88v_1 + 128v_2 - 88v_3 + 24v_4) \\ 56P_3 &= K(-6v_0 + 36v_1 - 88v_2 + 92v_3 - 34v_4) \\ 56P_4 &= K(v_0 - 6v_1 + 24v_2 - 34v_3 + 15v_4) \end{aligned}$$

$n = 4$ (cinq travées) :

$$\begin{aligned} 209M_1 &= K\ell(-56v_0 + 127v_1 - 90v_2 + 24v_3 - 6v_4 + v_5) \\ 209M_2 &= K\ell(15v_0 - 90v_1 + 151v_2 - 96v_3 + 24v_4 - 4v_5) \\ 209M_3 &= K\ell(-4v_0 + 24v_1 - 96v_2 + 151v_3 - 90v_4 + 15v_5) \\ 209M_4 &= K\ell(v_0 - 6v_1 + 24v_2 - 90v_3 + 127v_4 - 56v_5) \\ 209P_0 &= K(56v_0 - 127v_1 + 90v_2 - 24v_3 + 6v_4 - v_5) \\ 209P_1 &= K(-127v_0 + 344v_1 - 331v_2 + 144v_3 - 36v_4 + 6v_5) \\ 209P_2 &= K(90v_0 - 331v_1 + 488v_2 - 367v_3 + 144v_4 - 24v_5) \\ 209P_3 &= K(-24v_0 + 144v_1 - 367v_2 + 488v_3 - 331v_4 + 90v_5) \\ 209P_4 &= K(6v_0 - 36v_1 + 144v_2 - 331v_3 + 344v_4 - 127v_5) \\ 209P_5 &= K(-v_0 + 6v_1 - 24v_2 + 90v_3 - 127v_4 + 56v_5) \end{aligned}$$

$n = 5$ (six travées) :

$$\begin{aligned} 780M_1 &= K\ell(-209v_0 + 474v_1 - 336v_2 + 90v_3 - 24v_4 + 6v_5 - v_6) \\ 780M_2 &= K\ell(56v_0 - 336v_1 + 564v_2 - 360v_3 + 96v_4 - 24v_5 + 4v_6) \\ 780M_3 &= K\ell(-15v_0 + 90v_1 - 360v_2 + 570v_3 - 360v_4 + 90v_5 - 15v_6) \\ 780M_4 &= K\ell(4v_0 - 24v_1 + 96v_2 - 360v_3 + 564v_4 - 336v_5 + 56v_6) \\ 780M_5 &= K\ell(-v_0 + 6v_1 - 24v_2 + 90v_3 - 336v_4 + 474v_5 - 209v_6) \\ 780P_0 &= K(209v_0 - 474v_1 + 336v_2 - 90v_3 + 24v_4 - 6v_5 + v_6) \\ 780P_1 &= K(-474v_0 + 1284v_1 - 1236v_2 + 540v_3 - 144v_4 + 36v_5 - 6v_6) \\ 780P_2 &= K(336v_0 - 1236v_1 + 1824v_2 - 1380v_3 + 576v_4 - 144v_5 + 24v_6) \\ 780P_3 &= K(-90v_0 + 540v_1 - 1380v_2 + 1860v_3 - 1380v_4 + 540v_5 - 90v_6) \\ 780P_4 &= K(24v_0 - 144v_1 + 576v_2 - 1380v_3 + 1824v_4 - 1236v_5 + 336v_6) \\ 780P_5 &= K(-6v_0 + 36v_1 - 144v_2 + 540v_3 - 1236v_4 + 1284v_5 - 474v_6) \\ 780P_6 &= K(v_0 - 6v_1 + 24v_2 - 90v_3 + 336v_4 - 474v_5 + 209v_6) \end{aligned}$$

