Solution TD 2

Pr. AHMED AL FALLAH

Exercice 1:

L'intervalle de confiance pour $\hat{a}_0$

$$I_c(\hat{a}_0) = \left[\hat{a}_0 \pm t^{\alpha/2}_{n-2}\, \hat{\sigma}_{\hat{a}_0}\right]$$

on a : $$\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_t - \bar{x})^2}\right]$$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}^2 = \frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{n} + \bar{x}^2\, \hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2$$

aussi $t^*_{\hat{a}_1} = 2{,}7 = \dfrac{|\hat{a}_1|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}}$
bilatéral

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1} = \frac{\hat{a}_1}{t^*_{\hat{a}_1}} = \frac{0{,}8}{2{,}8} = 0{,}2857$$

Calcul du $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$?

on a $R^2 = \dfrac{SCE}{SCT} = 1 - \dfrac{SCR}{SCT}$

et puisque :

$$r_{x,y}^2 = \frac{\mathrm{cov}(x,y)^2}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2} = \hat{a}_1 \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{SCT}$$

$$SCT = \frac{\hat{a}_1 \,\mathrm{cov}(x,y)}{r_{x,y}^2} = \frac{0,8 \times 27}{0,5} = 43,2$$

$$SCR = (1-R^2) \times SCT = (0,5) \times 43,2 = 21,6$$

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{SCR}{n-2} = \frac{21,6}{33} = 0,6545$$

Enfin

$$Ic_{\hat{a}_0} = \left[\hat{a}_0 \pm t_{n-2}^{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{n} + \bar{x}^2 \hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2}\right]$$

$$Ic_{\hat{a}_0} = \left[12,27 \pm 2,0345 \sqrt{\frac{0,6545}{35} + 6^2 \times (0,2857)^2}\right]$$

$$Ic(\hat{a}_0) = [8,772 ; 15,768]$$

Exercice 2

1)

i) $SCR = \sum e_t^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 (n-2) = (10,50)^2 \times (20-2)$

$$\boxed{SCR = 1984,5}$$

ii) $R^2 = \frac{SCE}{SCT} = 1 - \frac{SCR}{SCT} \Rightarrow SCT = \frac{SCR}{1-R^2} = \frac{1984,5}{1-0,26}$

$$\boxed{SCT = 2681,75}$$

iii) $SCE = SCT - SCR = 2681,75 - 1984,5$

$$\boxed{SCE = 697,25}$$

$$F^* = \frac{R^2}{\frac{1-R^2}{n-2}} = \frac{0,26}{\frac{1-0,26}{18}} = \underline{\underline{6,324}}$$

$\underline{\underline{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}}}$: on a : $F^* = \left(t^*_{\hat{a}_1}\right)^2 = \frac{\hat{a}_1^2}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2}$

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1} = \sqrt{\frac{\hat{a}_1^2}{F^*}} = \underline{\underline{0,656}}$$

2) Test unilatéral.

soit le test suivant $H_0 : a_1 = 1$
$H_1 : a_1 > 1$

on suppose H_0 vérifiée

on a $t^*_{\hat{a}_1} = \frac{\hat{a}_1 - a_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = \frac{1,651 - 1}{0,656} = 0,9923$

$$t^*_{\hat{a}_1} < t_{18}^{0,05} (1,734)$$

la pente n'est pas significativement supérieure

à 1

Exercice 3

1/ $r_{x,y} = \frac{cov(x,y)}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{\hat{a}_1 . \sigma_x^2}{\sigma_x . \sigma_y} = \frac{\hat{a}_1 \sigma_x}{\sigma_y}$

$\Rightarrow \hat{a}_1 = \frac{r_{x,y} \times \sigma_y}{\sigma_x} = \frac{0,951916 \times 2,9456}{3,8944}$

$\boxed{\hat{a}_1 = 0,72}$

2) Test du $r_{x,y}$.

on considère le test suivant;

$H_0 : r_{x,y} = 0$
$H_1 : r_{x,y} \neq 0$.

on suppose H_0 vérifiée

on a. $t^* = \frac{|r_{x,y}|}{\sqrt{\frac{1 - r_{x,y}^2}{n-2}}} = \frac{|0,951916|}{\sqrt{\frac{1-(0,951916)^2}{11}}} = \underline{10,30}$

$t^* > t_{11}^{0,025} \Rightarrow r_{x,y}$ est significativement différent du zéro.

3) les résultats semblent logiques du fait qu'on a un $r_{x,y}$ proche de $1 \Rightarrow$ Test significatif.

4) $R^2 = r_{x,y}^2 = (0,951916)^2 = 0,9061$ (90,61 %)

5) Test de student bilatéral :

on a : $$F^* = \frac{R^2/1}{\frac{1-R^2}{T-2}} = \frac{r_{x,y}^2}{\frac{1-r_{x,y}^2}{T-2}} = \frac{0,9061}{\frac{1-0,9061}{11}}$$

$$F^* = 106,14$$

et puisque $F^* = (t^*_{\hat{a}_1})^2$ [Nb : seulement pour un test bilatéral.]

$$t^*_{\hat{a}_1} = \sqrt{F^*} = \sqrt{106,14} = 10,30 > t_{11}^{0,025} (2,201)$$

la pente est significativement différente de zéro

* Test de Fischer

on a $F^* = 106,14 > F_{1;11}^{0,05}$ (4,84)

le modèle est globalement significatif.

Ecercice 4

1) $\hat{a}_1 = \dfrac{\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} = \dfrac{184500 - 7 \times 400 \times 60}{1400000 - 7 \times 400^2}$

$\boxed{\hat{a}_1 = 0,059}$

$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x} = 60 - 0,059 \times 400 = \boxed{36,4}$

2) Qualité de l'ajustement :

$R^2 = r_{x,y}^2 = \dfrac{\left[\sum x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}\right]^2}{\left[\sum x_i^2 - n\bar{x}^2\right]\left[\sum y_i^2 - n\bar{y}^2\right]}$

$R^2 = 0,8454$ (84,54 %) [un bon ajustement linéaire]

3) Test de Fisher :

$F^* = \dfrac{R^2}{\dfrac{1-R^2}{n-2}} = \dfrac{0,8454}{\dfrac{1-0,8454}{5}} = 27,34$

$F^* > F_{1;5}^{0,05}$ (6,61)

le modèle est globalement significatif.