Partie B: Mécanique des Fluides

1- Introduction

1.1- Définition :

Un fluide peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres.

Un fluide est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler.

Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides et gaz.

1.1 Liquides et gaz :

Les liquides et gaz habituellement étudiés sont isotropes, mobiles et visqueux.

La propriété physique qui permet de faire la différence entre les liquides et les gaz est la compressibilité.

- l'isotropie assure que les propriétés sont identiques dans toutes les directions de l'espace.
- la mobilité fait qu'ils n'ont pas de forme propre et qu'ils prennent la forme du récipient qui les contient.
- la viscosité caractérise le fait que tout changement de forme s'accompagne d'une résistance (frottements).

1.2 Forces de volume et forces de surface.

Comme tout problème de mécanique, la résolution d'un problème de mécanique des fluides passe par la définition du système matériel ***S***, particules de fluide à l'intérieur d'une surface fermée limitant ***S***.

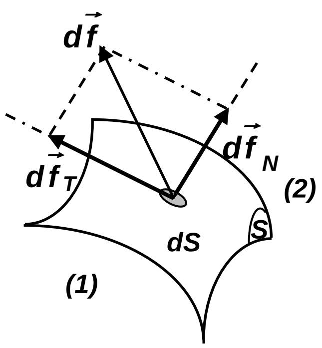
A ce système on applique les principes et théorèmes généraux de mécanique et thermodynamique :

- principe de la conservation de la masse.
- principe fondamental de la dynamique.
- principe de la conservation de l'énergie.

2 STATIQUE DES FLUIDES

2.1 La grandeur PRESSION :

Définition de la pression:



Dans un milieu quelconque, donc aussi dans un milieu fluide, la force que la partie (1) exerce sur la partie (2) à travers un élément de surface réel ou fictif dS a une direction quelconque. Mais cette force $d\vec{f}$ peut toujours être décomposée en :

- une composante tangentielle $d\vec{f}_T$
- une composante normale $d\vec{f}_N$

La quantité $\frac{d\vec{f}_T}{ds}$ représente la contrainte tangentielle et $\frac{d\vec{f}_N}{ds}$ la contrainte normale.

Par définition on appelle **pression** la contrainte normale : $p = \frac{\left|d\vec{f}_N\right|}{dS}$

Unités de pression :

Unité: Le **Pascal** (Pa)=1 **N/ m²** [p] = M L^{-1} T^{-2}.

$\boxed{\textit{1 bar} = 10^5 \textit{ Pa}}$ ***1 mbar = 10^{-3} bar = 100 Pa = 1 hPa***

Remarque : En statique des fluides, seules interviennent les forces de pression $d\vec{f}_N$, normales à l'élément dS.

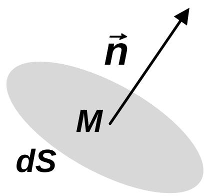
Les forces tangentielles $d\vec{f}_T$ n'apparaissent qu'en dynamique des fluides visqueux :

Elles correspondent aux frottements visqueux des couches fluides en mouvement les unes par rapport aux autres et par rapport à la paroi de la conduite.

Pression en point d'un fluide :

En tout point d'un fluide existe une certaine pression. Soit un point **M** dans un fluide. Si on considère une surface imaginaire dS passant par M, la résultante de toutes les forces , dues aux chocs sur ***dS,*** des particules de fluide en mouvement désordonné est perpendiculaire à cette surface ***dS*** et on peut écrire :

$$d\vec{f} = -p\,\vec{n}\,dS$$

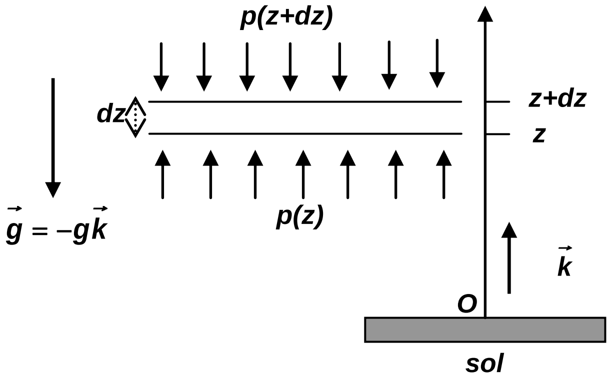


$\vec{n}$ étant le vecteur unitaire de la normale à ***dS*** orienté vers l'extérieur.

Cette force $d\vec{f}$ dépend évidemment de la surface ***dS*** envisagée, mais la pression p_M au point ***M*** du fluide ne dépend pas de ***dS***.

2.2 Principe Fondamental de la Statique des Fluides

Dans le champ de pesanteur, on considère une tranche de fluide mince à l'altitude z, d'épaisseur ***dz*** et de section unité ***S*** en équilibre dans un référentiel ***R*** lié au sol supposé galiléen. L'axe des ***z*** est vertical ascendant.



L'équilibre de cette tranche est obtenu en faisant le bilan des forces extérieures exercées sur cette tranche :

- Les forces de contact :

$$\vec{F}(z+dz) = -p(z+dz)S\vec{k};\ \vec{F}(z) = p(z)S\vec{k}$$

- Force à distance : le poids
- $\vec{P} = -mg\vec{k} = -\rho S dz g \vec{k}$

L'écriture du principe fondamental de la dynamique conduit à :

$$\vec{F}(z+dz) + \vec{F}(z) - mg\vec{k} = \vec{0}$$

Si on pose : $p(z+dz) - p(z) = dp$, On en déduit que $dp = -\rho g dz$

C'est la relation fondamentale de la statique des fluides.

Elle est encore appelée le principe de l'hydrostatique.

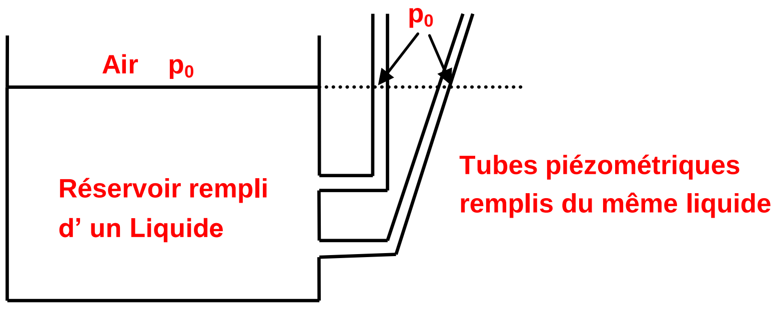
L'augmentation de pression entre une altitude *z* + *dz* et une altitude *z* est due au poids du fluide dans le cylindre de hauteur verticale *dz* et de surface horizontale ***unité***.

L'évolution de pression est donc continue, même à la séparation de deux fluides.

La pression à une altitude *z* est égale au poids, par unité de surface horizontale, des couches de fluide situées à la verticale au-dessus de *z*.

Dans un même fluide au repos, les surfaces d'égale altitude ***(dz=0 :*** surfaces équipotentielles) sont identiques aux surfaces isobares (***dp=0*** : même pression).

Exemple : Un réservoir ouvert à la pression atmosphérique p_0



Attention, il ne faudrait pas conclure que les forces de pression s'exercent verticalement. Elles s'exercent perpendiculairement à tout élément de surface.

2.3 Applications du principe de l'hydrostatique

a- Surface de séparation entre deux fluides non miscibles au repos

Considérons deux fluides non miscibles de densités ρ_1 et ρ_2 et aussi deux points de leur surface de séparation. Supposons qu'il y a une différence d'altitude dz de ces deux points.

On peut écrire, en négligeant toute discontinuité de la pression à la traversée de la surface de séparation :

$$dp = -\rho_1 g dz = -\rho_2 g dz = 0$$, ce qui entraîne $dz = 0$.

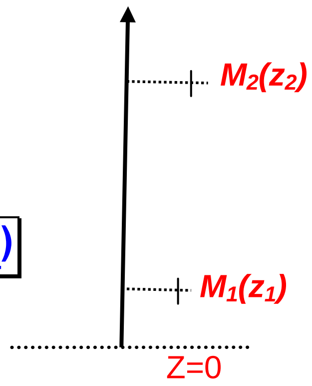
La surface de séparation entre deux fluides non miscibles au repos est plane et horizontale.

