

# Sommaire

## Chapitre 1: Représentation des systèmes linéaires

- I. Généralités
  - I.1. Définitions
  - I.2. Commande d'un système
  - I.3. Performances d'un asservissement
- II. Représentation par les équations différentielles
  - II.1. Solution de l'ESSM
  - II.2. Solution particulière
  - II.3. Conclusion
- III. Représentation externe
  - IV.1. Transformation de Laplace
    - IV.1.1. Calcul de la transformée inverse
    - IV.1.2. Quelques propriétés de la transformée de Laplace
  - IV.2. Représentation externe
    - IV.2.1. Définition
    - IV.2.2. Forme standard d'une fonction de transfert
- IV. Schéma fonctionnel et calcul des fonctions de transfert
  - V.1. Notions de base sur les schémas fonctionnels
  - V.2. Exemple
  - V.3. Forme canonique d'un système asservi
  - V.4. Simplification des schémas fonctionnels
- V. Application: calcul de la fonction de transfert d'un moteur à courant continu
  - VI.1. Etablissement des équations différentielles
  - VI.2. Calcul de la fonction de transfert
- VI. Détermination graphique de la fonction de transfert en boucle fermée
  - VI. Transformation boucle ouverte – boucle fermée
  - VI. Détermination graphique de la FTBF

## Chapitre 2: Analyse des systèmes de base

- I. Système de premier ordre
  - I.1. Analyse fréquentielle
    - I.1.1. Diagramme de Nyquist
    - I.1.2. Diagramme de Bode
    - I.1.3. Diagramme de Black Nichols
  - I.2. Analyse temporelle
    - I.2.1. Réponse impulsionnelle
    - I.2.2. Réponse indicielle
    - I.2.3. Réponse à une rampe
- II. Système du second ordre
  - II.1. Pôles de la fonction de transfert
  - II.2. Réponses temporelles
    - II.2.1. Réponse indicielle
    - II.2.2. Réponse impulsionnelle
    - II.2.3. Réponse à une rampe

- II.3. Réponse harmonique
  - II.3.1. Etude du gain
  - II.3.2. Etude de la phase
- III. Systèmes à retard pur

### **Chapitre 3: Performances des systèmes asservis**

- I. stabilité
  - I.1. Critère de stabilité de Routh-Hurwitz
  - I.2. Critère de stabilité de Nyquist
    - I.2.1. Contour d'exclusion de Nyquist
    - I.2.2. Application du théorème de Cauchy
    - I.2.3. Règle de Nyquist
  - I.3. Critère Simplifié de Nyquist
  - I.4. Marges de stabilité
    - I.4.1. Marge de gain
    - I.4.2. Marge de phase
    - I.4.3. Détermination graphique des marges de gain et de phase
    - I.4.4. Marge de retard
- II. Précision statique
  - II.1. Erreur statique due à la consigne (en poursuite)
    - II.1.1. Echelon de position
    - II.1.2. Echelon de vitesse
    - II.1.3. Echelon d'accélération
  - II.2. Erreur statique due à la perturbation
- III. Dilemme stabilité-précision

### **Chapitre 4: Correction des systèmes asservis**

- I. Généralités sur la correction
- II. Action des correcteurs
  - II.1. Régulateur Tout ou rien
  - II.2. Correcteur proportionnel
  - II.3. Correcteur proportionnel dérivé
  - II.4. Correcteur proportionnel intégral
  - II.5. Correcteur proportionnel intégral dérivé
  - II.6. Correcteur à avance de phase
  - II.7. Correcteur à retard de phase
  - II.8. Correcteur combiné
- III. Cahier des charges

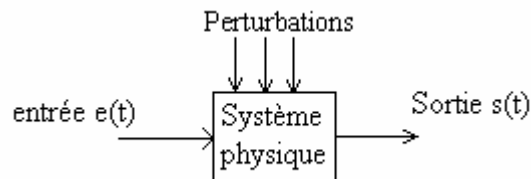
# Chapitre 1: Représentation des systèmes linéaires

## I. Généralités

### I.1. Définitions

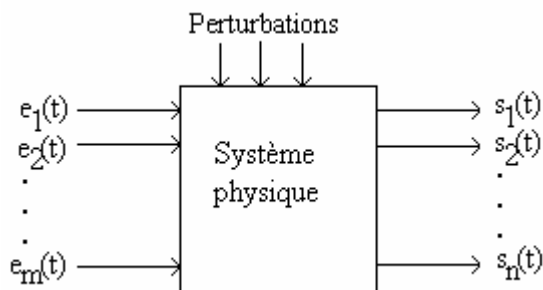
- **Système:** Un système est un ensemble de constituants reliés les uns aux autres de façon à former une entité.

- **Un système monovariante** est caractérisé par une grandeur de sortie et une grandeur d'entrée. Il est représenté par le schéma suivant:



L'entrée  $e(t)$  agit sur le système et permet de le piloter vers un état spécifié, la sortie  $s(t)$  représente les effets de la grandeur d'entrée que l'on peut observer généralement au moyen des capteurs. Les perturbations est une variable aléatoire dont on ne connaît pas l'origine.

- **Un système multivariante** (plusieurs grandeurs de sortie et d'entrée), est représenté par :



Les grandeurs de sortie et d'entrée peuvent être rassemblées dans des vecteurs  $s(t)$  et  $e(t)$  respectivement.

- **Système linéaire:** Un système dynamique linéaire est un système qui peut être décrit par une équation différentielle linéaire.
- **Système stationnaire:** Un système est dit stationnaire (ou invariant) si les relations entre l'entrée et la sortie sont indépendantes du temps.
- **Système causal:** Un système est dit causal si la valeur de la sortie  $y(t)$  à un instant  $t$  ne dépend que des valeurs de l'entrée  $u(t)$  pour  $t \leq t_0$ . Notons que tous les systèmes physiques sont causaux.
- **Système dynamique ou à mémoire:** Un système dynamique est un système dont la réponse à une excitation dépend à la fois de celle-ci et de ce qui s'est passé avant. La

relation mathématique liant l'entrée et la sortie est plus complexe: la sortie dépend d'elle même (de ses dérivées) et de l'entrée.

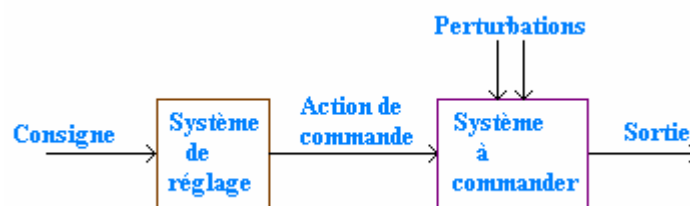
- **Dynamique d'un système**: Elle caractérise le comportement en régime transitoire : rapidité et oscillations. Elle est conditionnée par les pôles de la fonction de transfert et donc par les coefficients de l'équation différentielle (de l'équation de récurrence dans le cas discret). Le régime libre (pas d'excitation, conditions initiales nulles) caractérise la dynamique.
- **Poursuite** : l'asservissement a une entrée de référence qui évolue au cours du temps (exemple : radar de poursuite, un missile qui poursuit une cible, une machine qui doit usiner une pièce selon un profil donné). Cette évolution de l'entrée fait évoluer le point de fonctionnement du processus et la sortie doit suivre le mieux possible cette évolution en dépit des perturbations. On dit que le système fonctionne en suiveur ou en poursuite.
- **Régulation** : dans ce cas, la consigne est constante ou évolue en paliers et le système doit compenser l'effet des perturbations. A titre d'exemple : le réglage de la température dans un four, de la pression dans un réacteur, du niveau d'eau dans un réservoir.
- **Servomécanisme** : on appelle servomécanisme, un système asservi dont le rôle consiste à amplifier la puissance et dont la grandeur réglée représente la position mécanique ou l'une de ses dérivées par rapport au temps comme la vitesse ou l'accélération.

## I.2 commande d'un système

Commander un système C'est organiser un système dans un but fixé. La commande d'un système est réalisée de deux manières : la commande en boucle ouverte et la commande en boucle fermée.

### I.2.1 Commande d'un système en boucle ouverte

Un système à boucle ouverte est un système dont on a aucune information sur la grandeur à commander.



**Avec:**

**le système à commander** est le système sujet à la commande (four, moteur ,réacteur ...)

**Sortie (appelée grandeur réglée)** : c'est la grandeur physique que l'on désire contrôler. Elle donne son nom à la régulation. Par exemple : régulation de température.

**Consigne** : ordres, c'est la valeur désirée que doit avoir la grandeur réglée; exemple fixer une température à 37 °c ou fixer une trajectoire d'un avion.

**Action de commande (ou grandeur réglante)** : Action susceptible de changer l'état du système à commander. Elle est élaborée en fonction des ordres.

## Exemples

- Le réglage de la température du four est assuré par une personne extérieure (de la salle de contrôle), il n'a donc aucune information sur la grandeur à régler.
- Contrôle de la vitesse de rotation d'un moteur à courant continu par l'intermédiaire de sa tension d'alimentation
- Commande de la température d'une douche par quelqu'un à l'extérieur (pas sûre d'avoir la température désirée, pas précis et insensible aux perturbations (utilisation de quelqu'un d'autre)).

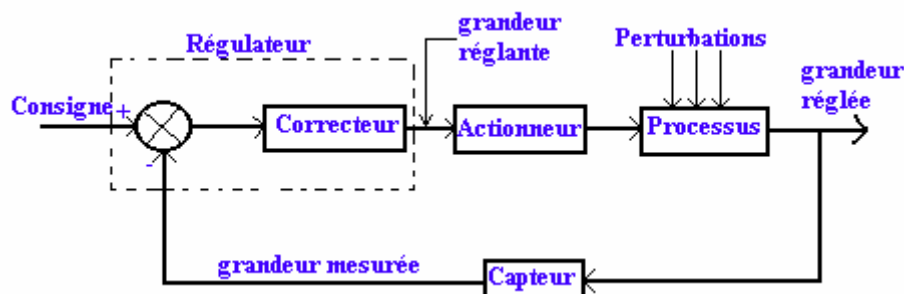
**Conclusion:** La commande d'un système en boucle ouverte n'est ni précise, ni sûre (essayer par exemple d'enfiler un fil dans la chat d'une aiguille directement du premier coups), elle est insensible aux perturbations, mais elle est rapide et stable.

Système aveugle, pas de correction (insensible aux perturbations) mais rapide et stable.

### I.2.2. Commande d'un système en boucle fermée

Un système de commande en boucle fermée est un système où le signal de commande dépend d'une façon ou d'une autre du signal de sortie. Ce système est appelé aussi système bouclé ou système asservi ou asservissement.

#### A. Schéma général d'un asservissement analogique



Un système asservi comporte une chaîne d'action avec amplification de puissance appelé aussi chaîne de puissance, une chaîne de retour ou de contre-réaction (de faible puissance) et un outil de comparaison.

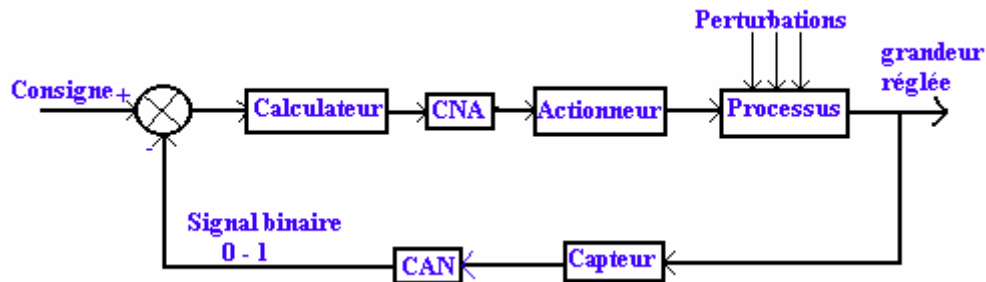
- le processus est soumis aux excitations constituées par l'entrée de référence et des perturbations.
- Le capteur donne une image utilisable (de nature le plus souvent électrique) de la grandeur réglée. Un capteur doit donner une image fidèle de la grandeur réglée. Sa sensibilité impose donc les limites de précision de l'asservissement.
- Le régulateur est composé de deux parties :
  - Le comparateur qui reçoit l'information de référence et la grandeur mesurée dont il fait la différence  $\varepsilon$  appelée écart ou erreur.
  - Le correcteur dont le rôle sera d'éliminer cet écart quelles que soient les perturbations, et d'amener le processus à réagir rapidement, quelles que soient les variations de l'entrée de

référence ou des perturbations. Donc, il a pour but d'assurer le bon fonctionnement du processus et en particulier sa sécurité.

- L'actionneur reçoit du régulateur le grandeur réglante et l'amplifie en puissance, c'est le "muscle" de la chaîne qui va piloter l'évolution du processus (par exemple : moteur, vérin, vanne, ...)

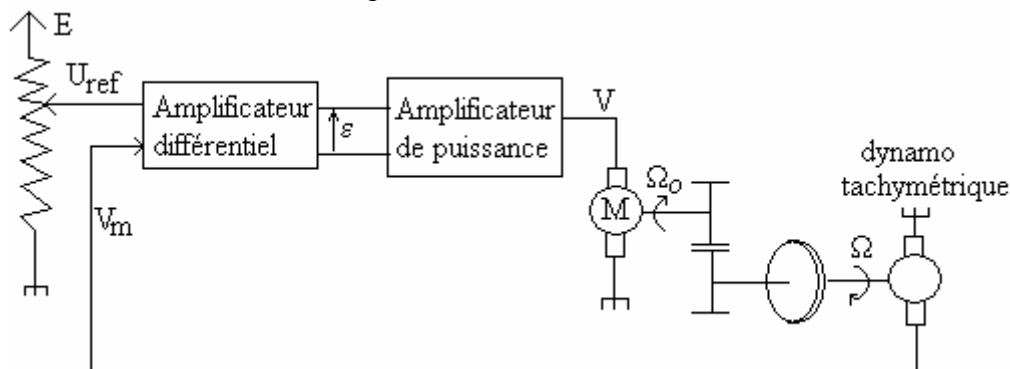
## B. Schéma général d'un asservissement numérique

Dans ce cas, on utilise une commande numérique pour piloter le système, on a le schéma suivant :



### I.2.3. Exemple : Régulation de vitesse

Le schéma de réalisation est donné par:



On remarque que ce schéma met en évidence l'opération de bouclage. Le rôle du bouclage est d'ajuster en permanence la tension  $V$  de telle sorte que la grandeur réglée (vitesse de rotation de la charge) soit égale à la consigne en dépit des perturbations (variation du couple résistant au niveau de la charge). En effet:

- Si  $\Omega$  augmente, la tension mesurée  $V_m$  augmente ce qui implique que  $\varepsilon = U_{ref} - V_m$  diminue, ce qui entraîne une diminution de  $V$  et par suite celle de  $\Omega$ .
- Si  $\Omega$  diminue, la tension mesurée  $V_m$  diminue ce qui implique que  $\varepsilon = U_{ref} - V_m$  augmente entraînant une augmentation de  $V$  et par suite celle de  $\Omega$ .

## I.3. Performances d'un asservissement

Généralement, pour évaluer les performances d'un système asservi, ou comparer le fonctionnement de plusieurs systèmes, On introduit des signaux de référence d'entrée appelé aussi signaux de test. Un signal de test doit être :

- **Simple** : pour faciliter la résolution de l'équation différentielle et reconstituer un autre signal plus complexe
- **défini** : afin d'effectuer des comparaisons entre les performances des différents systèmes
- **Capable** d'exciter un régime d'exploitation le plus difficile (exemple: un four, un réacteur)

Il existe les signaux de type non sinusoïdaux et de type sinusoïdaux.

### I.3.1. Les signaux de types non sinusoïdaux

Ce sont des signaux variant en fonction du temps uniquement.

#### I.3.1.1. Signal de saut (fonction de Heaviside), fonction échelon

**Définition**



$$\Gamma(t) = \begin{cases} E & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \text{ (causalité)} \end{cases}$$

$\Gamma(t)$  n'est pas définie à l'origine ( $t=0$ ) ce que l'on transcrit par  $\Gamma(0^-) = 0$  et  $\Gamma(0^+) = E$ . On a l'échelon unité si  $E=1$ . La représentation réelle de ce signal est l'application d'une tension à un système par l'intermédiaire d'un interrupteur. C'est le signal de test le plus simple à réaliser, convient aux systèmes d'une grande inertie

#### I.3.1.2. Signal Impulsionnel (distribution de Dirac)

**Définition** : L'impulsion de Dirac appelée aussi delta de Dirac ou distribution de Dirac possède les propriétés suivantes :

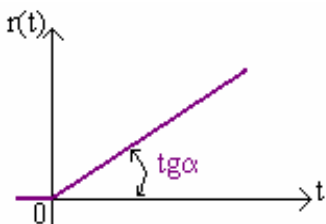
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1; \quad \delta(t) = 0 \text{ pour tout } t \neq 0 \text{ et } \delta(t) \text{ n'est pas définie en } t=0.$$

**Réalisation physique** : Fermeture brève d'un interrupteur. La durée de l'impulsion ne doit pas être assez grande pour ne pas ressembler à l'échelon ni trop brève pour pouvoir exciter le système.

**Domaine d'utilisation** : Système ne pouvant pas être excité pendant un temps assez important.

#### I.3.1.3. Signal de Rampe

**Définition** :



$$r(t) = \begin{cases} tg\alpha \cdot t & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \text{ (causalité)} \end{cases}$$

Si  $tg\alpha = 1$  ( $\alpha = \frac{\pi}{4}$  rd) on a une rampe unité.

La pente de la droite ( $\operatorname{tg}\alpha$ ) exprime la vitesse de variation de  $r(t)$ . C'est pour cela qu'on appelle souvent la rampe échelon de vitesse.

**Réalisation physique** : Intégration d'un échelon

**Domaine d'utilisation** : Système suiveur (missile).

### I.3.2. Les signaux de types sinusoïdaux.

Un signal harmonique  $e(t)=e_0\sin(\omega t+\varphi)$  est très employé en électronique et en automatique car il permet de déterminer la réponse en fréquence d'un système, mais ne convient pas à l'analyse temporelle car les vannes de réglage seraient soumises à un signal trop perturbateur. Le signal harmonique a un caractère non causal, car déceler une avance ou un retard de phase  $\Delta\varphi$  ne signifie rien a priori (on a  $\pm \Delta\varphi$  à  $2k\pi$  près).

## II. Représentation par des équations différentielles

Pour étudier tout système physique, il faut le modéliser mathématiquement et inventer un arsenal de méthodes théoriques d'analyse.

Le comportement d'un système linéaire continu monovarié est représenté par une équation différentielle à coefficients constants :

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \quad (1)$$

où  $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$  sont des constantes. On note que l'équation ne contient pas de terme constant. En fait il est possible d'éliminer ce terme par un changement de variable.

La réalisation physique impose d'avoir  $m \leq n$ ,  $n$  s'appelle ordre du système. La solution générale de (1) est obtenue en faisant la somme :

- de la solution générale  $y_1(t)$  de l'équation sans second membre (ESSM)
- et d'une solution particulière  $y_2(t)$  de l'équation avec second membre (EASM).

Ce qui se traduit par  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$

### II.1. Solution de l'ESSM

Elle correspond au régime libre, on calcule les racines  $r_i, i = 1, \dots, n$ , de l'équation caractéristique suivante :

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

Les racines  $r_i, i = 1, \dots, n$  sont soit réelles, soit complexes conjuguées. On suppose qu'il existe  $K$  racines réelles  $r_i, i = 1, \dots, K$  et  $L$  paires de racines complexes et leurs conjuguées, soit  $r_\ell = \alpha_\ell + j\omega_\ell$  et  $r_{\ell+L} = \alpha_\ell - j\omega_\ell$  avec  $\ell=1, 2, \dots, L$ . Alors la solution de l'ESSM s'écrit :

$$y_1(t) = \sum_{i=1}^K A_i e^{r_i t} + \sum_{\ell=1}^L e^{\alpha_\ell t} [B_\ell \cos \omega_\ell t + C_\ell \sin \omega_\ell t]$$



## II.2. Solution particulière

La solution particulière de (1) donne le régime forcé. Elle est choisie de la même forme que le second membre.

Si le second membre est sous la forme :  $e^{\beta t} \cdot P_m(t)$  où  $P_m(t)$  est un polynôme en  $t$  de degrés  $m$ , alors on cherche les solutions de la forme  $y_2(t) = Q(t)e^{\beta t}$  où  $Q(t)$  est un polynôme en  $t$  telle que :

- $\deg Q(t) = m$  si  $\beta$  n'est pas racine de l'équation caractéristique.
- $\deg Q(t) = m+d$  si  $\beta$  est racine multiple d'ordre  $d$  de l'équation caractéristique.

## II.3. Conclusion

La solution générale s'obtient donc en faisant la somme :  $y(t) = y_1(t) + y_2(t)$ . Si les racines de l'équation caractéristique sont à partie réelle négative,  $y_1(t)$  qui représente le régime libre encore appelé régime transitoire disparaît après un certain temps et seule subsiste  $y_2(t)$  représentant le régime forcé ou régime permanent. Nous soulignons que le régime transitoire caractérise le comportement dynamique du système alors que le régime permanent caractérise son comportement statique.

