UNIVERSITE IBN ZOHR Année Universitaire 2014-2015

Faculté des Sciences Juridiques

Economiques et Sociales S5

Agadir

Recherche Opérationnelle

Corrigé de la série1: Traduction des problèmes en language mathématique

Pr. O.Chadli

Exercice 1

Posons x_1 le nombre de bureaux du modèle M_1 et x_2 le nombre de bureaux du modèle M_2. Les temps libres de chaque département imposent des contraintes qu'il faut respecter. La contrainte imposée par les temps libres à l'atelier de sciage:

$$x_1 + 2x_2 \leq 20.$$

Les autres contraintes sont:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 22 \\ x_1 + x_2 &\leq 12 \end{aligned}$$

Il s'ajoute à ces contraintes des contraintes de non-négativité puisque le nombre de bureaux ne peut être négatif, on a donc:

$$x_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_2 \geq 0.$$

Graphiquement les solutions réalisables sont les points du polygone convexe de la figure suivante:

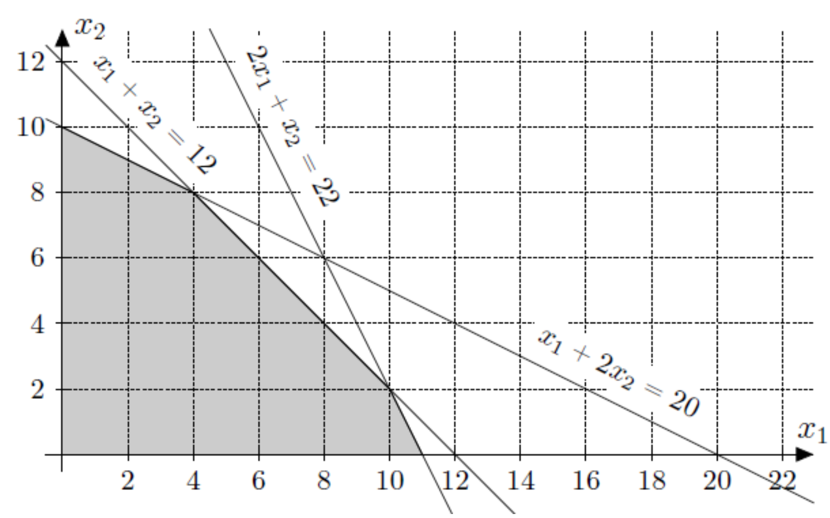

Figure 1: l'ensemble des solutions admissibles c'est le polygone convexe en gris

La direction veut maximiser son profit, c'est-à-dire maximiser la fonction:

$$f(x_1, x_2) = 300x_1 + 200x_2.$$

Pour chacune de ces solutions admissibles, c'est-à-dire pour chacun des points du polygone convexe, la compagnie fera un profit positif. Si la compagnie fabrique trois exemplaires du modèle M_1 et deux exemplaires du modèle M_2, le profit sera:

$$f(3, 2) = 300 \times 3 + 200 \times 2 = 1300 \ DH.$$

Il ne saurait être question de calculer le profit réalisable pour chacun des points du polygone convexe. Pour avoir une vision globale du problème, représentons le profit réalisé par le paramètre z. On a:

$$300x_1 + 200x_2 = z$$

qui représente une famille de droites parallèles. En isolant x_2, on obtient:

$$x_2 = (-\frac{3}{2})x_1 + \frac{1}{200}z$$

Il s'agit donc d'une famille de droites de pente $-\frac{3}{2}$ et qui passent par le point dont l'ordonnée à l'origine est $\frac{z}{200}$ (c'est dire le point dont les coordonées sont $x_1 = 0$ et $x_2 = z/200$) . Parmi les droites de cette famille, seules celles ayant des points communs avec l'ensemble des solutions admissibles (qui est representé ici par le polygone convexe en gris sur le graphique) nous intéressent. La fonction $f(x_1, x_2)$ atteindra sa valeur maximale lorsque l'ordonnée à l'origine $\frac{z}{200}$ de la droite:

$$x_2 = (-\frac{3}{2})x_1 + \frac{1}{200}z$$

atteindra sa valeur maximum tout en passant par au moins un des points de l'ensemble des solutions admissibles (polygone convexe en gris sur le graphique).