L'étude de la stabilité de l'équilibre montrerait que le liquide de densité plus faible se place au dessus de celui de densité plus forte.

b- Cas des fluides incompressibles :

C'est le cas des liquides, (ou pour les gaz dans lesquels la variation de pression est faible), la masse volumique ρ est constante, si l'on suppose la température uniforme.

Pour des différences d'altitude courantes : g **=cte**



intégraion la relation précédente :

$$\int_1^2 dp = \int_1^2 -\rho g dz = -\rho g \int_1^2 dz \qquad \boxed{p_2 - p_1 = -\rho g (z_2 - z_1)}$$

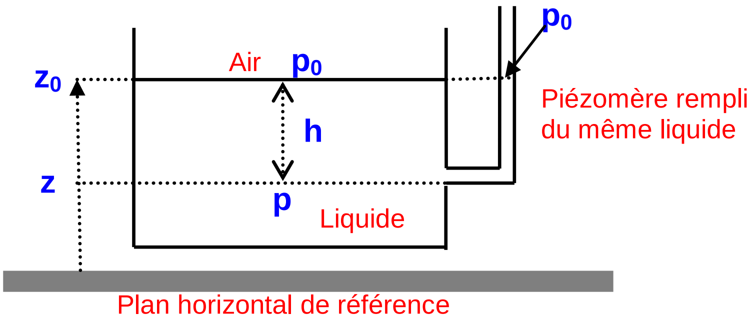
ou encore $p_2 + \rho g z_2 = p_1 + \rho g z_1$ soit : $\boxed{p + \rho g z = Cte}$

Cette loi est dite loi de l'hydrostatique ou principe de Pascal

c- Pression absolue et pression relative ou effective :

La **pression absolue** p est une grandeur essentiellement positive (nulle à la limite).

La **pression relative** est mesurée par rapport à la pression atmosphérique p_0 : elle est égale à $p - p_0$; elle peut être positive (surpression) ou négative (dépression).



Appliquons le principe de l'hydrostatique : $p + \rho g z = p_0 + \rho g z_0$

$p - p_0 = \rho g (z_0 - z) = \rho g h$: la pression à une profondeur **h** de la surface libre du réservoir (surface horizontale de contact entre l'air et le liquide) croît de la quantité $\rho g h$.

La différence de pression est : $\Delta p = \rho g h$

$h = \dfrac{\Delta p}{\rho g}$: la différence de pression par unité de poids volumique du liquide est égale à **h** *ou encore pression par hauteur de liquide.*

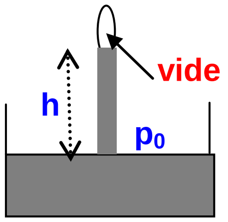
Remarque : On peut prendre comme origine des pressions la pression atmosphérique : $p_0 = 0$ et on écrit que : $p = \rho g h$

d- Expression des pressions en ***hauteur de colonne de fluide*** :

En divisant tous les termes de la relation de l'hydrostatique par la quantité ρg, on obtient : $\dfrac{p}{\rho g} + z = Cte$

On exprime souvent les pressions en ***hauteur de colonne de fluide*** (***mCF***).

Exemple : Pression atmosphérique :



Bain de Mercure : Hg

$$p_0 - 0 = \rho g h = 101\,325 \text{ Pa} \approx 1\,013 \text{ mbar}$$

$$\frac{p_0}{\rho g} = h = 760 \text{ mm Hg}$$

Remarque : on rencontre encore certaines unités ne faisant partie d'aucun système :

L'atmosphère (atm) correspond à la pression d'une colonne de 760 mm de mercure (Hg).

Le Torr correspond à la pression d'une colonne de 1 mm Hg (soit 133,3 Pa)

Le Psi (pound square inch) correspond à $6,895 \times 10^3$ Pa

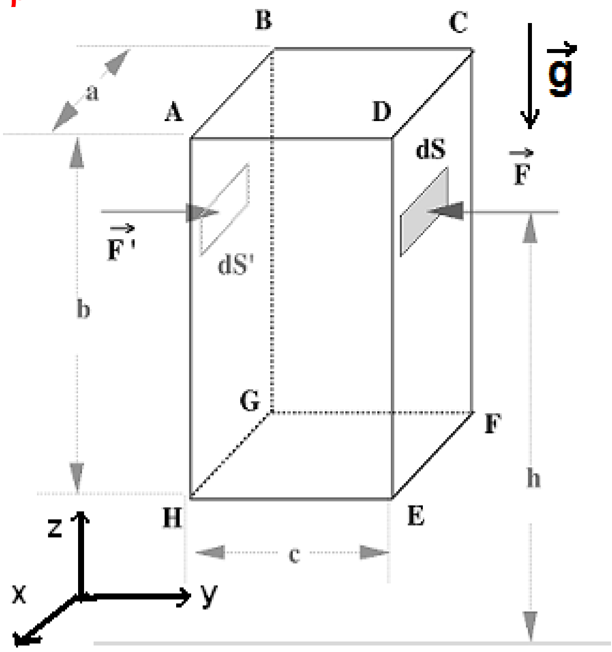
Grandeurs physiques utilisées :

ρ : masse volumique ($M\,L^{-3}$). *g* : accélération de la pesanteur (LT^{-2})

p : pression statique ($M\,L^{-1}\,T^{-2}$) ***F*** Force ($M\,L\,T^{-2}$)

d- Poussée d'archimède :

Soit un parallélépipède rectangle de volume *V* immergé dans un fluide de masse volumique **ρ.**



Le fluide exerce sur le parallélépipède les forces suivantes:

$$\vec{F}_1 = -p_1 S_{ABCD}\vec{k}, \qquad \vec{F}_2 = p_2 S_{EFGH}\vec{k}$$

$$\vec{F} = -\int_{S_{ABCD}} p\,dS\,\vec{j} \qquad \vec{F}' = \int_{S_{ABCD}} p\,dS\,\vec{j}$$

La résultante de ces forces:

$$\vec{\Pi A} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}' + \vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$
$$= (p_2 - p_1)S\vec{k}$$

Car $\vec{F}' + \vec{F} = \vec{0}$; d'où :

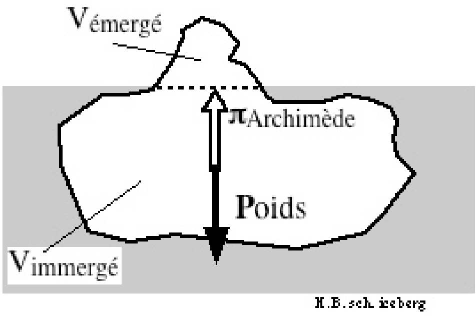
$$(p_2 - p_1)S = \rho g \times b \times a \times c = \rho g V$$

Un corps solide complètement immergé dans un fluide subit de la part de celui-ci une poussée verticale dirigée de bas en haut et égale au poids du fluide déplacé.

Application :

Un iceberg flotte-t-il sur l'eau ?

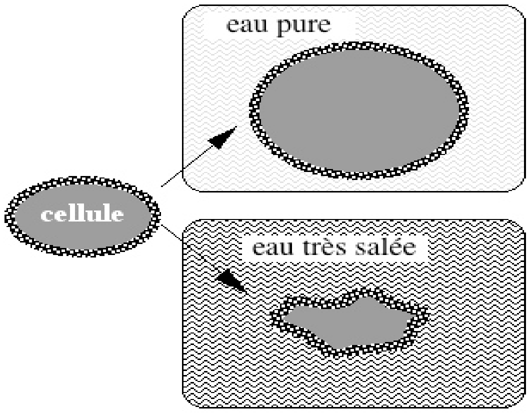
$$V_{immergé} = \frac{\rho_{glace}}{\rho_{eau}} V_{total} = 0{,}89 V_{total}$$



e- Pression osmotique :

Le phénomène d'osmose : phénomène qui apparaît dans les solutions *diluées* et dû à la *différence de concentration des deux côtés d'une membrane*.

