

Fluage et relaxation du béton

par **Jean COURBON**

*Ingénieur Général Honoraire des Ponts et Chaussées
Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées*

1. Lois du fluage et de la relaxation	C 2 055 - 2
1.1 Loi de déformation du béton. Fluage linéaire.....	— 2
1.1.1 Déformation sous contrainte constante.....	— 2
1.1.2 Déformation sous contrainte variable dans le temps.....	— 2
1.1.3 Critique de la théorie du fluage linéaire.....	— 2
1.1.4 Expressions courantes du module de déformation.....	— 2
1.2 Relaxation, conséquence de la loi de déformation.....	— 3
1.2.1 Relaxation sous déformation constante.....	— 3
1.2.2 Relaxation sous déformation variable dans le temps.....	— 4
1.2.3 Loi de déformation déduite de la loi de relaxation.....	— 4
1.3 Détermination de la fonction $\Phi(t_0, t)$	— 4
1.3.1 Cas particulier où $E(t_0, t)$ est donné par la formule (10).....	— 4
1.3.2 Cas particulier où $E(t_0, t)$ est donné par la formule (9).....	— 5
1.3.3 Cas général. Détermination numérique de la fonction $\Phi(t_0, t)$	— 5
1.3.4 Conséquences des résultats précédents.....	— 5
1.4 Utilisation de la transformation de Carson-Laplace.....	— 5
1.4.1 Transformation de Carson-Laplace.....	— 5
1.4.2 Application au fluage et à la relaxation.....	— 6
2. Application au calcul des structures	— 7
2.1 Équilibre sous l'action de forces extérieures données.....	— 7
2.2 Équilibre sous l'effet de déformations imposées.....	— 8
2.2.1 Compensation des structures hyperstatiques.....	— 8
2.2.2 Effet des déformations imposées dans le cas général.....	— 8
2.3 Influence du mode de construction des ouvrages.....	— 9
2.4 Calcul des déformations différées.....	— 10
2.5 Effets du retrait et de la température.....	— 11
2.5.1 Formules générales.....	— 11
2.5.2 Cas particulier où le module de déformation est donné par l'équation (10).....	— 11
2.5.3 Effet du retrait lorsque $E(t_0, t)$ est donné par l'équation (10).....	— 11
2.5.4 Élévation progressive de la température, $E(t_0, t)$ étant donné par l'équation (10).....	— 12
2.5.5 Variation sinusoïdale de la température, $E(t_0, t)$ étant donné par l'équation (10).....	— 12
Pour en savoir plus	Doc. C 2 055

Dans cet article, nous définirons les lois du fluage et de la relaxation du béton. Nous appliquerons ensuite ces formules au calcul des structures.

1. Lois du fluage et de la relaxation

1.1 Loi de déformation du béton. Fluage linéaire

1.1.1 Déformation sous contrainte constante

Considérons un prisme de béton que nous soumettons, à partir de l'âge t_0 , à une contrainte de compression constante σ . Tant que la contrainte σ n'est pas trop élevée, l'expérience montre que le raccourcissement unitaire $\varepsilon(t)$ du béton à l'âge $t > t_0$ est proportionnel à la contrainte σ :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E(t_0, t)} \quad (1)$$

Le module de déformation du béton $E(t_0, t)$ est fonction des deux variables t_0 et t (ou des deux variables t_0 , âge au moment du chargement, et $t - t_0$, durée du chargement). Pour $t = t_0$ nous obtenons la **déformation instantanée** $\varepsilon(t_0)$, et pour $t = \infty$ la **déformation différée** $\varepsilon(\infty)$:

$$\varepsilon(t_0) = \frac{\sigma}{E(t_0, t_0)} \quad \text{et} \quad \varepsilon(\infty) = \frac{\sigma}{E(t_0, \infty)}$$

$E(t_0, t_0)$ est le **module de déformation instantanée** du béton à l'âge t_0 , et $E(t_0, \infty)$ est le module de déformation différée du béton à l'âge t_0 ; nous poserons, pour simplifier l'écriture :

$$E(t_0, t_0) = E(t_0) \quad \text{et} \quad E(t_0, \infty) = K(t_0) \quad (2)$$

Nous pouvons écrire la relation (1) sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E(t_0)} + \sigma F(t_0, t)$$

avec
$$F(t_0, t) = \frac{1}{E(t_0, t)} - \frac{1}{E(t_0, t_0)} \quad (3)$$

La déformation du béton apparaît ainsi comme la somme de la déformation instantanée $\sigma/E(t_0)$ et de la déformation $\sigma F(t_0, t)$ appelée **fluage linéaire**. On notera que $F(t_0, t_0) = 0$. La figure 1 donne l'allure de la courbe représentative de la fonction $1/E(t_0, t)$ pour des valeurs croissantes t_1, t_2, t_3 et t_0 .

1.1.2 Déformation sous contrainte variable dans le temps

Supposons que la contrainte de compression appliquée au prisme de béton dépende du temps :

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < t_0 \\ \sigma(t) & \text{pour } t \geq t_0 \end{cases}$$

La figure 2 donne la courbe représentative de la fonction $\sigma(t)$; l'accroissement de contrainte $d\sigma = \sigma'(\theta) d\theta$ entre les instants θ et $\theta + d\theta$ provoque, au temps $t > \theta$, un raccourcissement unitaire $d\sigma/E(\theta, t)$. Il en résulte que le raccourcissement total à l'âge $t > t_0$ a pour valeur :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t_0)}{E(t_0, t)} + \int_{t_0}^t \frac{\sigma'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} \quad (4)$$

Une intégration par parties permet d'écrire la formule précédente sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(t, t)} - \int_{t_0}^t \sigma(\theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{E(\theta, t)} \right] d\theta \quad (5)$$

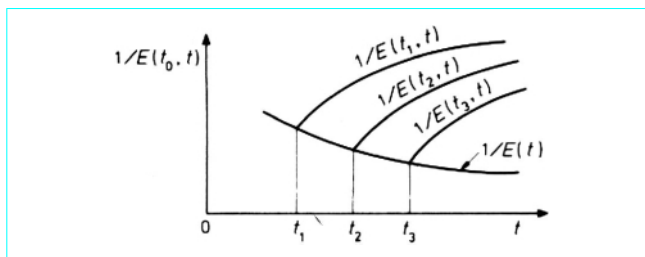


Figure 1 – Fonction $1/E(t_0, t)$

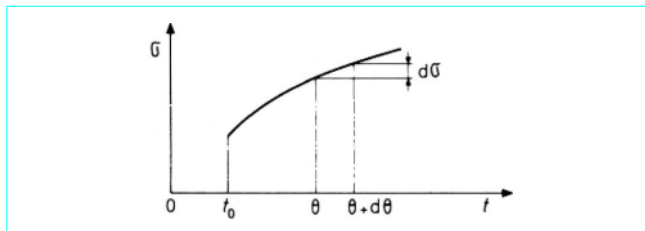


Figure 2 – Fonction $\sigma(t)$

qui montre que $\varepsilon(t)$ est la somme du raccourcissement instantané $\sigma(t)/E(t, t)$ et du raccourcissement dû au fluage. La dérivée

$\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{E(\theta, t)} \right]$ est toujours négative.

1.1.3 Critique de la théorie du fluage linéaire

La loi de déformation (1) implique les deux hypothèses suivantes qui constituent la base de la théorie du fluage linéaire.

En premier lieu, **la fonction $F(t_0, t)$ ne dépend pas de la contrainte de compression σ du béton**. En réalité, cette hypothèse n'est vérifiée que lorsque σ est assez faible, inférieure au tiers environ de la contrainte de rupture. Au-delà, la déformation due au fluage croît plus vite que σ : un béton comprimé à 200 bar subira un fluage supérieur au double du fluage de ce même béton comprimé à 100 bar.

En second lieu, les formules données précédemment ne font pas intervenir le signe de la contrainte appliquée ; elles supposent donc que **le fluage est un phénomène réversible**. L'expérience infirme cette hypothèse. Si les déformations instantanées sont égales à la charge et à la décharge, il n'en est pas de même des déformations différées ; le fluage provoqué par la décharge est plus faible que le fluage provoqué par la charge ; en outre, il se stabilise plus rapidement. Cette critique n'empêche nullement la théorie du fluage linéaire de donner des résultats en bon accord avec l'expérience dans les ouvrages où les déformations différées sont toujours dues aux charges permanentes.