## III. Représentation externe (fonction de transfert)

### III.1. Transformation de Laplace

C'est un outil mathématique possédant l'avantage de transformer des équations différentielles en équations algébriques

**Définition 1** : Soit  $f(t)$  une fonction réelle de la variable réelle  $t$ , définie pour  $t > 0$  et soit  $s$  une variable complexe définie pour  $s = \sigma + j\omega$ . S'il existe un réel  $\sigma_0$  tel que  $\int_{0+}^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$ , alors  $f(t)$  admet une transformée de Laplace pour  $\text{Re}(s) = \sigma > \sigma_0$  donnée par :

$$L[f(t)] = F(s) = \int_{0+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

**Exemple 4** : Calculer la transformée de Laplace de la fonction échelon unitaire

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ 1 & \text{pour } t > 0 \end{cases}$$

**Réponse** :

$$U(s) = L[\Gamma(t)] = \int_{0+}^{+\infty} \Gamma(t)e^{-st} dt = \int_{0+}^{+\infty} e^{-st} dt = \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right]_{0+}^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \right] + \frac{1}{s}$$

Pour que l'intégrale converge, on doit avoir  $\sigma > 0$  et donc  $\sigma_0 = 0$ .

Donc  $U(s) = L[\Gamma(t)] = \frac{1}{s}$  pour tout  $s$  telle que  $\text{Re}(s) > 0$ .

**Définition 2** : Soit  $F(s)$  la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$ ,  $t > 0$ , alors,

$$L^{-1}[F(s)] = f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds$$

s'appelle la transformée de Laplace inverse de  $F(s)$  où  $\sigma > \sigma_0$ .

### III.1.1. Calcul de la transformée inverse

Pour calculer la transformée inverse on peut adopter deux méthodes :

### A Utilisation du théorème des résidus

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] = f(t) &= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \\ &= \sum_{\sigma < \sigma_0} \text{résidus}[F(s)e^{st}] \end{aligned}$$

et les résidus d'une fonction  $g(s)$  en un pôle  $a$  d'ordre  $p$  s'obtient par :

$$\text{Rés}(g, a) = \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{ds^{p-1}} [(s-a)^p g(s)] \Big|_{s=a}$$

### B. Expansion de Heaviside (Décomposition en éléments simples)

Dans le cas général, les transformées de Laplace se présentent sous forme d'un quotient

$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ . La méthode consiste à décomposer cette fraction en éléments dont l'image est

connue (utilisation des tables). La procédure de décomposition de  $F(s)$  est la suivante :

- Si les pôles de  $F(s)$  sont réels et simples :  $D(s) = \prod_{i=1}^n (s-s_i)$ , on peut écrire  $F(s)$  sous la

$$\text{forme : } F(s) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s-s_i}$$

- Si certains pôles sont multiples par exemple  $s_0$  :  $D(s) = \prod_{j=1}^{n-\alpha} (s-s_0)^\alpha (s-s_j)$  avec  $\alpha \neq 1$ , on

$$\text{écrit } F(s) = \sum_{i=1}^{\alpha} \frac{A_i}{(s-s_0)^i} + \sum_{j=1}^{n-\alpha} \frac{B_j}{s-s_j}$$

- Si certains pôles sont complexes  $D(s) = \prod_{i=1}^K (s-s_i)^{\alpha_i} \prod_{j=1}^L (a_j + b_j s + s^2)$  avec

$\sum_{i=1}^K \alpha_i + 2L = n$ . Les trinômes du second ordre admettent deux racines complexes

conjuguées. Dans ce cas, dans l'expression de  $F(s)$  intervient des termes de type

$$\frac{\beta s + \gamma}{s^2 + b_j s + a_j} \text{ qu'on écrit sous la forme : } \frac{\beta(s+b)}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

Il est aussi possible d'utiliser des termes complexes de type :  $\frac{\alpha}{s+a+jb} + \frac{\bar{\alpha}}{s+a-jb}$  avec  $\bar{\alpha}$  est

le complexe conjugué de  $\alpha$ .

### III.1.2. Quelques propriétés de la transformée de Laplace

1-Unicité de la solution : Si deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$  possèdent la même image  $H(s)$  ( $H(s)=L[f(t)]=L[g(t)]$ ) alors ces deux fonctions sont identiquement égales.

2-Linéarité : Si  $f(t) = \sum_i \alpha_i f_i(t)$  et  $F_i(s) = L[f_i(t)]$  alors  $F(s) = \sum_i \alpha_i F_i(s)$ .

3-Théorème de la valeur initiale :  $f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$

4-Théorème de la valeur finale :  $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0^+} [sF(s)]$

5-Dérivation : 
$$L\left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} \frac{d}{dt} f(0^+) - \dots - \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} f(0^+)$$

$$= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0^+); f^{(0)}(0^+) = f(0^+)$$

\* cas particulier :  $n=1$  :  $L\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s) - f(0^+)$

\* Pour une fonction causale :  $f^{(k)}(0^+) = 0$  pour tout  $k \Rightarrow L[f^{(n)}(t)] = s^n F(s)$

6- Intégration :  $L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$

7-Théorème de convolution : soient  $F_1(s) = L[f_1(t)]$ ,  $F_2(s) = L[f_2(t)]$  et  $f(t) = f_1(t) * f_2(t)$  où '\*' désigne le produit de convolution alors  $F(s) = L[f(t)] = F_1(s)F_2(s)$ .

8-Théorème du retard : si  $F(s) = L[f(t)]$  alors  $L[f(t - t_0)] = e^{-st_0} F(s)$ , pour  $t > t_0$

9-Théorème du déplacement : si  $F(s) = L[f(t)]$  alors  $L[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$

10-Changement de l'unité de temps : si  $L[f(t)] = F(s)$  alors  $L[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

## III.2. Représentation externe (Fonction de transfert)

### III.2.1. Définition

Considérons un système linéaire monovarié et stationnaire décrit par l'équation différentielle (1). On admet que le système est initialement au repos (ou en régime permanent, établi depuis suffisamment longtemps), toutes les dérivées sont donc nulles à l'instant  $t=0$ . L'application de la transformée de Laplace à l'équation (1) donne,

$$a_n s^n Y(s) + \dots + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_m s^m U(s) + \dots + b_1 s U(s) + b_0 U(s)$$

avec  $Y(s)$  et  $U(s)$  sont les transformées de Laplace de  $y(t)$  et  $u(t)$  respectivement. Alors, on déduit :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} = H(s)$$

$H(s)$  est appelée **fonction de transfert** ou **transmittance** du système. Elle ne dépend ni de la sortie ni de l'entrée ni des valeurs ou conditions initiales mais seulement de la constitution physique du système.

Il est à noter que du fait de la causalité du système, le degré du numérateur de  $H(s)$  est inférieur ou égale au degré du dénominateur  $m \leq n$ . Les valeurs de  $s$  annulant le numérateur de  $H(s)$  sont appelées **zéros** de  $H(s)$  et celles annulant le dénominateur sont appelées **pôles** de  $H(s)$ .

Si on écrit  $Y(s)=H(s)U(s)$ , en prenant la transformée inverse de Laplace, on trouve,

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_0^t h(\tau)u(t - \tau)d\tau = \int_0^t h(t - \tau)u(\tau)d\tau$$

où '\*' désigne l'opérateur de convolution et  $h(t)$  est l'original de  $H(s)$ .  $h(t)$  s'appelle réponse impulsionnelle du système car pour une impulsion  $u(t) = \delta(t)$  ( $U(s)=1$ ), on a  $y(t)=h(t)$ .

### III.2.2. Forme standard d'une fonction de transfert

Pour le calcul des organes de commande, il est intéressant de faire apparaître dans les transmittances le gain statique, le nombre d'intégrateurs, les pôles et les zéros. On peut toujours écrire  $H(s)$  sous la forme:

$$H(s) = \frac{Ke^{-\tau s}P(s)}{s^\ell Q(s)}$$

où  $P(s)$  et  $Q(s)$  sont tels que  $\frac{P(0)}{Q(0)} = 1$ ,  $K$  est le gain statique du système,  $\ell$  est égal au nombre d'intégrateurs et  $\tau$  représente le retard pur du système.

Par définition  $K = \lim_{s \rightarrow 0} s^\ell H(s)$ .  $K$  fournit la relation statique entre l'entrée et la sortie.

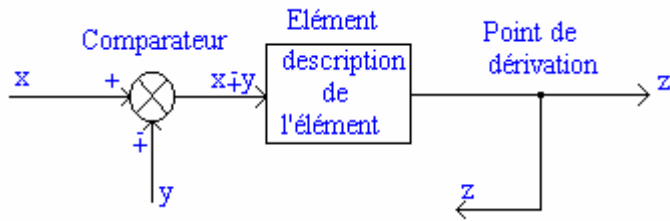
Pour un système stable sans intégration, on peut déterminer le gain statique  $K$  à partir de la réponse indicielle, en effet, soit  $u(t)=u_0\Gamma(t)$  alors  $U(s) = \frac{u_0}{s}$ .

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} (H(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{Y(s)}{U(s)} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \frac{Y(s)}{u_0} \right) = \frac{1}{u_0} \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \frac{y(\infty)}{u_0}$$

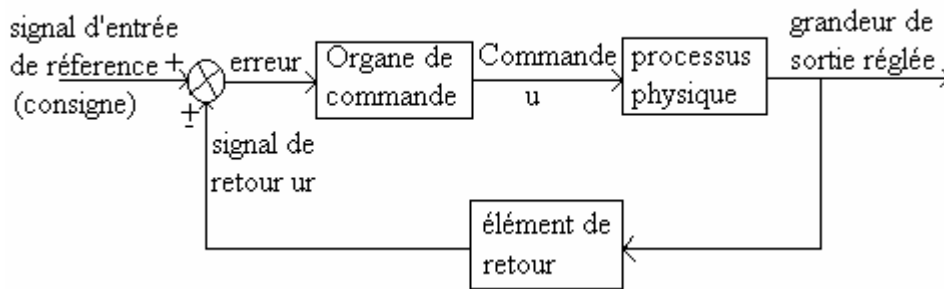
## IV. Schéma fonctionnel et calcul des fonctions de transfert

### IV.1. Notions de base sur les schémas fonctionnels

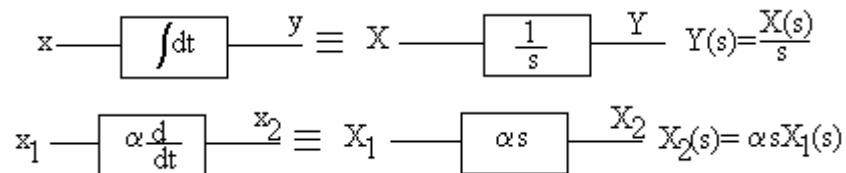
Le schéma fonctionnel d'un système asservi est une représentation graphique abrégée du système physique. D'une manière général, un schéma fonctionnel est constitué par un assemblage particulier de quatre types d'éléments: des rectangles, des comparateurs, des points de dérivation et des flèches représentant la circulation orienté des signaux.



Le schéma fonctionnel de base d'un système asservi comprend un organe de commande ou régulateur, le processus physique dont on asservit un paramètre ou une condition particulière et un élément de retour liant le signal primaire de retour ur au signal de sortie réglé.



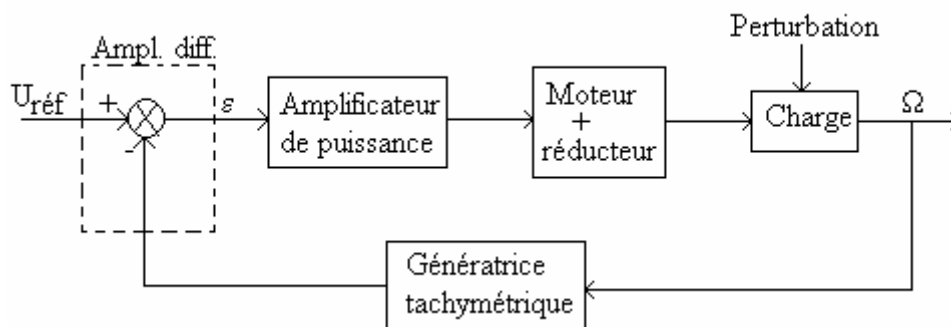
Pour étudier le système asservi, on indique dans chaque bloc, le modèle mathématique correspondant. Par exemple, on peut représenter  $y = \int x dt$  (intégration) et  $x_2 = \alpha \frac{dx_1}{dt}$  (dérivée) par :



En général, dans un schéma fonctionnel, on représente tout système par sa fonction de transfert.

## IV.2. Exemple

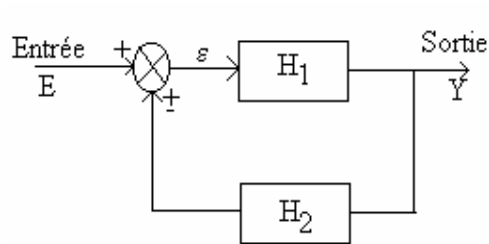
Reprenons l'exemple de la régulation de vitesse. Le schéma fonctionnel peut être donné par:



La perturbation représente la variation du couple résistant au niveau de la charge.

### IV.3. Forme canonique d'un système asservi

La forme canonique est donnée par le schéma fonctionnel suivant :



$H_1$  : fonction de transfert directe  
 = fonction de transfert d'action.  
 $H_2$  : fonction de transfert de retour.  
 $H_1H_2$  : fonction de transfert en boucle ouverte.

Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée :

$$Y(s) = H_1(s)\varepsilon(s) \text{ avec } \varepsilon(s) = E(s) \pm H_2(s)Y(s)$$

ce qui donne :

$$Y(s) = H_1(s)E(s) \pm H_1(s)H_2(s)Y(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{H_1(s)E(s)}{1 \mp H_1(s)H_2(s)}$$

d'où la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\frac{Y(s)}{E(s)} = \frac{H_1(s)}{1 \mp H_1(s)H_2(s)}$$

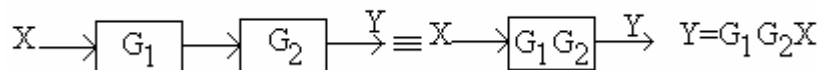
On déduit aussi le rapport d'erreur :

$$\frac{\varepsilon(s)}{E(s)} = \frac{1}{1 \mp H_1(s)H_2(s)}$$

### IV.4. Simplification des schémas fonctionnels

Le schéma fonctionnel d'un système asservi réel est souvent assez compliqué. Il peut comprendre plusieurs boucles de retour ou d'action, et plusieurs signaux d'entrée. On peut toujours ramener un système à boucles multiples à la forme canonique. L'effet des entrées secondaires est ramené à l'entrée et la réduction des boucles est réalisée en considérant en premier les boucles internes. La simplification des schémas fonctionnels peut être réalisée en utilisant des transformations faciles à manipuler.

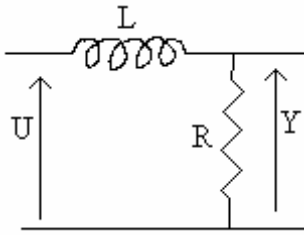
a) association d'éléments en cascade :



La multiplication des fonctions de transferts est commutative :  $G_1G_2 = G_2G_1$ . Pour déterminer les fonctions de transferts individuelles, on doit éventuellement tenir compte des effets de couplage (interaction entre un système et son voisin). On peut opérer sans précaution particulière avec des amplificateurs opérationnels du fait de leur grande impédance d'entrée.

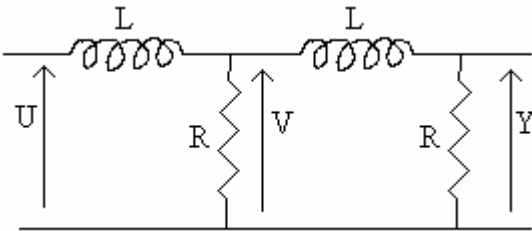
**Exemple:**

Considérons le circuit suivant,



$$\frac{Y}{U} = \frac{1}{1+\tau s} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

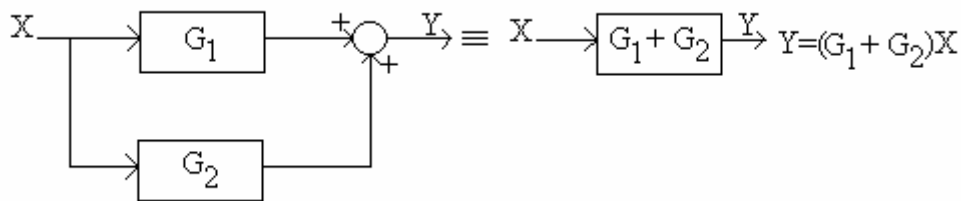
Maintenant, considérons le circuit suivant,



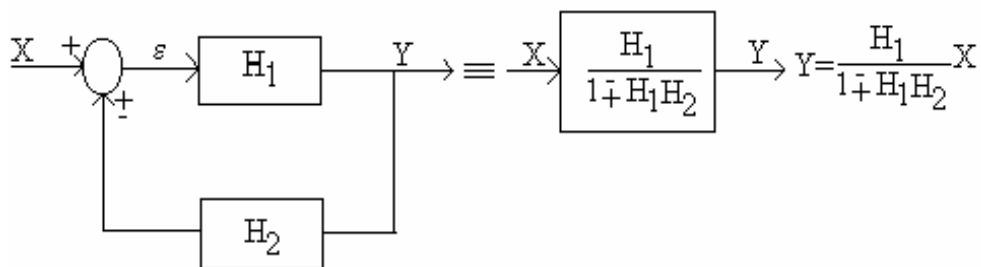
$$\frac{Y}{U} = \frac{R^2}{R^2 + 3RLs + L^2s^2} = \frac{1}{1 + 3\tau s + \tau^2 s^2} \neq \frac{1}{(1+\tau s)^2}$$

Le 2<sup>ème</sup> circuit LR charge la premier.

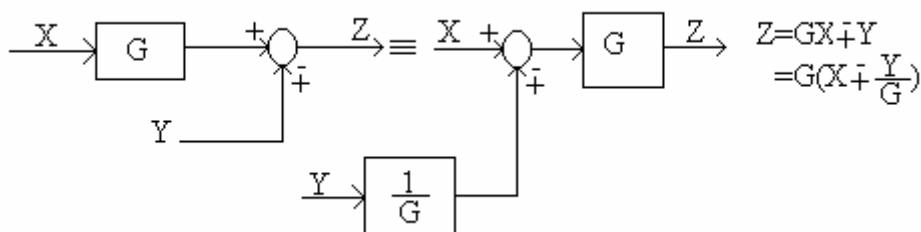
b) association d'éléments en parallèle :



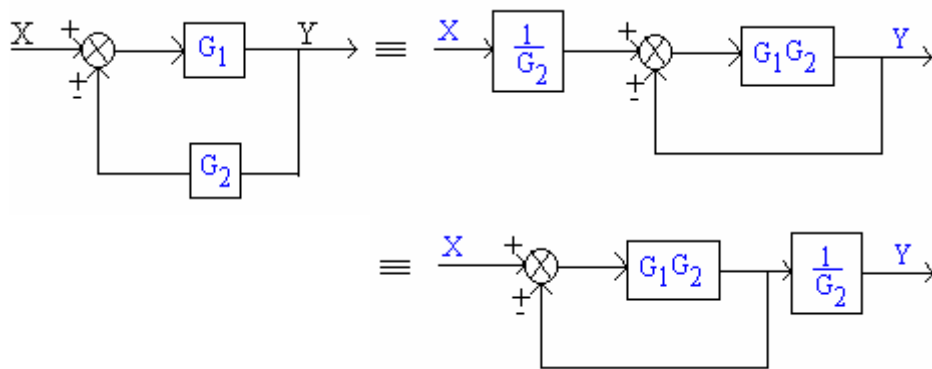
c) élimination d'une boucle de retour



d) déplacement d'un comparateur en mont d'un élément

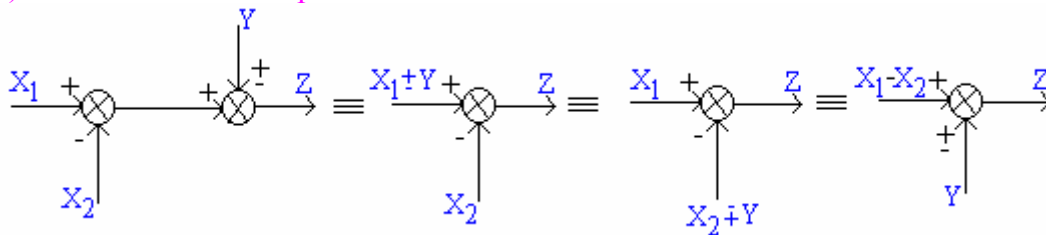


e) retrait d'un élément d'une boucle de retours



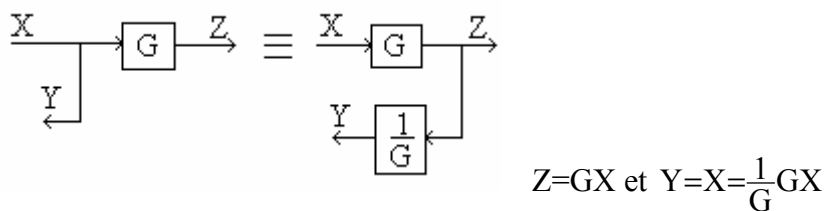
$$Y = G_1(X \pm G_2 Y) = G_1 X \pm G_1 G_2 Y \Rightarrow Y = \frac{G_1}{1 \mp G_1 G_2} X = \frac{G_1 G_2}{1 \mp G_1 G_2} \cdot \frac{X}{G_2}$$

f) élimination d'un comparateur



$$Z = X_1 - X_2 \pm Y = (X_1 \pm Y) - X_2 = X_1 - (X_2 \mp Y) = (X_1 - X_2) \pm Y$$

g) déplacement d'un élément en amont d'un nœud



$$Z = GX \text{ et } Y = X = \frac{1}{G} GX$$

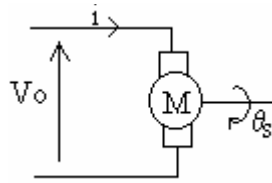
**V. Application : calcul de la fonction de transfert d'un moteur à courant continu**

Les moteurs à courant continu interviennent souvent comme organe d'action dans le domaine des asservissements. On trouve principalement deux types de commande :

- Commande à flux constant par la tension d'induit variable
- Commande à courant d'induit constant par le flux d'induit variable.

