Echantillonnage et estimation

Filière Sciences Economiques et Gestion S_4
T.D série n ° 1
B . Mhamdi

Exercice 1

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle [-2 ; 3].

a) Représenter f(x) et vérifier que f et bien une fonction densité de probabilité

b) déterminer F (X) et calculer E(X) et σ(X)

Exercice 2

On choisit un nombre au hasard entre -3 et 5.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre strictement inférieur à 1 ?

2) Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre supérieur ou égal à 3 ?

3) Quelle est la probabilité que le nombre choisi soit strictement inférieur à 1 , sachant qu'il est strictement positif ?

Exercice 3

Soit X la variable aléatoire continue dont la fonction densité de probabilité est :

$$f(x) = \begin{cases} C\, e^{-2x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad < 0 \end{cases}$$

a) Déterminer la valeur de C et donner la fonction de réparation de X

b) Calculer E(X) et V(X)

c) chercher P (X > 2)

Exercice4

Soit X un v. a .c qui suit loi normale

a) Calculer P (¼ < X < ½) si X suit la loi N(0.1)

b) Calculer P (2 < X < 3) si X suit la loi N(1.4)

c) Calculer P (5.52 < X < 9.96) et P (X > 11) si X suit la loi N (1 . 16)

Exercice5

Soit X une V.A. de loi N(0,1) Déterminer t tel que:

P(X<t)=0.684 P(X>t)=0.239 P(X<t)=0.486 P(X>t)=0.812

Exercice6

Un chercheur a étudié l'âge moyen auquel les premiers mots du vocabulaire apparaissent chez les jeunes enfants. Une étude effectuée auprès d'un millier de jeunes enfants montre que les premiers mots apparaissent, en moyenne, à 11,5 mois avec un écart-type de 3,2 mois. L a distribution des âges étant normale, on souhaite

1) évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots avant 10 mois

2) évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots après 18 mois

3) évaluer la proportion d'enfants ayant acquis leurs premiers mots entre 8 mois et 12 mois.

Exercice7

Pour qu'une pièce fabriquée par une machine soit utilisable, sa longueur doit être comprise entre 14,7 et 15,3 cm, sinon elle est rejetée. Sachant que la longueur de cette pièce est une variable normale de paramètres 15 cm et 0,04 cm, quelle proportion de pièces peuvent être rejetées.

Exercice8

La durée de vie d'un certain type d'appareil est modélisée par une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne et d'écart-type inconnus. Les spécifications impliquent que 80 % de la production des appareils ait une durée de vie entre 120 et 200 jours et que 5% de la production ait une durée de vie inférieure à 120 jours.

1. Quelles sont les valeurs de μ et σ^2 ?
2. Quelle est la probabilité d'avoir un appareil dont la durée de vie soit comprise entre 200 jours et 230 jours ?

Exercice9

On suppose que la probabilité qu'un étudiant réussisse à un examen est de 0,8. Quelle est la probabilité qu'au moins 75 étudiants parmi 100 étudiants réussissent à l'examen ?

Exercice10

On suppose que la probabilité qu'un étudiant réussisse à un examen est de 0,8.

Quelle est la probabilité qu'au moins 75 étudiants parmi 100 étudiants réussissent à l'examen ?

Exercice11

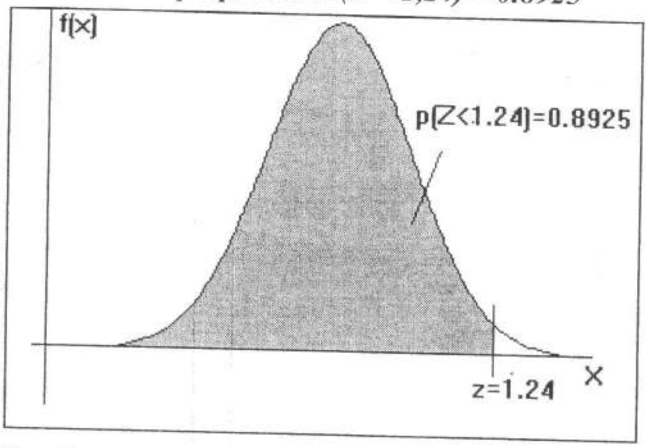
Pour se rendre à son travail un ouvrier prend deux bus. La durée du trajet du premier bus est une variable normale de paramètres 27 minutes et 5 minutes. La durée du trajet du deuxième bus est une variable normale de paramètres 30 minutes et 2 minutes. Quelle est la probabilité que cet ouvrier n'arrive pas en retard s'il dispose d'une heure ?