1.1.4 Expressions courantes du module de déformation

Les Recommandations internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton établies par le Comité euro-international du béton (CEB) et par la Fédération internationale de la précontrainte (FIP) donnent une expression du module de déformation de la forme :

$$\frac{1}{E(t_0, t)} = \frac{1 + \varphi(t_0) \rho(t - t_0)}{E(t_0)} \quad \text{soit} \quad F(t_0, t) = \frac{\varphi(t_0) \rho(t - t_0)}{E(t_0)} \quad (6)$$

avec $\rho(t)$ fonction croissante du temps telle que $\rho(0) = 0$ et $\rho(\infty) = 1$,

$\varphi(t_0)$ donné par la formule :

$$\varphi(t_0) = \varphi_0 \alpha_f \beta_f \zeta(t_0)$$

φ_0 coefficient dépendant des conditions climatiques (humidité relative),

α_f coefficient dépendant de l'épaisseur moyenne du béton,

β_f coefficient dépendant de la composition du béton (rapport C/E, ciment/eau),

$\zeta(t_0)$ coefficient dépendant de l'âge t_0 du béton à la mise en charge,

$E(t_0)$ donné par la formule :

$$E(t_0) = 21\,000 \sqrt{\sigma'_k(t_0)}$$

$\sigma'_k(t_0)$ résistance caractéristique du béton à la compression à l'âge t_0 exprimée en bars ; $E(t_0)$ est alors exprimé en bars.

Les coefficients φ_0 , α_f , β_f , $\zeta(t_0)$ et la fonction $\rho(t)$ sont définis par des courbes figurant dans les Recommandations internationales ; $\varphi(t_0)$ peut varier de 0,6 (gros éléments en béton confectionnés avec peu d'eau et conservés en atmosphère saturée) à 6 (éléments minces en béton confectionnés avec beaucoup d'eau et conservés en atmosphère sèche). Pour les ouvrages courants, $\varphi(t_0)$ est généralement voisin de 2.

Si nous faisons $t = \infty$ dans la relation (6), nous voyons que :

$$\frac{1}{K(t_0)} = \frac{1 + \varphi(t_0)}{E(t_0)}$$

$1 + \varphi(t_0)$ est donc la valeur du rapport du module instantané au module différé, et la relation (6) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{E(t_0, t)} = \frac{1}{E(t_0)} + \left[\frac{1}{K(t_0)} - \frac{1}{E(t_0)} \right] \rho(t - t_0) \quad (7)$$

Lorsque le béton n'est chargé qu'à un âge t_0 assez grand, $E(t_0)$ et $K(t_0)$ peuvent être considérés comme des constantes $E = E(\infty)$ et $K = K(\infty)$. Dans ces conditions la formule (7) devient :

$$\frac{1}{E(t_0, t)} = \frac{1}{E} + \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{E} \right) \rho(t - t_0) \quad (8)$$

et le module $E(t_0, t)$ ne dépend plus que de la seule variable $t - t_0$. L'expression la plus courante proposée pour la fonction $\rho(t)$ est :

$$\rho(t) = 1 - \exp(-\beta t)$$

avec β coefficient caractéristique de la vitesse du fluage.

Les formules (7) et (8) s'écrivent alors :

$$\frac{1}{E(t_0, t)} = \frac{1}{E(t_0)} + \left[\frac{1}{K(t_0)} - \frac{1}{E(t_0)} \right] \left[1 - \exp[-\beta(t - t_0)] \right] \quad (9)$$

$$\frac{1}{E(t_0, t)} = \frac{1}{E} + \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{E} \right) \left[1 - \exp[-\beta(t - t_0)] \right] \quad (10)$$

Les formules (9) et (10) ne représentent qu'imparfaitement la réalité, mais elles donnent lieu à des calculs simples ; elles permettent cependant de prévoir convenablement les effets du fluage dans les ouvrages courants lorsque l'on connaît le rapport $1 + \varphi(t_0) = E(t_0)/K(t_0)$. À cet égard, les Recommandations internationales nous ont toujours donné des résultats corrects.

Une meilleure approximation de la fonction $\rho(t)$ est donnée par une expression de la forme :

$$\rho(t) = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \exp(-\beta_i t) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1 \quad (11)$$

On peut en effet, si l'on prend n couples (λ_i, β_i) , faire coïncider $2n - 1$ points de la courbe d'équation (11) et de la courbe expérimentale.

1.2 Relaxation, conséquence de la loi de déformation

1.2.1 Relaxation sous déformation constante

Les hypothèses faites concernant la loi de déformation permettent de montrer que, si l'on impose à partir de l'âge t_0 un raccourcissement unitaire constant ε à un prisme de béton, la contrainte de compression du béton, initialement égale à $\sigma(t_0) = \varepsilon E(t_0, t_0)$, décroît dans le temps et reste proportionnelle à ε . Ce phénomène est appelé **relaxation linéaire**. À l'instant $t > t_0$, la contrainte $\sigma(t)$ est donc donnée par une expression de la forme :

$$\sigma(t) = \varepsilon R(t_0, t) \quad (12)$$

Le module de relaxation $R(t_0, t)$ se déduit, comme nous le verrons, du module de déformation $E(t_0, t)$. En prenant $t = t_0$ dans l'équation (12), nous voyons que :

$$R(t_0, t_0) = E(t_0, t_0)$$

Nous pouvons écrire la relation (12) sous la forme :

$$\sigma(t) = \varepsilon R(t_0, t_0) - \varepsilon G(t_0, t)$$

avec

$$G(t_0, t) = R(t_0, t_0) - R(t_0, t)$$

Nous mettons ainsi en évidence la diminution de contrainte ou relaxation $\varepsilon G(t_0, t)$. On notera que $G(t_0, t_0) = 0$. La figure 3 donne l'allure de la courbe représentative de la fonction $R(t_0, t)$ pour des valeurs croissantes $t_1, t_2, t_3 \dots$ de t_0 . Pour déterminer la fonction $R(t_0, t)$, connaissant la fonction $E(t_0, t)$ il suffit de remarquer que l'expression (12) de $\sigma(t)$ doit vérifier la relation (4) ou la relation équivalente (5), lorsque l'on donne à $\varepsilon(t)$ la valeur constante ε . La contrainte $\sigma(t)$ est donc la solution unique de l'équation intégrale de Volterra (5). Il est plus pratique d'utiliser la formule (4) ; compte tenu de ce que $\varepsilon = \sigma(t_0)/E(t_0, t_0)$ et de la définition de $F(t_0, t)$ dans l'équation (3), nous voyons que $\sigma(t)$ est la solution de l'équation intégrale :

$$\int_{t_0}^t \frac{\sigma'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = -\sigma(t_0) F(t_0, t)$$

qui prend la valeur $\sigma(t_0)$ pour $t = t_0$. Il en résulte que la diminution de contrainte $\varphi(t) = \sigma(t_0) - \sigma(t)$ est la solution de l'équation intégrale :

$$\int_{t_0}^t \frac{\varphi'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = \sigma(t_0) F(t_0, t)$$

Nous désignerons par $\Phi(t_0, t)$ la solution de l'équation intégrale :

$$\int_{t_0}^t \frac{\Phi'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = F(t_0, t)$$

qui s'annule pour $t = t_0$, soit $\Phi(t_0, t_0) = 0$. Nous étudierons dans le paragraphe 1.3 la détermination effective de cette fonction.

Nous obtenons ainsi pour valeur de la relaxation $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \sigma(t_0) \Phi(t_0, t)$$

et, en conséquence, pour valeur de la contrainte $\sigma(t)$:

$$\sigma(t) = \sigma(t_0) [1 - \Phi(t_0, t)] = \varepsilon R(t_0, t_0) [1 - \Phi(t_0, t)]$$

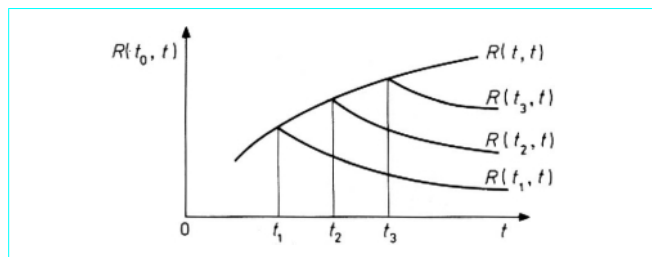


Figure 3 – Module de relaxation $R(t_0, t)$

La fonction $R(t_0, t)$ a donc pour expression :

$$R(t_0, t) = E(t_0, t_0) [1 - \Phi(t_0, t)] \quad (13)$$

1.2.2 Relaxation sous déformation variable dans le temps

Supposons que le raccourcissement unitaire imposé au prisme de béton dépende du temps :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < t_0 \\ \varepsilon(t) & \text{pour } t \geq t_0 \end{cases}$$

La figure 4 donne la courbe représentative de la fonction $\varepsilon(t)$; l'accroissement de déformation $d\varepsilon = \varepsilon'(\theta) d\theta$ entre les instants θ et $\theta + d\theta$ donne, au temps $t > \theta$, une contrainte $R(\theta, t) d\varepsilon$. La contrainte supportée par le béton au temps $t > t_0$ a donc pour valeur :

$$\sigma(t) = \varepsilon(t_0) R(t_0, t) + \int_{t_0}^t \varepsilon'(\theta) R(\theta, t) d\theta \quad (14)$$

Une intégration par parties permet d'écrire la relation précédente sous la forme :

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) R(t, t) - \int_{t_0}^t \varepsilon(\theta) \frac{\partial R(\theta, t)}{\partial \theta} d\theta \quad (15)$$

qui montre que la contrainte $\sigma(t)$ est égale à la contrainte $\varepsilon(t) R(t, t)$ diminuée de la relaxation. La dérivée $\partial R(\theta, t)/\partial \theta$ est toujours positive. Nous aurions pu calculer la contrainte $\sigma(t)$ en remarquant que la fonction $\sigma(t)$ vérifie la relation (4) et la relation équivalente (5) dans lesquelles $\varepsilon(t)$ est une fonction donnée du temps. Donc, l'expression (14) ou l'expression équivalente (15) représente la solution de l'équation intégrale (4) ou de l'équation intégrale de Volterra équivalente (5).