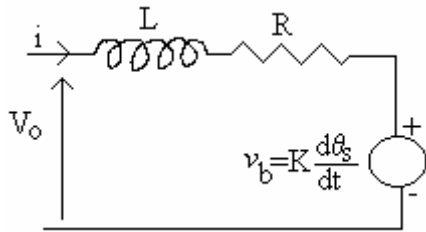
Considérons le cas où le moteur à courant continu est commandé par la tension d'induit variable. La tension  $V_0$  imposée aux bornes de l'induit est responsable du courant  $i$  qui traverse ce dernier.



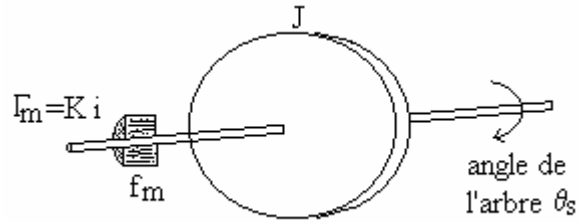


### V.1. Etablissement des équations différentielles

L'induit est modélisé de la manière suivante (en régime permanent, pas d'effet de la part de l'inductance) :



Circuit d'armature du moteur



Charge inerte

$L$  et  $R$  représentent respectivement, l'inductance et la résistance du circuit d'armature. L'inertie  $J$  s'exprime en  $(\text{kgm}^2)$ , représente la mesure des moments d'inertie de l'armature du moteur et de la charge, et  $f_m$  en  $(\text{Nm/rd/s})$ , est le frottement visqueux total agissant sur l'arbre de sortie. La tension  $v_b$  représente la force électromotrice (fem), elle est proportionnelle à la vitesse de rotation de l'arbre  $v_b = K \frac{d\theta_s}{dt}$ . Alors on peut écrire :

$$V_o = Ri + L \frac{di}{dt} + K \frac{d\theta_s}{dt} \quad (2)$$

La puissance totale absorbée par le moteur est  $P_a = V_o i$ . La partie de puissance susceptible d'être transformée en puissance mécanique est  $P_e = v_b i = K \frac{d\theta_s}{dt} i$ , appelée puissance électromagnétique. C'est elle qui donne naissance au couple électromagnétique  $\Gamma_m$  disponible sur l'arbre du moteur suivant la formule :

$$P_e = \Gamma_m \frac{d\theta_s}{dt} \Rightarrow \Gamma_m = Ki \quad (3)$$

Le mouvement de rotation du système constitué par le rotor du moteur et l'arbre de transmission est régi par l'équation :

$$\sum \text{couples} = \text{moment d'inertie} \times \text{l'accélération angulaire}$$

ce qui se traduit par :

$$\Gamma_m - f_m \dot{\theta}_s = J \ddot{\theta}_s$$

tenant compte de (3) on peut écrire :

$$Ki = J \ddot{\theta}_s + f_m \dot{\theta}_s \quad (4)$$

## V.2. Calcul de la fonction de transfert

Pour calculer la fonction de transfert, on utilise la transformée de Laplace, en mettant de côté les conditions initiales ( $\hat{\theta}_s = L(\theta_s)$ ,  $I = L(i)$  et  $\hat{V}_o = L(V_o)$ ).

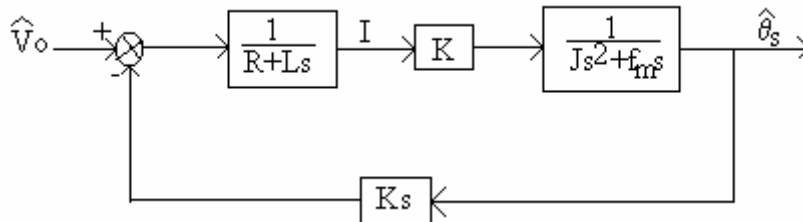
L'équation (4) donne :

$$KI = (Js^2 + f_m s) \hat{\theta}_s \Rightarrow \hat{\theta}_s = K \frac{1}{Js^2 + f_m s} I \quad (5)$$

A partir de l'équation (2) on trouve,

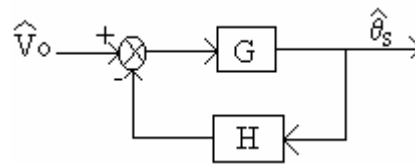
$$\hat{V}_o = (R + Ls)I + Ks\hat{\theta}_s \Rightarrow I = \frac{1}{R + Ls} [\hat{V}_o - Ks\hat{\theta}_s] \quad (6)$$

A partir des relations (5) et (6) on peut déduire le schéma fonctionnel suivant pour le moteur à courant continu commandé par l'induit :



En notant par G la fonction de transfert de la chaîne directe et par H celle de la chaîne de retour on a :

$$G = \frac{K}{(R + Ls)(Js^2 + f_m s)} \text{ et } H = Ks$$



On obtient la forme canonique du système asservi (moteur). Alors la fonction de transfert du moteur est donnée par :

$$F(s) = \frac{\hat{\theta}_s}{\hat{V}_o} = \frac{G}{1 + GH} = \frac{K}{(R + Ls)(Js^2 + f_m s)} \frac{1}{1 + \frac{K^2 s}{(R + Ls)(Js^2 + f_m s)}}$$

Ce qui donne :

$$F(s) = \frac{K}{(R + Ls)(Js^2 + f_m s) + K^2 s}$$

$$= \frac{K}{s[LJs^2 + (RJ + Lf_m)s + Rf_m + K^2]}$$

$$= \frac{\frac{K}{Rf_m + K^2}}{s \left[ 1 + \frac{RJ + Lf_m}{Rf_m + K^2} s + \frac{LJ}{Rf_m + K^2} s^2 \right]}$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$F(s) = \frac{\alpha}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}$$

En général, pour un moteur à courant continu, on suppose que la self-inductance est négligeable et  $Rf_m \ll K^2$ , alors la fonction de transfert se réduit à :

$$F(s) = \frac{\alpha}{s(1 + \tau_m s)} \text{ avec } \alpha = \frac{1}{K} \text{ et } \tau_m = \frac{RJ}{K^2}$$

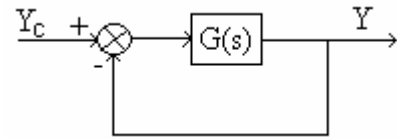
$\tau_m$  est la constante de temps électromécanique du moteur.

## VI. Détermination graphique de la FTBF

### VI.1. Transformation boucle ouverte - boucle fermée

La fonction de transfert d'un système asservi à retour unitaire est donnée par

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$



La réponse fréquentielle  $H(jw)$  est donnée par:  $H(jw) = \frac{G(jw)}{1 + G(jw)}$

En régime harmonique,  $G(jw)$  peut s'exprimer sous la forme  $G(jw) = A(w) \cdot e^{j\varphi(w)}$  où  $A(w) = |G(jw)|$  et  $\varphi(w) = \arg[G(jw)]$ , sont des fonctions de la pulsation  $w$ .

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit donc :

$$\begin{aligned} H(jw) &= \frac{A(\cos\varphi + j\sin\varphi)}{1 + A\cos\varphi + jA\sin\varphi} = \frac{A(\cos\varphi + j\sin\varphi)(1 + A\cos\varphi - jA\sin\varphi)}{(1 + A\cos\varphi + jA\sin\varphi)(1 + A\cos\varphi - jA\sin\varphi)} \\ &= A \frac{(\cos\varphi + j\sin\varphi + A\cos^2\varphi + jA\sin\varphi\cos\varphi - jA\sin\varphi\cos\varphi + A\sin^2\varphi)}{(1 + A\cos\varphi)^2 + A^2\sin^2\varphi} = A \frac{(A + \cos\varphi + j\sin\varphi)}{1 + A^2 + 2A\cos\varphi} \end{aligned}$$

En régime harmonique  $H(jw)$  est également un nombre complexe que l'on peut exprimer sous la forme  $H(jw) = B(w) \cdot e^{j\psi(w)}$  avec :

- $B(w) = |H(jw)| = \frac{A}{\sqrt{1 + A^2 + 2A\cos\varphi}}$
- $\psi(w) = \arg[H(jw)] = \arctan \frac{\sin\varphi}{A + \cos\varphi}$

**Conclusion:** pour tout  $\omega_i$ , à un point du lieu de transfert en boucle ouverte de coordonnées  $[A(\omega_i), \varphi(\omega_i)]$  correspond un point du lieu de transfert en boucle fermée de coordonnées  $[B(\omega_i), \psi(\omega_i)]$ .

Pour passer d'un point du lieu de transfert en boucle ouverte au point correspondant en boucle fermée, On trace:

- le lieu des points pour lesquels  $B_{dB} = 20 \log \frac{A}{\sqrt{1+A^2+2A \cos \varphi}} = C^{te}$ , appelés **contours d'amplitude**.
- le lieu des points pour lesquels  $\psi = \arctan \frac{\sin \varphi}{A + \cos \varphi} = C^{te}$ , appelés **contours de phase**.

On obtient ainsi l'abaque de Black - Nichols figurant ci-dessous. Les contours fermés représentent les contours d'amplitude, les autres les contours de phase.

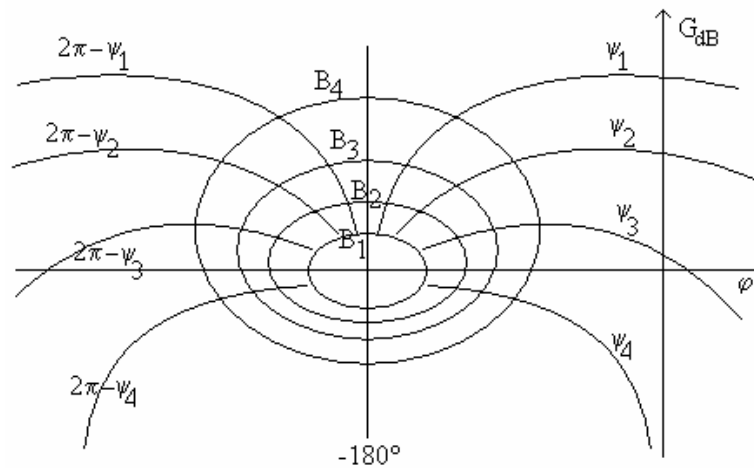


Figure: Abaque de Black Nichols

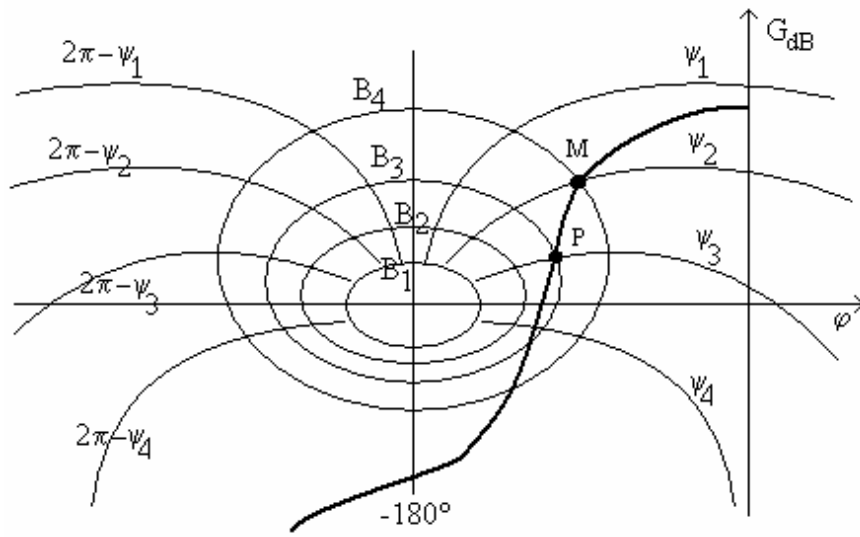
Pour réaliser la transformation Boucle ouverte  $\rightarrow$  Boucle fermée, il suffit de tracer dans ce plan la F.T.B.O.  $G(j\omega)$ .

## VII.2. Détermination graphique de la FTBF

On trace le lieu de transfert en boucle ouverte dans le plan de Black. En un point M quelconque du lieu de la FTBO, correspondant à la pulsation  $\omega_M$ , on lit :

- Sur les axes, le gain et la phase en boucle ouverte :  $\begin{cases} G_{BO} = A_M \\ \varphi_{BO} = \varphi_M \end{cases}$
- Les valeurs des contours d'amplitude et de phase passant par M (ici  $B_4$  et  $\psi_2$ ). Donc, au point M de la boucle ouverte correspond le point M' de la boucle fermée tel que le gain et la phase sont:  $\begin{cases} B = B_4 = |H(j\omega)|_{dB} \\ \psi = \psi_2 \end{cases}$ .

On voit de même qu'au point P correspond le point P' de coordonnées :  $\begin{cases} B_P = B_3 \\ \psi_P = \psi_3 \end{cases}$



# Chapitre 2: Analyse des systèmes de base

## I. Systèmes de premier ordre

D'une manière générale, un système du premier ordre à constante de temps obéit à une équation telle que :

$$\tau \dot{y} + y = Ku \quad (1)$$

$\tau$  est la constante de temps du système,  $K$  est le gain statique (pour  $u(t)=u_0=cte$ ,  $y(t)=Ku(t)$  lorsque le système n'évolue pas ( $dy/dt=0$ )).

Par application la transformation de Laplace à l'équation (1) on trouve la fonction de transfert du système :

$$H(s) = \frac{K}{1 + \tau s}$$

### I.1. Analyse fréquentielle

C'est la réponse à une sinusoïde  $u(t)=A\sin(\omega t)$ . On peut facilement montrer que la réponse  $y(t)$  est donnée par:

$$y(t) = A\rho(\omega)\sin(\omega t + \varphi)$$

Avec  $\rho(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  sont le module et l'argument de la fonction de transfert. On peut conclure que la réponse à une sinusoïde est une sinusoïde de même pulsation mais déphasée de  $\varphi$ . L'étude de la réponse harmonique se réduit généralement à l'étude de  $\rho(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$ . Ces deux paramètres sont donnés par :

$$\rho(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \quad \text{et} \quad \varphi(\omega) = \text{Arg}(H(j\omega)) = -\text{Arctg}(\omega\tau)$$

Les courbes de ces deux grandeurs ont un aspect très différent suivant le mode de représentation.

#### I.1.1. Diagramme de Nyquist

La partie réelle  $\text{Re}(H(j\omega))$  et la partie imaginaire  $\text{Im}(H(j\omega))$  sont portées respectivement en abscisse et en ordonnée. On représente le lieu de l'extrémité du vecteur image  $H$  lorsque la pulsation varie de 0 à l'infinie.

$$\text{Dans le cas d'un système de premier ordre : } H(j\omega) = \frac{K}{1 + j\tau\omega} = \frac{K(1 - j\tau\omega)}{1 + \tau^2\omega^2}$$

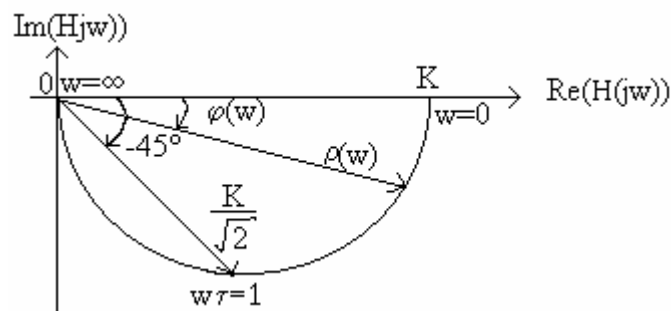
$$\operatorname{Re}H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau^2 \omega^2} \text{ et } \operatorname{Im}H(j\omega) = -\frac{K\tau\omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \quad \forall \omega \in [0, \infty).$$

$$\operatorname{Re}H(j\omega) = \frac{K}{1 + \tau^2 \omega^2} \text{ et } \operatorname{Im}H(j\omega) = -\frac{K\tau\omega}{1 + \tau^2 \omega^2} \quad \forall \omega \in [0, \infty)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}H(j\omega) = -\tau \omega \operatorname{Re}H(j\omega) &\Rightarrow [\operatorname{Im}H(j\omega)]^2 = \tau^2 \omega^2 [\operatorname{Re}H(j\omega)]^2 \\ &= \frac{K - \operatorname{Re}H(j\omega)}{\operatorname{Re}H(j\omega)} [\operatorname{Re}H(j\omega)]^2 \\ &= -([\operatorname{Re}H(j\omega)]^2 - K \operatorname{Re}H(j\omega)) \\ &= -\left([\operatorname{Re}H(j\omega)]^2 - K \operatorname{Re}H(j\omega) + \frac{K^2}{4}\right) + \frac{K^2}{4} \\ &= -\left(\operatorname{Re}H(j\omega) - \frac{K}{2}\right)^2 + \frac{K^2}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left(\operatorname{Re}H(j\omega) - \frac{K}{2}\right)^2 + (\operatorname{Im}H(j\omega))^2 = \frac{K^2}{4}$$

C'est l'équation d'un cercle de centre  $\left(\frac{K}{2}, 0\right)$  et de rayon  $\frac{K}{2}$ . D'où le diagramme de Nyquist



### I.1.2. Diagramme de Bode

On définit le module en décibels par :  $|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\text{Log}_{10}(|H(j\omega)|)$ . On appelle diagramme (ou représentation) de Bode, l'ensemble des deux courbes de réponse fréquentielle :

- courbe de gain  $|H(j\omega)|_{\text{dB}}(\text{Log}(\omega))$ , en échelle logarithmique .
- courbe de phase  $\varphi(\text{Log}(\omega))$ , en échelle semi-logarithmique.

L'unité utilisée pour l'abscisse  $\text{Log}(\omega)$  ( éventuellement  $\text{Log}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$  ) est la décade qui caractérise un rapport de pulsation (ou de fréquence) égale à 10.

D'une manière générale, si la fonction de transfert peut être écrite sous forme d'un produit :

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)\dots H_n(j\omega)$$

alors

$$|H(j\omega)| = |H_1(j\omega)||H_2(j\omega)|\dots|H_n(j\omega)|$$

ce qui donne

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} = |H_1(j\omega)|_{\text{dB}} + |H_2(j\omega)|_{\text{dB}} + \dots + |H_n(j\omega)|_{\text{dB}}$$

de même nous avons pour la phase :

$$\begin{aligned}\varphi(\omega) &= \text{Arg}(H(j\omega)) = \text{Arg}(H_1(j\omega)) + \text{Arg}(H_2(j\omega)) + \dots + \text{Arg}(H_n(j\omega)) \\ &= \varphi_1(H_1) + \varphi_2(H_2) + \dots + \varphi_n(H_n)\end{aligned}$$

Par conséquent, le diagramme de Bode de  $H(j\omega)$  peut être obtenu par la somme des diagrammes de Bode des  $n$  fonctions de transfert  $H_1(j\omega), H_2(j\omega), \dots, H_n(j\omega)$ .

### 1.1.2.1. Courbe de gain

Remarquons que  $H(j\omega)$  peut s'écrire sous la forme  $H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)$  avec

$$H_1(j\omega) = K = \text{cte} \text{ et } H_2(j\omega) = \frac{1}{1 + \tau s}. \text{ Donc on a } |H(j\omega)|_{\text{dB}} = |H_1(j\omega)|_{\text{dB}} + |H_2(j\omega)|_{\text{dB}}.$$

- $|H_1(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\text{Log}_{10}(K) = \text{cte}$
- $|H_2(j\omega)|_{\text{dB}} = 20\text{Log}_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2\omega^2}}\right) = -10\text{Log}_{10}(1 + \tau^2\omega^2)$
- pour  $\omega \rightarrow 0$  ( $\omega \ll \omega_c = \frac{1}{\tau}$ ),  $|H_2(j\omega)|_{\text{dB}} = -10\text{Log}_{10}(1) = 0 \Rightarrow$  asymptote basse fréquence est une droite horizontale.
- Pour  $\omega \rightarrow \infty$  ( $\omega \gg \omega_c = \frac{1}{\tau}$ ),  $|H_2(j\omega)|_{\text{dB}} = -20\text{Log}_{10}(\tau\omega) \Rightarrow$  asymptote haute fréquence est une droite oblique dont on détermine la pente.

**Sur une décade** : si  $\omega$  varie de  $\omega_1$  à  $\omega_2 = 10\omega_1$ ,

$$\begin{aligned}|H_2(j\omega_2)|_{\text{dB}} - |H_2(j\omega_1)|_{\text{dB}} &= -20\text{Log}_{10}(\omega_2\tau) + 20\text{Log}_{10}(\omega_1\tau) \\ &= -20\text{Log}_{10}\left(\frac{\omega_2\tau}{\omega_1\tau}\right) \\ &= -20\text{Log}_{10}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) \\ &= -20\text{Log}_{10}(10) \\ &= -20\text{dB}\end{aligned}$$

On dit qu'on a une droite de pente  $-20\text{dB/décade}$ .

**Sur une octave** : si  $\omega$  varie de  $\omega_1$  à  $\omega_2 = 2\omega_1$ ,

$$|H_2(j\omega_2)|_{\text{dB}} - |H_2(j\omega_1)|_{\text{dB}} = -20\text{Log}_{10}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = -20\text{Log}_{10}(2) = -6\text{dB}$$

On dit qu'on a une droite de pente  $-6\text{dB/octave}$ .