Seules les molécules d'eau passent à travers la membrane, les ions **Na+** et **Cl-** sont arrêtés. Le flux d'eau à travers la membrane s'arrête lorsque pressions d'eau intérieure et extérieure sont identiques

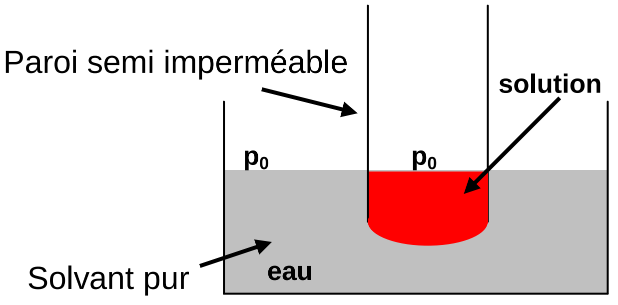


La pression osmotique est la *différence de pression à l'équilibre*, des deux côtés de la paroi semi-perméable **:**

$$\Pi = P_i - P_e = P_i(NaCl) - P_e(NaCl)$$

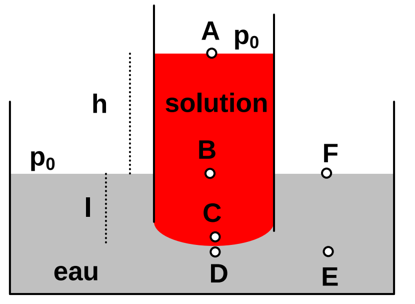
La dilatation ou la contraction de la cellule n'est pas due aux **molécules d'eau mais *uniquement aux molécules de NaCl***.

Evaluation de la pression osmotique



Etat 1

Avant l'équilibre



Etat 2

A l'équilibre : dénivellé **h**

$p_C = p_A + \rho_{sol}.g(h+l) = p_0 + \rho_{sol}.g.(h+l)$

$p_D = p_E$

$p_E = p_F + \rho_{eau}.g.(h+l) = p_0 + \rho_{eau}.g.l$

$\pi = p_C - p_D \approx \rho_{sol} g h$ car la solution est diluée et **l** peut être rendu arbitrairement petit.

La pression osmotique a pour valeur : $\pi = \rho_{sol}.g.h$

3- Dynamique des fluides parfaits incompressibles

3.1- Définitions :

*Le **Débit** est la **quantité de matière** qui traverse une **section droite** de la conduite **pendant l'unité de temps**.*

Débit massique :

Si dm est la masse élémentaire de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant l'intervalle de temps ***dt***, le débit massique s'écrit :

$$\boxed{Q_m = \frac{dm}{dt}}$$

unité : **$kg \cdot s^{-1}$ ($M\,T^{-1}$)**

Débit volumique :

Si d_v est le volume élémentaire de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant l'intervalle de temps dt , le débit volumique s'écrit :

$$\boxed{Q_V = \frac{d_v}{dt}}$$

unité : **$m^3 \cdot s^{-1}$ ($L^3\,T^{-1}$)**

Relation entre Q_m et Q_V : La masse volumique ρ est donnée par la relation : $\rho = \dfrac{dm}{d_v}$ d'où : $\boxed{Q_m = \rho\, Q_V}$

Remarques : Les **liquides** sont **incompressibles** et peu dilatables (masse volumique constante) ; on parle alors d'**écoulements isovolumes ou isochores**.

Pour les **gaz**, la masse volumique dépend de la température et de la pression.

Pour des vitesses faibles (variation de pression limitée) et pour des températures constantes on retrouve le cas d'un écoulement isovolume.

- Ecoulements permanents ou stationnaires:

Un régime d'écoulement est dit ***permanent*** ou ***stationnaire*** si les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, masse volumique, ..), ont une valeur constante au cours du temps.

3.2 Equation de conservation de la masse ou équation de continuité

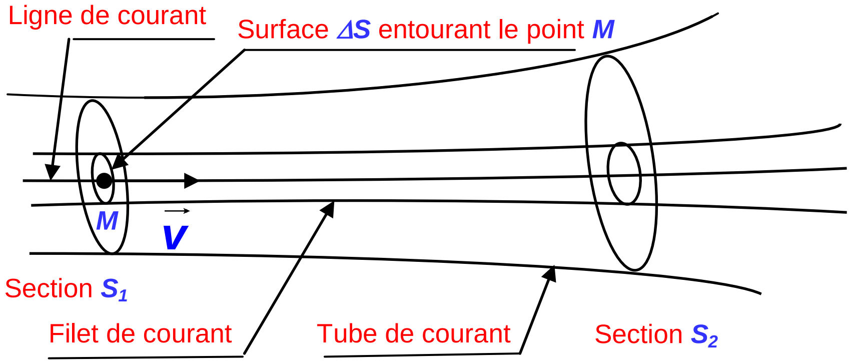
Définitions :

Ligne de courant : En régime stationnaire, on appelle ligne de courant la courbe suivant laquelle se déplace un élément de fluide (voir figure ci-dessous).

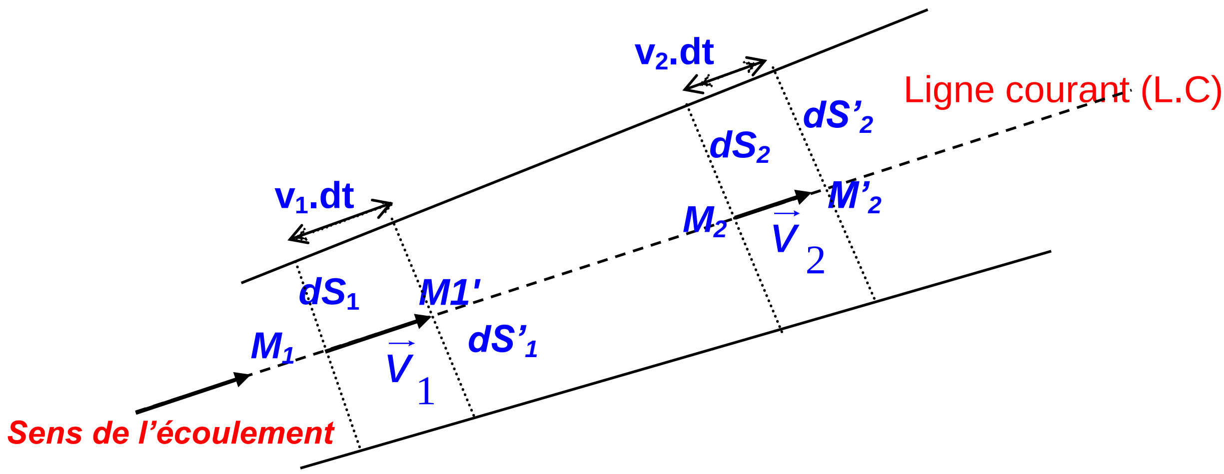
Tube de courant : Ensemble de lignes de courant s'appuyant sur une courbe fermée.

Filet de courant : Tube de courant s'appuyant sur un élément de surface ***dS***.

La section de base ***dS*** du tube ainsi définie est suffisamment petite pour que la vitesse du fluide soit la même en tous ses points (répartition uniforme).



CONSERVATION DU DEBIT MASSIQUE:



Pendant l'intervalle de temps ***dt***, infiniment petit, la masse ***dm_1*** de fluide ayant traversé la section ***dS_1*** est la même que la masse ***dm_2*** ayant traversé la section ***dS_2*** : ***$dm_1 = dm_2$***

Les volumes correspondants sont égaux à $M_1M_1'.\ dS_1$ et $M_2M_2'.\ dS_2$.

La conservation de la masse s'écrit :

$$\rho_1 M_1 M_1' dS_1 = \rho_2 M_2 M_2' dS_2 \qquad \text{soit encore :} \qquad dQ_{m1} = dQ_{m2}$$

En régime stationnaire, le débit massique est le même à travers toutes les sections droites d'un même tube de courant.