1.2.3 Loi de déformation déduite de la loi de relaxation

Inversement, il est possible de déterminer le module de déformation $E(t_0, t)$ connaissant le module de relaxation $R(t_0, t)$. Il est aisé de montrer que, si l'on désigne par $\Psi(t_0, t)$ la solution de l'équation intégrale :

$$\int_{t_0}^t \Psi'(\theta) R(\theta, t) d\theta = G(t_0, t)$$

qui s'annule pour $t = t_0$, le module $E(t_0, t)$ est donné par la formule :

$$\frac{1}{E(t_0, t)} = \frac{1 + \Psi(t_0, t)}{R(t_0, t_0)}$$

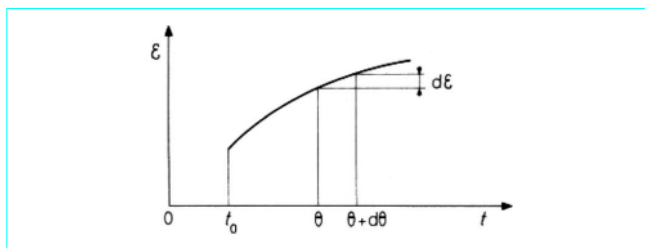


Figure 4 – fonction $\varepsilon(t)$

Lorsque l'on impose au béton une contrainte de compression $\sigma(t)$ à partir de l'âge t_0 , le raccourcissement $\varepsilon(t)$ vérifie la relation (14) et la relation équivalente (15) dans lesquelles $\sigma(t)$ est une fonction donnée du temps. Donc, l'expression (4) ou l'expression équivalente (5) représente la solution de l'équation intégrale (14) ou de l'équation intégrale de Volterra équivalente (15).

1.3 Détermination de la fonction $\Phi(t_0, t)$

1.3.1 Cas particulier où $E(t_0, t)$ est donné par la formule (10)

La fonction $\Phi(t) = \Phi(t_0, t)$ est la solution de l'équation intégrale :

$$\int_{t_0}^t \frac{\Phi'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = F(t_0, t) = F(t) \quad (16)$$

qui s'annule pour $t = t_0$.

Dans le cas où $E(\theta, t)$ est donné par la formule (10), l'équation intégrale (16) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \Phi'(\theta) \left\{ \frac{1}{E} + \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{E} \right) \left(1 - \exp[-\beta(t-\theta)] \right) \right\} d\theta \\ = \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{E} \right) \left(1 - \exp[-\beta(t-t_0)] \right) = F(t) \end{aligned}$$

Nous en déduisons :

$$\beta F(t) + F'(t) = \frac{\beta}{K} \int_{t_0}^t \Phi'(\theta) d\theta + \frac{\Phi'(t)}{E}$$

Il en résulte que $\Phi(t)$ est l'intégrale de l'équation différentielle du premier ordre à coefficients constants :

$$\frac{1}{E} \Phi'(t) + \frac{\beta}{K} \Phi(t) = \beta \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{E} \right)$$

qui s'annule pour $t = t_0$.

Un calcul facile donne l'expression de la fonction $\Phi(t_0, t)$:

$$\Phi(t_0, t) = \left(1 - \frac{K}{E} \right) \left(1 - \exp[-\gamma(t-t_0)] \right) \quad (17)$$

le coefficient γ ayant pour valeur :

$$\gamma = \beta \frac{E}{K}$$

La formule (13) donne ensuite le module de relaxation :

$$R(t_0, t) = E - (E - K) \left(1 - \exp[-\gamma(t-t_0)] \right) \quad (18)$$

Le coefficient γ caractérise la vitesse de la relaxation ; puisque E/K est généralement voisin de 3, la vitesse de la relaxation est plus grande que la vitesse du fluage : un pourcentage donné de la relaxation est atteint au bout d'un temps environ trois fois plus court que le temps nécessaire pour atteindre le même pourcentage du fluage.

La formule (18) montre que $R(t_0, \infty) = K$; ce résultat est général lorsque $E(t_0)$ et $K(t_0)$ sont des constantes.

1.3.2 Cas particulier où $E(t_0, t)$ est donné par la formule (9)

Lorsque $E(t_0, t)$ est donné par la formule (9), il est possible de montrer que la fonction $\Phi(t_0, t)$ a pour expression :

$$\Phi(t_0, t) = \beta \left[\frac{1}{K(t_0)} - \frac{1}{E(t_0)} \right] \int_{t_0}^t E(u) \exp[-\gamma(u)] du$$

la fonction $\gamma(t)$ étant définie par :

$$\gamma(t) = \beta \int_{t_0}^t \frac{E(u)}{K(u)} du$$

La formule (13) donne ensuite le module de relaxation :

$$R(t_0, t) = E(t_0) - \beta \left[\frac{E(t_0)}{K(t_0)} - 1 \right] \int_{t_0}^t E(u) \exp[-\gamma(u)] du$$

La détermination du module de relaxation exige donc, dans ce cas, deux quadratures ; on peut prendre pour $E(t_0)$ et $K(t_0)$ les valeurs déduites des Recommandations internationales.

1.3.3 Cas général. Détermination numérique de la fonction $\Phi(t_0, t)$

Dans le cas général où $E(t_0, t)$ est fourni par l'expérience ou par les Recommandations internationales, il faut recourir à l'intégration numérique. Proposons-nous de calculer $\Phi(t) = \Phi(t_0, t)$ pour une suite de valeurs :

$$t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$$

choisies de façon que, dans chaque intervalle (t_{i-1}, t_i) , la fonction $E(t, t_n)$ puisse être considérée comme constante et égale à $E_{i,n}$. On pourra, par exemple, prendre :

$$E_{i,n} = \frac{1}{2} [E(t_{i-1}, t_n) + E(t_i, t_n)]$$

ou encore $E_{i,n} = E\left(\frac{t_{i-1} + t_i}{2}, t_n\right)$.

Écrivons l'équation (16) pour $t = t_n$ et décomposons l'intégrale en une somme de n intégrales étendues aux intervalles (t_{i-1}, t_i) ; nous obtenons, compte tenu de ce que $\Phi(t_0)$ est nul, la relation :

$$\frac{1}{E_{1,n}} \Phi(t_1) + \frac{1}{E_{2,n}} [\Phi(t_2) - \Phi(t_1)] + \dots + \frac{1}{E_{n,n}} [\Phi(t_n) - \Phi(t_{n-1})] = F(t_n)$$

En donnant successivement à t_n les valeurs t_1, t_2, t_3, \dots , la relation précédente fournit un système d'équations linéaires étagées :

$$\begin{cases} \frac{1}{E_{1,1}} \Phi(t_1) = F(t_1) \\ \frac{1}{E_{1,2}} \Phi(t_1) + \frac{1}{E_{2,2}} [\Phi(t_2) - \Phi(t_1)] = F(t_2) \\ \frac{1}{E_{1,3}} \Phi(t_1) + \frac{1}{E_{2,3}} [\Phi(t_2) - \Phi(t_1)] + \frac{1}{E_{3,3}} [\Phi(t_3) - \Phi(t_2)] = F(t_3) \\ \dots \end{cases}$$

qui donne successivement $\Phi(t_1), \Phi(t_2), \Phi(t_3), \dots$

1.3.4 Conséquences des résultats précédents

Deux conséquences importantes des résultats obtenus méritent d'être soulignées.

■ **La relaxation se produit beaucoup plus rapidement que le fluage**, par exemple, E/K fois plus vite lorsque $E(t_0, t)$ est donné par la formule (10).

■ **La diminution de contrainte due à la relaxation est très importante**. Nous avons en effet, d'après les formules (12) et (13), en supposant ϵ constant :

$$\frac{\sigma(\infty)}{\sigma(t_0)} = \frac{R(t_0, \infty)}{R(t_0, t_0)} = 1 - \Phi(t_0, \infty)$$

Par exemple, lorsque $E(t_0, t)$ est donné par la formule (10), nous trouvons $\sigma(\infty)/\sigma(t_0) = K/E$; la contrainte finale $\sigma(\infty)$ peut donc être plus de trois fois plus faible que la contrainte initiale $\sigma(t_0)$. Cette remarque doit rendre prudent vis-à-vis des opérations de compensation destinées à créer des efforts dans les ouvrages en leur imposant des déformations (compression préalable des pistes d'aérodromes, compensation des poutres continues par dénivellements des appuis).