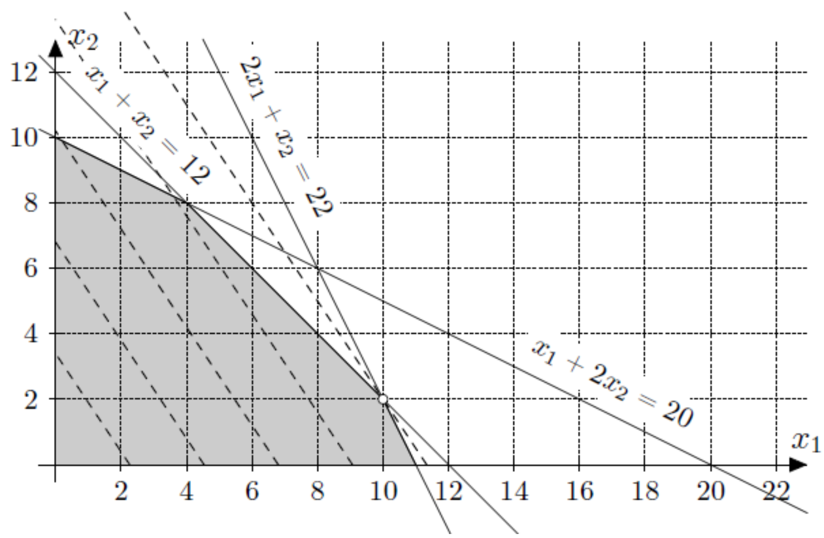

Figure 2: Les droites hachurées representent les droites parallèles d'équations $x_2 = (-\frac{3}{2})x_1 + \frac{1}{200}z$ pour une valeur donnée de z.

Graphiquement on constate que la droite respectant ces conditions semble être la droite de la famille passant par le point-sommet du polygone convexe $(10, 2)$. Le profit est alors:

$$f(10, 2) = 300 \times 10 + 200 \times 2 = 3400\ DH.$$

Il reste à s'assurer algébriquement des coordonnées du point-sommet représentant l'optimum en résolvant le système:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 22 \\ x_1 + x_2 = 12 \end{cases}$$

ce qui donne $x_1 = 10$ et $x_2 = 2$. Ainsi le programme de la direction est (10,2).

Exercice 2

Notons par x_1, x_2 et x_3 respectivement les quantités des produits P_1, P_2 et P_3 fabriqués par l'entreprise. La contrainte imposée par la phase de fabrication liée à l'usinage est:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100.$$

Les autres contraintes imposées par les phases d'assemblage et de finition sont données par:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 &\leq 200 \end{aligned}$$

Il s'ajoute à ces contraintes des contraintes de non-négativité puisque le nombre des produits fabriqués ne peut être négatif, on a donc:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_3 \geq 0.$$

La direction veut maximiser son profit, c'est à dire maximiser la fonction:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 6x_1 + 7x_2 + 8x_3.$$

Le programme linéaire que doit résoudre l'entreprise est donc:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{maximiser } 6x_1 + 7x_2 + 8x_3 \\ \text{sous contraintes} \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 100 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 120 \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leq 200 \end{array} \right. \end{array}}$$

Exercice 3

Les données du problème se résument dans le tableau suivant:

	Dattes	Abricots	Pêches
boîte luxe	0.45 kg	0.67 kg	0.34 kg
boîte spéciale	0.56 kg	0.34 kg	0.084 kg
boîte ordinaire	0.45 kg	0.22 kg	0 kg

Notons par x_1, x_2, x_3 respectivement le nombre de boîtes de luxe, spéciales, ordinaires. La contrainte imposée par la quatité de dattes disponible est:

$$0.45\ x_1 + 0.56\ x_2 + 0.45\ x_3 \leq 33.6$$

Les autres contraintes imposées par les quatités d'abricots et de pêches disponibles sont données par:

$$\begin{aligned} 0.67\ x_1 + 0.34\ x_2 + 0.22\ x_3 &\leq 25.2 \\ 0.34\ x_1 + 0.084\ x_2 &\leq 10.08 \end{aligned}$$

Il s'ajoute à ces contraintes des contraintes de non-négativité puisque le nombre de boîtes ne peut être négatif, on a donc:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_3 \geq 0.$$

La compagnie veut maximiser son profit, c'est à dire maximiser la fonction:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3\ x_1 + 2\ x_2 + 1.5\ x_3$$