Expression en fonction de la vitesse :

$$M_1M'_1 = v_1\, dt \qquad \text{et} \qquad M_2M'_2 = v_2\, dt$$

$$dm_1 = dm_2 \qquad \text{soit :} \qquad \rho_1 v_1 dS_1 dt = \rho_2 v_2 dS_2 dt$$

$$dQ_{m1} = dQ_{m2} \qquad \text{ou} \qquad dQ_m = \rho v dS$$

Pour un écoulement isochore ou isovolume (ρ = Cte) :

$$dQ_{V1} = dQ_{V2} \quad \text{soit :} \quad v_1 dS_1 = v_2 dS_2 \qquad \text{ou} \qquad dQ_V = v\, dS = Cte$$

On retrouve évidemment la relation :

$$dQ_m = \rho\, dQ_v$$

Vitesse Moyenne :

En général la vitesse v n'est pas constante sur la section S d'un tube de courant .

On dit qu'il existe **un profil de vitesse** (à cause des forces de frottement).

Le débit massique Q_m (le débit volumique Q_v) s'obtient en intégrant le débit élémentaire dQ_m (dQ_v) sur toute la surface S.

$$Q_m = \int_{(S)} dQ_m = Cte \quad \text{ou} \quad Q_V = \int_{(S)} dQ_V = Cte$$

Dans une section droite S de la canalisation, on appelle **vitesse moyenne** $\bar{v}$ la vitesse telle que :

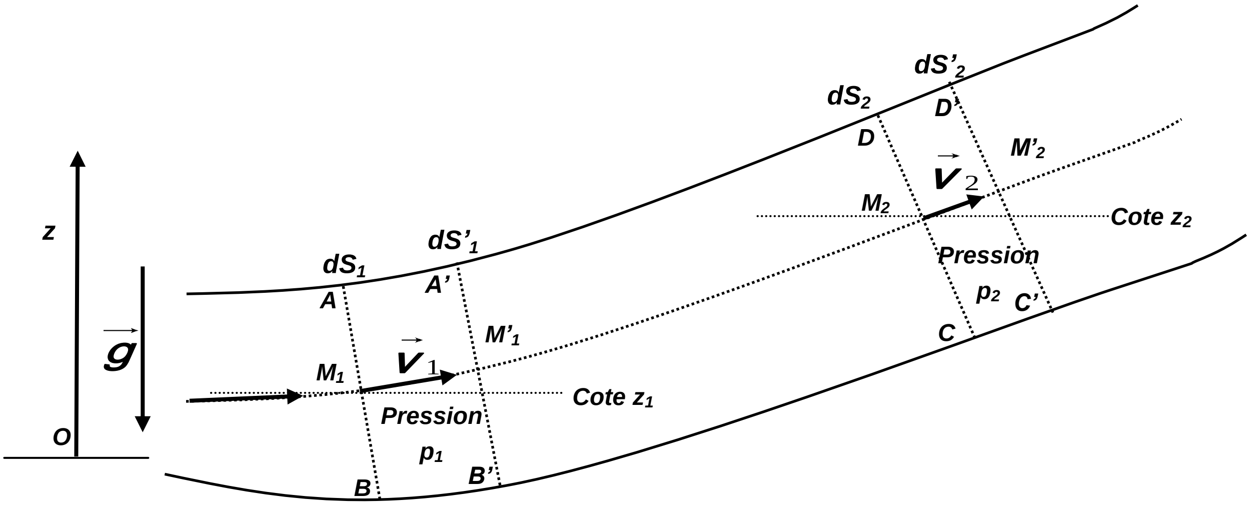
$$\boxed{Q_V = \bar{v}_1 S_1 = \bar{v}_2 S_2 = Cte} \qquad \boxed{\bar{v} = \frac{Q_V}{S}}$$

La vitesse moyenne $\bar{v}$ apparaît comme la vitesse uniforme à travers la section **S** qui assurerait le même débit que la répartition réelle des vitesses.

3.3- Equation de conservation de l'énergie

3 .3 .1- THEOREME DE BERNOULLI (Daniel Bernoulli 1738) :

La masse contenue à l'instant t dans la partie ***ABCD*** d'un filet de courant, de l'écoulement stationnaire d'un **fluide parfait** incompressible, passe à l'instant $t + dt$ en ***A'B'C'D'*** .



L'énergie mécanique contenue dans la partie commune ***A'B'CD*** n'a pas changé.

Du point de vue énergétique, tout se passe comme si pendant ***dt*** , la partie de cette masse ***dm*** qui est contenue dans ***ABB'A'*** passait directement en ***DCC'D'***.

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à cet élément de fluide de masse ***dm*** :

On suppose à la fois les échanges thermiques et la variation de l'énergie interne nuls.

$$\Delta E_c = W(\Sigma \vec{F}_{ext})$$

$W(\Sigma \vec{F}_{ext})$ est constitué de :

- Le travail des forces de pression :

  $+p_1 dS_1\, AA' = +p_1 dS_1\, v_1 dt$ sur la face ***AB***

  $-\, p_2\, dS_2 DD' = -\, p_2\, dS_2 v_2 dt$ sur la face ***CD***

- Le travail de la pesanteur : $(z_1 - z_2) g dm$, Sachant que pour un filet de courant qui est de section suffisamment petite les quantités ***p*** et ***v*** sont constantes dans une même section ***dS***.

En exprimant la conservation de la masse :

$$dm = \rho dS_1\, v_1 dt = \rho dS_2\, v_2 dt$$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} dm(v_2^2 - v_1^2) = W(\Sigma \vec{F}_{ext})$$

$$= \frac{1}{\rho}(p_1 \rho S_1 V_1 dt - \rho p_2 S_2 V_2 dt) + (z_1 - z_2) g dm$$

Càd : $$\frac{1}{2}\rho dm(v_2^2 - v_1^2) = p_1 dm - p_2 dm + (z_1 - z_2)\rho g dm.$$

Ce qui permet de démontrer <u>la relation de Bernoulli</u> :

$$\rho \frac{v_2^2}{2} + \rho g z_2 + p_2 = \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho g z_1 + p_1 = cte$$

L'energie mécanique totale <u>se conserve </u>le long d'une ligne de courant.

Soit encore :

$$\boxed{\rho \frac{v^2}{2} + \rho g z + p = Cte}$$

p est la <u>pression statique</u>,

$\rho g z$ est la <u>pression de pesanteur</u>,

$\rho \frac{v^2}{2}$ est la <u>pression cinétique</u>.

En divisant tous les termes par ρg,

$$\boxed{\frac{v^2}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} = H_T = Cte}$$

H_T = Hauteur Totale=Charge totale

$\frac{p}{\rho g}$ = Hauteur de Pression, $\frac{v^2}{2g}$ = Hauteur dynamique,

z = Hauteur de position ou côte $z + \frac{p}{\rho g}$ = Hauteur piézométrique.

3.3 .2- RELATION DE BERNOUILLI GENERALISEE

Cas d'un écoulement avec échange d'énergie

frottements : P_f puissance dissipée < 0

Le fluide traverse une machine hydraulique :

Echange de l'énergie avec cette machine sous forme de travail ΔW pendant une durée Δt.

La puissance **P** échangée est **:** $P = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

$$\frac{1}{2g}\left(v_2^2 - v_1^2\right) + (z_2 - z_1) + \frac{(p_2 - p_1)}{\rho g} = \frac{P}{\rho g Q_V}$$: relation généralisée

- $P > 0$ si l'énergie est reçue par le fluide (ex. : pompe P_G) ;

- $P < 0$ si l'énergie est fournie par le fluide (ex. : turbine P_R).