Exercice12

Une caisse d'assurance maladie reçoit 120 personnes pour l'obtention de remboursements. On suppose que la somme à rembourser à chaque personne est une variable aléatoire de moyenne 1000 dirhams et d'écart type 600 dirhams. La caisse dispose de 130000 dirhams. Quelle est le risque que cette somme ne soit pas suffisante pour rembourser toutes les personnes ?

TABLE DE LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE

Lecture de la table: Pour z=1.24 (intersection de la ligne 1.2 et de la colonne 0.04), on a la proportion P(Z < 1,24) = 0.8925



P(Z > 1,96) = 0,025
P(Z > 2,58) = 0,005
P(Z > 3,29) = 0,0005

Rappels:

1/ P(Z > z) = 1 - P(Z < z) et 2/ P(Z < -z) = P(Z > z)

Exemple: Sachant P(Z < 1,24) = 0,8925, on en déduit:

1/ (P(Z > 1,24) = 1 - P(Z < 1,24) = 1- 0,8925 = 0,1075

2/ P(Z < -1,24) = P(Z > 1,24) = 0,1075

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,99865	0,99869	0,99874	0,99878	0,99882	0,99886	0,99889	0,99893	0,99896	0,99900
3,1	0,99903	0,99906	0,99910	0,99913	0,99916	0,99918	0,99921	0,99924	0,99926	0,99929
3,2	0,99931	0,99934	0,99936	0,99938	0,99940	0,99942	0,99944	0,99946	0,99948	0,99950
3,3	0,99952	0,99953	0,99955	0,99957	0,99958	0,99960	0,99961	0,99962	0,99964	0,99965
3,4	0,99966	0,99968	0,99969	0,99970	0,99971	0,99972	0,99973	0,99974	0,99975	0,99976
3,5	0,99977	0,99978	0,99978	0,99979	0,99980	0,99981	0,99981	0,99982	0,99983	0,99983
3,6	0,99984	0,99985	0,99985	0,99986	0,99986	0,99987	0,99987	0,99988	0,99988	0,99989
3,7	0,99989	0,99990	0,99990	0,99990	0,99991	0,99991	0,99992	0,99992	0,99992	0,99992
3,8	0,99993	0,99993	0,99993	0,99994	0,99994	0,99994	0,99994	0,99995	0,99995	0,99995
3,9	0,99995	0,99995	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99996	0,99997	0,99997
4,0	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99997	0,99998	0,99998	0,99998	0,99998

Echantillonnage et estimation

Filière Sciences Economiques et Gestion S_4
T.D série n ° 2
B . Mhamdi

Exercice 1

Soit une population contenant une proportion P= 0.25 d'individus de type A .
Quelle est la taille de l échantillon pour que la fréquence de type A sur l échantillon se trouve avec une probabilité d au moins 95 % dans un intervalle plus au moins 5% ?

Exercice 2

On souhaite à estimer la consommation par ménage.
1) Quelle et la taille de l échantillon pour que la moyenne de l échantillon ne s éloigne pas a la moyenne de la population au moins de 100 dh avec une probabilité de $1 - \alpha = 95\%$ sachons que $\sigma^2 = 2500000$?
2) On suppose que la distribution et normale .Quelle et la taille de l échantillon ?

Exercice 3

Une machine remplit automatiquement des boites de sucre en poudre de telle façon que le poids de sucre effectivement contenu dans une boîte soit une variable aléatoire normale de paramètres m et σ exprimes en grammes. On souhaite régler la machine de sorte que le poids de sucre contenu dans une boite dépasse 980 grammes avec une probabilité de 95%.
1. Lorsque $\sigma = 30$, quelle valeur faut-il donner a la moyenne m?
2. Lorsque m = 1000, quelle valeur doit avoir l'écart-type σ ?