Le programme linéaire est donc:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{maximiser } 3\ x_1 + 2\ x_2 + 1.5\ x_3 \\ \text{sous contraintes} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \\ 0.45\ x_1 + 0.56\ x_2 + 0.45\ x_3 \leq 33.6 \\ 0.67\ x_1 + 0.34\ x_2 + 0.22\ x_3 \leq 25.2 \\ 0.34\ x_1 + 0.084\ x_2 \leq 10.08 \end{array} \right. \end{array}}$$

Exercice 4

Notons par x_{ij} la quantité d'espace loué par la compagnie pour une durée de j mois à compter du mois i (m2). Par exemple x_{12} signifie que la compagnie a loué l'espace pour une période de deux mois à partir du premier mois (ç.à.d. le premier mois et le deuxième mois); x_{32} signifie qu'elle a loué l'espace pour deux mois à partir du troisème mois (ç.à.d. le troisième mois et le quatrième mois) et ainsi de suite. Pour une valeur de i allant de 1 jusqu'à 5, alors j prend la valeur de 1 jusqu'à $6 - i$. Ainsi les variables x_{ij} qui representent la quantité d'espace loué sont comme suite:

$$\begin{array}{lllll} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & & \\ x_{41} & x_{42} & & & \\ x_{51} & & & & \end{array}$$

Les contraintes économiques sont données comme suite:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \geq 30000 \\ x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \geq 20000 \\ x_{13} + x_{14} + x_{15} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 40000 \\ x_{14} + x_{15} + x_{23} + x_{24} + x_{32} + x_{33} + x_{41} + x_{42} \geq 10000 \\ x_{15} + x_{24} + x_{33} + x_{42} + x_{51} \geq 50000 \end{array} \right.$$

les contraintes de signes sont comme suite:

$$x_{ij} \geq 0, \text{ pour } i = 1, \cdots, 5 \text{ et } j = 1, \cdots, 6 - i \text{ pour chaque valeur de } i$$

L'objectif de la compagnie est de minimiser le coût total de location (en DH):

$$\text{minimiser} \quad [65(x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}) + 100(x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42}) + 135(x_{13} + x_{23} + x_{33}) + 160(x_{14} + x_{24}) + 190(x_{15})]$$

Le programme linéaire qui se pose donc pour la compagnie est comme suite:

$$\text{minimiser}\quad [65(x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51})+100(x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42})+135(x_{13}+x_{23}+x_{33})+160(x_{14}+x_{24})+190(x_{15})]$$

$$\text{sous contraintes}\quad \begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15} \geq 30000 \\ x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} \geq 20000 \\ x_{13}+x_{14}+x_{15}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{31}+x_{32}+x_{33} \geq 40000 \\ x_{14}+x_{15}+x_{23}+x_{24}+x_{32}+x_{33}+x_{41}+x_{42} \geq 10000 \\ x_{15}+x_{24}+x_{33}+x_{42}+x_{51} \geq 50000 \\ x_{ij} \geq 0,\ \text{pour } i=1,\cdots,5 \text{ et } j=1,\cdots,6-i \text{ pour chaque valeur de } i \end{cases}$$

Exercice 5

Notons par x_1, x_2, x_3, x_4 respectivement le nombre de bureaux des modèles M_1, M_2, M_3, M_4 produits par l'entreprise. La contrainte liée à la phase de menuiserie est comme suite:

$$4\ x_1 + 9\ x_2 + 7\ x_3 + 10\ x_4 \leq 7000.$$

La contrainte liée à la phase de finition est comme suite:

$$x_1 + x_2 + 3\ x_3 + 40\ x_4 \leq 4000.$$

Il s'ajoute à ces contarintes économiques, les contraintes de signes:

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0.$$

La compagnie veut maximiser son profit, c'est à dire maximiser la fonction:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 60\ x_1 + 100\ x_2 + 90\ x_3 + 200\ x_4$$

Le programme linéaire est donc:

$$\text{maximiser } 60\ x_1 + 100\ x_2 + 90\ x_3 + 200\ x_4$$

$$\text{sous contraintes}\quad \begin{cases} x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \\ 4\ x_1 + 9\ x_2 + 7\ x_3 + 10\ x_4 \leq 7000 \\ x_1 + x_2 + 3\ x_3 + 40\ x_4 \leq 4000 \end{cases}$$