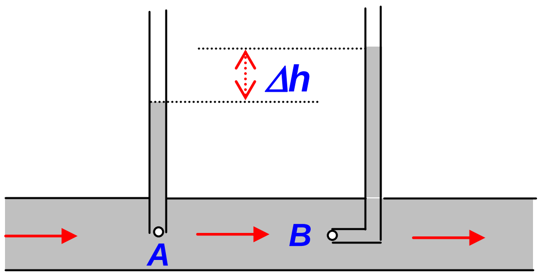
3.4 - Application du Théorème de Bernoulli :

3.4.1 - Tube de Pitot

Ecoulement permanent dans une canalisation

Deux tubes plongeant dans le liquide :

- l'un débouchant en **A** le long des lignes de courant
- l'autre en **B** face au courant, les deux extrémités étant à la même hauteur.



Au point **A**, le liquide a la même vitesse **v** que dans la canalisation et la pression est la même que celle du liquide dans le tube $p_A = p$.

En **B**, point d'arrêt, la vitesse est nulle et la pression est p_B

Théorème de Bernoulli : $\rho \frac{v^2}{2} + p_A = p_B$ mais $\Delta p = p_B - p_A = \rho g \Delta h$

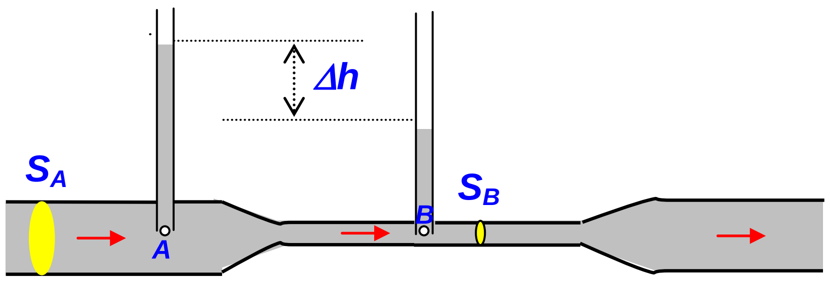
alors $\rho \frac{v^2}{2} = \rho g \Delta h$

En mesurant la dénivellation Δh du liquide dans les deux tubes, on peut en déduire la vitesse v d'écoulement du fluide :

$$v = \sqrt{2g\Delta h}$$

3.4.2 - Tube de Venturi

Une conduite <u>horizontale</u> de section principale S_A subit un étranglement en **B** où sa section est S_B.



Bernoulli : $$\rho\frac{v_A^2}{2} + p_A = \rho\frac{v_B^2}{2} + p_B$$

Conservation de débit : $$S_A V_A = S_B V_B \Rightarrow \frac{S_A}{S_B} = \frac{V_B}{V_A} > 1 \Rightarrow V_B > V_A$$

Le fluide va plus vite en **B** qu'en **A**

$$\rho\left(\frac{v_B^2}{2} - \frac{v_A^2}{2}\right) = p_A - p_B > 0$$

On constate que la pression et la section varient (?) dans le même sens . La pression suit la section : ***c'est le phénomène de Venturi***.

D'autre part : $\Delta p = p_A - p_B = \rho g \Delta h$;

$$\frac{v_B^2 - v_A^2}{2g} = \frac{v_B^2}{2g}\left[1 - \frac{v_A^2}{v_B^2}\right] = \frac{v_B^2}{2g}\left[1 - \frac{S_B^2}{S_A^2}\right] = \frac{p_A - p_B}{\rho g} = \Delta h$$

$$v_B = \left[1 - \frac{S_B^2}{S_A^2}\right]^{\frac{-1}{2}} \sqrt{2g\Delta h}$$

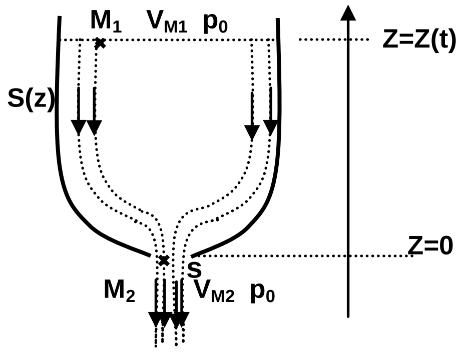
$$Q_v^2 = S_B^2 v_B^2 = 2g\Delta h S_B^2 \left[1 - \frac{S_B^2}{S_A^2}\right]^{-1} = 2S_B^2 \left[1 - \frac{S_B^2}{S_A^2}\right]^{-1} \frac{p_A - p_B}{\rho}$$

La différence de pression aux extrémités du tube de Venturi est proportionnelle au carré du débit

3.4.3- Écoulement d'un liquide contenu dans un réservoir - Théorème de Torricelli

a- Formule de Torricelli (Evangelista Torricelli 1644) :

Considérons un réservoir de section ***S(z)*** muni d'un petit orifice à sa base, de section **s**



Une ligne de courant partant de la surface au point M_1 et arrivant à l'orifice au point M_2.

En appliquant le théorème de Bernoulli entre les points M_1 et M_2 :

$$\rho\frac{v_{M2}^2}{2}+p_0=\rho\frac{v_{M1}^2}{2}+\rho gz+p_0$$

Le réservoir de grandes dimensions : $v_{M1} << v_{M2}$

$$v_{M1}\approx 0 \qquad \text{et} \qquad v_{M2}=\sqrt{2gz}$$

La vitesse d'écoulement est la même que la vitesse de chute libre entre la surface libre et l'orifice.

Elle est indépendante de la masse volumique du liquide.

b- Temps de vidage d'un réservoir :

Calculons le débit qui traverse la section **s** à un instant **t** donné.

A cet instant la surface libre du liquide se trouve à une côte **z** comprise entre $z_f=0$ et $z_i=z_0$.

$$Q_V=sv_{M2}=s\sqrt{2gz}\ ,$$

Ce débit s'écrit aussi $Q_v = \dfrac{d\mathcal{v}}{dt}$;

$d\mathcal{v}$ étant le volume du liquide qui s'est écoulé du réservoir durant le temps **dt** .

Le volume du réservoir va en diminuant ; $d\mathcal{v} = -S(z)\,dz$

$$d\mathcal{v} = -S(z)dz = Q_v\,dt = s\sqrt{2gz} \times dt \quad \Rightarrow dt = -\frac{S(z)dz}{s\sqrt{2gz}}$$

Il faut se donner la fonction : **S=S(z).**

Si <u>réservoir cylindrique ou rectangulaire</u> par exemple **S=cte**

$$T = \int_0^T dt = -\frac{S}{s\sqrt{2g}}\int_{z_0}^{0}\frac{dz}{\sqrt{z}}$$

$$= \frac{S}{s\sqrt{2g}}\left[2\sqrt{z}\right]_0^{z_0}$$

$$= \frac{2S\sqrt{z_0}}{s\sqrt{2g}} = \frac{2Sz_0}{s\sqrt{2gz_0}} = \frac{2v(t=0)}{Q_v(t=0)}$$

4- Viscosité

- Les phénomènes dus à la **viscosité** des fluides ne se produisent que **lorsque *ces fluides sont en mouvement***.

Profil des vitesses

Sous l'effet des forces d'interaction entre les molécules de fluide et des forces d'interaction entre les molécules de fluide et celles de la paroi, chaque molécule de fluide ne s'écoule pas à la même vitesse.

On dit qu'il existe un ***profil de vitesse***

On représente par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement d'ensemble.

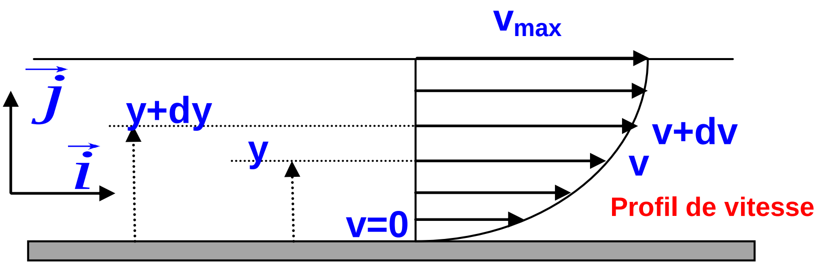
la courbe lieu des extrémités de ces vecteurs représente ***le profil de vitesse.***

Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du ***glissement des couches de fluide les unes sur les autres.***

La vitesse de chaque couche est une fonction de la distance y de cette courbe au plan fixe : **v = v(y).**

4.1- Définition de la viscosité dynamique – Loi de Newton :

Considérons 2 couches contiguës distantes de **dy.**



La force de frottement $\vec{F}$ qui s'exerce à la surface de séparation de ces deux couches s'oppose au glissement d'une couche sur l'autre.