Exercice 4

Une machine fabrique des pièces en grandes série. a chaque pièce tirée au hasard, on associe sa longueur exprimée en millimètres. On définit ainsi une variable aléatoire X. On suppose que X suit la loi normale où $\mu = 28,20$ et $\sigma = 0,027$
On prélève des échantillons de taille n . Déterminer n pour que la probabilité d'obtenir une valeur comprise entre 28,195 et 28,205 soit de 0,95.

Exercice 5

Après la correction d'une épreuve d'examen comportant un grand nombre de candidats, on constate que les notes ont pour moyenne 12 et pour écart type 3.
On se propose de prélever des échantillons aléatoires non exhaustifs de 100 notes.
1) Quelle est la probabilité d'avoir la moyenne d'un tel échantillon supérieure à 12,5 ?
2) Quelle est la probabilité d'avoir la moyenne d'un tel échantillon comprise entre 12,5 et 12,9 ?

Exercice 6

Dans une population, on constate qu'il nait 52% de garçons On prélève des échantillons aléatoires non exhaustif de 400 nouveaux nés

1) Quelle est la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, un pourcentage de garçons compris entre 50% et 54% ?
2) Quelle est la probabilité d'avoir, dans un tel échantillon, un pourcentage de filles inférieur à 45% ?

Exercice 7

Dans une fabrication très importante, on prélève un échantillon de 10 produits et on obtient les poids suivants en grammes : 438 - 449 - 446 - 453 - 455 - 447 - 451 - 445 - 454 - 452.

On suppose que la distribution et normale

1°) Donner une estimation ponctuelle de la moyenne et de l'écart type des poids des produits de la fabrication.

2°) Donner une estimation, par intervalle de confiance à 95 %, de la moyenne et de l'écart type des poids des produits de la fabrication.

Exercice 8

1. On considère l'échantillon suivant, constitue de tirages suivant une loi normale d'espérance μ et d'écart-type _$\sigma = 3$, $N(\mu; 3^2)$:

14.5	9.3	12.3	10.4	12.9	10.2	14.2	13.5

a) Construire un intervalle de confiance pour μ, au niveau de confiance 99%.

b) Toujours au niveau de confiance 99%, on souhaite obtenir une marge d'erreur pour μ Inferieure ou égale a 0 .5 ; comment choisir la taille de l'échantillon (on suppose toujours $\sigma = 3$) ?

Exercice 9

Lors d'une étude sur les revenus, on a enregistré le salaire horaire en DH d'un échantillon de 100 ouvriers

Salaire horaire	120-125	125-130	130-135	135-140	140-145
Nombre d'ouvriers	10	20	38	25	7

1) Calculer la moyenne et l'écart type de cet échantillon.
2) En déduire des estimations ponctuelles de la moyenne et de l'écart type de la population.
3) Donner un intervalle de confiance au seuil de 95% de la moyenne de la population.

Exercice 10

Deux candidats sont en lice pour la prochaine élection, A et B. Un sondage donne A gagnant avec 55% des voix contre 45 à son adversaire. On suppose que 250 personnes ont été sondées

1) construit l'intervalle de confiance pour la proportion de votants en faveur de A, au seuil 95%
2) Même question, si on suppose maintenant que 1000 personnes ont été interrogées.

Correct° TD n°1

* Exercice n°1 :

$$X \sim U_{[-2,3]}$$

on a $f(x) = \begin{cases} 1/5 & \text{si } [-2,3] \\ 0 & \text{si non} \end{cases}$

donc

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{x+2}{5} & \text{si } x\ [-2,3] \\ 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

d'où $E(x) = \boxed{1/2}$; $V(x) = \boxed{\frac{25}{12}}$; $\sigma(x) = \boxed{\sqrt{\frac{25}{12}}}$

Exercice n°2 :

$$X \sim U_{[0,4]}$$

① $P(0{,}5 \leq x \leq 0{,}7) = F(0{,}7) - F(0{,}5)$

avec $f(x) = \begin{cases} 1/4 & \text{si } x \in [0,4] \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{4} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

donc $P(0{,}5 \leq x \leq 0{,}7) = \frac{0{,}7}{4} - \frac{0{,}5}{4} = \boxed{0{,}\frac{1}{2}}$