Exercice 6

1- Notons par x_1 et x_3 respectivement les quantités des produits P_1 et P_2 fabriqués par la société. Les contraintes économiques liées à l'utilisation des machines M_1, M_2 et M_3 sont données par:

$$\begin{aligned} 20\ x_1 + 30\ x_2 &\quad \leq 300 \\ 50\ x_1 + 50\ x_2 &\quad \leq 500 \\ 10\ x_1 + 40\ x_2 &\quad \leq 200. \end{aligned}$$

Les contraintes de signes sont données par:

$$x_1 \geq 0 \quad \text{et} \quad x_2 \geq 0.$$

Pour déterminer la fonction économique, notons que la marge sur coût variable est donnée par la formule:

$$MCV = CA - CV,$$

où

$$CA = \text{ chiffre d'affaire}$$
$$CV = \text{ charge variable.}$$

Comme les marges sur coûts variables en poucentage du prix de vente pour P_1 et P_2 sont respectivement de 25% et 20%, on en déduit donc que la fonction économique est donnée par:

$$f(x_1, x_2) = 80\ x_1 + 100\ x_2.$$

Le programme linéaire est donc:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{maximiser } 80\ x_1 + 100\ x_2 \\ \text{sous contraintes } \left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0,\ \ x_2 \geq 0 \\ 20\ x_1 + 30\ x_2 \leq 300 \\ 50\ x_1 + 50\ x_2 \leq 500 \\ 10\ x_1 + 40\ x_2 \leq 200 \end{array} \right. \end{array}}$$

Graphiquement, l'ensemble des solutions admissibles est donné par le polygone convexe (F) sur la figure.

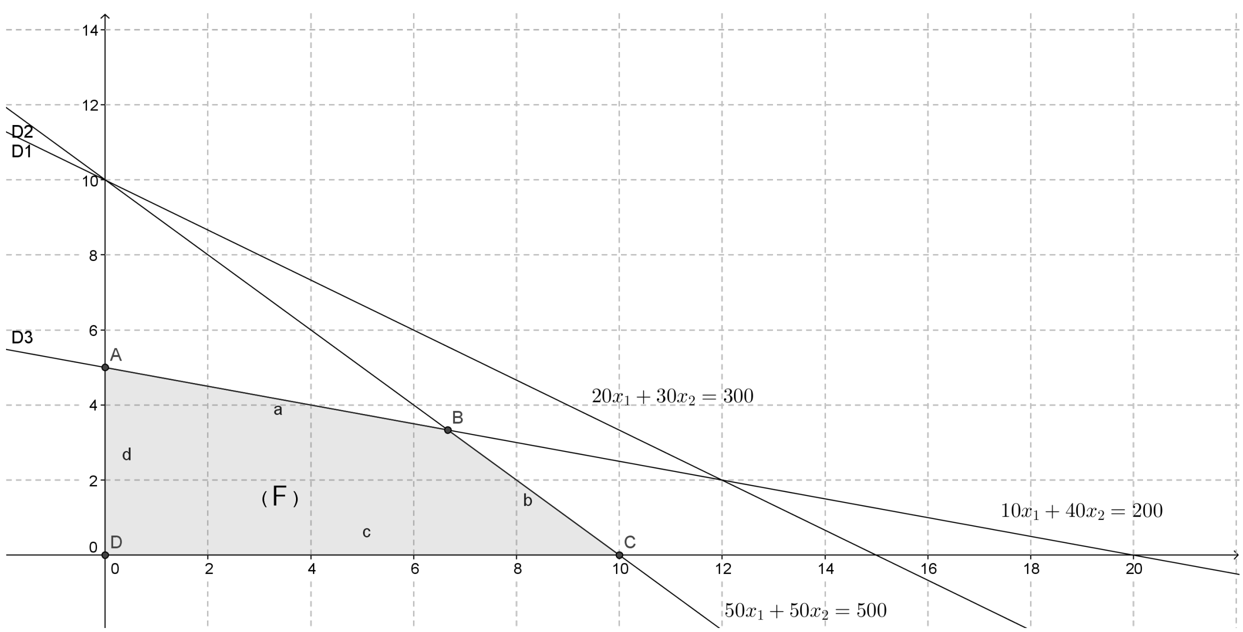

Figure 3: l'ensemble des solutions admissibles c'est le polygone convexe en gris

La société veut maximiser la marge sur coûts variables, c'est-à-dire maximiser la fonction:

$$f(x_1, x_2) = 80x_1 + 100x_2.$$

Pour chacune de ces solutions admissibles, c'est-à-dire pour chacun des points du polygone convexe (F), la compagnie fera un profit positif. Si la compagnie fabrique trois exemplaires du Produit P_1 et deux exemplaires du produit P_2, le profit sera:

$$f(3, 2) = 80 \times 3 + 100 \times 2 = 440\ DH.$$

Il ne saurait être question de calculer le profit réalisable pour chacun des points du polygone convexe (F). Pour avoir une vision globale du problème, représentons le profit réalisé par le paramètre z. On a:

$$80x_1 + 100x_2 = z$$

qui représente une famille de droites parallèles. En isolant x_2, on obtient:

$$x_2 = (-\frac{4}{5})x_1 + \frac{1}{100}z$$

Il s'agit donc d'une famille de droites de pente $-\frac{4}{5}$ et qui passent par le point dont l'ordonnée à l'origine est $\frac{z}{100}$ (c'est dire le point dont les coordonées sont $x_1 = 0$ et $x_2 = z/100$) . Parmi les droites de cette famille, seules celles ayant des points communs avec l'ensemble des solutions admissibles (qui est representé ici par le polygone convexe en gris sur le graphique) nous intéressent. La fonction $f(x_1, x_2)$ atteindra sa valeur maximale lorsque l'ordonnée à l'origine $\frac{z}{100}$ de la droite:

$$x_2 = (-\frac{4}{5})x_1 + \frac{1}{100}z$$

atteindra sa valeur maximum tout en passant par au moins un des points de l'ensemble des solutions admissibles (polygone convexe (F) en gris sur le graphique).