$n = 6$ (sept travées) :

$$\begin{aligned}
 2911M_1 &= K\ell(-780v_0 + 1769v_1 - 1254v_2 + 336v_3 - 90v_4 + 24v_5 - 6v_6 + v_7) \\
 2911M_2 &= K\ell(209v_0 - 1254v_1 + 2105v_2 - 1344v_3 + 360v_4 - 96v_5 + 24v_6 - 4v_7) \\
 2911M_3 &= K\ell(-56v_0 + 336v_1 - 1344v_2 + 2129v_3 - 1350v_4 + 360v_5 - 90v_6 + 15v_7) \\
 2911M_4 &= K\ell(15v_0 - 90v_1 + 360v_2 - 1350v_3 + 2129v_4 - 1344v_5 + 336v_6 - 56v_7) \\
 2911M_5 &= K\ell(-4v_0 + 24v_1 - 96v_2 + 360v_3 - 1344v_4 + 2105v_5 - 1254v_6 + 209v_7) \\
 2911M_6 &= K\ell(v_0 - 6v_1 + 24v_2 - 90v_3 + 336v_4 - 1254v_5 + 1769v_6 - 780v_7) \\
 2911P_0 &= K(780v_0 - 1769v_1 + 1254v_2 - 336v_3 + 90v_4 - 24v_5 + 6v_6 - v_7) \\
 2911P_1 &= K(-1769v_0 + 4792v_1 - 4613v_2 + 2016v_3 - 540v_4 + 144v_5 - 36v_6 + 6v_7) \\
 2911P_2 &= K(1254v_0 - 4613v_1 + 6808v_2 - 5153v_3 + 2160v_4 - 576v_5 + 144v_6 - 24v_7) \\
 2911P_3 &= K(-336v_0 + 2016v_1 - 5153v_2 + 6952v_3 - 5189v_4 + 2160v_5 - 540v_6 + 90v_7) \\
 2911P_4 &= K(90v_0 - 540v_1 + 2160v_2 - 5189v_3 + 6952v_4 - 5153v_5 + 2016v_6 - 336v_7) \\
 2911P_5 &= K(-24v_0 + 144v_1 - 576v_2 + 2160v_3 - 5153v_4 + 6808v_5 - 4613v_6 + 1254v_7) \\
 2911P_6 &= K(6v_0 - 36v_1 + 144v_2 - 540v_3 + 2016v_4 - 4613v_5 + 4792v_6 - 1769v_7) \\
 2911P_7 &= K(-v_0 + 6v_1 - 24v_2 + 90v_3 - 336v_4 + 1254v_5 - 1769v_6 + 780v_7)
 \end{aligned}$$

2.1.3.3 Cas d'un nombre infini de travées identiques

Dans ce cas, tous les rapports focaux φ_i et φ'_i sont égaux à $\varphi = 2 - \sqrt{3}$. Ce cas se rencontre dans l'étude du réseau de la figure 3. On obtient facilement, à partir des formules données au paragraphe 2.1.3.1, les résultats suivants.

Lorsque l'appui i est abaissé de v_i les moments sur appuis ont pour valeurs :

$$\left. \begin{aligned}
 M_i &= K\ell v_i(1 - \varphi) \quad \text{et} \quad M_{i-1} = M_{i+1} = -K\ell v_i(1 - 2\varphi) \\
 M_{i-1-k} &= M_{i+1+k} = (-1)^k \varphi^k M_{i+1}
 \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

et les charges ont pour valeurs :

$$\left. \begin{aligned}
 P_i &= 2K v_i(2 - 3\varphi) \quad \text{et} \quad P_{i-1} = P_{i+1} = -K v_i(5 - 12\varphi) \\
 P_{i-1-k} &= P_{i+1+k} = (-1)^k \varphi^k \frac{6M_{i+1}}{\ell} = \frac{6M_{i+1+k}}{\ell}
 \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

Le tableau suivant donne les moments et les charges correspondant à $v_i = 1$.

Appui	$M_{i \pm k} / K\ell$	$P_{i \pm k} / K$
i	0,732 051	2,392 305
$i \pm 1$	-0,464 142	-1,784 610
$i \pm 2$	0,124 356	0,746 734
$i \pm 3$	-0,033 321	-0,199 926
$i \pm 4$	0,008 928	0,053 570
$i \pm 5$	-0,002 392	-0,014 354
$i \pm 6$	0,000 641	0,003 846
$i \pm 7$	-0,000 172	-0,001 031
$i \pm 8$	0,000 046	0,000 276
$i \pm 9$	-0,000 012	-0,000 074
$i \pm 10$	0,000 003	0,000 020