② $P(x = \pi) \Leftrightarrow \pi \leq \pi \leq \pi$

$$F(\pi) - F(\pi) = \int_{\pi}^{\pi} = 0$$

donc $\boxed{P(x = \pi) = 0}$

Exercice 3 :

$$X \sim U_{[-3,5]}$$

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{si } x \in [-3,5] \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -3 \\ \frac{x+3}{8} & \text{si } -3 \leq x \leq 5 \\ 1 & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

① $P(x < 1) = F(1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

② $P(x \geq 3) = 1 - P(x < 3) = 1 - F(3) = 1 - \frac{6}{8} = \frac{1}{4}$

③ $P(x<1 / x>0) = \frac{P(x < 1 \cap x > 0)}{P(x > 0)} = \frac{P(0 < x < 1)}{P(x > 0)} = \frac{F(1) - F(0)}{1 - F(0)} = \frac{1}{8} \times \frac{8}{5}$
$= \boxed{\frac{1}{5}}$

Exercice 4 :

$$X \sim \mathcal{E}(\lambda)$$

(1) $\quad (e^{-2x} \geq 0 \iff c \geq 0)$

on a :

✓ * $f(x) \geq 0$

✓ * $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1 \;? \iff \int_{-\infty}^{+\infty} c\,e^{-2x}\,dx = c\int_{-\infty}^{0} \overset{(e^{-2x} \geq 0)}{\overset{//}{0}}\, dx + c\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\,dx$

$$= c\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\,dx = \lim_{x \to +\infty} \left(c\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}\,dx \right)$$

$$= c \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{e^{-2x}}{2} \right]_{0}^{+\infty} = -\frac{c}{2} \lim_{x \to +\infty} (\underset{0}{e^{-2x}} - 1) = 1$$

$$= -\frac{c}{2} \times (-1) = 1 \iff \frac{c}{2} = 1 \iff \boxed{c = 2}$$

(2)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-2x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$; $V(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4}$.

(3) $P(X > 2) = (1 - P(X \leq 2))$

$$= 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-4}) = e^{-4} = \boxed{\frac{1}{e^4}}$$

Exercice 5 : soit X une v.a de loi $N(0,1)$, déterminer "t" tq :

* $P(X < t) = 0,684$

$\Pi(t) = 0,684$

$\Pi(t) = \Pi(0,48)$

$\boxed{t = 0,48}$

* $P(X > t) = 0,239$

$1 - P(X < t) = 0,239$

$P(X < t) = 0,761$

$\Pi(t) = \Pi(0,71)$

$\boxed{t = 0,71}$

*

* $P(X < t) = 0,486 < 0,5$

c-à-d $t < 0 \Rightarrow -t > 0$

$P(X < t) = P(X > -t) = 0,486$

$1 - P(X < -t) = 0,486$

$P(X < -t) = 0,514$

$\Pi(-t) = \Pi\left(\frac{0,03 + 0,04}{2}\right) = \Pi(0,035)$

$-t = 0,035$

$\boxed{t = -0,035}$

* $P(X > t) = 0,812$

$1 - P(X < t) = 0,812$

$P(X < t) = 0,188 \leq 0,5$

$t < 0 \Rightarrow -t > 0$

$\Pi(t) = 0,188$

$\Pi(t) + \Pi(-t) = 1$

$\Pi(-t) = 1 - 0,188 = 0,812$

$\Pi(-t) = \Pi\left(\frac{0,88 + 0,89}{2}\right)$

$-t = 0,885 \Rightarrow \boxed{t = -0,885}$

Exercice 6:

$E(x) = 11,5 = \mu \qquad \sigma = 3,2 \Rightarrow V(x) = \sigma^2 = (3,2)^2$

$X \sim N(11,5 \,;\, (3,2)^2)$

① $P(x < 10)$

on pose $z = \frac{x-\mu}{\sigma} \rightarrow z \sim N(0,1)$

$P(x < 10) = P\left(\frac{x-11,5}{3,2} < \frac{10-11,5}{3,2}\right) = P(z < -0,468)$ $\overset{(-0,47)}{}$

$\Pi(-0,47) = 1 - \Pi(0,47)$

$= 1 - 0,6808$

$= 0,32$

$\boxed{P(x<10) = 32\%}$

② $P(x > 18) = P\left(\frac{x-11,5}{3,2} > \frac{18-11,5}{3,2}\right)$ $\qquad z = \frac{x-11,5}{3,2} \quad z \sim N(0,1)$