Pour obtenir une contrainte finale $\sigma(\infty)$, il faudrait imposer à l'âge t_0 une déformation donnant une contrainte initiale $\sigma(t_0) = \sigma(\infty)/[1 - \Phi(t_0, \infty)]$. Il arrive souvent que l'ouvrage ne puisse supporter cette contrainte initiale ; on est alors obligé de procéder par étapes successives. En particulier, on peut accélérer la relaxation de la façon suivante (figure 5) : on exerce la contrainte σ_1 jusqu'au moment t_1 où, en réduisant la contrainte à la valeur $\sigma(\infty)$, la déformation serait égale à la déformation finale que l'on obtiendrait en appliquant en permanence la contrainte $\sigma(\infty)$; dès lors, la contrainte restera constamment égale à la valeur désirée $\sigma(\infty)$.

1.4 Utilisation de la transformation de Carson-Laplace

1.4.1 Transformation de Carson-Laplace

La transformation de Carson-Laplace fait correspondre à la fonction $f(t)$, définie pour $t > 0$, la fonction :

$$f^*(p) = p \int_0^\infty \exp(-pt) f(t) dt \tag{19}$$

avec $f^*(p)$ image de la fonction $f(t)$.

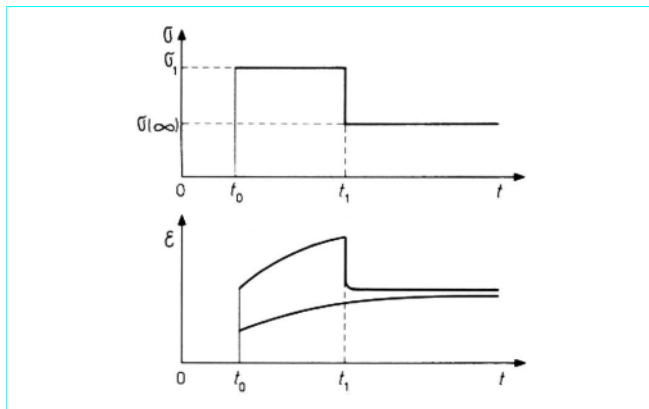


Figure 5 - Accélération de la relaxation

Cette transformation est **linéaire**, car k étant une constante quelconque, on a :

$$\begin{cases} kf(t) & \text{a pour image } kf^*(p) \\ f(t) + g(t) & \text{a pour image } f^*(p) + g^*(p) \end{cases}$$

On démontre aisément que :

$$\left. \begin{aligned} - \text{la dérivée } f'(t) & \quad \text{a pour image } p[f^*(p) - f(0)] \\ - \text{la primitive } \int_0^t f(u)du & \quad \text{a pour image } \frac{1}{p}f^*(p) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Voici les images de quelques fonctions usuelles :

$$\begin{aligned} f(t) = t^n \quad (n \text{ entier } \geq 0) & \quad \text{a pour image } f^*(p) = \frac{n!}{p^{n+1}} \\ f(t) = t^\alpha \quad (\alpha > -1) & \quad \text{a pour image } f^*(p) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}} \\ f(t) = \exp(-\alpha t) & \quad \text{a pour image } f^*(p) = \frac{p}{p + \alpha} \\ f(t) = 1 - \exp(-\alpha t) & \quad \text{a pour image } f^*(p) = \frac{\alpha}{p + \alpha} \\ f(t) = t \exp(-\alpha t) & \quad \text{a pour image } f^*(p) = \frac{p}{(p + \alpha)^2} \\ f(t) = \cos \omega t & \quad \text{a pour image } f^*(p) = \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} \\ f(t) = \sin \omega t & \quad \text{a pour image } f^*(p) = \frac{p\omega}{p^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

La fonction $\Gamma(x)$, égale à $(x - 1)!$ lorsque x est un entier positif, est la fonction eulérienne de deuxième espèce.

On démontre également l'importante propriété suivante :

$$F(t) = \int_0^t f(u) g(t - u) du$$

a pour image :

$$F^*(p) = \frac{1}{p} f^*(p) g^*(p)$$

Nous en déduisons, d'après l'équation (20), que :

$$F'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(u)g(t - u) du$$

a pour image :

$$f^*(p) g^*(p) \quad (21)$$

1.4.2 Application au fluage et à la relaxation

Supposons que le module $E(t_0, t)$ ne dépende que de $t - t_0$, autrement dit soit donné par une expression de la forme (8), et désignons par $f(t - t_0)$ l'inverse du module ; l'équation (4) s'écrit :

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0) f(t - t_0) + \int_{t_0}^t \sigma'(\theta) f(t - \theta) d\theta$$

Effectuons dans l'intégrale le changement de variable $t - \theta = u$; nous obtenons la relation :

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0) f(t - t_0) + \int_0^{t-t_0} \sigma'(t - u) f(u) du$$

que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \frac{d}{dt} \int_0^{t-t_0} f(u) \sigma(t - u) du \quad (22)$$

De même, en supposant que $R(t_0, t)$ soit une fonction $g(t - t_0)$ de la seule variable $t - t_0$, l'équation (14) s'écrit :

$$\sigma(t) = \varepsilon(t_0) g(t - t_0) + \int_{t_0}^t \varepsilon'(\theta) g(t - \theta) d\theta$$

Effectuons dans l'intégrale le changement de variable $t - \theta = u$; nous obtenons la relation :

$$\sigma(t) = \varepsilon(t_0) g(t - t_0) + \int_0^{t-t_0} \varepsilon'(t - u) g(u) du$$

que l'on peut encore écrire sous la forme :

$$\sigma(t) = \frac{d}{dt} \int_0^{t-t_0} g(u) \varepsilon(t - u) du \quad (23)$$

Les relations (22) et (23) montrent que, si l'on prend pour origine du temps l'instant t_0 , les transformées de Carson-Laplace $\varepsilon^*(p)$ et $\sigma^*(p)$ vérifient les relations suivantes obtenues par application de la formule (21) :

$$\varepsilon^*(p) = f^*(p) \sigma^*(p) \quad \text{et} \quad \sigma^*(p) = g^*(p) \varepsilon^*(p)$$

Nous en déduisons immédiatement la relation fondamentale :

$$f^*(p) g^*(p) = 1 \quad (24)$$

qui montre que **les transformées de Carson-Laplace des fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont inverses l'une de l'autre.**

Remarque : il est possible, au moyen de la transformation de Carson-Laplace, de déterminer la fonction $R(t_0, t)$ lorsque $E(t_0, t)$ est donné par la formule (8) dans laquelle $\rho(t)$ a l'expression (11).

Exemple : supposons le module de déformation donné par la formule (10) ; la formule $f(t)$ a pour expression :

$$f(t) = \frac{1}{E} + \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{E} \right) \left[1 - \exp(-\beta t) \right]$$

et sa transformée de Carson-Laplace est :

$$f^*(\rho) = \frac{1}{E} + \left(\frac{1}{K} - \frac{1}{E} \right) \frac{\beta}{\rho + \beta} = \frac{K\rho + E\beta}{EK(\rho + \beta)}$$

La transformée de Carson-Laplace de la fonction $g(t)$ est donc :

$$g^*(\rho) = \frac{EK(\rho + \beta)}{K\rho + E\beta}$$

soit, en posant $\gamma = \beta \frac{E}{K}$:

$$g^*(\rho) = \frac{E\rho + E\beta}{\rho + \gamma} = E - (E - K) \frac{\gamma}{\rho + \gamma}$$

La fonction $g(t)$ a donc pour expression :

$$g(t) = E - (E - K)[1 - \exp(-\gamma t)]$$

Nous retrouvons ainsi la formule (18) :

$$R(t_0, t) = g(t - t_0) = E - (E - K)(1 - \exp[-\gamma(t - t_0)])$$

ficients d'influence a_k^i et b_k^j sont des constantes caractéristiques de la structure étudiée.