2.2 Poutres principales encastées

2.2.1 Calcul des flèches en fonction des charges

Supposons la poutre (A) encastée à ses extrémités (figure 8). Soit ℓ l'espacement des poutres (B) ; la portée de la poutre (A) d'inertie constante I est $(n + 1)\ell$. En définissant toujours K par la formule (24), les formules qui donnent les flèches d'une poutre encastée soumise à une charge concentrée montrent que l'élément a_{ik} de la matrice a a pour expression :

$$a_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{K} \frac{i^2(n+1-k)^2}{(n+1)^3} [(3k-i)(n+1)-2ik] \text{ lorsque } i \leq k \\ \frac{1}{K} \frac{k^2(n+1-i)^2}{(n+1)^3} [(3i-k)(n+1)-2ik] \text{ lorsque } i \geq k \end{cases} \quad (36)$$

Nous donnons ci-après les expressions des flèches en fonction des charges pour les premières valeurs de n .

$n = 1 :$ $4Kv_1 = P_1$

$n = 2 :$ $\begin{cases} 27Kv_1 = 16P_1 + 11P_2 \\ 27Kv_2 = 11P_1 + 16P_2 \end{cases}$

$n = 3 :$ $\begin{cases} 32Kv_1 = 27P_1 + 32P_2 + 13P_3 \\ 32Kv_2 = 32P_1 + 64P_2 + 32P_3 \\ 32Kv_3 = 13P_1 + 32P_2 + 27P_3 \end{cases}$

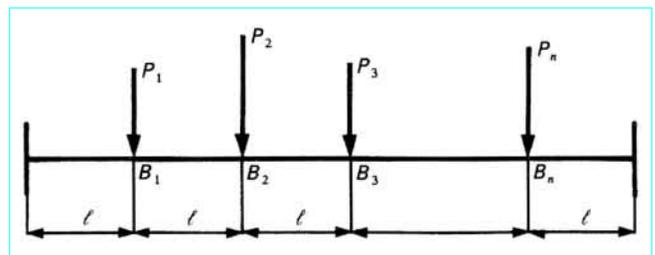


Figure 8 - Poutre principale encastée

$n = 4 :$

$$\begin{cases} 125Kv_1 = 128P_1 + 189P_2 + 136P_3 + 47P_4 \\ 125Kv_2 = 189P_1 + 432P_2 + 368P_3 + 136P_4 \\ 125Kv_3 = 136P_1 + 368P_2 + 432P_3 + 189P_4 \\ 125Kv_4 = 47P_1 + 136P_2 + 189P_3 + 128P_4 \end{cases}$$

2.2.2 Charges propres des poutres principales

Il n'existe pas, pour la poutre encadrée, d'expressions simples des charges propres comme dans le cas de la poutre sur appuis simples. Il faut donc résoudre l'équation caractéristique, en bénéficiant seulement du fait que les systèmes de charges propres sont soit symétriques, soit antisymétriques.

En laissant de côté le cas trivial $n = 1$, les tableaux suivants donnent, pour les premières valeurs de n , les composantes de vecteurs normés \vec{Q}_r et les valeurs caractéristiques correspondantes.

 $n = 2 :$

$$KS_1 = 1, \quad KS_2 = \frac{5}{27}$$

	$i = 1$	$i = 2$	KS_r
\vec{Q}_1	0,707 107	0,707 107	1
\vec{Q}_2	0,707 107	-0,707 107	0,185 185

 $n = 3 :$

$$KS_1 = \frac{13 + \sqrt{137}}{8}, \quad KS_2 = \frac{7}{16}, \quad KS_3 = \frac{13 - \sqrt{137}}{8}$$

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	KS_r
\vec{Q}_1	0,431 188	0,792 561	0,431 188	3,088 087
\vec{Q}_2	0,707 107	0	-0,707 107	0,437 500
\vec{Q}_3	0,560 426	-0,609 792	0,560 426	0,161 913

 $n = 4 :$

$$KS_1 = \frac{39 + \sqrt{1301}}{10}, \quad KS_2 = \frac{29 + \sqrt{461}}{50}$$

$$KS_3 = \frac{39 - \sqrt{1301}}{10}, \quad KS_4 = \frac{29 - \sqrt{461}}{50}$$

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	KS_r
\vec{Q}_1	0,276 989	0,650 598	0,650 598	0,276 989	7,506 938
\vec{Q}_2	0,538 134	0,458 706	-0,458 706	-0,538 134	1,009 418
\vec{Q}_3	0,650 598	-0,276 989	-0,276 989	0,650 598	0,293 062
\vec{Q}_4	0,458 706	-0,538 134	0,538 134	-0,458 706	0,150 582