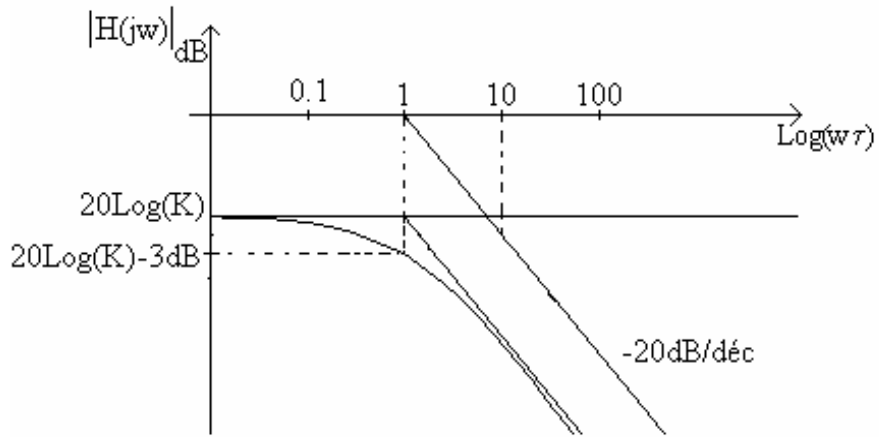
- **Point de rencontre des deux asymptotes** :  $-20\text{Log}(\omega\tau) = 0 \Rightarrow \omega\tau = 1 \Rightarrow \omega = \frac{1}{\tau}$ .

$\omega_c = \frac{1}{\tau}$  est appelée pulsation de coupure.



Pour  $w = w_c$ ,  $|H(jw)|_{dB} = 20\text{Log}(K) - 20\text{Log}\frac{1}{\sqrt{2}} = 20\text{Log}(K) - 3\text{dB}$ .

**Tracé du graphe :**



la bande passante est définie à une chute de gain de  $-3\text{dB}$  : B.P. =  $[0, w_c]$

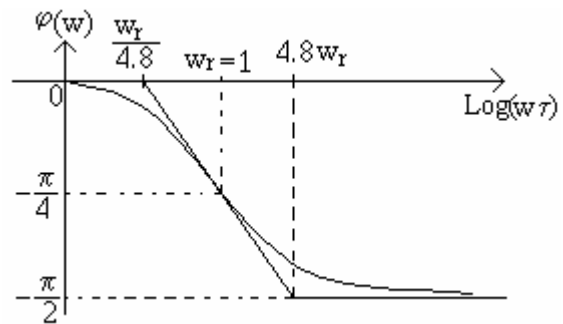
### I.1.2.2. Courbe de phase

$$\varphi(w) = -\text{arctg}(w\tau)$$

- $w\tau \rightarrow 0 \quad \varphi \rightarrow 0$
- $w\tau = 1 \quad \varphi = -\frac{\pi}{4}$
- $w\tau \rightarrow \infty \quad \varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$

le graphe est donnée par la figure ci-contre

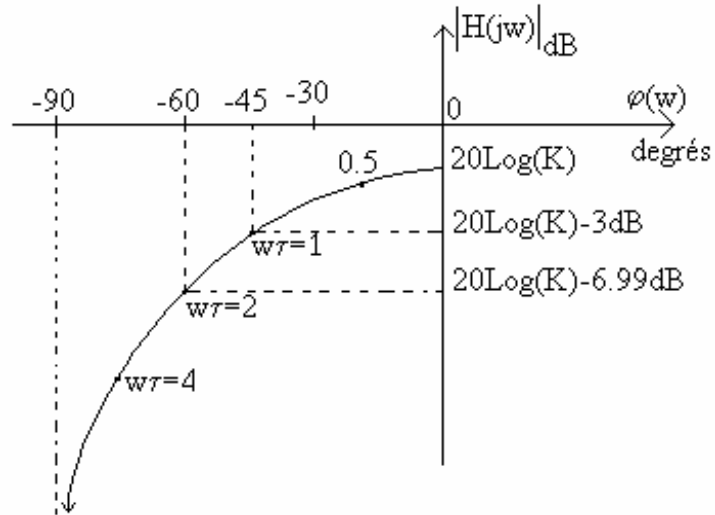
où  $w_r = \frac{w}{w_c}$ .



### I.1.3. Diagramme de Black Nichols

Le module de  $H(j\omega)$  exprimé en décibels est représenté en fonction de l'argument de  $H(j\omega)$  exprimé en degrés.

La courbe obtenue est graduée avec les valeurs successives de  $\omega$  (ou de  $\omega_r = \omega\tau$  pulsation réduite). Les mêmes règles d'addition que pour le plan de Bode s'appliquent lorsque  $H(j\omega)$  est le produit de plusieurs fonctions de transfert.



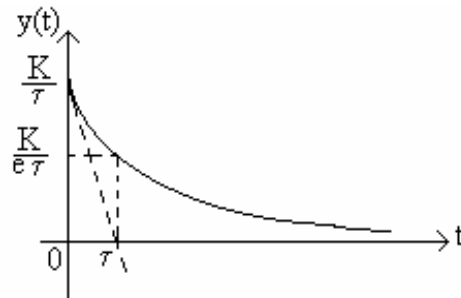
## I.2. Analyse temporelle

### I.2.1. Réponse impulsionnelle

$u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = 1$ , alors,

$$Y(s) = \frac{K}{1 + \tau s} = \frac{K}{\tau} \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$\Rightarrow y(t) = \frac{K}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \Gamma(t)$  avec  $\Gamma(t)$  est la fonction échelon unité.



Equation de la tangente :  $y(t) = \frac{K}{\tau} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)$

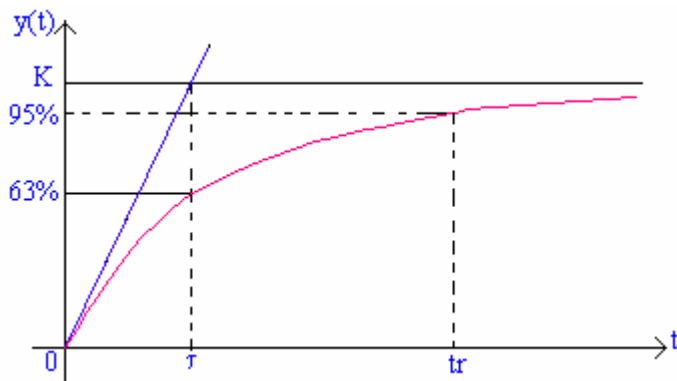
### I.2.1. Réponse indicielle (réponse à un échelon unité)

La transformée de Laplace de la fonction échelon unité est  $\frac{1}{s}$  donc

$$Y(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)} = K \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{\tau}} \right)$$

par conséquent,

$$y(t) = K \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \Gamma(t)$$



Le régime transitoire est caractérisé par les paramètres suivants :

- Le temps de réponse  $t_r$  : temps au bout duquel le système atteint son régime définitif à 5% près. On peut montrer que  $t_r = 3\tau$ .

- Le temps de monté  $t_m$  : c'est le temps que met la réponse indicielle pour aller de 10% à 90%. On montre que  $t_m = \tau \ln(9) = 2.2\tau$

### Remarque

- la fréquence de coupure  $f_c = \frac{w_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\tau}$
- Le produit  $t_m f_c = \frac{2.2}{2\pi} = 0.35 = \text{cte}$  indépendante de  $\tau$
- Plus  $\tau$  est faible, plus  $t_r$  est faible et plus le système est rapide. Au contraire, plus  $\tau$  est faible plus la fréquence de coupure est grande, donc la bande passante est large. On peut donc conclure qu'un système de premier ordre est d'autant rapide que sa bande passante est large.

### I.2.3. Réponse à une rampe : $u(t)=at$

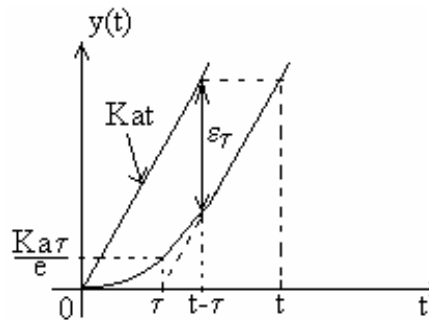
$$U(s) = \frac{a}{s^2} \text{ et donc } Y(s) = \frac{Ka}{s^2(1+\tau s)}$$

décomposition en éléments simples donne :

$$Y(s) = Ka \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{\tau}{s} + \frac{\tau}{s + \frac{1}{\tau}} \right]$$

Il vient alors,

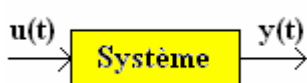
$$y(t) = Ka \left[ t - \tau + \tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right] \Gamma(t)$$



Pour  $t \gg \tau$ , c'est à dire en régime permanent :  $y(t) \approx Ka(t - \tau)$ .

## II. Systèmes du second ordre

un système linéaire est dit du deuxième ordre lorsque l'équation différentielle qui régit son comportement est linéaire de type :



$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = bu(t)$$

En pratique on présente l'équation sous forme réduite :

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\xi w_0 \frac{dy(t)}{dt} + w_0^2 y(t) = Kw_0^2 u(t)$$

où,

$$w_0 = \text{pulsation propre non amortie ou pulsation naturelle (s'exprime en rd/s)} = \sqrt{\frac{a_0}{a_2}}$$

$$\xi = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0 a_2}} = \text{coefficient d'amortissement}$$

$$K = \frac{b}{a_0} = \text{gain statique}$$

$$\text{Fonction de transfert : } H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Kw_0^2}{s^2 + 2\xi w_0 s + w_0^2}$$

## II.1. Pôles de la fonction de transfert

Les pôles de  $H(s)$  sont obtenus par la résolution de l'équation  $s^2 + 2\xi w_0 s + w_0^2 = 0$ . Le discriminant réduit est donné par  $\Delta' = w_0^2(\xi^2 - 1)$ . Il y a donc trois cas à envisager.

a)  $|\xi| < 1 \Rightarrow \Delta' < 0$  : deux pôles complexes conjugués :

$$s_1 = -w_0 \left( \xi - j\sqrt{1-\xi^2} \right); \quad s_2 = -w_0 \left( \xi + j\sqrt{1-\xi^2} \right)$$

Ils possèdent les propriétés suivantes :

- $|s_1| = |s_2| = w_0$  indépendants de  $\xi$ ;  $s_1 s_2 = w_0^2$ .
- Si  $\xi = 0$  alors  $s_1 = jw_0$  et  $s_2 = -jw_0$  : les deux pôles sont imaginaires purs.
- Si  $\xi > 0$  les deux pôles sont à gauche de l'axe imaginaire, cela correspond à un amortissement réel.
- Si  $\xi < 0$  les deux pôles sont à droite de l'axe imaginaire, cela correspond à une amplification.

b)  $|\xi| > 1 \Rightarrow \Delta' > 0$  : deux pôles réels négatifs si  $\xi > 0$  et positifs si  $\xi < 0$ .

$$s_1 = -w_0 \left( \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right); \quad s_2 = -w_0 \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right)$$

c)  $|\xi| = 1 \Rightarrow \Delta' = 0$  : racine double  $s_{1,2} = -w_0$

## II.2. Réponses temporelles

### II.2.1. Réponse indicielle ( $u(t) = \Gamma(t)$ )

$$U(s) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{Kw_0^2}{s[s^2 + 2\xi w_0 s + w_0^2]} = \frac{Kw_0^2}{s(s-s_1)(s-s_2)}$$

a)  $|\xi| > 1$  : racines réelles distinctes

$$s_1 = -w_0 \left( \xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right); \quad s_2 = -w_0 \left( \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \text{ et } s_1 - s_2 = 2w_0 \sqrt{\xi^2 - 1}$$

La décomposition en éléments simples de  $Y(s)$  donne,

$$Y(s) = K \left[ \frac{1}{s} + \frac{1}{s_1 - s_2} \left( \frac{s_2}{s - s_1} - \frac{s_1}{s - s_2} \right) \right]$$

En prenant la transformée de Laplace inverse on trouve :

$$y(t) = K \left[ 1 + \frac{1}{s_1 - s_2} (s_2 e^{s_1 t} - s_1 e^{s_2 t}) \right] \Gamma(t)$$

L'évolution de  $y(t)$  et de sa dérivée, qui n'est autre que la réponse impulsionnelle,

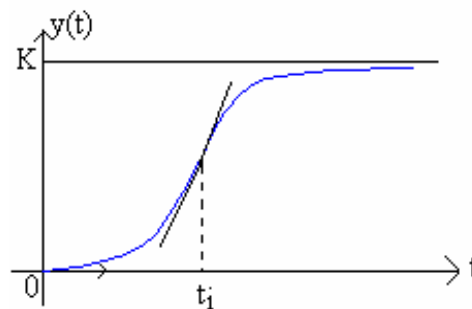
$$y(t) = K \frac{s_1 s_2}{s_1 - s_2} (e^{s_1 t} - e^{s_2 t}) \Gamma(t)$$

dépendent des valeurs des racines  $s_1$  et  $s_2$ .

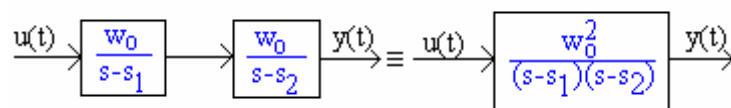
Remarquons que  $e^{s_1 t}$  et  $e^{s_2 t}$  convergent à 0 si  $s_1$  et  $s_2$  sont négatifs (racines réelles) ou  $\text{Re}(s_1) < 0$  et  $\text{Re}(s_2) < 0$  (racines complexes) ce qui correspond à  $\xi > 0$ . Dans le cas où  $\xi < 0$ , il y a divergence de la réponse (instabilité). Nous ne considérons par la suite que les valeurs de  $\xi > 0$ .

La tangente à l'origine est horizontale, pour  $t \rightarrow \infty$ ,  $y(t) \rightarrow K$ . Le temps  $t_i$  auquel la courbe s'infléchit est donné par :

$$\begin{aligned} \ddot{y} = 0 &\Rightarrow s_1 e^{s_1 t_i} = s_2 e^{s_2 t_i} \\ \Rightarrow t_i &= \frac{1}{s_1 - s_2} \ln \left( \frac{s_2}{s_1} \right) \text{ (les deux racines} \\ &\text{sont de même signe)} \end{aligned}$$



On remarque qu'après  $t_i$ , le système se comporte comme un système de premier ordre. En effet, deux systèmes de premier ordre en cascade forment un système de deuxième ordre avec des racines réelles.



### b) $|\xi| = 1$ : racine double

$$s_1 = s_2 = -w_0, \text{ dans ce cas, } Y(s) = \frac{K w_0^2}{s(s + w_0)^2} = K \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + w_0} - \frac{w_0}{(s + w_0)^2} \right], \text{ soit,}$$

$$y(t) = K [1 - (1 + w_0 t) e^{-w_0 t}] \Gamma(t)$$

la réponse a même allure que la précédente. Dans ces deux cas, le régime est apériodique. En pratique, ce régime ne présente pas d'intérêt car il est lent à s'établir.

### c) $|\xi| < 1$ : racines complexes conjuguées

$$s_1 = -w_0 (\xi - j\sqrt{1 - \xi^2}); s_2 = -w_0 (\xi + j\sqrt{1 - \xi^2}) \text{ et } s_1 - s_2 = 2j w_0 \sqrt{1 - \xi^2} \text{ alors,}$$

$$y(t) = K \left[ 1 + \frac{1}{2j\omega_o \sqrt{1-\xi^2}} \left( s_2 e^{-\omega_o \xi t} e^{+j\omega_o \sqrt{1-\xi^2} t} - s_1 e^{-\omega_o \xi t} e^{-j\omega_o \sqrt{1-\xi^2} t} \right) \right]$$

$$y(t) = K \left[ 1 - e^{-\omega_o \xi t} \left( \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \left( \frac{e^{+j\omega_o \sqrt{1-\xi^2} t} - e^{-j\omega_o \sqrt{1-\xi^2} t}}{2j} \right) + \left( \frac{e^{+j\omega_o \sqrt{1-\xi^2} t} + e^{-j\omega_o \sqrt{1-\xi^2} t}}{2} \right) \right) \right]$$

$$y(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-\omega_o \xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left( \xi \sin(\omega_o \sqrt{1-\xi^2} t) + \sqrt{1-\xi^2} \cos(\omega_o \sqrt{1-\xi^2} t) \right) \right]$$

On remarque que  $\xi^2 + (\sqrt{1-\xi^2})^2 = 1$  donc on peut poser  $\sin(\psi) = \sqrt{1-\xi^2}$  et  $\cos(\psi) = \xi$  et la solution devient :

$$y(t) = K \left[ 1 - \frac{e^{-\omega_o \xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_o \sqrt{1-\xi^2} t + \psi) \right]$$

$$y(t) \text{ évolue entre } K \left[ 1 - \frac{e^{-\omega_o \xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \right] \text{ et } K \left[ 1 + \frac{e^{-\omega_o \xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \right].$$

Si  $\xi < 0$  l'enveloppe croit vers l'infini; divergence (instabilité), et si  $\xi > 0$  l'enveloppe converge vers K; oscillations amorties.

**Graphes :**

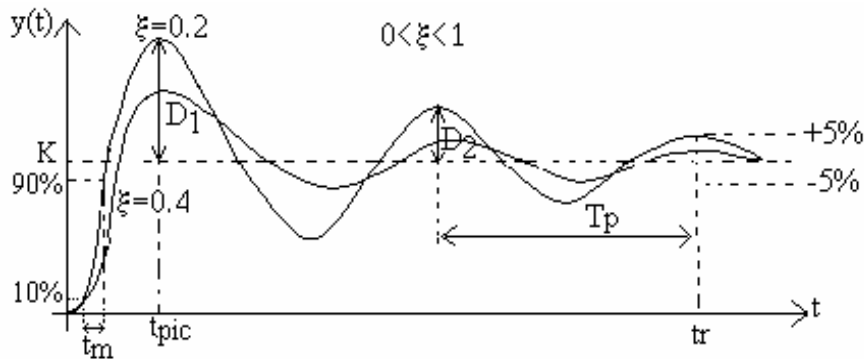


figure: réponse indicielle pour  $0 < \xi < 1$

### Paramètres de performances

- pseudo période :  $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$  avec  $\omega_p = \omega_o \sqrt{1-\xi^2}$  =pseudo pulsation

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_o \sqrt{1-\xi^2}} = \frac{T_o}{\sqrt{1-\xi^2}}; T_o = \text{période propre}$$

- Dépassements :

- Le premier dépassement  $D_1\%$  : C'est le pourcentage de dépassement par rapport à la

$$\text{valeur finale stabilisée } D_1\% = \frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100; y_{\max} \text{ est obtenue en calculant}$$

$\frac{dy(t)}{dt} = 0$  ce qui aboutit à  $t = \frac{n\pi}{\omega_p}$  ( $n=1,2,3,\dots$ ). Pour  $n=1$  on a le premier

$$\text{dépassement : } t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_p} \Rightarrow D_1\% = 100e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

- Pour  $n=3$  on a le deuxième dépassement  $D_2\% = 100e^{-\frac{3\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$

- Le temps de réponse  $t_r$  : c'est le temps requis pour atteindre le régime définitif à 5%.
- Le temps de montée  $t_m$  : c'est l'intervalle de temps séparant les instants auxquels la réponse indicielle vaut 10% et 90% de la valeur finale.

### II.2.2. Réponse impulsionnelle : $u(t)=\delta(t)$

L'expression de la réponse impulsionnelle est donnée dans la section précédente, et qui donne pour  $0 < \xi < 1$

$$y(t) = K \frac{\omega_o e^{-\omega_o \xi t}}{2j\sqrt{1-\xi^2}} \left( e^{+j\omega_o \sqrt{1-\xi^2} t} - e^{-j\omega_o \sqrt{1-\xi^2} t} \right)$$

soit,

$$y(t) = K \frac{\omega_o e^{-\omega_o \xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_o \sqrt{1-\xi^2} t\right)$$

Courbe :

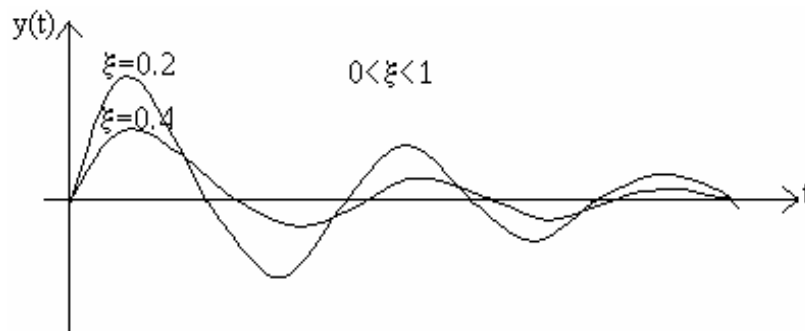


figure: réponse impulsionnelle pour  $0 < \xi < 1$

### III.3.3. Réponse à une rampe (réponse en vitesse): $u(t)=at\Gamma(t)$

$$U(s) = \frac{a}{s^2} \text{ et } Y(s) = \frac{aK\omega_o^2}{s^2(s^2 + 2\xi\omega_o s + \omega_o^2)}$$

- Cas où les pôles sont réels :

$$Y(s) = aK \left[ \frac{1}{s^2} + \frac{s_1 + s_2}{s_1 s_2} \frac{1}{s} - \frac{s_2^2}{s_1 s_2 (s_2 - s_1)} \frac{1}{s - s_1} + \frac{s_1^2}{s_1 s_2 (s_2 - s_1)} \frac{1}{s - s_2} \right]$$

$$\Rightarrow y(t) = aK \left[ t - \frac{2\xi}{\omega_o} + \frac{1}{\omega_o^2 (s_2 - s_1)} \left( s_1^2 e^{s_2 t} - s_2^2 e^{s_1 t} \right) \right]$$

On peut voir que :  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = aK \left[ t - \frac{2\xi}{w_0} \right]$ .