Pour calculer les réactions hyperstatiques X_j , il suffit de remarquer que l'on doit avoir $v_k(t)$ identiquement nul lorsqu'on fait $\bar{X}_j = X_j$ dans la formule (25). Les réactions X_j sont donc données par le système de n équations linéaires :

$$\sum_{i=1}^m a_k^i F_i + \sum_{j=1}^n b_k^j X_j = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (26)$$

Le déterminant principal $|b_k^j|$ du système (26) est symétrique, en vertu du théorème de Maxwell-Betti ; nous le supposons différent de zéro, sinon la structure serait à configuration critique. Les réactions X_j sont indépendantes du temps. Donc, **dans l'hypothèse du fluage linéaire, les efforts dans une structure hyperstatique, soumise à des forces extérieures ne dépendant pas du temps, sont identiques aux efforts que l'on calculerait dans l'hypothèse de l'élasticité où le module de déformation est constant.**

Supposons maintenant que les forces $F_i(t)$ appliquées à la structure soient des fonctions du temps. Appliquons au temps t_0 à la structure Σ_0 les forces $F_i(t)$ et des forces $\bar{X}_j(t)$ ayant mêmes points d'application et mêmes lignes d'action que les réactions hyperstatiques. Au temps $t > t_0$ le déplacement $v_k(t)$ du point B_k suivant la ligne d'action de \bar{X}_k a pour valeur :

$$v_k(t) = \frac{1}{E(t_0, t)} \left[\sum_i a_k^i F_i(t_0) + \sum_j b_k^j \bar{X}_j(t_0) \right] + \int_{t_0}^t \frac{1}{E(\theta, t)} \left[\sum_i a_k^i dF_i + \sum_j b_k^j d\bar{X}_j \right] \quad (27)$$

En effet, les accroissements dF_i et $d\bar{X}_j$ des forces F_i et \bar{X}_j , entre les instants θ et $\theta + d\theta$, donnent au temps $t > \theta$ un déplacement dv_k :

$$dv_k = \frac{1}{E(\theta, t)} \left[\sum_i a_k^i dF_i + \sum_j b_k^j d\bar{X}_j \right]$$

Une intégration par parties permet d'écrire l'équation (27) sous la forme :

$$v_k(t) = \frac{1}{E(t, t)} \left[\sum_i a_k^i F_i(t) + \sum_j b_k^j \bar{X}_j(t) \right] - \int_{t_0}^t \left[\sum_i a_k^i F_i(\theta) + \sum_j b_k^j \bar{X}_j(\theta) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{E(\theta, t)} \right] d\theta$$

Il en résulte que $v_k(t)$ sera nul quel que soit t si les réactions hyperstatiques $X_j(t)$ dues à l'application des forces données $F_i(t)$ vérifient le système de n équations linéaires :

$$\sum_{i=1}^m a_k^i F_i(t) + \sum_{j=1}^n b_k^j X_j(t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (28)$$

Donc, **dans l'hypothèse du fluage linéaire, l'état de contrainte d'une structure hyperstatique, soumise à des forces données variables dans le temps, est identique à l'état de contrainte que l'on calculerait en supposant le module de déformation constant.**

Le principe de superposition des états d'équilibre découle des résultats précédents.

Un exemple de forces données variables dans le temps est fourni par la précontrainte, en raison de la relaxation des armatures de précontrainte.

2. Application au calcul des structures

2.1 Équilibre sous l'action de forces extérieures données

L'état de contrainte d'une structure isostatique soumise à des forces extérieures données, dépendant ou non du temps, ne dépend pas du module de déformation $E(t_0, t)$ du béton. Nous allons montrer que ce résultat est encore exact pour une structure hyperstatique.

Considérons une structure n fois hyperstatique Σ . Nous désignons par X_j ($j = 1, 2, \dots, n$) les réactions hyperstatiques appliquées aux points B_j de la structure. Nous supposons la structure sollicitée par m forces données F_i ($i = 1, 2, \dots, m$) appliquées aux points A_i . Associons à la structure Σ la structure isostatique Σ_0 obtenue en supprimant les liaisons surabondantes correspondant aux réactions hyperstatiques X_j .

Supposons d'abord les forces F_i indépendantes du temps. Appliquons au temps t_0 à la structure isostatique Σ_0 les forces F_i et des forces \bar{X}_j ayant mêmes points d'application et mêmes lignes d'action que les réactions X_j . Au temps $t > t_0$, le déplacement $v_k(t)$ du point B_k suivant la ligne d'action de la force \bar{X}_k a pour valeur, dans l'hypothèse du fluage linéaire :

$$v_k(t) = \frac{1}{E(t_0, t)} \left[\sum_{i=1}^m a_k^i F_i + \sum_{j=1}^n b_k^j \bar{X}_j \right] \quad (25)$$

En effet, les formules classiques de la Résistance des matériaux donnant les déplacements d'une structure isostatique restent valables si l'on remplace le module constant E par $E(t_0, t)$. Les coef-

2.2 Équilibre sous l'effet de déformations imposées

2.2.1 Compensation des structures hyperstatiques

Souvent, pour diminuer les contraintes d'une structure hyperstatique, on impose à cette structure des déformations maintenues par les liaisons surabondantes (dénivellation des appuis d'une poutre continue par exemple). De telles opérations, appelées compensations, ont pour but de créer dans la structure des efforts de compensation qui s'opposent aux efforts provoqués par les forces données. Le problème qui se pose est de savoir comment les efforts de compensation évoluent dans le temps.

Pour calculer les efforts de compensation, on peut faire abstraction des forces données qui conduisent toujours à un état de contrainte élastique ne dépendant pas du module de déformation.

En imposant à l'âge t_0 des déplacements v_k^0 aux points B_k dans la direction des réactions hyperstatiques X_k , déplacements maintenus fixes par les liaisons surabondantes, on crée dans la structure Σ des réactions compensatrices $X_k(t)$ qui sont des fonctions du temps.

Au temps t_0 , les valeurs initiales des réactions compensatrices sont données par le système de n équations linéaires :

$$v_k^0 = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \sum_j b_k^j X_j(t_0) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

La relation (27) montre qu'au temps $t > t_0$, les réactions hyperstatiques $X_j(t)$ vérifient les équations intégrales :

$$v_k^0 = \frac{1}{E(t_0, t)} \sum_j b_k^j X_j(t_0) + \sum_j b_k^j \int_{t_0}^t \frac{dX_j(\theta)}{E(\theta, t)} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

La comparaison des deux équations précédentes nous donne, en désignant par $X_j'(t)$ la dérivée de la fonction $X_j(t)$ et en introduisant la fonction $F(t_0, t)$ définie par l'équation (3) :

$$\sum_j b_k^j \int_{t_0}^t \frac{X_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = -F(t_0, t) \sum_j b_k^j X_j(t_0) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Et, puisque le déterminant $|b_k^j|$ est différent de zéro, les n équations précédentes sont équivalentes aux n équations :

$$\int_{t_0}^t \frac{X_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = -X_j(t_0) F(t_0, t) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

Il en résulte que la diminution $S_j(t)$ de la réaction compensatrice :

$$S_j(t) = X_j(t_0) - X_j(t)$$

est la solution de l'équation intégrale :

$$\int_{t_0}^t \frac{S_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = X_j(t_0) F(t_0, t)$$

qui s'annule pour $t = t_0$. Nous avons donc, $\Phi(t_0, t)$ désignant la fonction étudiée dans le paragraphe 1.3 :

$$S_j(t) = X_j(t_0) \Phi(t_0, t)$$

et par suite :

$$X_j(t) = X_j(t_0) [1 - \Phi(t_0, t)] \quad (29)$$

Les réactions hyperstatiques introduites par la compensation diminuent donc dans le temps : **les efforts de compensation à l'âge $t > t_0$ sont égaux aux efforts de compensation initiaux à l'âge t_0 multipliés par un facteur de réduction égal à $1 - \Phi(t_0, t)$** . Ce facteur de réduction ne dépend que des propriétés du béton et non des caractéristiques de la structure, il peut donc être calculé une fois pour toutes pour un béton donné.

Dans le cas particulier où le module de déformation est donné par la formule (10), la formule (29) devient, compte tenu de l'expression (17) de la fonction $\Phi(t_0, t)$:

$$X_j(t) = X_j(t_0) \left[\frac{K}{E} + \frac{E-K}{E} \exp[-\gamma(t-t_0)] \right]$$

Si nous faisons tendre t vers l'infini, nous obtenons :

$$X_j(\infty) = \frac{K}{E} X_j(t_0)$$

Dans ce cas, les efforts de compensation initiaux sont réduits, à la longue, dans le rapport du module de déformation différée au module de déformation instantanée. Les efforts limites dus à la compensation sont, en général, environ trois fois plus faibles que les efforts initiaux ; d'autre part, γ étant environ trois fois plus grand que β , les efforts de compensation tendent assez rapidement vers leurs valeurs limites.

Donnons deux exemples concrets.

■ En dénivellant les appuis d'une poutre continue au temps t_0 , on crée des moments initiaux sur appuis $M_i(t_0)$; au temps $t > t_0$, les moments sur appuis ont pour valeurs :

$$M_i(t) = M_i(t_0) [1 - \Phi(t_0, t)]$$

Le moment fléchissant compensateur dans la section d'abscisse x , comptée à partir de l'appui de gauche de la travée considérée, ayant pour valeur :

$$M_{i-1} \left(1 - \frac{x}{\ell_i} \right) + M_i \frac{x}{\ell_i}$$

est donc réduit dans le même rapport que les moments sur appuis.