2.2.3 Calcul des charges en fonction des flèches

Les formules données au paragraphe 2.1.3.1 sont encore valables, les rapports focaux ayant pour valeurs :

$$\begin{aligned} \varphi_1 = \varphi'_{n+1} = \frac{1}{2}, \quad \varphi_2 = \varphi'_n = \frac{2}{7}, \quad \varphi_3 = \varphi'_{n-1} = \frac{7}{26} \\ \varphi_4 = \varphi'_{n-2} = \frac{26}{97}, \quad \varphi_5 = \varphi'_{n-3} = \frac{97}{362} \end{aligned}$$

Les moments d'extrémité M_0 et M_{n+1} ne sont plus nuls et les charges extrêmes (réactions d'appui) sont données par les formules :

$$P_0 = \frac{M_0 - M_1}{\ell}, \quad P_{n+1} = \frac{M_{n+1} - M_n}{\ell}$$

Voici, pour les premières valeurs de n , les formules donnant les moments M_i et les charges P_i en fonction des flèches v_i .

 $n = 1$ (deux travées) :

$$\begin{aligned} -M_0 = M_1 = -M_2 = K\ell v_1 \\ P_0 = P_1 = -2Kv_1, \quad P_2 = 4Kv_1 \end{aligned}$$

 $n = 2$ (trois travées) :

$$15M_0 = K\ell(-14v_1 + 4v_2)$$

$$15M_1 = K\ell(13v_1 - 8v_2)$$

$$15M_2 = K\ell(8v_1 + 13v_2)$$

$$15M_3 = K\ell(4v_1 - 14v_2)$$

$$15P_0 = K(-9v_1 + 4v_2)$$

$$15P_1 = K(16v_1 - 11v_2)$$

$$15P_2 = K(-11v_1 + 16v_2)$$

$$15P_3 = K(4v_1 - 9v_2)$$

 $n = 3$ (quatre travées) :

$$28M_0 = K\ell(-26v_1 + 7v_2 - 2v_3)$$

$$28M_1 = K\ell(24v_1 - 14v_2 + 4v_3)$$

$$28M_2 = K\ell(-14v_1 + 21v_2 - 14v_3)$$

$$28M_3 = K\ell(4v_1 - 14v_2 + 24v_3)$$

$$28M_4 = K\ell(-2v_1 + 7v_2 - 26v_3)$$

$$28P_0 = K(-50v_1 + 21v_2 - 6v_3)$$

$$28P_1 = K(88v_1 - 56v_2 + 24v_3)$$

$$28P_2 = K(-56v_1 + 70v_2 - 56v_3)$$

$$28P_3 = K(24v_1 - 56v_2 + 88v_3)$$

$$28P_4 = K(-6v_1 + 21v_2 - 50v_3)$$

$n = 4$ (cinq travées) :