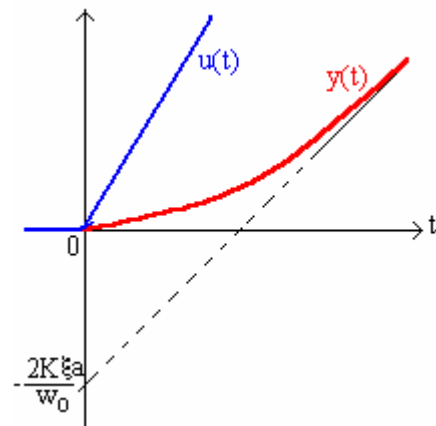
• **Cas où les pôles sont complexes :**

$$Y(s) = aK \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{2\xi}{w_0 s} + \frac{\frac{2\xi}{w_0} s + 4\xi^2 - 1}{s^2 + 2\xi w_0 s + w_0^2} \right] = aK \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{2\xi}{w_0 s} + \frac{2\xi}{w_0} \frac{s + \frac{w_0(4\xi^2 - 1)}{2\xi}}{(s + \xi w_0)^2 + w_0^2(1 - \xi^2)} \right]$$

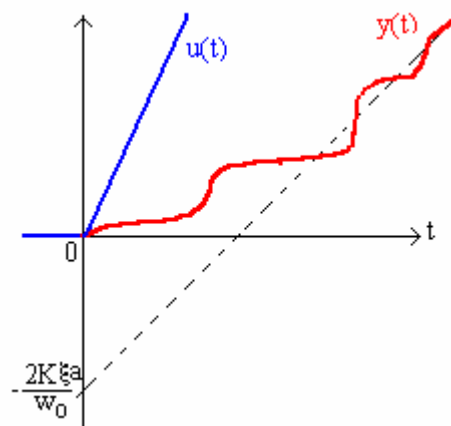
$$\Rightarrow y(t) = aK \left[ t - \frac{2\xi}{w_0} + \frac{e^{-\xi w_0 t}}{w_0 \sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left( w_0 \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi \right) \right] \text{ avec } \varphi = \arctg \left( \frac{2\xi \sqrt{1 - \xi^2}}{2\xi^2 - 1} \right)$$

Il est clair que :  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = aK \left[ t - \frac{2\xi}{w_0} \right]$

### Courbes de réponse



Réponse dans le cas  $\xi \geq 1$



Réponse dans le cas  $\xi < 1$

On peut remarquer que les oscillations n'apparaissent que pour  $0 < \xi < 1$ .

### II.3. Réponse harmonique

Comme pour le cas des systèmes de premier ordre, on peut montrer que la réponse à une sinusoïde est une sinusoïde amplifiée de même fréquence mais déphasée. L'étude se ramène donc à celle de la fonction de transfert harmonique:

$$H(jw) = \frac{K}{1 - \frac{w^2}{w_0^2} + j2\xi \frac{w}{w_0}}$$

On pose  $u = \frac{w}{w_0}$  = pulsation réduite, la transmittance devient :

$$H(ju) = \frac{K}{1 - u^2 + j2\xi u}$$

Le module et l'argument de H sont donnés par :

$$|H(ju)| = \frac{K}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}} \text{ et } \varphi(u) = \text{Arg}(H(ju)) = -\arctg \left( \frac{2\xi u}{1 - u^2} \right)$$



Les formes des courbes de  $|H(j\omega)|$  et de  $\varphi(\omega)$  varient suivant les axes de référence. Pour une valeur donnée de  $\xi$ , les différentes représentations peuvent être réalisées de la même façon que pour les systèmes de premier ordre.

Nous rappelons ici quelques caractéristiques importantes des systèmes de deuxième ordre.

### II.3.1. Etude du gain

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}} = \frac{K}{D(u)}.$$

Calculons la dérivée de  $D(u)$  par rapport à  $u$  :

$$\begin{aligned} \frac{dD}{du} &= \frac{1}{2} \left[ (-4u(1-u^2) + 8\xi^2 u) \left( (1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &= \frac{2u(2\xi^2 - 1 + u^2)}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}} \end{aligned}$$

$$\frac{dD}{du} = 0 \Rightarrow u^2 - 1 + 2\xi^2 = 0$$

$$\Rightarrow u = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad \text{si } \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc pour  $\xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $|H(j\omega)|$  admet un maximum pour  $u = u_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$  (on peut vérifier que la dérivée seconde de  $D$  par rapport à  $u$  est positive). L'amplitude de résonance est donnée par :

$$|H(j\omega)|_{\max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Pour  $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$  la résonance disparaît. Alors on peut déduire les paramètres suivants :

➤ Pulsation de résonance :  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2}$  pour  $\xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On remarque que  $\omega_r < \omega_0$ , plus  $\xi$  est petit plus  $\omega_r$  s'approche de  $\omega_0$ . A la limite, lorsque  $\xi = 0$ ,  $\omega_r = \omega_0$ , le système devient un oscillateur libre.

➤ Facteur de résonance : On appelle facteur de résonance le rapport  $M = \frac{|H(j\omega)|_{\max}}{K}$ , soit :

$$M = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}, \quad \text{exprimé en décibels : } M_{dB} = 20\text{Log}|H(j\omega)|_{\max} - 20\text{Log}K.$$

Il est d'autant plus grand que  $\xi$  est petit. Un système peu amorti est fortement résonant.

- Facteur de qualité :  $Q = \frac{|H(j\omega)|_{\omega=\omega_0}}{K} = \frac{1}{2\xi}$ . Pour  $\xi < 0.1$ , M et Q sont pratiquement confondus ainsi que  $\omega_r$  et  $\omega_0$ . On montre que pour des oscillations assez faibles ( $\xi < 0.5$ ), le nombre de périodes complètes, celles dont l'amplitude est supérieure à 4% de la valeur de régime permanent est pratiquement égale à  $\frac{1}{2\xi}$ . Cette propriété permet d'estimer à vu de la réponse indicielle le facteur d'amortissement.
- Pulsation de coupure : Pour la pulsation de coupure  $\omega_c$ , le gain chute de 3dB, ce qui correspond à une division par  $\sqrt{2}$  du gain statique en valeurs naturelles.

$$\frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}} = \frac{K}{\sqrt{2}} \Rightarrow u^4 + 2u^2(2\xi^2 - 1) - 1 = 0$$

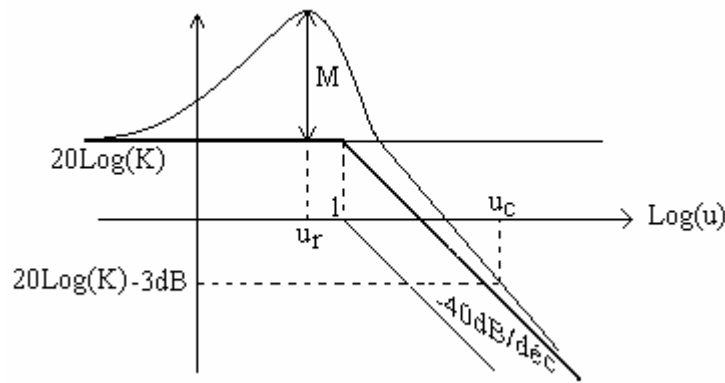
$$\Rightarrow u_c = \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{(2\xi^2 - 1)^2 + 1}}$$

$$\text{et par suite } \Rightarrow \omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{(2\xi^2 - 1)^2 + 1}}$$

### Courbe de gain

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\text{Log}(K) - 20\text{Log}\left(\sqrt{(1-u)^2 + 4\xi^2 u^2}\right)$$

On suppose que  $K > 1$ .



- Pulsation de coupure à 0dB (point de rencontre de la courbe avec l'axe des abscisses):

$$20\text{Log}(|H(j\omega)|) = 0 \Rightarrow |H(j\omega)| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{K}{\sqrt{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}} = 1$$

$$\Rightarrow K^2 = (1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2$$

$$\text{on pose } X = u^2 \Rightarrow X^2 + 2(2\xi^2 - 1)X + 1 - K^2 = 0$$

la solution est donnée par:  $u = \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{(2\xi^2 - 1)^2 - 1 + K^2}}$

la pulsation de croisement est donnée par:  $w_1 = w_0 \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{(2\xi^2 - 1)^2 - 1 + K^2}}$

on remarque que  $w_1 < w_c$  pour  $k < \sqrt{2}$ ,  $w_1 > w_c$  pour  $k > \sqrt{2}$ ,  $w_1 = w_c$  pour  $k = \sqrt{2}$ .

### II.3.2. Etude de la phase

$$\varphi(u) = -\text{arctg}\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right)$$

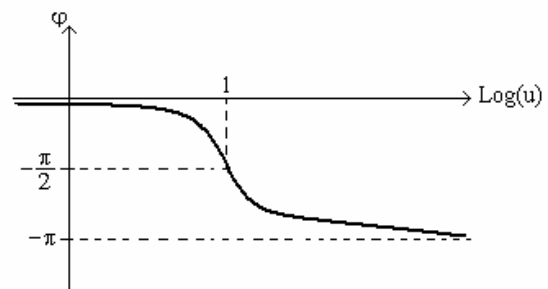
- Lorsque  $u \rightarrow 0$  ( $w \ll w_0$ )  $\varphi \rightarrow 0$
- Lorsque  $u = 1$  ( $w = w_0$ )  $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

Calculons la dérivée de  $\varphi$  par rapport à  $u$ , on applique la relation:  $\frac{d}{dy}(\text{arctg}(y)) = \frac{1}{1+y^2}$ .

$$\frac{d\varphi}{du} = -\frac{2\xi(1+u^2)}{(1-u^2)^2 + 4\xi^2 u^2}$$

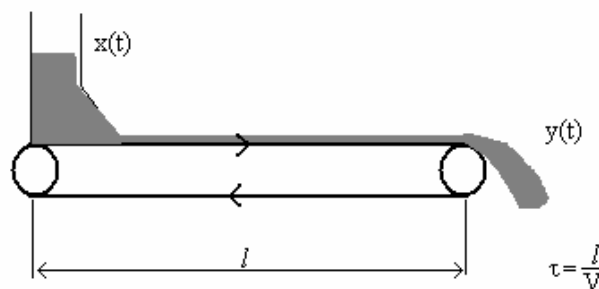
Puisque  $\frac{d\varphi}{du} < 0 \forall u$  alors la variation de  $\varphi$  est monotone décroissante. Donc,

- Lorsque  $u \rightarrow \infty$  ( $w \gg w_0$ )  $\varphi \rightarrow -\pi$



### III. Systèmes à retard pur

Un retard temporel apparaît dans de nombreux processus industriels, par exemple transport de matière au moyen d'un tapis roulant :



Si le moteur entraînant le tapis a une vitesse de rotation constante, il s'écoule un temps  $\tau$  constant entre l'arrivée de la matière sur le tapis roulant et l'endroit où s'effectue la sortie (pesée par exemple). Donc le débit  $y(t)$  mesuré représente le débit  $x(t)$  déposé sur le tapis  $\tau$  secondes plus tôt.

$$y(t) = x(t - \tau) \Rightarrow Y(s) = e^{-\tau s} X(s)$$

ainsi

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Y(s)}{X(s)} \frac{X(s)}{U(s)} = e^{-\tau s} H_1(s) \text{ avec } H_1(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$$

**Remarque** : En simulation de commande, il est parfois utile de disposer d'une bonne approximation du terme de retard par une fraction rationnelle :

$$e^{-\tau s} = 1 - \tau s + \frac{\tau^2 s^2}{2} - \frac{\tau^3 s^3}{3!} + \dots$$

On peut aussi utiliser les approximations de Padé :

$$\bullet \quad e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \frac{\tau s}{2}}{1 + \frac{\tau s}{2}} \quad \text{Ordre 1}$$

$$\bullet \quad e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \frac{\tau s}{2} + \frac{\tau^2 s^2}{12}}{1 + \frac{\tau s}{2} + \frac{\tau^2 s^2}{12}} \quad \text{Ordre 2}$$

$$\bullet \quad e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \frac{\tau s}{2} + \frac{\tau^2 s^2}{10} - \frac{\tau^3 s^3}{120}}{1 + \frac{\tau s}{2} + \frac{\tau^2 s^2}{10} + \frac{\tau^3 s^3}{120}} \quad \text{Ordre 3}$$

$$\bullet \quad e^{-\tau s} \approx \frac{1 - \frac{\tau s}{2} + \frac{3}{28} \tau^2 s^2 - \frac{\tau^3 s^3}{84} + \frac{\tau^4 s^4}{1680}}{1 + \frac{\tau s}{2} + \frac{3}{28} \tau^2 s^2 + \frac{\tau^3 s^3}{84} + \frac{\tau^4 s^4}{1680}} \quad \text{Ordre 4}$$

Ce sont quatre versions de plus en plus performantes mais à complexité croissante.

### Remarque

Dans le domaine temporel, les systèmes avec retard pur répondent après un certain délai. Dans le domaine fréquentiel, si ces systèmes sont excités par un signal sinusoïdal, les amplitudes se reproduisent sans distorsion tandis que la phase croît proportionnellement à la fréquence. C'est justement ce déphasage qui rend ce type de système comme un véritable «poison» et indésirable lorsqu'il est inséré dans une boucle de régulation car ils réduisent la stabilité (déplace à gauche du plan complexe le lieu de transfert en état ouvert)) et obligent alors l'instrumentiste à diminuer le gain au détriment évidemment de la précision et rapidité.

# Chapitre 3: Performances des systèmes asservis

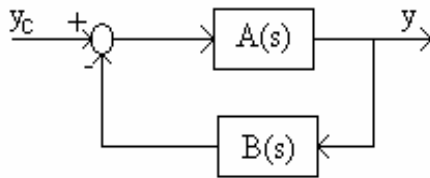
## I. Stabilité

**Définition 1** : On dit qu'un système est stable si la réponse à l'impulsion de Dirac tend vers zéro quand  $t$  tend vers l'infini.

**Théorème 1** : Un système est stable si et seulement si tous les pôles de sa fonction de transfert sont à partie réelle négative. Ils se situent tous strictement à gauche de l'axe imaginaire du plan complexe.

### Equation caractéristique d'un système asservis

Soit le système bouclé suivant :



- Fonction de transfert en boucle ouverte :  
 $G(s) = A(s)B(s)$ .
- Fonction de transfert en boucle fermée :  
 $H(s) = \frac{A(s)}{1 + A(s)B(s)}$ .

Les pôles de  $H(s)$  sont obtenus par la résolution de l'équation  $1+G(s)=0$ , appelée équation caractéristique. Donc à partir de la connaissance de la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(s)$ , on peut étudier la stabilité du système en boucle fermée.

### I.1 Critère de stabilité de Routh Hurwitz

Critère algébrique qui permet la détermination de la stabilité du système sans connaître les pôles de la fonction de transfert  $H(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$  : avec  $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$ .

#### I.1.1. Enoncé du critère

On suppose que  $a_n > 0$ . Alors, on construit le tableau de Routh suivant :

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$\dots$	Avec : $b_1 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{bmatrix}}{a_{n-1}}; \quad b_2 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{bmatrix}}{a_{n-1}};$ $b_3 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{bmatrix}}{a_{n-1}}; \dots$ $c_1 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}}{b_1}; \quad c_2 = -\frac{\det \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{bmatrix}}{b_1};$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$\dots$	
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	
$\vdots$	$\vdots$				
$s^1$	$q_1$	$q_2$			
$s^0$	$r_1$				

**Théorème de Routh :**

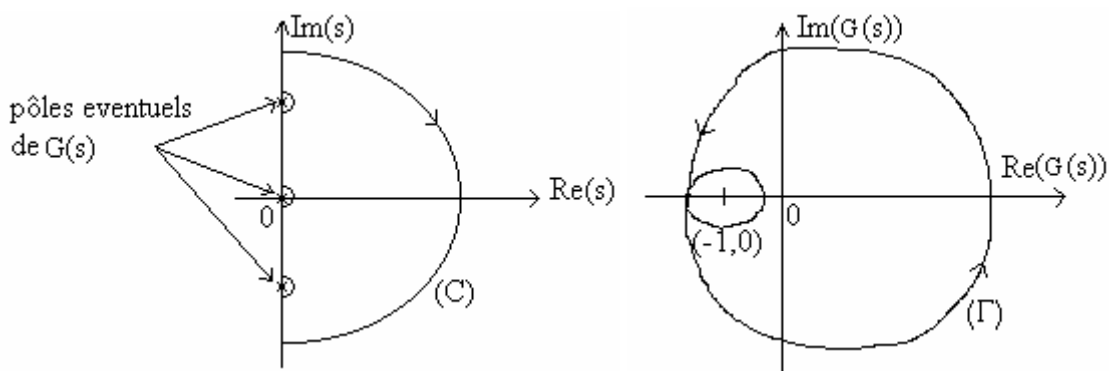
Le système est stable si et seulement si les éléments de la première colonne du tableau de Routh soient tous strictement positifs. Sinon, le nombre de changement de signes est égal au nombre de pôles à partie réelle positive.

**Remarque :** si certains  $a_i$  sont négatifs ou nuls,  $D(s)$  a des racines à partie réelle positive et donc le système est instable.

**I.2. Critère de stabilité de Nyquist**

**I.2.1. Contour d'exclusion de Nyquist**

Le contour d'exclusion de Nyquist appelé aussi contour de Bromwith est un contour fermé du plan des  $s$  qui enferme complètement le demi plan droit du plan des  $s$ . On prend un demi-cercle de rayon infini. Pour éviter les pôles éventuels de  $G(s)$  situés sur l'axe imaginaire, on fait passer le contour à droite de ces pôles par des petits cercles.



**I.2.2. Application du théorème de Cauchy :**

Quand le point  $s$  décrit la courbe  $(C)$  dans le sens des aiguilles d'une montre, le point d'affixe  $G(s)$ , situé sur la courbe  $(\Gamma)$  fait autour du point critique  $(-1,0)$  et dans le sens trigonométrique un nombre de tours  $N$  algébriquement donné par :

$$N = P - Z$$

où

P : est le nombre de pôles de  $G(s)$  à partie réelle positive

Z : est le nombre de zéros de  $[1+G(s)]$  à partie réelle positive

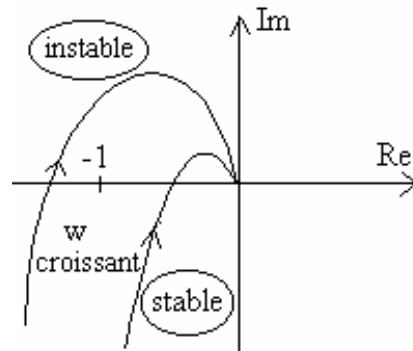
**Remarque :** La courbe ( $\Gamma$ ) décrite par  $G(s)$  est le lieu complet de Nyquist, encore nommé lieu de Nyquist – Cauchy de la fonction de transfert en boucle ouverte : c'est le diagramme de  $G(jw)$  lorsque  $w$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ .

### I.2.3. Règle de Nyquist

- 1- Etudier la stabilité de la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(s)$  et déterminer le nombre P de ses pôles à partie réelle strictement positive.
- 2- Tracer le diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte  $G(jw)$  pour  $w$  variant de  $-\infty$  à  $+\infty$ .
- 3- Calculer le nombre de tours (Comptés algébriquement dans le sens trigonométrique), soit N, que fait autour du point critique d'affixe  $(-1,0)$ , le lieu complet de Nyquist parcouru dans les sens croissant de  $-\infty$  à  $+\infty$ .
- 4- En déduire  $Z=P-N$  c'est à dire le nombre de pôles instables de la fonction de transfert en boucle fermée.

### I.3. Critère simplifié de Nyquist (critère du revers)

Si le système en boucle ouverte est à déphasage minimale (sans pôle ni zéro instable), le système en boucle fermée est stable si le tracé de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte, décrit dans le sens des pulsations croissantes de  $w = 0^+$  à  $+\infty$  laisse le point critique à sa gauche.



### I.4. Marges de stabilité

la stabilité du système peut être évaluée à l'aide des paramètres suivants: Marge de gain, marge de phase, marge de retard.

#### I.4.1. Marge de gain

La marge de gain est l'inverse du module de la fonction de transfert en boucle ouverte, prise pour la pulsation  $w_\pi$  correspondant à un angle de phase de  $(-180^\circ)$  :

$$M_G = \text{marge de gain} = \frac{1}{|G(jw_\pi)|}$$

avec  $\text{Arg}[G(jw_\pi)] = -180$  degrés.  $w_\pi$  s'appelle pulsation d'inversion de la phase.

La marge de gain  $M_G$  nous montre de combien de fois on peut augmenter le gain du système asservi en boucle ouverte pour atteindre la limite de stabilité. Dans l'industrie on prend  $2,5 > M_G > 2$ . C'est la garantie (sécurité) que la stabilité sera maintenue malgré les variations imprévues du gain en boucle ouverte (BO) dues aux perturbations. Ainsi en réglant

par exemple une pression dans un réacteur une augmentation brusque peut survenir suite à un coup de bélier, à un bouchage dans une conduite etc..