$\vec{F}$ est proportionnelle à la différence de vitesse des couches soit **dv**, à leur surface **S** et inversement proportionnelle à **dy** :

$$\boxed{\vec{F} = \eta\, S\, \frac{dv}{dy} \vec{i}}$$

Le facteur de proportionnalité η **est le coefficient de <u>viscosité dynamique</u>** du fluide.

*

Dimension : $[\eta] = \mathbf{M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}}$.

<u>Unité</u> : Dans le <u>système international (**SI**)</u>, l'unité de viscosité est le **Pa·s** ou **Poiseuille** (Pl) : 1 Pl = 1 $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-1}$

On trouve encore les tables de valeurs numériques du coefficient de viscosité dans un *ancien système d'unités (CGS)*:

L'unité est le **<u>Poise</u>** (Po) ; 1 Pl = 10 Po = 1 daPo = 10^3 cPo.

<u>Autres unités</u> :

La viscosité de produits industriels (huiles en particulier) est exprimées au moyen d'*unités empiriques :* degré ENGLER en Europe, degré Redwood en Angleterre, degré Saybolt aux USA.

Par rapport aux faits expérimentaux, on est conduit à considérer deux types de fluides :

- D'une part **les fluides newtoniens** qui satisfont à la loi précédente dite loi de Newton. Ces fluides ont un coefficient de viscosité indépendant du gradient de vitesse $\frac{dv}{dy}$. C'est le cas des gaz, des vapeurs, des liquides purs de faible masse molaire.

- D'autres **fluides n'obéissent pas à cette loi et sont appelés non-newtoniens**.

Ce sont les solutions de polymères, les purées, les gels, les boues, le sang, la plupart des peintures, etc … L'étude de ces fluides relève de la rhéologie :

fluides pseudo plastiques, rhéoplastiques, thixotropiques, rhéopectiques.

Ils ne seront pas étudiés dans le cadre de ce cours.

4.2- Viscosité cinématique :

Dans de nombreuses formules apparaît le rapport de la viscosité dynamique η et de la masse volumique ρ.

Ce rapport est appelé **viscosité cinématique** ν :

$$\boxed{\nu = \frac{\eta}{\rho}} \qquad \textbf{Dimension : } [\nu] = L^2 \cdot T^{-1}.$$

Unité :

Dans le système international (**SI**),

l'unité de viscosité n'a pas de nom particulier : (**m^2/s**).

Dans le système **CGS**, l'unité est le Stokes (**St**) : **$1\ m^2/s = 10^4\ St$.**

4.3- Influence de la température sur la viscosité

La viscosité des liquides diminue beaucoup lorsque la température augmente.

Ainsi pour l'eau : **à 10°C** η **= 1,3 x** 10^{-3} **Pl**

à 20°C η **= 1,0 x** 10^{-3} **Pl**

à 90°C η **= 0,3 x** 10^{-3} **Pl**

Il n'existe pas de relation rigoureuse liant η et **T**. On peut cependant utiliser un modèle utilisant l'équation empirique de **Guzman-Andrade** de la forme :

$$\eta = a\, e^{b/T}$$

a et **b** étant des constantes dépendant de la nature du liquide et **T** la température absolue.

Contrairement à celle des liquides, *la viscosité des gaz augmente avec la température*.

5- DYNAMIQUE DES FLUIDES VISQUEUX INCOMPRESSIBLES

5-1- Les différents régimes d'écoulement et le nombre de Reynolds

Les expériences réalisées par ***Reynolds*** (1883) lors de l'écoulement d'un fluide dans une conduite cylindrique rectiligne, ont montré l'existence de deux régimes d'écoulement : **laminaire et turbulent**.

En utilisant des fluides divers (viscosité différente), en faisant varier le débit et le diamètre de la canalisation, Reynolds a montré que le paramètre qui permettait de déterminer si l'écoulement est laminaire ou turbulent est un **nombre sans dimension appelé nombre de Reynolds** et donné par :

$$\boxed{Re = \frac{\rho \bar{v} D}{\eta}} \quad \text{ou} \quad \boxed{Re = \frac{\bar{v} D}{\nu}}$$

ρ **= masse volumique du fluide,**

$\bar{v}$ = vitesse moyenne,

D = diamètre de la conduite

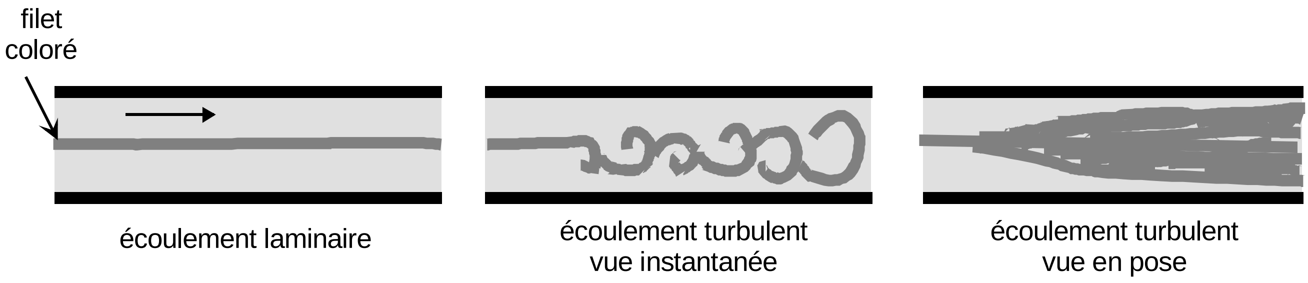
η = viscosité dynamique du fluide, ν = viscosité cinématique : $\boxed{\nu = \frac{\eta}{\rho}}$

L'expérience montre que :

Si Re<2000 le régime est dit laminaire
Si 2000<Re<3000 le régime est dit intermédiaire ou transitoire
Si Re>3000 le régime est dit turbulent

Ces valeurs doivent être considérées comme des ordres de grandeur, le passage d'un type d'écoulement à un autre se faisant progressivement.

5.2- Visualisation de l'écoulement

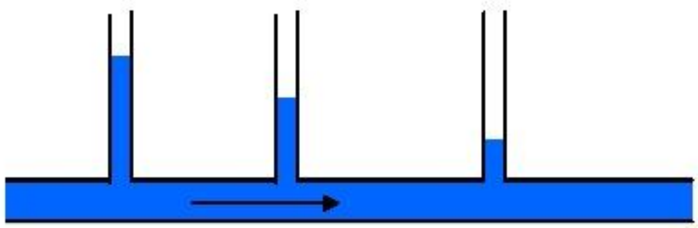


5.3- Pertes de Charge

Le phénomène

Observations :

- La pression d'un liquide réel diminue tout au long d'une canalisation dans laquelle il s'écoule, même si elle est horizontale et de section uniforme, contrairement au théorème de Bernoulli.



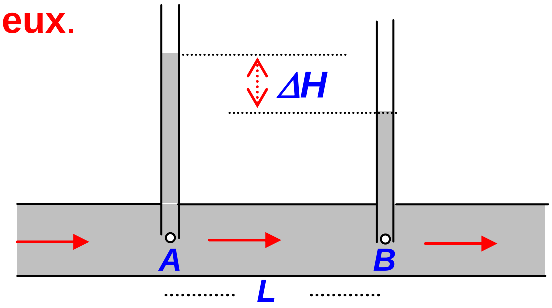
- La pression d'un fluide réel diminue après le passage à travers un coude, une vanne ou un rétrécissement.

Conclusion

· Un **fluide réel**, en **mouvement**, subit des **pertes d'énergie** dues aux frottements sur les parois de la canalisation (pertes de charge *systématiques ou linéaires*) ou sur les "accidents" de parcours (pertes de charge *singulières*).