■ Une réduction de portée, imposée au moyen de vérins à un arc à deux articulations (ce procédé est classique pour les poutres à béquilles précontraintes), donne une poussée compensatrice initiale $Q(t_0)$ qui se réduit, au temps $t > t_0$, à la valeur :

$$Q(t) = Q(t_0) [1 - \Phi(t_0, t)]$$

En désignant par $y(x)$ l'ordonnée de la fibre moyenne de l'arc, les moments fléchissants compensateurs ont pour valeurs $-Q(t) y(x)$; ils sont donc réduits dans le même rapport que la poussée compensatrice.

Il est souvent nécessaire, pour éviter des efforts initiaux trop élevés, de réaliser la compensation en plusieurs étapes successives.

2.2.2 Effet des déformations imposées dans le cas général

Conservons les notations définies au paragraphe 2.1, et supposons que l'on impose aux m points A_i de la structure n fois hyperstatique Σ des déplacements donnés u_i^0 dans la direction des forces F_i . Cela revient à introduire m liaisons supplémentaires dans la structure Σ , donc à la transformer en une structure $m+n$ fois hyperstatique Σ_1 . Il est même possible que la structure Σ soit isostatique ($n=0$).

En appliquant les résultats obtenus dans l'étude de la compensation à la structure hyperstatique Σ_1 , nous voyons que **les efforts provoqués dans une structure isostatique ou hyperstatique par des déformations imposées à l'âge t_0 diminuent dans le temps ; au temps $t > t_0$ les efforts sont égaux aux efforts initiaux multipliés par un facteur de réduction égal à $1 - \Phi(t_0, t)$** .

2.3 Influence du mode de construction des ouvrages

Très souvent, le mode d'exécution d'un ouvrage hyperstatique Σ impose à cet ouvrage des déformations. Nous examinerons le cas où l'on construit d'abord une structure isostatique associée Σ_0 , et où l'on réalise ensuite les liaisons permettant de transformer la structure Σ_0 en la structure hyperstatique Σ . La réalisation des liaisons surabondantes peut être effectuée au moyen d'armatures de précontrainte.

Nous nous proposons de calculer les réactions hyperstatiques et de chercher comment elles évoluent dans le temps.

Nous désignerons par F_i les **forces appliquées en permanence** à partir de l'instant t_0 où l'on réalise les liaisons surabondantes. Nous pouvons faire abstraction des forces appliquées postérieurement à l'instant t_0 , car les réactions hyperstatiques sont, comme nous l'avons vu au paragraphe 2.1, celles que l'on calcule en supposant le module de déformation constant.

Si l'on avait construit d'emblée la structure hyperstatique Σ , par exemple en l'exécutant sur cintre, les réactions hyperstatiques auraient eu les valeurs X_j^* données par le système de n équations linéaires :

$$\sum_i a_k^i F_i + \sum_j b_k^j X_j^* = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (30)$$

La réalisation des liaisons surabondantes à l'instant t_0 introduit des réactions hyperstatiques égales à S_j pour $t = t_0$; les réactions S_j peuvent être nulles (il en est ainsi si les liaisons surabondantes sont réalisées au moyen d'armatures de précontrainte concordantes). Au temps $t > t_0$ les réactions hyperstatiques ont pour valeurs :

$$\mathcal{R}_j(t) = S_j + X_j(t)$$

les fonctions $X_j(t)$ s'annulant pour $t = t_0$.

Avant la réalisation des liaisons surabondantes, les déplacements des points B_k de la structure isostatique Σ_0 ont pour valeurs à l'instant t_0 , en supposant pour simplifier l'exposé que les forces F_i sont appliquées à partir de l'instant t_0 (voir la remarque en fin de paragraphe) :

$$v_k = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \sum_i a_k^i F_i \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Ces déplacements en varient plus dès que les liaisons surabondantes sont réalisées; nous avons donc, à l'instant $t > t_0$, puisque $\mathcal{R}_j^i(\theta) = X_j^i(\theta)$:

$$v_k = \frac{1}{E(t_0, t)} \sum_i a_k^i F_i + \sum_j b_k^j \int_{t_0}^t \frac{X_j^i(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Éliminons v_k entre les deux relations précédentes, nous obtenons :

$$\sum_j b_k^j \int_{t_0}^t \frac{X_j^i(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = -F(t_0, t) \sum_i a_k^i F_i \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

soit, en tenant compte des équations (30) :

$$\sum_j b_k^j \int_{t_0}^t \frac{X_j^i(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = F(t_0, t) \sum_j b_k^j X_j^* \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Puisque le déterminant $|b_k^j|$ est différent de zéro, les équations précédentes sont équivalentes aux équations :

$$\int_{t_0}^t \frac{X_j^i(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = X_j^* F(t_0, t) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (31)$$

dont la solution est :

$$X_j(t) = X_j^* \Phi(t_0, t) \quad (32)$$

Dans le cas particulier où le module de déformation est donné par la formule (10), nous trouvons :

$$X_j(t) = X_j^* \left(1 - \frac{K}{E}\right) \left(1 - \exp[-\gamma(t - t_0)]\right)$$

En faisant tendre t vers l'infini, nous obtenons la valeur limite :

$$X_j(\infty) = X_j^* \left(1 - \frac{K}{E}\right)$$

Ainsi, en supposant les liaisons surabondantes réalisées de façon que $S_j = 0$, les valeurs limites des réactions hyperstatiques peuvent atteindre les deux tiers des valeurs X_j^* correspondant à la réalisation d'emblée de la structure Σ .

Nous avons donc obtenu le résultat fondamental suivant : **il peut se faire que le mode de construction d'un ouvrage hyperstatique entraîne un état de contrainte dépendant du temps; l'état de contrainte final peut être assez différent de l'état de contrainte initial qui est l'état de contrainte déterminé en supposant l'ouvrage élastique.** Il convient donc de vérifier la stabilité des ouvrages en béton précontraint pour $t = t_0$ et pour $t = \infty$; la vérification de la stabilité pour $t = t_0$, qui correspond à un état de contrainte transitoire, peut être effectuée avec un coefficient de sécurité plus faible que la vérification de la stabilité pour $t = \infty$, qui correspond à l'état d'équilibre définitif de la structure.

Voici deux **exemples** concrets d'application de la formule (32).

— Pour réaliser une poutre continue, on pose une succession de poutres préfabriquées sur appuis simples, et l'on rend ces poutres solidaires au temps t_0 au moyen d'armatures de précontrainte. En supposant la précontrainte concordante, les moments fléchissants sur appuis sont nuls pour $t = t_0$ et ont pour valeurs au temps $t > t_0$:

$$M_i(t) = M_i^* \Phi(t_0, t)$$

avec M_i^* moments sur appuis sous l'effet des charges appliquées au moment de la réalisation des liaisons, dans l'hypothèse du comportement élastique de la structure.

— On peut également, dans le cas d'un pont, construire une poutre continue par encorbellement à partir des piles, et assurer la continuité au temps t_0 par clavage des joints au milieu des travées au moyen d'armatures de précontrainte. En supposant la précontrainte concordante, les moments fléchissants au milieu des travées sont nuls pour $t = t_0$ et ont pour valeurs au temps $t > t_0$:

$$m_i(t) = m_i^* \Phi(t_0, t)$$

avec m_i^* moments fléchissants produits au milieu des travées par les charges appliquées au moment du clavage dans l'hypothèse du comportement élastique.

On voit que négliger les effets du fluage du béton conduit à sous-estimer les moments fléchissants au milieu des travées des ponts continus construits en encorbellement.

■ **Remarque** : supposons que le système des forces F_i appliquées à l'instant t_0 soit la somme de p systèmes de forces $F_i^1, F_i^2, \dots, F_i^p$ appliquées depuis les instants t_1, t_2, \dots, t_p antérieurs à l'instant t_0 . Ce cas se rencontre en particulier dans la construction des ponts par encorbellements successifs.

Si l'on désigne par $(X_j^1)^*, (X_j^2)^*, \dots, (X_j^p)^*$ les réactions hyperstatiques produites par les systèmes de forces $F_i^1, F_i^2, \dots, F_i^p$ dans

l'hypothèse du comportement élastique, la méthode qui a permis d'établir l'équation (31) conduit dans ce cas à l'équation :

$$\int_{t_0}^t \frac{X_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = \sum_{r=1}^p (X_j^r)^* F_r(t_0, t) \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

dans laquelle $F_r(t_0, t)$ désigne la fonction :

$$F_r(t_0, t) = \frac{1}{E(t_r, t)} - \frac{1}{E(t_r, t_0)}$$

Nous en déduisons l'expression suivante de $X_j(t)$:

$$X_j(t) = \sum_{r=1}^p (X_j^r)^* \Phi_r(t_0, t) \quad (33)$$

dans laquelle $\Phi_r(t_0, t)$ désigne la solution de l'équation intégrale :

$$\int_{t_0}^t \frac{\Phi_r'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = F_r(t_0, t)$$

qui s'annule pour $t = t_0$. Cette équation s'étudie de la même façon que l'équation intégrale (16).