### I.4.2. Marge de phase

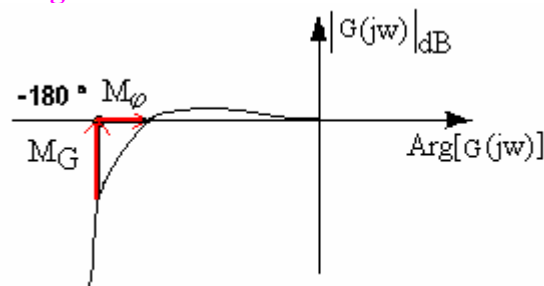
On appelle marge de phase  $M_\phi$  l'angle de phase  $\phi_1$  de la fonction de transfert en boucle ouverte, augmenté de 180 degrés, correspondant à un gain unité.

$$M_\phi = \text{marge de phase} = [180 + \arg(G(jw_1))] \text{ degrés}$$

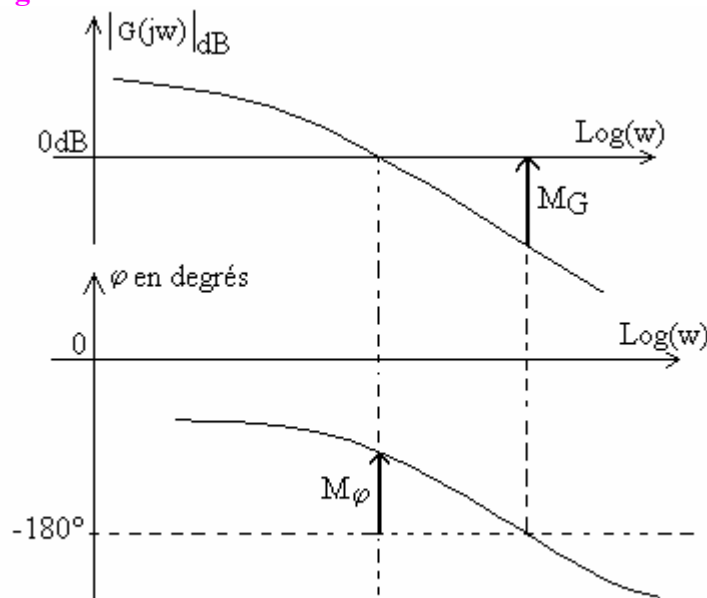
où  $|G(jw_1)|=1$ ,  $w_1$  s'appelle pulsation de coupure à 0 dB (appelée aussi pulsation de croisement). C'est une garantie que la stabilité persistera malgré l'existence de retards parasites dont on n'a pas tenu compte dans le réglage (Ces retards peuvent être dus à des retards dans le transfert de chaleur, aux jeux mécaniques etc..)

### I.4.3. Détermination graphique des marges de gain et de phase

#### a) A partir du diagramme de Black-Nichols



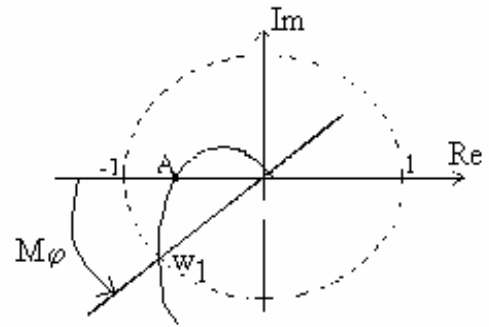
#### b) A partir du diagramme de Bode



### I.4.3. Marge de retard



Considérons un système asservi stable ayant une marge de phase  $M_\varphi$  et une pulsation de coupure à 0dB, égale à  $w_1$ . L'introduction d'un retard pur  $e^{-\tau s}$  augmente le déphasage de la boucle ouverte et donc réduit sa marge de phase,



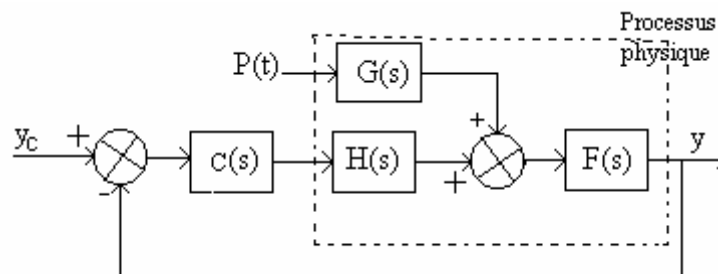
La valeur maximal  $\tau_m$  qui réduit à zéro la marge de phase est dite marge de retard et est définie par :

$$\tau_m = \frac{M_\varphi}{w_1}$$

Une grande marge de phase ne suffit pas pour assurer une grande robustesse du système asservi vis - à vis de retards parasites. En effet si  $w_1$  est trop grande, il suffit un petit retard parasite pour déstabiliser le système.

## II. Précision statique

La précision d'un système est définie à partir de l'erreur  $\varepsilon$  entre la grandeur de consigne  $y_c(t)$  et la grandeur de sortie  $y(t)$ . La précision statique caractérise la limite de l'erreur au bout d'un temps infini (régime permanent).



$$Y(s) = F(s)[G(s)P(s) + H(s)C(s)(Y_c(s) - Y(s))]$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{C(s)F(s)H(s)}{1 + C(s)F(s)H(s)} Y_c(s) + \frac{F(s)G(s)}{1 + C(s)F(s)H(s)} P(s)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte  $C(s)F(s)H(s)$  peut toujours être écrite sous la forme standard:

$$C(s)F(s)H(s) = \frac{K}{s^n} \frac{N(s)}{D(s)} \text{ avec } \frac{N(0)}{D(0)} = 1 \quad (1)$$

Le système est dit de type  $n$  ou de classe  $n$  (présente  $n$  intégrations) et  $K$  porte des noms différents selon le nombre d'intégration; en pratique, on s'intéresse essentiellement aux trois cas suivants :

- si  $n=0$ , pas d'intégration :  $K = K_0$ , gain de position ou gain statique.

- Si  $n=1$ , une intégration :  $K = K_1 = K_v$ , gain en vitesse.
- Si  $n=2$ , deux intégrations :  $K = K_2 = K_a$ , gain en accélération.

En nous intéressant à l'erreur  $\varepsilon(s) = Y_c(s) - Y(s)$ , on peut écrire :

$$\varepsilon(s) = \frac{1}{1+C(s)F(s)H(s)} Y_c(s) - \frac{F(s)G(s)}{1+C(s)F(s)H(s)} P(s)$$

En pratique, l'écart  $\varepsilon(t)$  entre la consigne  $y_c(t)$  et la sortie  $y(t)$  est dû à la présence simultanée des deux sources d'erreur: variation de la consigne et présence de perturbations. En vertu du théorème de superposition, on peut écrire:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_c(t) + \varepsilon_p(t)$$

avec  $\varepsilon_c(t)$  est le signal d'erreur dû aux variations de la consigne et  $\varepsilon_p(t)$  représente le signal d'erreur dû aux perturbations. Les expressions de  $\varepsilon_c(t)$  et  $\varepsilon_p(t)$  se calculent séparément.

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à l'erreur permanente (en régime permanent), appelée erreur statique.

### II.1. Erreur statique due à la consigne (en poursuite)

Dans ce cas, on considère que la perturbation est nulle.

$$\varepsilon_c(s) = \frac{1}{1+C(s)F(s)H(s)} Y_c(s)$$

$$\varepsilon_c(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (s \varepsilon_c(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s Y_c(s)}{1+C(s)F(s)H(s)} \right)$$

tenant compte de la relation (1) on a :

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s Y_c(s)}{1 + \frac{K}{s^n}} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s^{n+1} Y_c(s)}{s^n + K} \right)$$

#### II.1.1. Echelon de position (Consigne en échelon) : $y_c(t) = E_0 \Gamma(t)$

Dans ce cas, l'erreur est appelée erreur de position.

$$Y_c(s) = \frac{E_0}{s} \Rightarrow \varepsilon_{c1}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s^{n+1} \frac{E_0}{s}}{s^n + K} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{E_0}{1 + \frac{K}{s^n}} \right)$$

- Pour un système de type 0 ( $n=0$ ),  $\varepsilon_{c1}(\infty) = \frac{E_0}{1+K}$ . On constate que l'augmentation du gain  $K$  (de position) réduit l'erreur, mais il y a un risque d'instabilité.  $\varepsilon_{c1}(\infty) = \frac{E_0}{K_p}$  ;  
 $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} (1 + C(s)F(s)H(s))$  est appelé coefficient d'erreur de position.
- Pour  $n \geq 1$  (une ou plusieurs intégrations),  $\varepsilon_{c1}(\infty) = 0$ , il n'y a pas d'erreur de position.

### II.1.2. Echelon de vitesse (consigne en rampe) : $y_c(t) = at$

On parle dans ce cas de l'écart en vitesse ou écart de traînage.

$$Y_c(s) = \frac{a}{s^2} \Rightarrow \varepsilon_{c2}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s^{n-1} a}{s^n + K} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{a}{s + \frac{K}{s^{n-1}}} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{a}{K} s^{n-1} \right)$$

- pour  $n=0$ ,  $\varepsilon_{c2}(\infty) = \infty$
- pour  $n=1$ ,  $\varepsilon_{c2}(\infty) = \frac{a}{K} = \frac{a}{K_v}$ ;  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} (sC(s)F(s)H(s))$  est appelé coefficient d'erreur en vitesse. La sortie ne rattrape pas la consigne, mais se maintient et suit la rampe de consigne avec un écart  $\frac{a}{K_v}$  d'autant plus faible que le gain en vitesse est grand.
- Pour  $n \geq 2$ ,  $\varepsilon_{c2}(\infty) = 0$ , s'il y a deux (ou plus) intégrations, la sortie finie par rattraper la consigne bien que celle ci varie en rampe.

### II.1.3. Echelon d'accélération (consigne en parabole) : $y_c(t) = \frac{1}{2}at^2$

On parle de l'erreur d'accélération.

$$Y_c(s) = \frac{a}{s^3} \Rightarrow \varepsilon_{c3}(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{s^{n-2} a}{s^n + K} \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{a}{K} s^{n-2} \right)$$

- Pour  $n=0$ ,  $\varepsilon_{c3}(\infty) = \infty$
- Pour  $n=1$ ,  $\varepsilon_{c3}(\infty) = \infty$
- Pour  $n=2$ ,  $\varepsilon_{c3}(\infty) = \frac{a}{K} = \frac{a}{K_a}$ ;  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} [s^2 C(s)F(s)H(s)]$  est appelé coefficient d'erreur en accélération. L'écart est d'autant plus faible que le gain en accélération est grand.
- Pour  $n \geq 3$ ,  $\varepsilon_{c3}(\infty) = 0$ , la sortie rattrape la consigne bien que celle ci varie en parabole.

Nous soulignons que la précision statique dépend de la fonction de transfert en boucle ouverte (gain et nombre d'intégrations) :

$$\varepsilon_c(\infty) = 0 \text{ pour } \begin{cases} n \geq 1 \text{ s'il s'agit d'un échelon} \\ n \geq 2 \text{ s'il s'agit d'une rampe} \\ n \geq 3 \text{ s'il s'agit d'une parabole} \end{cases}$$

## II.2. Erreur statique due à la perturbation (en régulation)

On suppose dans ce cas que  $y_c(t) = 0$

$$\varepsilon_p(s) = -\frac{F(s)G(s)}{1+C(s)F(s)H(s)}P(s)$$

On peut toujours écrire:

$$C(s)H(s) = \frac{K_{ch}}{s^{n_{ch}}} \frac{N_1(s)}{D_1(s)}; F(s) = \frac{K_f}{s^{n_f}} \frac{N_2(s)}{D_2(s)}; G(s) = \frac{K_g}{s^\beta} \frac{N_3(s)}{D_3(s)} \text{ avec } \frac{N_i(0)}{D_i(0)} = 1, i=1,2,3$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_p(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} [s \varepsilon_p(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ s \frac{-F(s)G(s)P(s)}{1+C(s)F(s)H(s)} \right] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ -s \frac{\frac{K_f}{s^{n_f}} \cdot \frac{K_g}{s^\beta}}{1 + \frac{K_{ch}}{s^{n_{ch}}} \cdot \frac{K_f}{s^{n_f}}} P(s) \right] \\
&= \lim_{s \rightarrow 0} \left[ -\frac{s^{n_{ch}-\beta+1} K_f K_g}{s^{n_{ch}+n_f} + K_{ch} K_f} P(s) \right]
\end{aligned}$$

a) perturbation en échelon  $\left( P(s) = \frac{1}{s} \right)$

$$\varepsilon_p(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ \frac{s^{n_{ch}-\beta} K_f K_g}{s^{n_{ch}+n_f} + K_{ch} K_f} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } \beta > n_{ch} \\ \frac{K_g}{K_{ch}} & \text{si } \beta = n_{ch} \\ 0 & \text{si } \beta < n_{ch} \end{cases}$$

b) perturbation en rampe  $\left( P(s) = \frac{1}{s^2} \right)$

$$\varepsilon_p(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ -\frac{s^{n_{ch}-\beta-1} K_f K_g}{s^{n_{ch}+n_f} + K_{ch} K_f} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } \beta+1 > n_{ch} \\ -\frac{K_g}{K_{ch}} & \text{si } \beta+1 = n_{ch} \\ 0 & \text{si } \beta+1 < n_{ch} \end{cases}$$

c) perturbation en parabole  $\left( P(s) = \frac{1}{s^3} \right)$

$$\varepsilon_p(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ -\frac{s^{n_{ch}-\beta-2} K_f K_g}{s^{n_{ch}+n_f} + K_{ch} K_f} \right] = \begin{cases} -\infty & \text{si } \beta+2 > n_{ch} \\ -\frac{K_g}{K_{ch}} & \text{si } \beta+2 = n_{ch} \\ 0 & \text{si } \beta+2 < n_{ch} \end{cases}$$

**Remarque:** soit  $\beta_1$  le nombre d'intégrateurs de  $G(s)P(s)$ , alors,

$$\beta_1 = \begin{cases} \beta+1 & \text{si } p(t)=\Gamma(t) \\ \beta+2 & \text{si } p(t)=at \\ \beta+3 & \text{si } p(t)=\frac{1}{2}at^2 \end{cases}$$

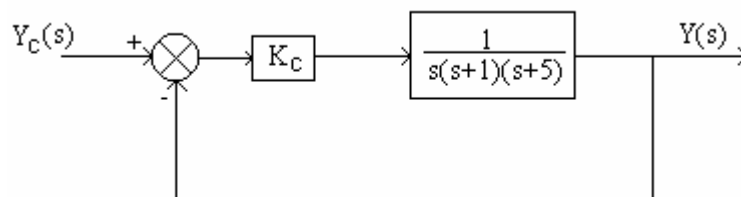
on aura donc,

$$\varepsilon_p(\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \beta_1 > n_{ch} + 1 \\ -\frac{K_g}{K_{ch}} & \text{si } \beta_1 = n_{ch} + 1 \\ 0 & \text{si } \beta_1 < n_{ch} + 1 \end{cases}$$

**Conclusion** : Les intégrations de  $F(s)$  (placé en aval du point d'application de la perturbation) n'ont aucun effet. Cependant, il faut au moins  $\beta_1$  intégrateurs dans  $C(s)H(s)$  (en amont du pont d'application de la perturbation) pour annuler l'effet de la perturbation. On note aussi que pour  $n_{ch} = \beta_1 - 1$ , la variation de la sortie due à la perturbation est constante, et on a intérêt à prendre un gain  $K_{ch}$  (en amont de la perturbation), le plus grand possible, mais cela se fait au détriment de la stabilité.

### III. Dilemme stabilité précision

Considérons le cas suivant :



On désire que pour une entrée en rampe unitaire, l'erreur en régime permanent soit inférieure ou égale à 1% et le système en boucle fermée soit stable.

$$Y(s) = \frac{K_c}{s(s+1)(s+5) + K_c} Y_c(s)$$

- condition sur  $K_c$  pour respecter l'erreur

$$\hat{\varepsilon}(s) = Y_c(s) - Y(s) = \left[ 1 - \frac{K_c}{s(s+1)(s+5) + K_c} \right] Y_c(s)$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \hat{\varepsilon}(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left[ 1 - \frac{K_c}{s(s+1)(s+5) + K_c} \right] \frac{1}{s} = \frac{5}{K_c} \leq 0,01$$

ce ci implique :  $K_c \geq 500$ .

- **condition sur  $K_c$  pour vérifier la stabilité**

Equation caractéristique :  $s(s+1)(s+5) + K_c = 0 \Rightarrow s^3 + 6s^2 + 5s + K_c = 0$

$s^3$	1	5	Conditions de stabilité :
$s^2$	6	$K_c$	
$s^1$	$\frac{30 - K_c}{6}$	0	
$s^0$	$K_c$		

$$\left\{ \begin{array}{l} 30 - K_c > 0 \\ K_c > 0 \end{array} \right. \Rightarrow 0 < K_c < 30$$

On peut voir que pour avoir une bonne précision statique, il faut augmenter le gain, mais l'augmentation du gain rend le système instable.

Le choix du gain en boucle ouverte résulte d'un dilemme:

- Ou bien, on choisit  $K$  faible pour être tranquille du côté de la stabilité, mais l'asservissement est mou et peu précis.
- Ou bien, pour améliorer la précision, on raidit l'asservissement en augmentant  $K$ : on tombe alors sur le pompage et l'instabilité.

# Chapitre 4: Correction des systèmes asservis

## I. Généralité sur la correction

Etant donné un processus physique à commander qui peut être par exemple instable ou mal amorti et oscille trop longtemps sous l'effet d'une perturbation ou trop lent (son inertie propre est trop importante). La correction devra envoyer un signal de commande approprié destiné à corriger ses réactions indésirables et particulièrement ses tendance à l'instabilité. Le correcteur à concevoir a en quelque sorte une double fonction :

- ★ Améliorer le comportement dynamique du processus en garantissant une bonne stabilité, en suite une bonne rapidité de réaction.
- ★ Obliger le système à suivre au plus près la consigne quand celle ci varie (poursuite) et à annuler l'effet des perturbations (régulation).

Pour satisfaire aux contraintes imposées (spécifications de comportement du système asservi) on doit introduire des réseaux de correction dans la chaîne d'action (correction en cascade) ou dans la chaîne de retour (correction de retour ou parallèle) ou dans les deux chaînes d'action et de retour.

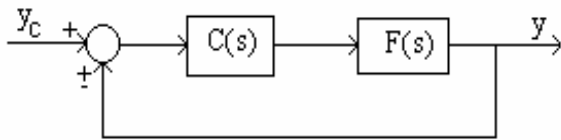


Figure 1 : Correction cascade

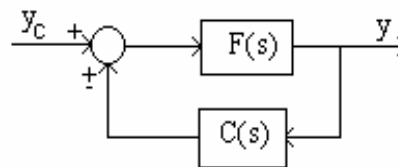


Figure 2 : Correction parallèle

On peut aussi trouver la correction de retour dans des boucles non principales

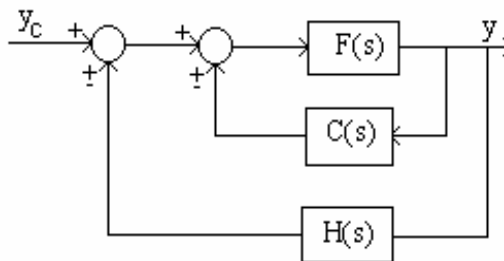
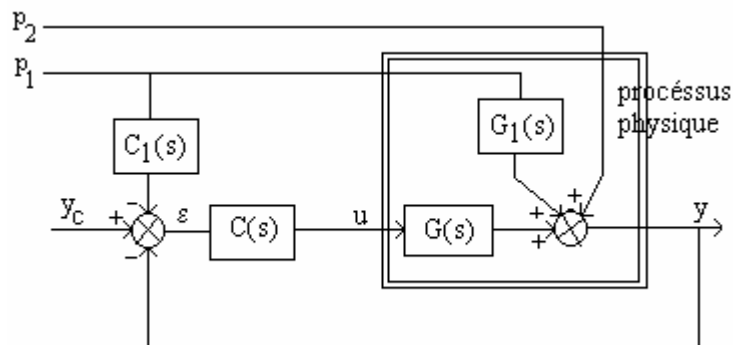


Figure 3 : Correction parallèle

## Principe de la correction

Considérons le problème de régulation suivant:



Où  $C(s)$ , et  $C_1(s)$  sont des correcteurs à déterminer. Il s'agit donc de construire le signal de commande  $u$ . A partir du schéma on calcul,

$$U(s) = C(s)[Y_c(s) - Y(s) - C_1(s)P_1(s)]$$

$$Y(s) = P_2(s) + G_1(s)P_1(s) + G(s)U(s)$$

$$Y(s) = P_2(s) + G_1(s)P_1(s) + G(s)C(s)Y_c(s) - G(s)C(s)Y(s) - G(s)C(s)C_1(s)P_1(s)$$

d'où l'on tire :

$$Y(s) = \frac{1}{1+C(s)G(s)}P_2(s) + \frac{G_1(s) - C(s)C_1(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}P_1(s) + \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}Y_c(s)$$

en pratique, on cherche à obtenir une dynamique de rejet imposée pour les perturbations  $p_1$  et  $p_2$ , et une caractéristique statique et dynamique de la transmittance entrée / sortie  $\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$  que l'on s'impose à priori.

- Pour éliminer  $p_2(t)$  il faut que le terme  $C(s)G(s)$  présente un nombre d'intégrateurs au moins égale au nombre d'intégrateurs de  $P_2(s)$ , soit dans le processus  $G(s)$  soit dans le correcteur  $C(s)$ . On dit qu'on a un rejet par boucle d'asservissement.
- Pour éliminer  $p_1(t)$ , théoriquement, on prend  $C_1(s) = \frac{G_1(s)}{C(s)G(s)}$ , ainsi la perturbation  $p_1(t)$  sera complètement rejetée. Cependant, cette condition peut ne pas être réalisable pratiquement du fait de la causalité. Dans ce cas, on s'attachera à la réaliser approximativement aux basses fréquences afin d'effacer l'effet de la perturbation sur le long terme ( $s \rightarrow 0, t \rightarrow \infty$ ). Cette méthode de conception du correcteur  $C_1(s)$  signifie que la perturbation  $p_1(t)$  est mesurable à l'aide d'un capteur et par conséquent on peut modéliser  $G_1(s)$ . Dans ce cas on parle de la conception par anticipation et  $C_1(s)$  est appelé correcteur d'anticipation.
- Pour asservir la sortie à la consigne, en l'absence de perturbations, la sortie s'exprime par,  $Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}Y_c(s)$ . En règle générale, on détermine  $C(s)$  de telle sorte que  $\frac{C(s)G(s)}{1+C(s)G(s)}$  soit égale à  $H_d(s)$  une fonction de transfert du second ordre:
  - d'amortissement  $\xi$  assez fort pour éviter les dépassements abusifs ( $\xi \approx 0.7$ )
  - de pulsation propre  $w_0$  aussi élevée que possible (bande passante aussi élevée que possible, donc temps de réponse meilleur)
  - et de gain statique égal à 1 ce qui assure un écart de position nul en régime permanent.