$$209M_0 = K\ell(-194v_1 + 52v_2 - 14v_3 + 4v_4)$$

$$209M_1 = K\ell(179v_1 - 104v_2 + 28v_3 - 8v_4)$$

$$209M_2 = K\ell(-104v_1 + 155v_2 - 98v_3 + 28v_4)$$

$$209M_3 = K\ell(28v_1 - 98v_2 + 155v_3 - 104v_4)$$

$$209M_4 = K\ell(-8v_1 + 28v_2 - 104v_3 + 179v_4)$$

$$209M_5 = K\ell(4v_1 - 14v_2 + 52v_3 - 194v_4)$$

$$209P_0 = K(-373v_1 + 156v_2 - 42v_3 + 12v_4)$$

$$209P_1 = K(656v_1 - 415v_2 + 168v_3 - 48v_4)$$

$$209P_2 = K(-415v_1 + 512v_2 - 379v_3 + 168v_4)$$

$$209P_3 = K(168v_1 - 379v_2 + 512v_3 - 415v_4)$$

$$209P_4 = K(-48v_1 + 168v_2 - 415v_3 + 656v_4)$$

$$209P_5 = K(12v_1 - 42v_2 + 156v_3 - 373v_4)$$

3. Réseaux dont les poutres de l'un des ensembles sont infiniment rapprochées

3.1 Réseaux dont les poutres principales sont infiniment rapprochées

C'est le cas d'une dalle nervurée (figure 9) ; en négligeant la torsion de la dalle, ce qui est justifié si la rigidité à la flexion des nervures est grande par rapport à celle de la dalle, on peut considérer que les nervures (B_i) reposent sur une infinité de poutres (A) infiniment rapprochées. Les nœuds de la structure sont constitués par les poutres (B_i) elles-mêmes ; les charges appliquées aux nœuds sont donc des charges réparties $p_i(y)$ appliquées aux poutres (B_i), y étant l'abscisse des sections des poutres (B_i).

Le problème consiste à déterminer les flèches $v_i(y)$ des poutres (B_i). Pour cela, considérons la poutre (A_y) comprise entre y et $y + dy$; la charge $p_i(y)dy$ appliquée au nœud commun à (B_i) et (A_y) se décompose en deux parties :

— l'une $p'_i(y)dy$ supportée par la poutre (A_y) :

$$p'_i(y) = \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} v_k(y)$$

avec α_{ik} éléments de la matrice α relative à la poutre (A) de largeur unité ;

— l'autre $p''_i(y)dy$ supportée par la poutre (B_i) supposée isolée :

$$p''_i(y) = EJ \frac{d^4 v_i}{dy^4}$$

avec J moment d'inertie constant des poutres (B_i).

Nous obtenons ainsi les équations différentielles de l'équilibre :

$$EJ \frac{d^4 v_i}{dy^4} + \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} v_k(y) = p_i(y) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (37)$$

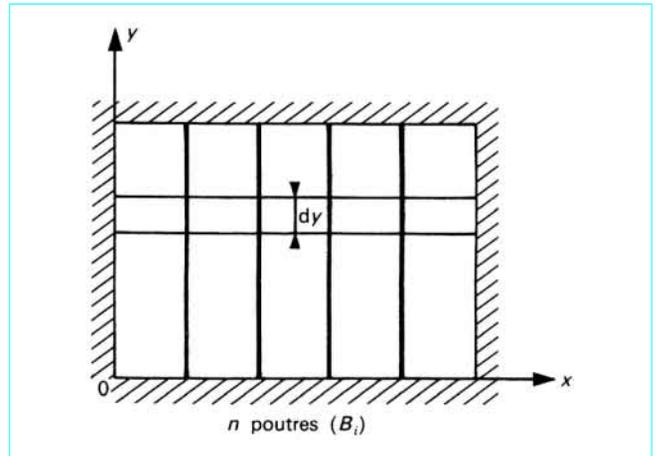


Figure 9 – Poutres principales infiniment rapprochées

Pour intégrer ce système d'équations différentielles, décomposons les charges $p_i(y)$ en systèmes de charges propres relatives à la poutre (A) :

$$p_i(y) = \sum_{r=1}^n \Pi_r(y) Q_{ir} \quad (38)$$

Nous avons :

$$\Pi_r(y) = \sum_{i=1}^n p_i(y) Q_{ir} \quad (39)$$

Dans ces conditions, les fonctions $v_r(y)$ solutions des équations différentielles (37) ont pour expression :

$$v_i(y) = \sum_{r=1}^n V_r(y) Q_{ir} \quad (40)$$

$V_r(y)$ étant l'intégrale de l'équation différentielle :

$$\frac{V_r(y)}{S_r} + EJ \frac{d^4 V_r}{dy^4} = \Pi_r(y) \quad (41)$$

$V_r(y)$ est donc la flèche de la poutre (B) reposant sur des appuis élastiques infiniment rapprochés de module de réaction $1/S_r$ et soumise à une densité de charge $\Pi_r(y)$. Nous sommes ainsi ramenés à un problème classique (article *Structures élastiques à plan moyen* [C 2 015], dans le présent traité).