5.3.1- Pertes de Charge systématiques

Ce genre de perte est causé par le frottement intérieur qui se produit dans les liquides; il se rencontre dans les tuyaux **lisses** aussi bien que dans les tuyaux **rugueux**.



Entre deux points **A** et **B** séparés par une longueur **L**, dans un tuyau de diamètre **D** apparaît une perte ou chute de pression :

$$\boxed{\Delta p = \lambda \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \frac{L}{D}}$$

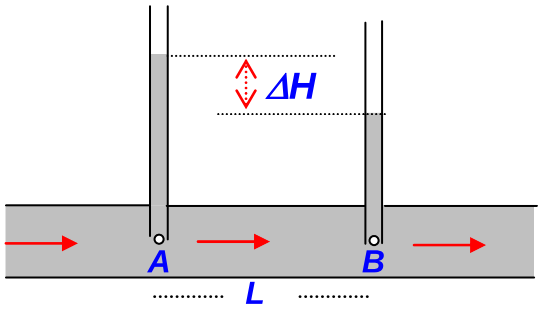
ou perte de charge exprimée en mètres de colonne de fluide (mcf) :

$$\boxed{\Delta H = \lambda \frac{\bar{v}^2}{2g} \frac{L}{D}}$$

λ est un coefficient sans dimension appelé **coefficient de perte de charge linéaire.**

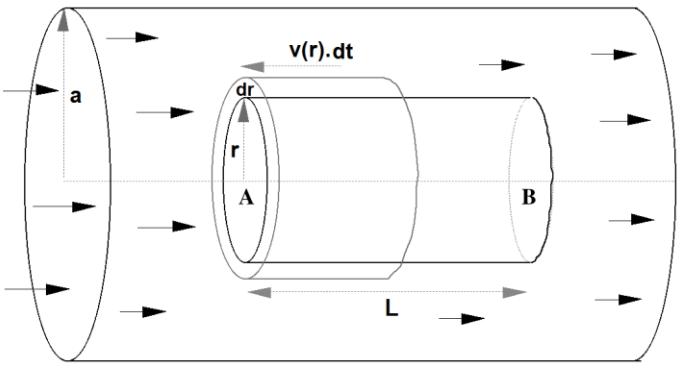
Le calcul des pertes de charge repose entièrement sur la détermination de ce coefficient λ.

a- Cas de l'écoulement laminaire : Re < 2000



$\Delta p = p_A - p_B$: chute de pression entre **A** et **B** due à la seule viscosité = *"perte de charge"*

Considérons une conduite cylindrique horizontale assez étroite de rayon **a** (petit), de longueur assez grande et d'axe **oz** dans laquelle s'écoule un fluide réel (visqueux) grâce à la seule différence des pressions régnantes à son entrée et à sa sortie.



Considérons un cylindre fixe fictif d'axe **oz** situé à l'intérieur de la conduite cylindrique de rayon **a**.

Ce cylindre fictif a pour rayon **r** et longueur **L.**

On lui applique la R.F.D :

- La résultante des forces de pression : $\vec{F}p = (p_A - p_B)S\vec{k} = \pi r^2 \Delta p \vec{k}$

- La résultante des forces de frottement qui sont tangentielles au cylindre dans la direction de l'écoulement :

$$\vec{F}f = \eta \frac{dv}{dr} S_L \vec{k} = 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \vec{k}$$

La R.F.D :

$$\vec{F}p + \vec{F}f = (\pi r^2 \Delta p + 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr})\vec{k} = \vec{0} \Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta p}{\eta L}\frac{r}{2} \Rightarrow v(r) = -\frac{\Delta p}{\eta L}\frac{r^2}{4} + c$$

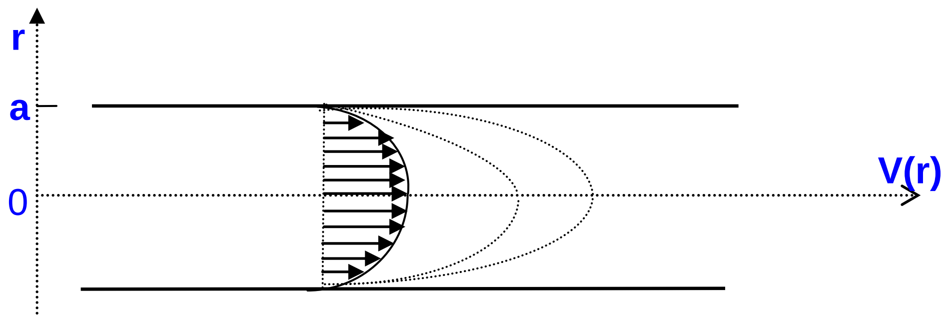
Les particules de fluide visqueux ne glissent pas sur la paroi de la conduite comme c'est le cas d'un fluide parfait. Les particules adhèrent (collent) à la paroi sous l'effet de leur viscosité . On pose donc : **v(a)=0**.

C'est une condition aux limites qui permettra de calculer la constante **c.**

$$-\frac{\Delta p}{\eta L}\frac{a^2}{4} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{\Delta p}{\eta L}\frac{a^2}{4} \Rightarrow v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta L}(a^2 - r^2)$$

La formule que l'on vient d'établir montre que le profil de vitesse est *parabolique*. Il est appelé profil de Poiseuille (1844).

On peut représenter ce profil dans un plan quelconque contenant l'axe **oz** puisque l'écoulement est de révolution est autour de celui-ci



Le profil de Poiseuille s'allonge ou se rétrécit en fonction de Δp.

La vitesse est maximale au centre et a pour valeur : $v_{max} = \dfrac{\Delta p}{4\eta L} a^2$.

On peut calculer le débit volumique Q_V de cette conduite en considérant :

Un volume élémentaire $d\mathcal{V}$ traversé durant le temps **dt** par un débit dQ_V.

$$d\mathcal{V} = v(r)\, dt\, r\, dr\, d\varphi, \text{ càd} \qquad dQ_V = \frac{d\mathcal{V}}{dt} = v(r) dS\,; \quad 0 \le r \le a \text{ et } 0 \le \varphi \le 2\pi$$

$$Q_V = \int dQ_V = \int v(r) dS = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a v(r)\, r\, dr = \frac{\pi \Delta p}{8\eta L} a^4 = \frac{\pi \Delta p}{8\eta L} a^4 = \frac{\pi \Delta p}{128\eta L} D^4 \quad (D = 2a)$$

$$\boxed{Q_V = \frac{\pi^2 \Delta p}{8\pi\eta L} a^4 = \frac{S^2 \Delta p}{8\pi\eta L}}$$

On vient d'établir une relation donnant le débit d'un liquide en fonction de la viscosité et de la chute de pression, par unité de longueur dite : loi de Poiseuille

La vitesse moyenne :

$$\bar{v} = \frac{1}{S}\int v(r)dS = \frac{1}{\pi a^2}\int dQ_V = \frac{Q_V}{\pi a^2} = \frac{\Delta p}{8\eta L} a^2$$

Remarque : $\bar{v} = \frac{v_{max}}{2}$

Calcul du coefficient de perte de charge linéaire λ en écoulement laminaire :

$$Q_V = \frac{\pi \Delta p}{128\eta L} D^4 \Rightarrow \Delta p = \frac{128\eta L}{\pi D^4} Q_V = \frac{128\eta L}{\pi D^4} \frac{\pi D^2 \bar{v}}{4} \qquad (Re = \frac{\bar{v}D}{\nu})$$

$$= \frac{64}{\frac{\bar{v}D}{\nu}} \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \frac{L}{D} = \frac{64}{Re} \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \frac{L}{D} = \lambda \rho \frac{\bar{v}^2}{2} \frac{L}{D} \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{64}{Re}$$

$$\Delta H = \frac{\Delta p}{\rho g} = \lambda \frac{\bar{v}^2}{2g} \frac{L}{D}$$: perte de charge laminaire

b - Cas de l'écoulement turbulent : Re > 3000

Les phénomènes d'écoulement sont beaucoup plus complexes et la détermination du coefficient de perte de charge résulte de mesures expérimentales. C'est ce qui explique la diversité des formules anciennes qui ont été proposées pour sa détermination.