$= P(z > 2,031) = 1 - P(z \leq 2,031)$

$= 1 - \Pi(2,03)$

$= 1 - 0,9788$

$= 0,0212$

$\boxed{P(x > 18) = 2\%}$

③ $P(8 < x < 12)$

$P\left(\frac{8-11,8}{3,2} < \frac{x-11,5}{3,2} < \frac{12-11,5}{3,2}\right)$

$P(-1,093 < z < 0,156)$

$\Pi(0,156) - \Pi(-1,093) = \Pi(0,156) - (1 - \Pi(1,093))$

$= 0,5636 - (1 - 0,8621)$

$\boxed{P(8 < x < 12) = 0,4257}$

Exercice 7:

$X \sim N(15 \,;\, 0,04)$

$m = 15 \qquad \sigma = 0,2$

$P_{rejetées} = 1 - P_{acceptées}$

on pose $z = \frac{x-15}{0,2} \quad z \sim N(0,1)$

$P_{acc}\ (14,7 \leq x \leq 15,3)$

$P_{acc}\left(\frac{14,7-15}{0,2} \leq Z \leq \frac{15,3-15}{0,2} \right)$

$P_{acc}\ (-1,5 \leq Z \leq 1,5)$

$\Pi(1,5) - \Pi(-1,5) = \Pi(1,5) - 1 + \Pi(1,5) = 2\Pi(1,5) - 1$

donc $P_{rej} = 1 - P_{accep} = 1 - (2\Pi(1,5) - 1)$

$= 2 - 2\Pi(1,5)$

$= 2(1 - 0,9332)$

$\boxed{P_{rej} = 0,1336}$

Exercice 8 :

$$X \sim N(m = ? \ ; \sigma = ?)$$

on pose $Z = \frac{X - m}{\sigma}$ $\quad Z \sim N(0,1)$

$$\begin{cases} P(120 < X < 200) = 0,8 \\ P(X < 120) = 0,05 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P\left(\frac{120-m}{\sigma}\right) < Z < \frac{200-m}{\sigma}) = 0,8 \\ P\left(Z < \frac{120-m}{\sigma}\right) = 0,05 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Pi\left(\frac{200-m}{\sigma}\right) - \Pi\left(\frac{120-m}{\sigma}\right) = 0,8 \\ \Pi\left(\frac{120-m}{\sigma}\right) = 0,05 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Pi\left(\frac{200-m}{\sigma}\right) - 0,05 = 0,8 \\ \Pi\left(\frac{120-m}{\sigma}\right) = 0,05 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Pi\left(\frac{200-m}{\sigma}\right) = 0,85 \\ \Pi\left(\frac{120-m}{\sigma}\right) = 0,05 < 0,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Pi\left(\frac{200-m}{\sigma}\right) = \Pi(1,04) \\ \Pi\left(\frac{120-m}{\sigma}\right) = \Pi(?) \end{cases}$$

on a $\Pi(t) + \Pi(-t) = 1$

$\Pi(t) = 1 - \Pi(t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Pi\left(\frac{200-m}{\sigma}\right) = \Pi(1,04) \\ 1 - \Pi\left(\frac{m-120}{\sigma}\right) = 0,05 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{200-m}{\sigma} = 1,04 \\ \Pi\left(\frac{m-120}{\sigma}\right) = 0,95 = \Pi(1,65 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 200 - m = 1,04\,\sigma \\ m - 120 = 1,65\,\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 200 - (1,65\sigma + 120) = 1,04\sigma \\ m - 120 = 1,65\,\sigma \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 320 = 2,69\,\sigma \\ m - 120 = 1,65\,\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\sigma \simeq 118,96} \\ \boxed{m \simeq 316,28} \end{cases}$$

Exercice 9 : (Ex 10 le in) $X_B \rightsquigarrow B(100; 0{,}8)$

(1) on a $n \geqslant 30$; $nP \geqslant 5$ $nP(1-P) \geqslant 5$

$X \rightsquigarrow B(100, 0{,}8) \xrightarrow{\text{Approximat°}} X_N \sim N(n \cdot p ; np(1-p))$