D'où le modèle de la FTBF:



$$H_d(s) = \frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{1}{1 + 2\xi \frac{s}{w_o} + \frac{s^2}{w_o^2}}$$

que l'on s'impose à priori, alors on calcul C(s) :

$$C(s) = \frac{H_d(s)}{G(s)(1-H_d(s))}$$

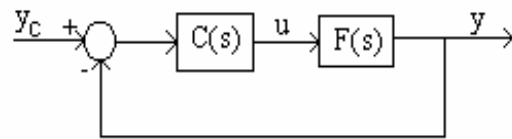
Cette méthode de conception est appelée méthode de modèle.

## II. Action des correcteurs

Le signal de commande u est ajusté en permanence de manière automatique par le correcteur afin de corriger l'erreur.

On peut toujours écrire F(s) sous la forme :

$$F(s) = \frac{K_1 P(s)}{s^l Q(s)} \text{ avec } \frac{P(0)}{Q(0)} = 1$$



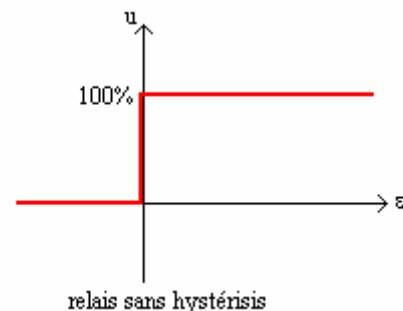
### II.1. Régulateur "Tout ou Rien"

Un régulateur "tout ou rien" est un régulateur qui élabore une action de commande discontinue qui prend deux positions ou deux états 0 et 1 ( 0 et 100%).

Si  $\varepsilon > 0$ ,  $y < y_c$ , on envoie u maximum

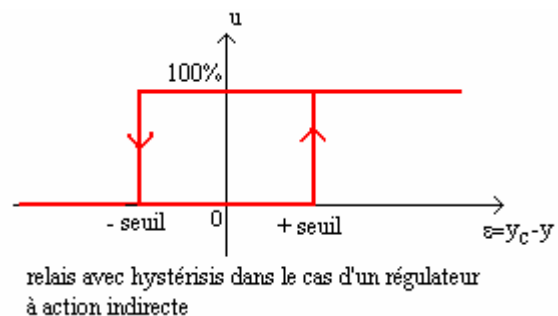
Si  $\varepsilon < 0$ ,  $y > y_c$ , on envoie u=0 (ou u minimum)

Cette loi de commande est utilisée pour la commande des systèmes rustiques possédant une grande inertie où la précision de régulation n'est pas importante. Par exemple la commande thermostatique des appareils de chauffage



En pratique, la commande est caractérisée par la courbe ci-contre.

Le seuil limite la fréquence de commutation du système pour éviter une fatigue prématurée des organes de réglage. Plus le seuil est faible plus la fréquence est élevée et moins l'amplitude de variation de la grandeur mesurée est grande. Une augmentation de la fréquence réduit d'autant la durée de vie de l'organe de réglage.



### II.2. Correcteur proportionnel (correction du facteur gain) $C(s) = K_c$

La fonction de transfert en boucle ouverte après correction  $F_c(s)$  est donnée par :

$$F_c(s) = C(s)F(s) = \frac{K_c K_1 P(s)}{s^l Q(s)} = \frac{K P(s)}{s^l Q(s)}$$

On peut agir sur le gain de Bode  $K$  pour améliorer la performance du système. En effet, l'ajustement du gain ne modifie en rien la courbe de phase, elle ne fait que déplacer le lieu de transfert (Bode, Black), de la fonction de transfert en boucle ouverte non corrigée  $F(s)$  vers le bas ( $K_c < 1$ ) ou vers le haut ( $K_c > 1$ ) sans le déformer. Il permet donc un réglage sommaire mais efficace de la marge de gain et de phase dans les cas simples, et donc de régler l'amortissement  $\xi$  de la boucle fermée. Il ne peut corriger l'instabilité qu'en abaissant le lieu de transfert en dessous du point critique ( $-180^\circ, 0\text{dB}$ ), donc en diminuant le gain ( $K < K_1$  c'est à dire  $K_c < 1$ ) ce qui entraîne hélas, une diminution de la précision des systèmes sans intégration.

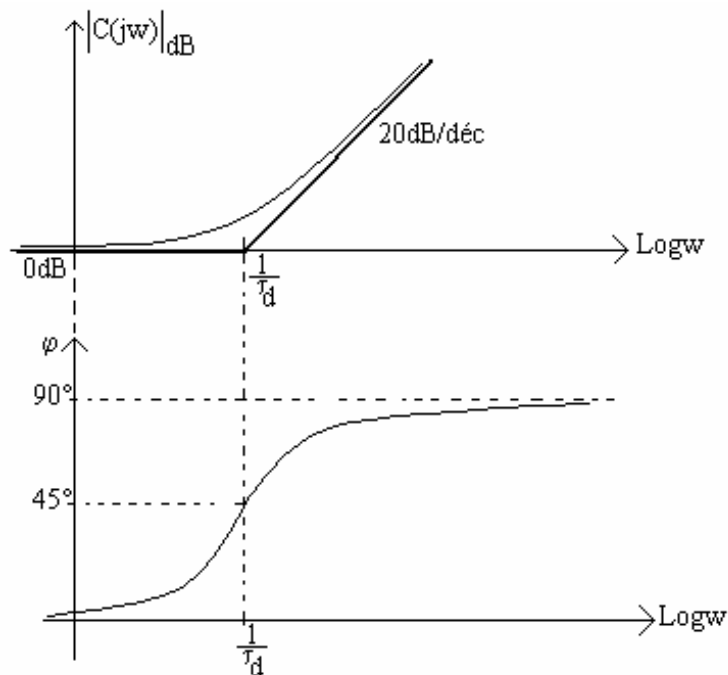
### II.3. Correcteur proportionnel dérivée (PD)

$$C(s) = K_c(1 + \tau_d s) \text{ ou } u(t) = K_c(\varepsilon(t) + \tau_d \dot{\varepsilon}(t))$$

L'effet de l'action proportionnelle ayant déjà été étudiée, nous posons  $K_c = 1$  et alors

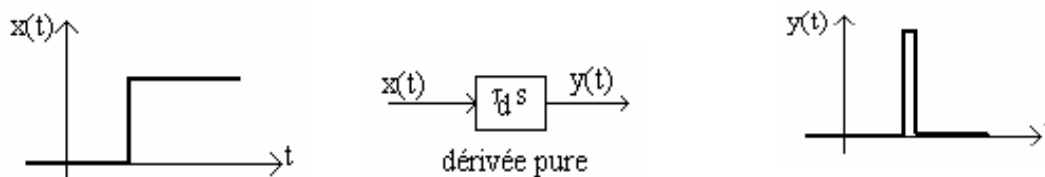
$$C(s) = 1 + \tau_d s$$

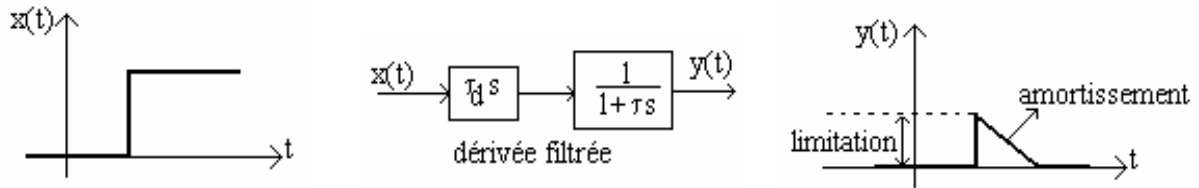
**Diagramme de Bode :**



Le correcteur PD provoque un accroissement du gain et de phase vers les fréquences élevées.

**Remarque :** Un tel régulateur n'est pas réalisable physiquement car le degré du dénominateur est inférieur à celui du numérateur (causalité). En pratique, l'action dérivée est filtrée en ajoutant un élément de premier ordre. L'action dérivée pure  $\tau_d s$  devient alors  $\frac{\tau_d s}{1 + \tau s}$ .





Rôle et domaine d'utilisation de l'action dérivée : L'action dérivée a un effet stabilisateur, mais une valeur excessive peut entraîner une instabilité. Sur le plan de Nyquist, l'action D permet de déplacer le lieu de transfert vers la droite car elle possède une avance de phase (de 90 degrés). La présence de l'action D permet donc d'augmenter la rapidité du système en augmentant le gain sans être inquiété par la stabilité. Dans l'industrie, l'action D n'est jamais utilisée seule mais en générale avec l'action intégrale. On recommande de l'utiliser pour le réglage des paramètres lents tels que la température. Par contre, en présence des paramètres bruités, l'action dérivée est déconseillée. En effet un signal bruité ayant par exemple la fréquence du réseau (50Hz) sera amplifié en le dérivant des actions P,I,D.

$$x(t) = 0,1 \cdot \sin(2\pi \cdot 50t) \rightarrow \dot{x}(t) = 10\pi \cos(2\pi \cdot 50t)$$

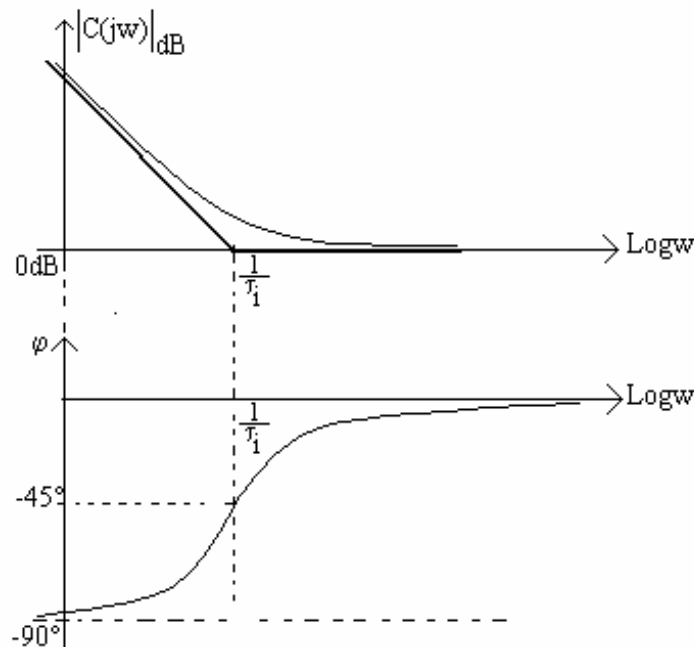
à titre d'exemple, la commande d'accostage d'un gros navire procède de l'action PD.

#### II.4. Correcteur proportionnel intégral (PI)

$$C(s) = 1 + \frac{1}{\tau_i s} = \frac{1 + \tau_i s}{\tau_i s}$$

Il introduit un pôle à l'origine et une action dérivée.

**Diagramme de Bode :**



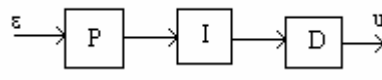
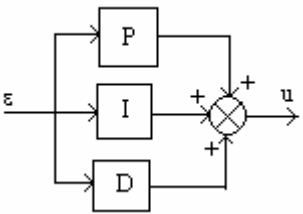
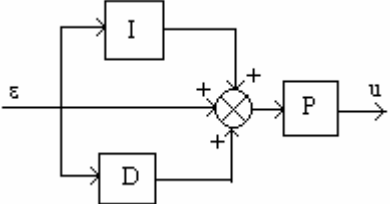
Le correcteur PI provoque un accroissement du gain et un affaiblissement de phase vers les basses fréquences.

Rôle et domaine d'utilisation de l'action intégrale : Dans les régulateurs industriels on affiche  $\frac{1}{\tau_i}$ , alors  $\tau_i$  est d'autant plus grande que l'action intégrale est faible. Le rôle principale de

l'action intégrale est d'éliminer l'erreur statique. Toutefois l'action intégrale est un élément à retard de phase, donc l'augmentation de l'action intégrale (c'est à dire diminuer  $\tau_i$ ) produit une instabilité car elle déplace le lieu de Nyquist (Black) vers la gauche. La valeur optimale est choisie pour satisfaire un compromis stabilité-rapidité. Si le système possède lui même un intégrateur (exemple niveau), l'action I est quand même nécessaire pour annuler l'écart de perturbation car, suite aux variations de la consigne l'intérêt de I est moindre car l'écart s'annule naturellement. Dans l'industrie, on utilisera l'action I chaque fois que nous avons besoin, pour des raisons technologiques, d'avoir une précision parfaite; exemple : la régulation de la pression ou température dans un réacteur nucléaire. De plus, il faut souligner que l'action I est un filtre donc il est intéressant de l'utiliser pour le réglage des paramètres très dynamiques telle que la pression.

### II.5. Correcteur proportionnel intégral dérivé PID

C'est une combinaison des trois actions précédentes, on obtient alors un correcteur proportionnel, intégral et dérivé PID. Il existe plusieurs façons d'associer ces trois actions, le tableau suivant donne les trois types du correcteur PID les plus utilisés.

type	schéma	équation
série		$u = K_c \left\{ \frac{\tau_i + \tau_d}{\tau_i} \varepsilon + \frac{1}{\tau_i} \int \varepsilon dt + \tau_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right\}$ $C(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) (1 + \tau_d s)$
parallèle		$u = K_c \varepsilon + \frac{1}{\tau_i} \int \varepsilon dt + \tau_d \frac{d\varepsilon}{dt}$ $C(s) = K_c + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s$
mixte		$u = K_c \left\{ \varepsilon + \frac{1}{\tau_i} \int \varepsilon dt + \tau_d \frac{d\varepsilon}{dt} \right\}$ $C(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right)$

#### Etude du correcteur PID Mixte

Sa fonction de transfert s'écrit :

$$C(s) = K_c \frac{1 + \tau_i s + \tau_i \tau_d s^2}{\tau_i s}$$

On remarque que cette fonction de transfert n'est pas réalisable physiquement, donc elle n'est que théorique et nous serons obligés de filtrer l'action dérivée. Toutefois, ce filtrage ne changera pas fondamentalement les paramètres de la réponse du correcteur, puisque le filtrage n'interviendra que sur les hautes fréquences. Les fréquences basses et intermédiaires ne seront pas touchées. Dans ces conditions nous raisonnons sur la fonction de transfert théorique.

On peut aussi écrire :

$$C(s) = K_c \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{\tau_i s} \text{ avec } \tau_1 \tau_2 = \tau_i \tau_d \text{ et } \tau_1 + \tau_2 = \tau_i$$

Les deux constantes de temps s'écrivent donc,

$$\tau_1 = \frac{\tau_i}{2} \left( 1 + \sqrt{1 - 4 \frac{\tau_d}{\tau_i}} \right); \quad \tau_2 = \frac{\tau_i}{2} \left( 1 - \sqrt{1 - 4 \frac{\tau_d}{\tau_i}} \right)$$

$\tau_1$  et  $\tau_2$  sont réels si  $\tau_d \leq \frac{\tau_i}{4}$ . On remarque que  $\tau_2 < \tau_1 < \tau_i$ . On peut aussi montrer que  $\tau_d < \tau_2$ .

### Diagramme de Bode pour $K_c=1$ :

$$|C(j\omega)|_{dB} = 20 \text{Log} \sqrt{1 + \tau_1^2 \omega^2} + 20 \text{Log} \sqrt{1 + \tau_2^2 \omega^2} - 20 \text{Log} \tau_i \omega$$

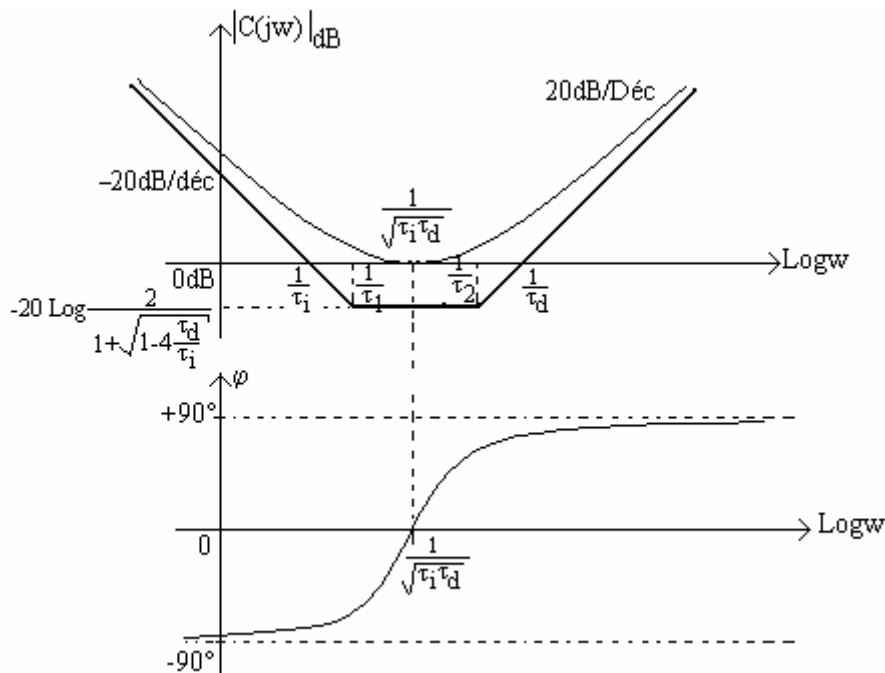
$$\text{minimum: } |C(j\omega)| = \frac{\sqrt{(1 - \tau_i \tau_d \omega^2)^2 + \tau_i^2 \omega^2}}{\tau_i \omega}$$

$$\Rightarrow \frac{d|C(j\omega)|}{d\omega} = \frac{2\tau_i^3 \tau_d^2 \omega^4 - 2\tau_i}{2\tau_i^2 \omega^2 \sqrt{(1 - \tau_i \tau_d \omega^2)^2 + \tau_i^2 \omega^2}} = 0$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{1}{\tau_i \tau_d}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{\tau_i \tau_d}}$$

pour  $\omega = \frac{1}{\sqrt{\tau_i \tau_d}}$  on a  $|C(j\omega)| = 1 \Rightarrow |C(j\omega)|_{dB} = 0$ .



### Action du filtrage de la dérivée

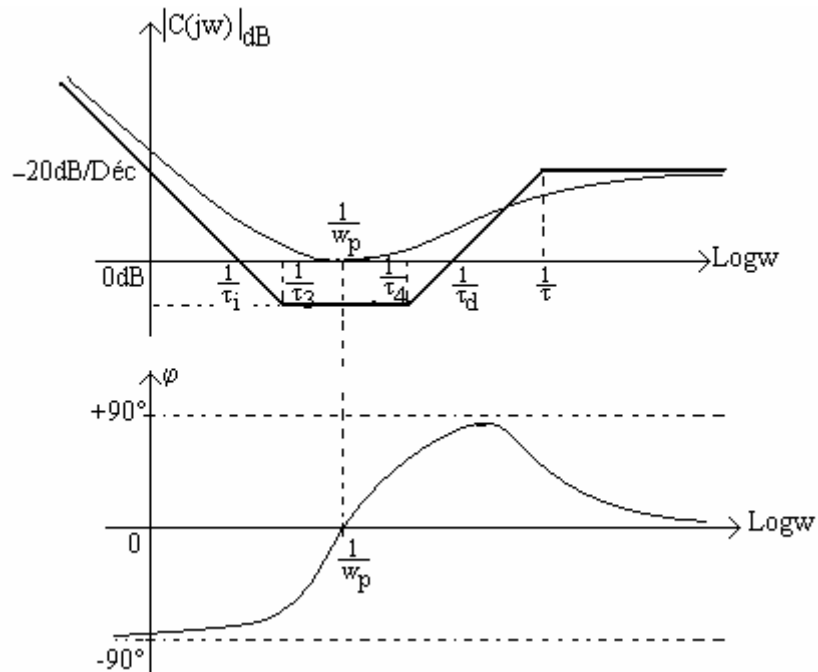
$$\begin{aligned}
 C(s) &= K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} + \frac{\tau_d s}{1 + \tau s} \right) \\
 &= K_c \frac{1 + (\tau_i + \tau)s + \tau_i(\tau + \tau_d)s^2}{\tau_i s(1 + \tau s)} \\
 &= K_c \frac{(1 + \tau_3 s)(1 + \tau_4 s)}{\tau_i s(1 + \tau s)} \text{ avec } \tau_3 \tau_4 = \tau_i(\tau + \tau_d) \text{ et } \tau_3 + \tau_4 = \tau_i + \tau
 \end{aligned}$$

Les deux constantes de temps s'écrivent donc,

$$\tau_3 = \frac{\tau_i + \tau - \sqrt{(\tau_i - \tau)^2 - 4\tau_i \tau_d}}{2} ; \tau_4 = \frac{\tau_i + \tau + \sqrt{(\tau_i - \tau)^2 - 4\tau_i \tau_d}}{2}$$

$\tau_3$  et  $\tau_4$  sont réels si  $\tau_d \leq \frac{(\tau_i - \tau)^2}{4\tau_i}$ .