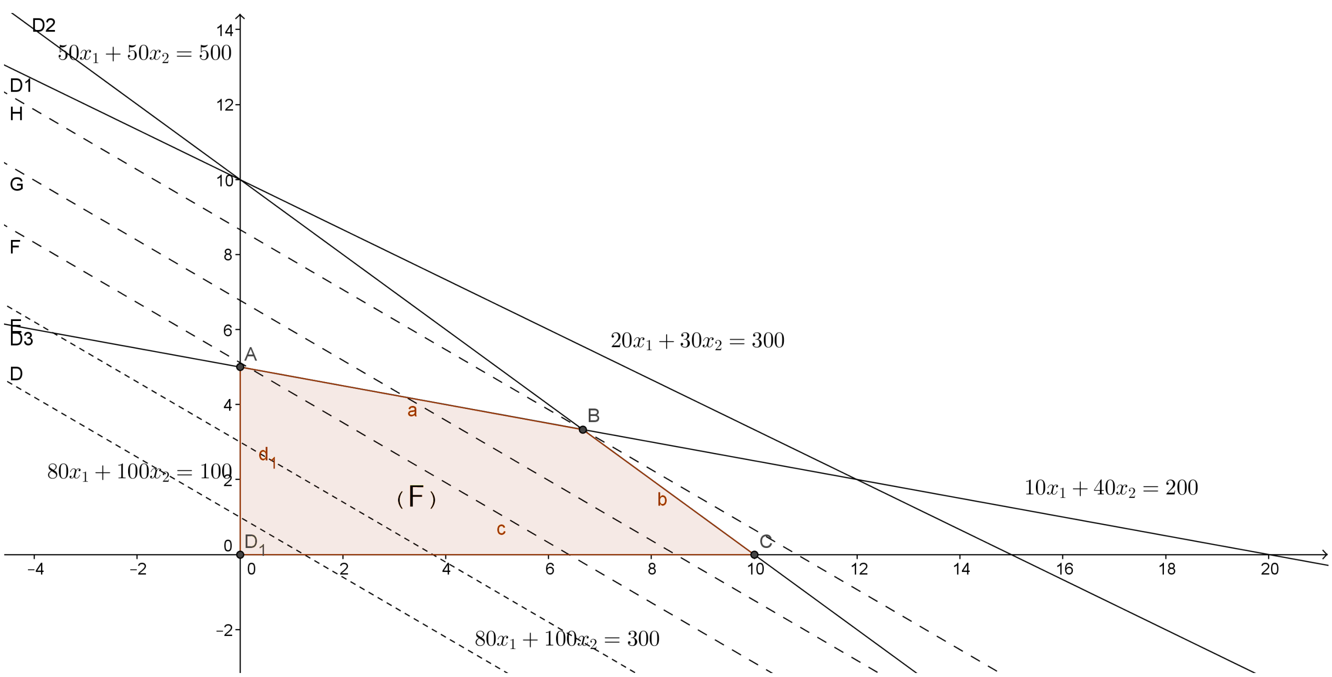

Figure 4: Les droites hachurées representent les droites parallèles d'équations $80x_1 + 100x_2 = z$ pour une valeur donnée de z.

Graphiquement on constate que la droite respectant ces conditions semble être la droite de la famille passant par le point-sommet $B(6.67; 3.33)$ du polygone convexe (F). Le profit est alors:

$$f(10, 2) = 80 \times 6.67 + 100 \times 3.33 = 866.6 \; DH.$$

Il reste à s'assurer algébriquement des coordonnées du point-sommet B représentant l'optimum. En effet, le point B represente l'intersection des deux droites d'équations respectivement $50x_1+50x_2 = 500$ et $10x_1 + 40x_2 = 200$. On résoud donc le système:

$$\begin{cases} 50x_1 + 50x_2 = 500 \\ 10x_1 + 40x_2 = 200 \end{cases}$$

ce qui donne $x_1 = 6.67$ et $x_2 = 3.33$. Ainsi, la direction on doit choisir entre les solutions approchées $x_1 = 7$ et $x_2 = 3$ ou bien $x_1 = 6$ et $x_2 = 4$. Pour pouvoir choisir on doit analyser chaque programme et voir celui qui reste optimal.

- Pour $x_1 = 7$ et $x_2 = 3$: on a $50 \times 7 + 50 \times 3 = 500$ et $10 \times 7 + 40 \times 3 = 190$;
- Pour $x_1 = 6$ et $x_2 = 4$: on a $50 \times 6 + 50 \times 4 = 500$ et $10 \times 6 + 40 \times 4 = 220$.

On voit donc que la deuxième solution approchée n'est pas envisageable car elle n'est pas admissible. Ainsi le programme de la direction est $(7, 3)$.

2- Déductions:

a- Le chiffre d'affaires prévisionnel mensuel M est donné par l'expression

$$M = p \times Q,$$

où p est le prix et Q represente la quantité produite. Ainsi dans notre cas,

$$M = (p_1 \times x_1) + (p_2 \times x_2)$$

avec p_1 c'est le prix de vente au grossiste du produit P_1 et p_2 le prix de vente du produit P_2. Ainsi, le chiffre d'affaire prévisionnel mensuel est

$$M = 320 \times 7 + 500 \times 3 = 3740DH.$$

b- Déterminons le coefficient moyen τ de marge sur coûts variable par rapport au chiffre d'affaires prévisionnel de l'ensemble des deux produits. Ce coefficient est donné par

$$\tau = \frac{(\tau_1 \times p_1 \times x_1) + (\tau_2 \times p_2 \times x_2)}{M},$$

où $\tau_1 = 25\%$, $\tau_2 = 20\%$ et M est le chiffre d'affaire mensuel de l'ensemble des deux produits. Ainsi,

$$\tau \simeq 23\%.$$

3- Indication pour le programme de fabication optimal.

a- Les machines pour lesquelles il y a plein emploi sont les machines M_2 et M_3 car

$$\begin{aligned} 50x_1 + 50x_2 &= 50 \times 7 + 50 \times 3 = 500 \\ 10x_1 + 40x_2 &= 10 \times 7 + 40 \times 3 = 190 \simeq 200. \end{aligned}$$

La machine qui n'est pas entièrement exploitée est la machine M_1 car

$$20\ x_1 + 30\ x_2 = 20 \times 7 + 30 \times 3 = 230 < 300.$$

Il reste donc $70h$ pour la machine M_1 qui sont non expoitées.

b- La société peut faire appel à une sous-traitance concernant la production relative à la machine M_1 s'il s'avère que le coût de production relatif à M_1 (énergie consommée, main d'oeuvre,...) est inférieur à celui qu'elle pourra réaliser en faisant appel au service d'une autre entreprise spécialisée (respect des normes de qualité...).