En régime turbulent l'état de la surface devient sensible et son influence est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds **Re** est grand.

Tous les travaux ont montré l'influence de la rugosité et on s'est attaché par la suite à chercher la variation du coefficient λ en fonction du nombre de Reynolds **Re** et de la rugosité **k** du tuyau.

La formule de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2\log\left(\frac{k}{3,7D} + \frac{2,5L}{Re\sqrt{\lambda}}\right)$$

L'utilisation directe de cette formule demanderait, du fait de sa forme implicite, un calcul par approximations successives ; on emploie aussi en pratique des représentations graphiques (abaques). On peut voir à la fin de ce document les abaques de Colebrook

***Remarque*:** On fait souvent appel à des formules empiriques plus simples valables pour des cas particuliers et dans un certain domaine du nombre de Reynolds, par exemple :

Formule de Blasius : (pour des tuyaux lisses et **$Re < 10^5$**)

$$\lambda = 0{,}316 Re^{-0{,}25}$$

c- Cas de l'écoulement transitoire 2000<Re<3000 :

Il n'y pas de formule connue pour le calcul du coefficient λ dans ce cas

5.3.2- Pertes de charge accidentelles

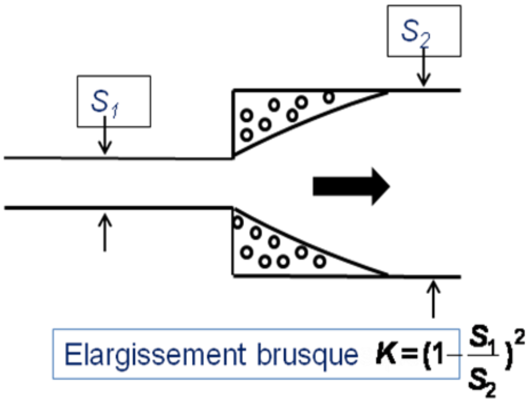
Ainsi que les expériences le montrent, dans beaucoup de cas, les pertes de charge accidentelles sont à peu près proportionnelles au carré de la vitesse et donc on a adopté la forme suivante d'expression :

$$\boxed{\Delta p = K\rho \frac{\bar{v}^2}{2}} \qquad \boxed{\Delta H = K \frac{\bar{v}^2}{2g}}$$

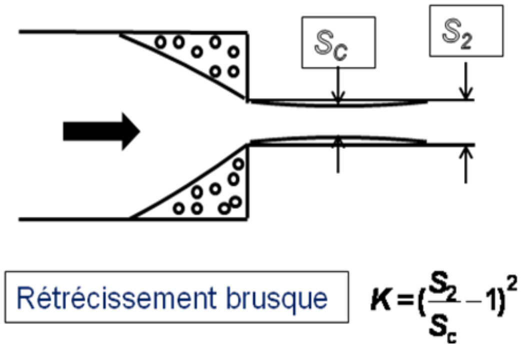
K est appelé **coefficient de perte de charge singulière** (sans dimension).

La détermination de ce coefficient est principalement du domaine de l'expérience.

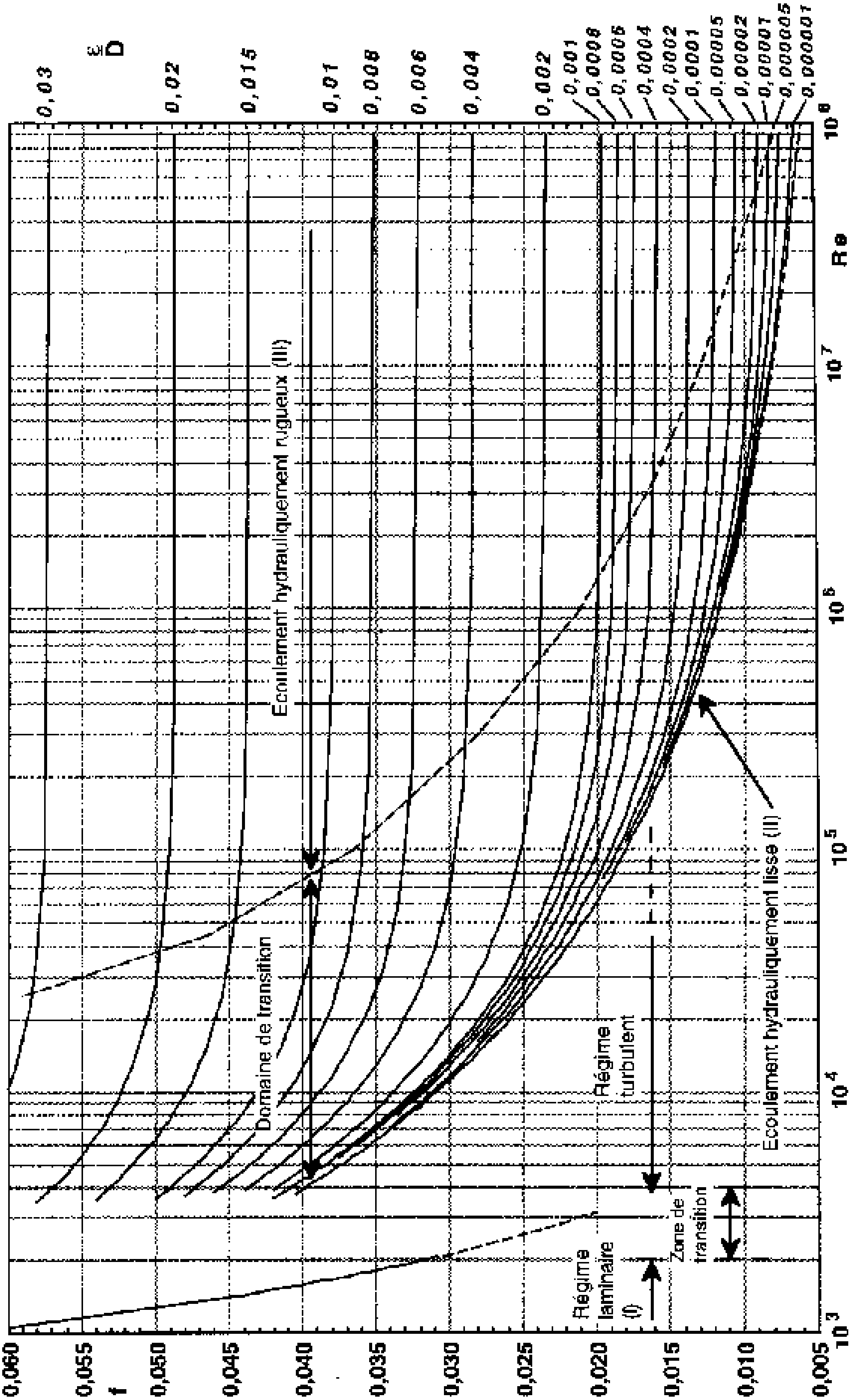
Mais dans certains cas il se détermine théoriquement. Par exemple, en appliquant le théorème d'Euler dans le cas d'un élargissement et d'un rétrécissement brusque.



S_1
S_2
Elargissement brusque
$K=(1-\frac{S_1}{S_2})^2$



S_C
S_2
Rétrécissement brusque
$K=(\frac{S_2}{S_c}-1)^2$



f
Re
ε/D
0,060
0,055
0,050
0,045
0,040
0,035
0,030
0,025
0,020
0,015
0,010
0,005
10^3
10^4
10^5
10^6
10^7
10^8
0,03
0,02
0,015
0,01
0,008
0,006
0,004
0,002
0,001
0,0008
0,0006
0,0004
0,0002
0,0001
0,00005
0,00002
0,00001
0,000005
0,000001
Ecoulement hydrauliquement rugueux (III)
Domaine de transition
Régime turbulent
Régime laminaire (I)
Zone de transition
Ecoulement hydrauliquement lisse (II)