Pour  $K_c=1$ ,  $C(j\omega) = \frac{1 + j(\tau_i + \tau)\omega - \tau_i(\tau + \tau_d)\omega^2}{j\tau_i\omega(1 + j\tau\omega)}$ , on aura pour le diagramme de Bode:



pour  $w_p$  la phase du correcteur est nulle,

$$\begin{aligned}
 \arctg\left(\frac{(\tau_i + \tau)w_p}{1 - \tau_i(\tau + \tau_d)w_p^2}\right) - \arctg(\tau w_p) &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arctg\left(\frac{(\tau_i + \tau - 1 + \tau_i\tau(\tau + \tau_d)w_p^2)w_p}{1 - [\tau_i(\tau + \tau_d) - \tau(\tau_i + \tau)]w_p^2}\right) = \frac{\pi}{2} \\
 &\Rightarrow w_p = \frac{1}{\sqrt{\tau_i\tau_d - \tau^2}}
 \end{aligned}$$

Le correcteur PID réalise une double action :

- L'action dérivée : cette action qui se traduit dans le domaine fréquentiel essentiellement sur les hautes fréquences, apporte une avance de phase et une amplification. Ce double apport est bénéfique :
  - il éloigne la courbe, représentant la fonction de transfert en boucle ouverte, du point critique et augmente les marges de sécurité.
  - Il augmente la bande passante du système corrigé, la pulsation de résonance et la pulsation propre sont plus grands, ce qui améliore la rapidité.
- L'action intégrale : cette action affecte au contraire la zone des basses fréquences, elle retarde la phase et rehausse l'amplitude des points situés dans la partie basse fréquence de la boucle ouverte non corrigée. Ce qui permet d'augmenter la précision statique.

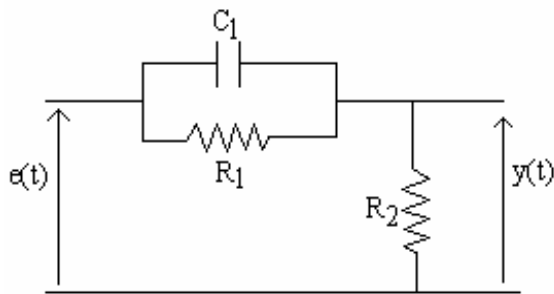
## II.6. Correcteur à avance de phase: Forme approchée du PD

Le correcteur à avance de phase a une transmittance donnée par :

$$C(s) = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}; \quad \alpha < 1$$

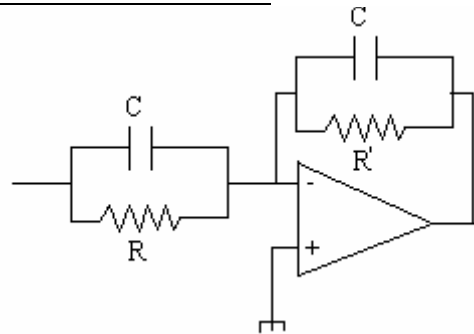
On peut réaliser ce correcteur par:

Utilisant un filtre passif:



$$\tau = R_1 C \text{ et } \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$$

Utilisant un filtre actif:

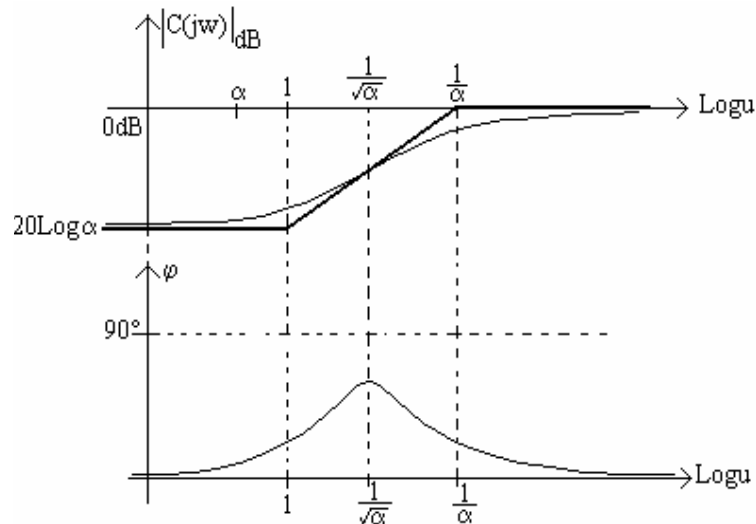


$$\tau = R C \text{ et } \alpha = \frac{R'}{R} < 1$$

En posant  $u = \tau \omega$ , on a :

$$|C(j\omega)| = \frac{\alpha \sqrt{1 + u^2}}{\sqrt{1 + \alpha^2 u^2}} \text{ et } \varphi(C(j\omega)) = \arctg u - \arctg \alpha u$$

Le diagramme de Bode est donné par :



Ces graphiques illustrent le fait que l'addition à un système d'un correcteur à avance de phase abaisse la courbe de gain dans son ensemble dans la région des basses fréquences et élève la courbe de phase dans un certain domaine de pulsations (moyennes fréquences). La quantité d'atténuation du gain et d'avance de phase produite par ce correcteur dépend du facteur  $\alpha$  qui représente le gain statique du correcteur.

Calculons l'avance de phase maximum :

$$C(ju) = \alpha \frac{1+ju}{1+j\alpha u} = \frac{\alpha(1+ju)(1-j\alpha u)}{1+(\alpha u)^2}$$

$$\varphi = \arctg(u) - \arctg(\alpha u) = \arctg\left(\frac{(1-\alpha)u}{1+\alpha u^2}\right)$$

$\varphi$  est maximum si  $\frac{(1-\alpha)u}{1+\alpha u^2}$  est maximum.

$$\frac{d}{du} \left[ \frac{(1-\alpha)u}{1+\alpha u^2} \right] = 0 \Rightarrow \frac{(1-\alpha)[1+\alpha u^2] - 2\alpha(1-\alpha)u^2}{(1+\alpha u^2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha u^2 = 0$$

$$\Rightarrow u^2 = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

d'où  $\varphi_{\max} = \arctg \frac{1-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$

**Remarque** : pour la pulsation  $w = w_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$ ,  $C(jw_m) = \sqrt{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha} + j}{1 + j\sqrt{\alpha}} = j\sqrt{\alpha} \frac{1 - j\sqrt{\alpha}}{1 + j\sqrt{\alpha}}$  et,

$$\varphi_{\max} = \text{Arg}(C(jw_m)) = \text{Arg}(j\sqrt{\alpha}) + \text{Arg}\left(\frac{1 - j\sqrt{\alpha}}{1 + j\sqrt{\alpha}}\right)$$



$$= \frac{\pi}{2} - 2 \arctg(\sqrt{\alpha})$$

$$= \left( \frac{\pi}{2} - 2 \arctg(\sqrt{\alpha}) \right) \text{ radians}$$

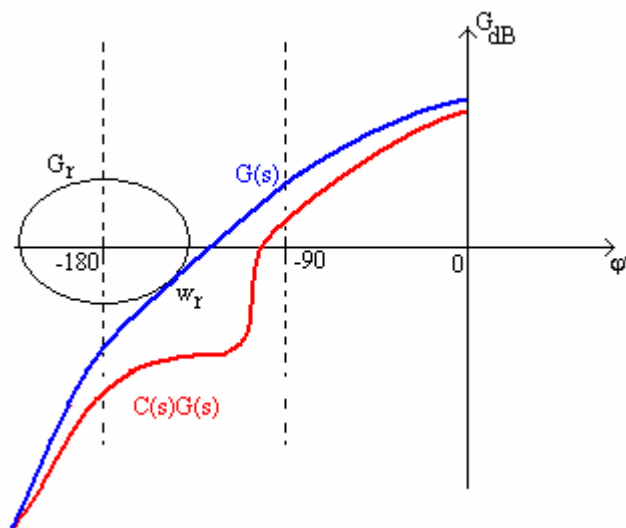
On utilise généralement la correction par avance de phase pour augmenter les marges de gain et (ou) de phase d'un système ou pour augmenter sa bande passante (caractéristiques semblables à celles d'un PD).

Nous soulignons que le fait que la correction par avance de phase augmente la bande passante de l'asservissement est un inconvénient vis à vis des bruits qui affectent la boucle. Ce correcteur est aussi utilisé pour améliorer la stabilité et la rapidité. Il permet en effet de déformer le lieu de transfert  $F(j\omega)$  en boucle ouverte en vue de contourner (avance de phase) la zone à forte résonance c'est à dire, il doit agir autour de la pulsation de résonance  $\omega_r$  :

$\frac{1}{\tau} < \omega_r < \frac{1}{\alpha\tau}$ , le choix  $\omega_r \approx \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$  donne de bon résultat. Pratiquement, on choisit d'abord  $\alpha$

pour fixer l'avance de phase maximum requise, puis  $\tau$  pour que la pulsation  $\omega_m$  n'affecte pas cette avance maximum telle que  $\omega_m = \frac{1}{\tau\sqrt{\alpha}}$ .

Si on a besoin d'un très grande avance de phase, on peut monter en série plusieurs réseaux d'avance. On note qu'on peut ajouter un correcteur proportionnel pour compenser l'atténuation du gain causée par  $\alpha$ .



Correction dans le cas  $\frac{1}{\tau} < \omega_r < \frac{1}{\alpha\tau}$

Si  $\frac{1}{\tau} < \omega_r < \frac{1}{\alpha\tau}$  n'est pas vérifiée, le correcteur à avance de phase sera mal réglé

**Remarque:**

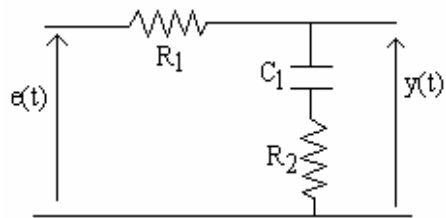
La réponse indicielle d'une avance de phase montre qu'un tel régulateur amplifie fortement (gain  $\alpha$ ) les transitoires brusques. C'est une raison pour laquelle le gain  $\alpha$  est souvent limité à la valeur minimale de 0.1:  $0.1 < \alpha < 1$ .

## II.7. Correcteur à retard de phase: Forme approchée du PI

Ce correcteur a pour transmittance :  $C(s) = \frac{1 + \alpha\tau s}{1 + \tau s}$ ;  $\alpha < 1$ .

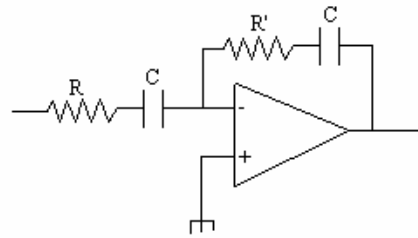
On peut réaliser ce correcteur par:

Utilisant un filtre passif:



$$\tau = (R_1 + R_2)C \text{ et } \alpha = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$$

Utilisant un filtre actif

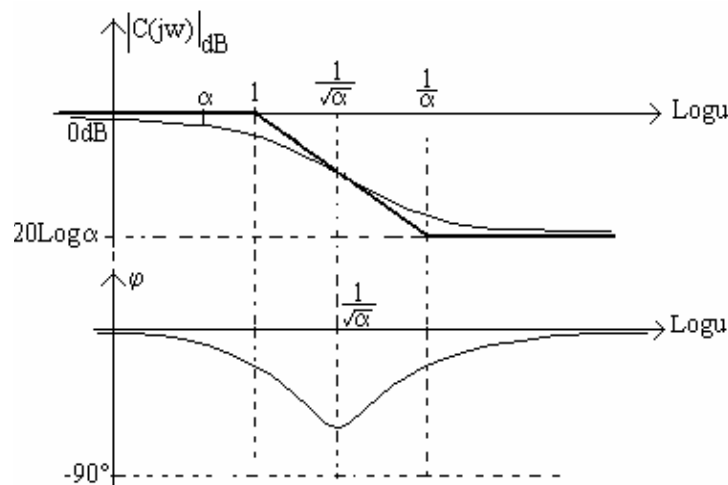


$$\tau = RC \text{ et } \alpha = \frac{R'}{R} < 1$$

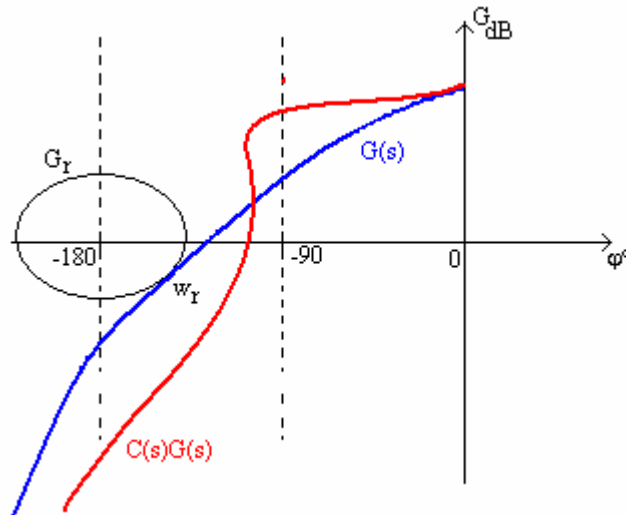
En posant  $u = \tau\omega$ , on a :

$$|C(j\omega)| = \frac{\sqrt{1 + (\alpha u)^2}}{\sqrt{1 + u^2}} \text{ et } \varphi(C(j\omega)) = \arctg\alpha u - \arctg u$$

Les courbes de Bode sont données par :



L'introduction de ce correcteur fait diminuer le gain vers la partie des hautes fréquences et cause une diminution locale de la phase qui risque d'entraîner une diminution de la marge de phase si l'effet de ce correcteur vient trop tard. Avec la réglage  $\frac{1}{\alpha\tau} < \omega_r$ , il augmente la marge de phase, en conservant un bon gain en basse fréquence, mais il provoque une diminution de la bande passante ce qui entraîne un système plus lent.



Correction dans le cas  $\frac{1}{\alpha\tau} < w_r$

Dans le cas où  $w_r \leq \frac{1}{\alpha\tau}$ , le correcteur sera mal réglé.

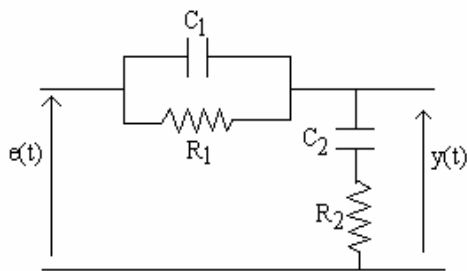
### II.8. Correcteur combiné (par avance et retard de phase)

Le correcteur combiné peut être obtenu en mettant en cascade le correcteur à avance de phase et le correcteur à retard de phase en prenant pour constante de temps de l'avance environs 100 fois plus petite que le retard. Ainsi on peut déformer à la fois la zone haute fréquence et la zone basse fréquence. La fonction de transfert de ce correcteur est donnée par:

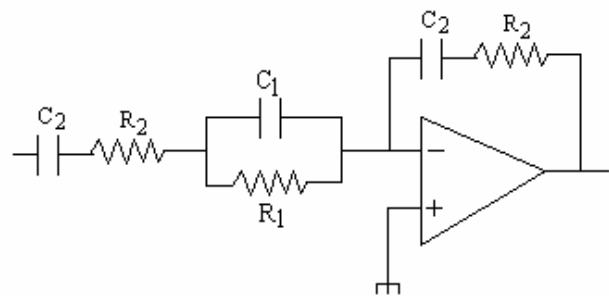
$$C(s) = \frac{(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_4 s)}; \tau_1 > \tau_2 > \tau_3 > \tau_4$$

En général, pour assurer le même gain en haute et basse fréquence, on impose:  $\tau_3 \tau_2 = \tau_1 \tau_4$ .

On peut réaliser ce correcteur par:



$$C(s) = \frac{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}{1 + [(R_1 + R_2)C_2 + R_1 C_1]s + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

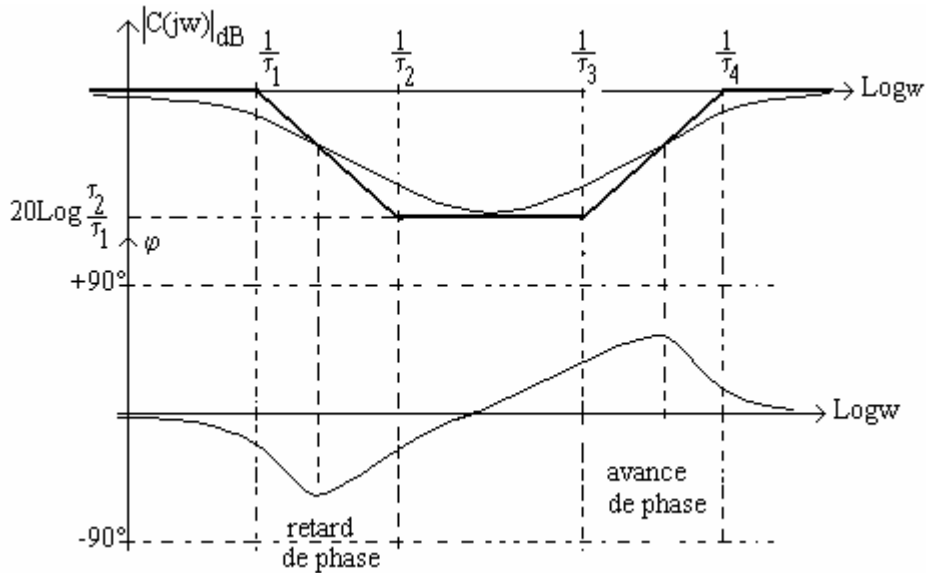


$$C(s) = -\frac{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}{1 + [(R_1 + R_2)C_2 + R_1 C_1]s + R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

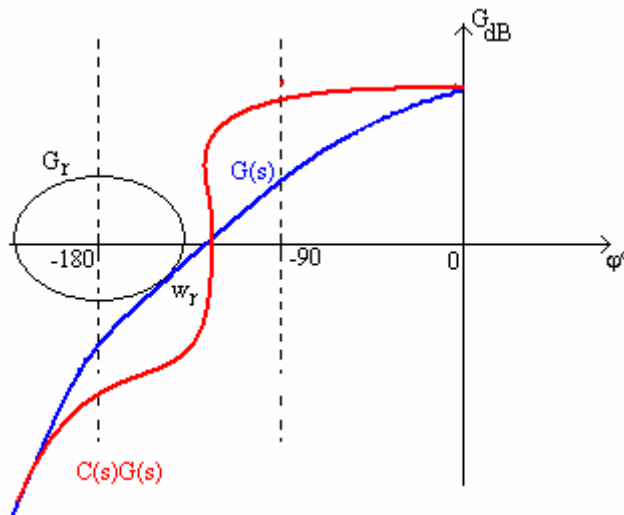
On peut écrire  $C(s)$  sous la forme :

$$C(s) = \frac{(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_4 s)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau_2 = R_1 C_1; \tau_3 = R_2 C_2 \\ \tau_1 \tau_4 = \tau_2 \tau_3 \\ \tau_1 + \tau_4 = \tau_2 + \tau_3 + R_1 C_2 \end{cases}$$

Les représentations de Bode et de Black sont données par:



Pour être efficace, ce correcteur doit provoquer l'avance de phase au niveau de la pulsation de résonance  $w_r$ :  $\frac{1}{\tau_3} < w_r < \frac{1}{\tau_4}$ . En général, le choix de  $\tau_3$  et  $\tau_4$  tels que  $\frac{1}{\sqrt{\tau_3 \tau_4}} \approx w_r$  donne des résultats satisfaisants.



effet d'un régulateur combiné dans le cas  $\frac{1}{\sqrt{\tau_3 \tau_4}} \approx w_r$

La correction combinée a tous les avantages de la correction par avance et par retard à la fois avec un minimum de leurs caractéristiques généralement indésirables. Par exemple on peut

vérifier les conditions imposées au système sans avoir la bande passante trop grande, ni le temps de réponse trop lent respectivement produit par l'avance ou le retard de phase.

**Remarque** : Pratiquement, pour satisfaire aux contraintes imposées aux systèmes, ces correcteurs sont utilisés en association avec un correcteur proportionnel, i.e. :

- Correcteur avance de phase :  $C(s) = K \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$ ,  $\alpha < 1$  ou  $C(s) = K \frac{1 + \beta \tau s}{1 + \tau s}$ ,  $\beta > 1$
- Correcteur à retard de phase :  $C(s) = K \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}$ ,  $\alpha < 1$  ou  $C(s) = K \frac{1 + \tau s}{1 + \beta \tau s}$ ,  $\beta > 1$
- Correcteur combiné :  $C(s) = \frac{(1 + \tau_2 s)(1 + \tau_3 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_4 s)}$  avec  $\tau_3 \tau_2 = \tau_1 \tau_4$

### III. Cahier des charges

Dans un cahier des charges on donne une description précise des performances désirées, que doit acquérir le système corrigé. La synthèse du (des) correcteur(s) sera réalisée en fonction de cette description. Le cahier des charges peut être exprimé soit dans le domaine temporel (raisonnement par exemple sur la réponse indicielle) soit dans le domaine fréquentiel (en se basant sur le plan de Black Nichols), soit dans les deux domaines en même temps.

#### Exemple de cahier des charges:

- **Précision**: On souhaite que la grandeur réglée rejoigne sans erreur l'entrée de consigne en échelon
- **Stabilité**: le système non perturbé doit être stable (asymptotiquement stable). On accepte quelques oscillations, en réponse indicielle, de dépassement transitoire 25% maximum.
- **Robustesse**: Le système doit rester stable malgré les perturbation. Les marges doivent être au moins 10dB en gain et 45° en phase.
- **Rapidité**: On veut le temps de réponse du système bouclé soit cinq fois plus petit que celui du processus.