$X_N \sim N(80 ; 16)$

* $P(X \geqslant 75) = 1 - P(X < 75)$

$P(X < 75) = P(X_B \leqslant 75) \rightsquigarrow P(X_N \leqslant 74 + 0{,}5)$

$Z = \frac{X - 80}{4}$

$P\left(Z \leqslant \frac{74{,}5 - 80}{4}\right)$

$P(Z \leqslant -1{,}37) = \Pi(-1{,}37) = 1 - \Pi(1{,}37)$

$= 1 - 0{,}9147$

$\boxed{= 0{,}0853}$

Exercice 11 :

$X_i \rightsquigarrow N(\mu_i, \sigma_i^2)$

$X_1 \rightsquigarrow N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$X_2 \rightsquigarrow N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

$X_n \rightsquigarrow N(\mu_n ; \sigma_n^2)$

$Y = X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$

$Y \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i$

$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2$

on a :

$X_1 \rightarrow N(27, 5^2)$

$X_2 \rightarrow N(30, 2^2)$

$X = X_1 + X_2$

$X \sim N(30 + 27 ; 5^2 + 2^2)$

$P(X < 60) = P\left(Z < \frac{60 - m}{\sqrt{5^2 + 2^2}}\right)$

$= P(Z < 0{,}5570)$

$= \Pi(0{,}56)$

$=$

Exercice 12

$n = 120$ X : somme des caisses $\rightarrow N\ (1000, 600)$

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{120} > 130\,000$$

$$X = x_1 + \cdots + x_{120}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\mu = \sum x_i = n E(x_i)$$
$$\sigma^2 = \sum \sigma_i^2 = n \sigma_i^2$$

$$X \sim N(n E(x_i) ; n V(x_i))$$

$$X \sim N(120 \times 1000 ; 120 \times 600^2) \Rightarrow (120\,000, 43\,200\,000)$$

$$m = 120\,000$$
$$\sigma = \sqrt{43\,200\,000} = 6572,68$$

$$P(X > 130000) = P\left(\frac{X - 120000}{6572,68} > \frac{130000 - 120000}{6572,68}\right)$$

Correction " TD n° 2 "

Exercice 3 :

on a $P(X>980) = 0,95$ et $X \sim N(m, \sigma^2)$

$Z = \frac{X-m}{\sigma}$, $Z \sim N(0,1)$

① $\sigma = 30$? $P(X>980) = 0,95$

$$P\left(\frac{X-m}{\sigma} > \frac{980-m}{\sigma}\right) = 0,95$$

$$P\left(Z > \frac{980-m}{\sigma}\right) = 0,95$$

$$1 - P\left(Z < \frac{980-m}{\sigma}\right) = 0,95$$

$$1 - \Pi\left(\frac{980-m}{\sigma}\right) = 0,95$$ avec $P\left(Z<\frac{980-m}{\sigma}\right) = 0,05 < 0,$

$$\Pi\left(\frac{980-m}{\sigma}\right) = 0,05$$

$$1 - \Pi\left(\frac{m-980}{\sigma}\right) = 0,05$$

$$\Pi\left(\frac{m-980}{\sigma}\right) = 0,95$$

$$\Pi\left(\frac{m-980}{\sigma}\right) = \Pi(1,65)$$; $\Pi(a) + \Pi(-a) = 1$

$$\frac{m-980}{\sigma} = 1,65$$

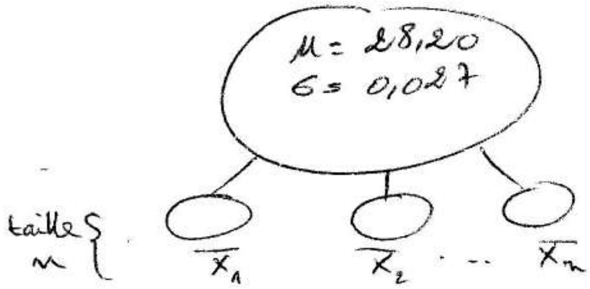
$$m = 1,65\,\sigma + 980$$

$\sigma = 30 \Rightarrow \boxed{m = 1029,5}$

② $\sigma = \frac{m-980}{1,65}$

$m = 1000 \Rightarrow \boxed{\sigma = 12,12}$

Exercice 4 :