3.2 Réseaux dont les poutres secondaires sont infiniment rapprochées

3.2.1 Équations différentielles de l'équilibre

C'est le cas d'une dalle nervurée ; les nervures constituent les poutres principales (A) ; les poutres secondaires sont formées de bandes de dalle de largeur dx , x désignant l'abscisse des sections des poutres principales. Le réseau représenté sur la figure 10a est identique à celui de la figure 9 ; il peut donc être calculé de deux façons différentes. Le réseau représenté sur la figure 10b est un pont à poutres multiples sous chaussée sans entretoises. Enfin, le réseau représenté sur la figure 10c comporte une infinité de poutres principales.

La portée des poutres principales sera désignée par L .

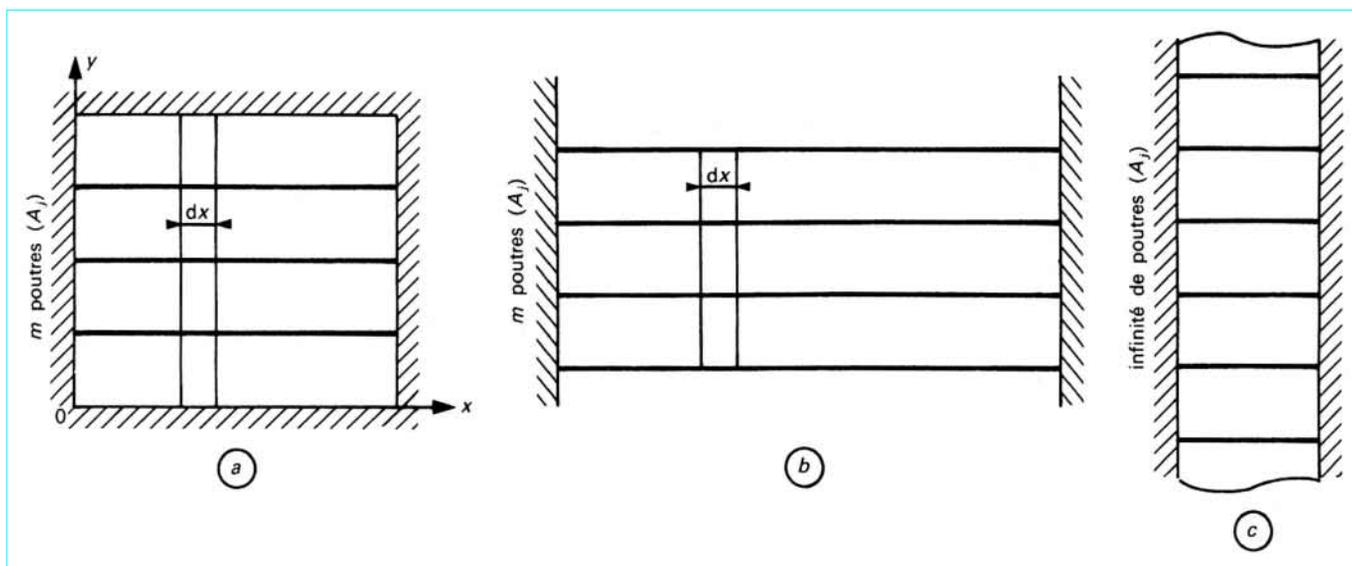


Figure 10 – Poutres secondaires infiniment rapprochées

Il est justifié d’assimiler la dalle à une infinité de poutres secondaires infiniment rapprochées, à condition que l’on puisse négliger la torsion de la dalle, donc que la rigidité à la flexion des poutres soit grande vis-à-vis de celle de la dalle. Les nœuds du réseau sont les poutres (A_j) elles-mêmes. Les charges appliquées aux nœuds sont donc des charges réparties $p_j(x)$ appliquées aux poutres (A_j).

Le problème consiste à déterminer les flèches $v_j(x)$. Pour cela, considérons la charge $p_j(x)dx$ appliquée à la poutre (A_j) entre les abscisses x et $x + dx$; elle est la somme :

— de la charge $p'_j(x)$ supportée par la poutre (A_j) supposée isolée :

$$p'_j(x) = EI \frac{d^4 v_j}{dx^4}$$

avec I moment d’inertie supposé constant des poutres (A_j) ;

— et de la charge $p''_j(x)dx$ supportée par la bande de dalle de largeur dx :

$$p''_j(x) = \sum_{h=1}^m \beta_{jh} v_h(x)$$

avec β_{jh} éléments de la matrice β relative à la bande de dalle de largeur unité.