Dans le cas particulier où le module de déformation est donné par la formule (10), nous trouvons :

$$X_j(t) = \left(1 - \frac{K}{E}\right) \left(1 - \exp[-\gamma(t - t_0)]\right) \sum_{r=1}^p (X_j^r)^* \exp[-\beta(t_0 - t_r)]$$

La valeur limite de $X_j(t)$ est donc :

$$X_j(\infty) = \left(1 - \frac{K}{E}\right) \sum_{r=1}^p (X_j^r)^* \exp[-\beta(t_0 - t_r)]$$

Les facteurs $\exp[-\beta(t_0 - t_r)]$ inférieurs à l'unité mettent en évidence l'influence du vieillissement du béton avant la réalisation des liaisons surabondantes.

En particulier, lorsque la totalité des forces est appliquée à l'instant $t_1 < t_0$, les formules précédentes se réduisent à :

$$X_j(t) = X_j^* \left(1 - \frac{K}{E}\right) \left(1 - \exp[-\gamma(t - t_0)]\right) \exp[-\beta(t_0 - t_1)]$$

$$X_j(\infty) = X_j^* \left(1 - \frac{K}{E}\right) \exp[-\beta(t_0 - t_1)]$$

2.4 Calcul des déformations différées

Le déplacement, dans une direction donnée, d'un point M de la structure hyperstatique Σ sous l'effet des forces extérieures F_i est égal au déplacement du point M de la structure isostatique associée Σ_0 sous l'effet des forces extérieures F_i et des réactions $\mathcal{R}_j(t)$ appliquées aux points B_j . En supposant, pour simplifier l'exposé, que les forces F_i sont appliquées en permanence à partir de l'instant t_0 où sont réalisées les liaisons surabondantes, nous avons pour expression du déplacement $v_M(t)$ du point M au temps $t > t_0$:

$$v_M(t) = \frac{1}{E(t_0, t)} \left[\sum_i \alpha_M^i F_i + \sum_j \beta_M^j \mathcal{R}_j(t_0) \right] + \sum_j \beta_M^j \int_{t_0}^t \frac{\mathcal{R}_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} \quad (34)$$

formule dans laquelle α_M^i et β_M^j sont des constantes (coefficients d'influence). Le **déplacement différé** au temps t est :

$$\delta_M(t) = v_M(t) - v_M(t_0) \quad (35)$$

■ Dans le cas d'une **structure isostatique**, les réactions $\mathcal{R}_j(t)$ sont identiquement nulles, et nous déduisons des relations (34) et (35) :

$$\delta_M(t) = F(t_0, t) \sum_i \alpha_M^i F_i$$

expression que l'on peut également écrire sous la forme :

$$\delta_M(t) = \left[\frac{E(t_0, t_0)}{E(t_0, t)} - 1 \right] v_M(t_0)$$

Le déplacement différé limite s'obtient en faisant tendre t vers l'infini :

$$\delta_M(\infty) = \left[\frac{E(t_0)}{K(t_0)} - 1 \right] v_M(t_0)$$

Le déplacement différé limite est donc, en général, environ le double du déplacement instantané.

■ Dans le cas d'une **structure hyperstatique** obtenue par réalisation des liaisons surabondantes au temps t_0 , nous avons (§ 2.3) :

$$\mathcal{R}_j(t) = S_j + X_j(t) \quad \text{et} \quad \mathcal{R}_j(t_0) = S_j$$

de sorte que la formule (34) s'écrit :

$$v_M(t) = \frac{1}{E(t_0, t)} \left[\sum_i \alpha_M^i F_i + \sum_j \beta_M^j S_j \right] + \sum_j \beta_M^j \int_{t_0}^t \frac{X_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)}$$

soit, compte tenu des équations (31) :

$$v_M(t) = \frac{1}{E(t_0, t)} \left[\sum_i \alpha_M^i F_i + \sum_j \beta_M^j S_j \right] + F(t_0, t) \sum_j \beta_M^j X_j^* \quad (36)$$

En particulier :

$$v_M(t_0) = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \left[\sum_i \alpha_M^i F_i + \sum_j \beta_M^j S_j \right]$$

Nous obtenons donc pour valeur du déplacement différé :

$$\delta_M(t) = F(t_0, t) \left[\sum_i \alpha_M^i F_i + \sum_j \beta_M^j (S_j + X_j^*) \right] \quad (37)$$

Il peut se faire que la quantité entre crochets soit nulle ; dans ce cas le déplacement différé du point M est nul. Par exemple, dans le cas d'une poutre continue réalisée par assemblage de poutres préfabriquées, il est possible, en choisissant convenablement la précontrainte, de faire en sorte que la flèche différée soit nulle au milieu des travées. Il ne faut pas oublier que la précontrainte doit être considérée comme un système de forces extérieures.

Compte tenu de la valeur de $v_M(t_0)$, la formule (37) peut s'écrire :

$$\delta_M(t) = F(t_0, t) \left[E(t_0, t_0) v_M(t_0) + \sum_j \beta_M^j X_j^* \right] \quad (38)$$

Il résulte de ce qui précède que **les déformations différées des structures hyperstatiques sont plus faibles que celles des structures isostatiques**.

Nota : dans le cas où les liaisons surabondantes sont réalisées à l'âge t_0 , mais où le système des forces F_i est la somme de p systèmes de forces $F_1^i, F_2^i, \dots, F_p^i$ appliquées aux instants t_1, t_2, \dots, t_p antérieurs à l'instant t_0 , la formule (37) doit être remplacée par la formule suivante, dans laquelle les notations sont celles de la remarque finale du paragraphe 2.3 :

$$\delta_M(t) = F(t_0, t) \sum_j \beta_M^j S_j + \sum_{r=1}^p F_r(t_0, t) \left[\sum_i \alpha_M^i F_i^r + \sum_j \beta_M^j (X_j^r)^* \right]$$

2.5 Effets du retrait et de la température

2.5.1 Formules générales

Considérons une structure hyperstatique Σ . Dans la structure isostatique associée Σ_0 , le retrait ou la température, agissant à partir de l'instant t_0 , donnent à l'instant $t > t_0$ des déplacements $v_k(t)$ aux points d'application B_k des réactions hyperstatiques.

Supposons d'abord que le module de déformation du béton soit constant et égal à $E(t_0, t_0)$; dans cette hypothèse, les réactions hyperstatiques dues au retrait ou à la température auraient les valeurs $X_j^*(t)$ données par le système d'équations linéaires :

$$v_k(t) + \frac{1}{E(t_0, t_0)} \sum_j b_k^j X_j^*(t) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (39)$$

Les équations (39) expriment en effet que les déplacements des points B_k sont nuls. Les fonctions $X_j^*(t)$ sont donc connues.

En réalité, le module de déformation du béton n'est pas constant, et les valeurs réelles des réactions hyperstatiques dues au retrait ou à la température sont données par les équations :

$$v_k(t) + \frac{1}{E(t_0, t)} \sum_j b_k^j X_j(t_0) + \sum_j b_k^j \int_{t_0}^t \frac{X_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

La comparaison des deux équations précédentes donne les équations :

$$\sum_j b_k^j \int_{t_0}^t \frac{X_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} + \frac{1}{E(t_0, t)} \sum_j b_k^j X_j(t_0) = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \sum_j b_k^j X_j^*(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

qui, puisque le déterminant $|b_k^j|$ est différent de zéro, sont équivalentes aux équations intégrales :

$$\int_{t_0}^t \frac{X_j'(\theta) d\theta}{E(\theta, t)} + \frac{X_j(t_0)}{E(t_0, t)} = \frac{X_j^*(t)}{E(t_0, t_0)} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (40)$$

Les équations intégrales (40) sont semblables à l'équation (4) ; nous pouvons donc écrire les solutions de ces équations sous la forme (14) :

$$X_j(t) = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \left[X_j^*(t_0) R(t_0, t) + \int_{t_0}^t X_j^{*'}(\theta) R(\theta, t) d\theta \right] \quad (41)$$

ou sous la forme (15) :

$$X_j(t) = \frac{1}{E(t_0, t_0)} \left[X_j^*(t) R(t, t) - \int_{t_0}^t X_j^*(\theta) \frac{\partial R(\theta, t)}{\partial \theta} d\theta \right] \quad (42)$$

$R(t_0, t)$ désignant le module de relaxation.

2.5.2 Cas particulier où le module de déformation est donné par l'équation (10)

Dans le cas particulier où $E(t_0, t)$ est donné par la formule (10), on ne diminue pas la généralité en plaçant l'origine du temps à l'âge t_0 puisque, dans ce cas, le module $E(t_0, t)$ ne dépend que de la durée de chargement $t - t_0$.