- $X \sim N(m ; \sigma^2)$

$\overline{X} \sim N\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$

(1) $P(28{,}195 < \overline{X} < 28{,}205) = 0{,}95$

on pose $Z = \dfrac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

donc $P(28{,}195 < \overline{X} < 28{,}205) = 0{,}95$

$$\Rightarrow P\left(\frac{28{,}195 - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{\overline{X} - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} < \frac{28{,}205 - m}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 0{,}95$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{28{,}195 - 28{,}20}{0{,}027}\sqrt{n} < Z < \frac{28{,}205 - 28{,}20}{0{,}027}\sqrt{n}\right) = 0{,}95$$

$$\Rightarrow P(-0{,}18\sqrt{n} < Z < 0{,}18\sqrt{n}) = 0{,}95$$

$$\Rightarrow \Pi(0{,}18\sqrt{n}) - \Pi(-0{,}18\sqrt{n}) = 0{,}95$$

$$\Rightarrow 2\Pi(0{,}18\sqrt{n}) - 1 = 0{,}95$$

$$\Rightarrow \Pi(0{,}18\sqrt{n}) = \frac{1{,}95}{2} = 0{,}975$$

$$\Rightarrow \Pi(0{,}18\sqrt{n}) = \Pi(1{,}96)$$

$$\Rightarrow 0{,}18\sqrt{n} = 1{,}96$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1{,}96}{0{,}18} \Rightarrow n = \left(\frac{1{,}96}{0{,}18}\right)^2 \Rightarrow \boxed{n \simeq 112}$$

Exercice 5 :

$$\overline{X} \sim N\left(12 ; \frac{9}{100}\right)$$

$m = 12$, $\sigma(\overline{X}) = \frac{3}{10}$

$Z = \dfrac{\overline{X} - m}{\sigma(\overline{X})}$ $Z \sim N(0,1)$

$Z = \dfrac{\overline{X} - 12}{0{,}3}$

(1) $P(\overline{X} > 12{,}5)$

$P\left(\dfrac{\overline{X} - 12}{0{,}3} > \dfrac{12{,}5 - 12}{0{,}3}\right)$

$P(Z > 1{,}66) = 1 - P(Z \leq 1{,}66)$

$= 1 - \Pi(1{,}66)$

$= 1 - 0{,}9515$

$= 0{,}0485$

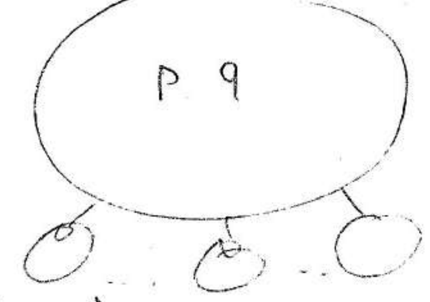
(2) $P(12{,}5 < \overline{X} < 12{,}9)$

$P\left(\dfrac{12{,}5 - 12}{0{,}3} < \dfrac{\overline{X} - 12}{0{,}3} < \dfrac{12{,}9 - 12}{0{,}3}\right)$

$P(1{,}66 < Z < 3)$

$\Pi(3) - \Pi(1{,}66) = 0{,}99865 - 0{,}9515 = 0{,}04715$

Exercice 6 :



$$F \sim N\left(\underset{E_p}{p},\ \underset{V_p}{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

$p = 0{,}52$ $\quad \begin{cases} q = 0{,}48 \\ q = 1 - p \end{cases}$

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{0{,}52 \times 0{,}48}{400}} = 0{,}025$$

(1) $P(0{,}5 < F < 0{,}54)$

$$P\left(\frac{0{,}5-0{,}52}{0{,}025} < \frac{F-0{,}52}{0{,}025} < \frac{0{,}5-0{,}54}{0{,}025}\right)$$

$= P(-0{,}8 < Z < 0{,}8)$

$= 2\Pi(0{,}8) - 1 \quad = 2 \times 0{,}78 - 1 \quad \boxed{= 0{,}5762}$

(2) $P(F < 0{,}45) =$ ~~N<B<P~~

$$P\left(F < \frac{0{,}45 - 0{,}48}{0{,}025}\right) = P(F < -1{,}2)$$

$= \Pi(-1{,}2) = 1 - \Pi(1{,}2)$

$= 1 - 0{,}8849$

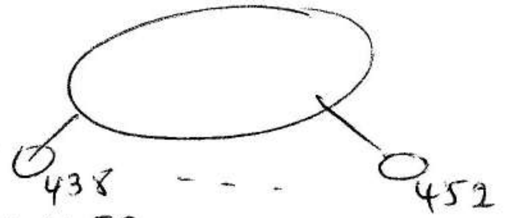
$\boxed{= 0{,}1151}$

Exercice 7 :