Nous obtenons ainsi les équations différentielles de l’équilibre du réseau :

$$EI \frac{d^4 v_j}{dx^4} + \sum_{h=1}^m \beta_{jh} v_h(x) = p_j(x) \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (42)$$

3.2.2 Charges propres des poutres principales

Une charge de densité $q(x)$ est une charge propre de la poutre (A) si la flèche $v(x)$ produite par cette charge est proportionnelle à $q(x)$:

$$v(x) = Sq(x) \quad (43)$$

La fonction $v(x)$, comme la fonction $q(x)$, doit donc être une intégrale de l’équation différentielle linéaire et homogène du quatrième ordre :

$$EIS \frac{d^4 V}{dx^4} = v(x)$$

Elle est donc de la forme :

$$v(x) = C_1 \operatorname{ch} \lambda x + C_2 \operatorname{sh} \lambda x + C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x$$

λ étant défini par :

$$\lambda^4 = \frac{1}{EIS} \quad (44)$$

Les constantes C_1, C_2, C_3 et C_4 sont déterminées par les conditions aux limites. Bornons-nous au cas où la poutre est **simplement appuyée**. Les conditions :

$$v = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = 0 \quad \text{pour} \quad x = 0 \quad \text{et} \quad x = L$$

donnent quatre équations linéaires et homogènes entre les constantes C_1, C_2, C_3 et C_4 . Ces équations ont de solutions non nulles seulement si :

$$\sin \lambda L = 0$$

Il existe donc une infinité de valeurs $\lambda_r = \frac{r\pi}{L}$ auxquelles correspondent les valeurs caractéristiques :

$$S_r = \frac{L^4}{r^4 \pi^4 EI} \quad (r = 1, 2, 3, \dots) \quad (45)$$

et la suite infinie de charges propres :

$$q_r(x) = \sin \frac{r\pi x}{L}$$

Les charges propres n’étant définies qu’à un facteur près, nous pouvons choisir ce facteur de façon que :

$$\int_0^L q_r^2(x) dx = 1$$

Nous obtenons ainsi les **charges propres normées** $Q_r(x)$:

$$Q_r(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{r\pi x}{L} \quad (46)$$

qui vérifient les relations :

$$\int_0^L Q_r(x) Q_s(x) dx = \begin{cases} 1 & \text{si } r \neq s \\ 0 & \text{si } r = s \end{cases}$$

3.2.3 Résolution des équations d'équilibre

Supposons les poutres principales simplement appuyées, et décomposons les charges $p_j(x)$ en somme de charges propres, ce qui revient à développer les fonctions $p_j(x)$ en série de Fourier de sinus dans l'intervalle $(0, L)$:

$$p_j(x) = \sum_{r=1}^{\infty} \Pi_{jr} \sin \frac{r\pi x}{L} \quad (47)$$

Les coefficients Π_{jr} ont pour valeurs :

$$\Pi_{jr} = \frac{2}{L} \int_0^L p_j(x) \sin \frac{r\pi x}{L} dx \quad (48)$$

Dans ces conditions, on vérifie immédiatement que les équations (42) ont pour solutions :

$$v_j(x) = \sum_{r=1}^{\infty} V_{jr} \sin \frac{r\pi x}{L} \quad (49)$$

les coefficients V_{jr} étant les solutions des systèmes de m équations linéaires correspondant à chaque valeur caractéristique S_r :

$$\frac{V_{jr}}{S_r} + \sum_{h=1}^m \beta_{jh} V_{hr} = \Pi_{jr} \quad (50)$$

Cette équation ne diffère pas de l'équation (15) de la théorie générale. Nous sommes donc ramenés au calcul de la poutre (B) reposant sur des appuis élastiques identiques ayant pour coefficient d'élasticité $1/S_r$ et soumise, au droit des appuis, aux charges concentrées Π_{jr} .

Références bibliographiques

- [1] COURBON (J.) et LACROIX (R.). – *Calcul des réseaux de poutres croisées*. Annales des Ponts et Chaussées, mai-juin-juil.-août 1957.
- [2] COURBON (J.). – *Résistance des matériaux*. Tome II, 2^e éd., Dunod (1971).