La formule (42) devient alors, compte tenu de l'expression (18) de $R(t_0, t)$:

$$X_j(t) = X_j^*(t_0) - \gamma \left(1 - \frac{K}{E} \right) \int_0^t X_j^*(\theta) \exp[-\gamma(t-\theta)] d\theta \quad (43)$$

Supposons que les déplacements $v_k(t)$ soient de la forme :

$$v_k(t) = v_k f(t)$$

v_k désignant des constantes ; nous avons alors :

$$X_j^*(t) = X_j^* f(t)$$

les constantes X_j^* étant données par le système d'équations linéaires :

$$v_k + \frac{1}{E(t_0, t_0)} \sum_j b_k^j X_j^* = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

La formule (43) montre alors que :

$$X_j(t) = X_j^* F(t)$$

la fonction $F(t)$ ayant pour expression :

$$F(t) = f(t) - \gamma \left(1 - \frac{K}{E} \right) \int_0^t f(\theta) \exp[-\gamma(t-\theta)] d\theta \quad (44)$$

2.5.3 Effet du retrait lorsque $E(t_0, t)$ est donné par l'équation (10)

Supposons que le raccourcissement unitaire dû au retrait soit :

$$\lambda(t) = \lambda [1 - \exp(-\alpha t)]$$

avec α constante caractéristique de la vitesse du retrait.

Donc, X_j^* désignant les valeurs des réactions hyperstatiques dues au raccourcissement unitaire λ dans l'hypothèse du comportement élastique, nous avons :

$$f(t) = 1 - \exp(-\alpha t)$$

La formule (44) donne alors, lorsque $\gamma \neq \alpha$:

$$F(t) = \frac{K}{E} [1 - \exp(-\alpha t)] - \alpha \left(1 - \frac{K}{E} \right) \frac{\exp(-\gamma t) - \exp(-\alpha t)}{\gamma - \alpha}$$

et, lorsque $\gamma = \alpha$:

$$F(t) = \frac{K}{E} [1 - \exp(-\alpha t)] + \left(1 - \frac{K}{E} \right) \alpha t \exp(-\alpha t)$$

Il est facile d'étudier les variations de la fonction $F(t)$.

■ Premier cas : $\gamma \neq \alpha$

— Lorsque $K\gamma - E\alpha \geq 0$, soit, compte tenu de la valeur de γ , lorsque $\alpha \leq \beta$ (vitesse du retrait inférieure ou égale à la vitesse du fluage), $F(t)$ croît de $F(0) = 0$ à $F(\infty) = K/E$ lorsque t croît de 0 à l'infini.

— Lorsque $K\gamma - E\alpha < 0$, soit lorsque $\alpha > \beta$ (vitesse du retrait supérieure à la vitesse du fluage), $F(t)$ croît de $F(0) = 0$ à $F(t_1)$, puis décroît de $F(t_1)$ à $F(\infty) = K/E$; l'instant t_1 qui correspond au maximum de $F(t)$ est défini par l'équation :

$$\exp[-(\gamma - \alpha)t_1] = \frac{E\alpha - K\gamma}{(E - K)\gamma}$$

■ Deuxième cas : $\gamma = \alpha$

Dans ce cas, où l'on a toujours $\alpha > \beta$, les conclusions précédentes sont encore exactes, l'instant t_1 étant défini par :

$$t_1 = \frac{E}{(E-K)^\alpha}$$

Le maximum de la fonction $F(t)$ a donc pour valeur :

$$F(t_1) = \frac{K}{E} + \left(1 - \frac{K}{E}\right) \exp\left(-\frac{E}{E-K}\right)$$

2.5.4 Élévation progressive de la température, $E(t_0, t)$ étant donné par l'équation (10)

Supposons que la température croisse linéairement dans l'intervalle $(0, t_1)$, puis demeure constante. Le raccourcissement unitaire dû à la température a pour valeur :

$$\lambda(t) = \begin{cases} -\lambda(t/t_1) & \text{pour } 0 \leq t \leq t_1 \\ -\lambda & \text{pour } t \geq t_1 \end{cases}$$

Donc, si X_j^* désigne les valeurs des réactions hyperstatiques calculées dans l'hypothèse du comportement élastique sous l'effet d'une dilatation unitaire λ , nous avons :

$$f(t) = \begin{cases} t/t_1 & \text{pour } 0 \leq t \leq t_1 \\ 1 & \text{pour } t \geq t_1 \end{cases}$$

La formule (44) donne $F(t)$:

$$F(t) = \begin{cases} \frac{K}{E} \left(\frac{t}{t_1}\right) + \left(1 - \frac{K}{E}\right) \left(\frac{1 - \exp(-\gamma t)}{\gamma t_1}\right) & \text{pour } 0 \leq t \leq t_1 \\ \frac{K}{E} + \left(1 - \frac{K}{E}\right) \left(\frac{\exp[-\gamma(t-t_1)] - \exp(-\gamma t)}{\gamma t_1}\right) & \text{pour } t \geq t_1 \end{cases}$$

La fonction $F(t)$ croît d'abord de $F(0) = 0$ jusqu'à $F(t_1)$, puis décroît ensuite de $F(t_1)$ à $F(\infty) = K/E$.

Le maximum de la fonction $F(t)$ a pour valeur :

$$F(t_1) = \frac{K}{E} + \left(1 - \frac{K}{E}\right) \left(\frac{1 - \exp(-\gamma t_1)}{\gamma t_1}\right)$$

Ce maximum décroît constamment de $F(0) = 1$ à $F(\infty) = K/E$. Par exemple, l'unité de temps étant le mois, si $E = 3K$ et $\beta = 0,134$, on a $\gamma = 0,402$ et l'on trouve les valeurs de $F(t_1)$ données dans le tableau suivant (la valeur $\beta = 0,134$ suppose 80 % de la déformation différée acquise au bout d'un an) :

$t_1 \dots$ (mois)	0	1	3	6	12	24	∞
$F(t_1)$	1	0,882 3	0,720 6	0,585 0	0,470 4	0,402 4	1/3

2.5.5 Variation sinusoïdale de la température, $E(t_0, t)$ étant donné par l'équation (10)

Une variation sinusoïdale de la température de période $2\pi/\omega$ donne lieu à un raccourcissement unitaire :

$$\lambda(t) = \lambda \sin \omega t$$

Donc si X_j^* désigne les valeurs des réactions hyperstatiques sous l'effet du raccourcissement unitaire λ , nous avons :

$$f(t) = \sin \omega t$$

La formule (44) donne $F(t)$:

$$F(t) = \frac{E\omega^2 + K\gamma^2}{E(\omega^2 + \gamma^2)} \sin \omega t + \frac{(E-K)\omega\gamma}{E(\omega^2 + \gamma^2)} [\cos \omega t - \exp(-\gamma t)]$$

Au bout d'un temps suffisamment long pour que $\exp - \gamma t$ soit négligeable, $F(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps de même période que $f(t)$:

$$F(t) = \frac{E\omega^2 + K\gamma^2}{E(\omega^2 + \gamma^2)} \sin \omega t + \frac{(E-K)\omega\gamma}{E(\omega^2 + \gamma^2)} \cos \omega t$$

En posant :

$$\tan \varphi = \frac{\omega}{\gamma} \quad \text{et} \quad \tan \psi = \frac{E}{K} \tan \varphi$$

l'expression précédente se met sous la forme :

$$F(t) = \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{K}{E}\right)^2 \cos^2 \varphi} \left[\sin(\omega t - \varphi + \psi) \right]$$

Les valeurs extrêmes de $F(t)$ sont :

$$\pm \sqrt{\sin^2 \varphi + \left(\frac{K}{E}\right)^2 \cos^2 \varphi}$$

et le maximum de $F(t)$ précède le maximum de $f(t)$ de :

$$\Delta t = \frac{\psi - \varphi}{\omega}$$

Lorsque la période tend vers 0, ω tend vers ∞ , donc φ et ψ tendent vers $\pi/2$, et les valeurs extrêmes de $F(t)$ tendent vers ± 1 .

Lorsque la période tend vers ∞ , ω tend vers 0, donc φ et ψ tendent vers 0, et les valeurs extrêmes de $F(t)$ tendent vers $\pm K/E$.

Reprenons par exemple le béton considéré au paragraphe 2.5.4 ($E = 3K$, $\gamma = 0,402$). Pour des variations de température de période un jour, les valeurs extrêmes de $F(t)$ sont $\pm 0,999 998$ et $\Delta t = 20$ s. Pour des variations de température de période un an, les valeurs extrêmes de $F(t)$ sont $\pm 0,818 7$ et $\Delta t = 23$ j. L'atténuation des effets de la température par les déformations différées du béton est plus faible qu'on ne le croit généralement.

Fluage et relaxation du béton

par **Jean COURBON**

*Ingénieur Général Honoraire des Ponts et Chaussées
Professeur Honoraire à l'École Nationale des Ponts et Chaussées*

Bibliographie

COURBON (J.). – *L'influence du fluage linéaire sur l'équilibre des systèmes hyperstatiques en béton précontraint*. Annales de l'Institut du Bâtiment et des Travaux Publics (1968).

COURBON (J.). – *Résistance des matériaux*. Tome 2, 838 p., Dunod (1971).

AROUTIOUNIAN (N. Kh.). – *Application de la théorie du fluage*. 320 p., Eyrolles (1957).