$\hat{\mu} = \mu_e$

$\hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,\sigma_e$

populat° $\quad X \sim N(m, \sigma^2)$



(1) $\mu_e = \overline{X} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{438 + \cdots + 452}{10}$

$\mu_e = 449$

$\sigma_e^2 = V(x) = \frac{1}{N}\sum x_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{N}\sum (x_i - \overline{x})^2$

$\sigma_e^2 = 24 \quad \Rightarrow \sigma_e = \sqrt{24}$

d'où $\quad \hat{\sigma}_p = \sqrt{\frac{10}{9}}\sqrt{24} = 5{,}16$

(3)

(2).

$$IC_{1-\alpha} = [\mu_e - \varepsilon \ ; \ \mu_e + \varepsilon]$$

$$IC_{1-\alpha} = \left[\mu_e - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ ; \ \mu_e + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

$$IC_{95\%} = \left[\mu_e - t\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} \ ; \ \mu_e + t\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right]$$

$$IC = \left[449 - t \times \frac{5,16}{\sqrt{10}} \ ; \ 449 + t \times \frac{5,16}{\sqrt{10}}\right]$$

$$IC = \left[449 - 1,96 \times \frac{5,16}{\sqrt{10}} \ ; \ 449 + 1,96 \times \frac{5,16}{\sqrt{10}}\right] \quad \Pi(t) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1,96$$

$$IC = [445,81 \ ; \ 452,19]$$

Exercice 8 :

$$\sigma_p = 8 \ , \ \mu_e = \frac{\sum x_i}{8} = 12,16$$

a)

$$IC_{0,99} = \left[12,16 - t\frac{3}{\sqrt{8}} \ ; \ 12,16 + t\frac{3}{\sqrt{8}}\right]$$

$$\Pi(t) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

$$\Pi(t) = 1 - \frac{0,01}{2} = 0,995$$

$$t = 2,575$$

$$IC_{0,99} = \left[12,16 - \frac{2,575 \times 3}{\sqrt{8}} \ ; \ 12,16 + \frac{2,575 \times 3}{\sqrt{8}}\right]$$

$$IC_{0,99} = [9,43 \ ; \ 14,89]$$

b)

$$\varepsilon \leqslant 0,5$$

$$\varepsilon = t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant 0,5 \iff \frac{\sqrt{n}}{t.\sigma} \geqslant \frac{1}{0,5}$$

$$\iff \sqrt{n} \geqslant \left(\frac{t \cdot \sigma}{0,5}\right)$$

$$\iff n \geqslant \left(\frac{t \cdot \sigma}{0,5}\right)^2$$

$$\iff n \geqslant \left(\frac{2,575 \times 3}{0,5}\right)^2$$

$$\iff n \geqslant 237,77$$

$$\iff \boxed{n \simeq 238}$$

Exercice 9 :

on calcule les centres : $[a,b] \Leftrightarrow \frac{a+b}{2}$

salaire horaire	120,125	125,130	130,135	135-140	140,145
centre	122,5	127,5	132,5	137,5	142,5
n_i	10	20	38	25	7

① $\bar{X} = \frac{\sum n_i x_i}{N} \Leftrightarrow M_e = \frac{10 \times 122,5 + 20 \times 127,5 + \cdots}{100}$

$M_e = \ldots$

$\sigma_e^2 = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \ldots$

Exercice 10 :

① $IC_{1-\alpha} = \left[P_e - t\sqrt{\frac{P_e(1-P_e)}{n}} \; ; \; P_e + t\sqrt{\frac{P_e(1-P_e)}{n}} \right]$

$IC_{95\%} = \left[0,55 \pm 1,96 \sqrt{\frac{0,55 \times 0,45}{250}}\right]$

② même Question

Exercice 2 :

① $\varepsilon = 100$ $\quad 1-\alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05$ $\quad \sigma^2 = 250\,000$

$n = \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \alpha} = \frac{250000}{(100)^2 \times 0,05} = \boxed{500}$