Fonctions

Exercice 1

Dérivée d'une fonction composée

Calculer la dérivée des fonctions f suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

$f(x) = (-2x+1)^2$

$f(x) = (3x-1)^3$

$f(x) = (-x^2+2)^2$

1. En développant $f(x)$.
2. En utilisant le théorème de la dérivée des fonctions composées.

Exercice 2

Calculs de dérivées

Calculer la dérivée de la fonction f en précisant son ensemble de définition et celui de sa dérivée.

$f(x) = (2x^2 - x + 1)^3$

$f(x) = (5x-2)^2(x^2+3x-1)^2$

$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

$f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^3}$

$f(x) = -2x^3 + x + \dfrac{4}{x^2}$

Exercice 3

Dérivées successives

Calculer les dérivées d'ordre 1 à n , n $\in \mathbb{N}^*$, de f sur l'intervalle I en utilisant éventuellement un raisonnement par récurrence.

$f(x) = x^4 - 6x^2 + 5$	$\mathrm{I} = \mathbb{R}$
$f(x) = \dfrac{1}{x-2}$	$\mathrm{I} =]2\,;+\infty[$
$f(x) = \cos(3x)$	$\mathrm{I} = \mathbb{R}$

Exercice 4

Tangentes

Pour chacune des fonctions suivantes, écrire une équation de la tangente au point A d'abscisse a de la représentation graphique de la fonction f.

$f(x) = 3x^2 - 5x + 1$	pour a = -1, a = 2 et a = 3
$f(x) = x - 1 + \dfrac{1}{x+2}$	pour a = -4, a = 1 et a = 2
$f(x) = \tan x$	pour a = 0, a = $\dfrac{\pi}{6}$ et a = $\dfrac{\pi}{4}$

Exercice 5

Asymptotes

Pour chacune des fonctions suivantes, écrire des équations des asymptotes parallèles aux axes.

$f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$

$f(x) = \dfrac{5x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4}$

$f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$

$f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2 - 3x + 2}$

$f(x) = \dfrac{x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1}$

$f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x}{x^3 - x^2}$

Exercice 6

Limites

Calculer les limites suivantes en justifiant les résultats.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2x^2 - x + 3}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2 - x + 3}$

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\tan x)^2$

$\lim\limits_{x \to 0} \cos \sqrt{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - \sqrt{x^3 - 1}$

Exercice 7

Périodicité

Trouver la période de chacune des fonctions suivantes :

$f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

$f(x) = \sin \frac{x}{3}$

$f(x) = \sin \frac{x}{2} + \cos x$

$f(x) = \tan(2\pi x)$

Exercice 8

Symétries

Un repère orthogonal du plan est donné.

Pour chacun des cas suivants, montrer que la droite $\mathcal{D}$ est axe de symétrie de la représentation graphique de f.

$f(x) = x^2 - 2x + 5$	$\mathcal{D} : x = 1$
$f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{2x^2 + 4x + 3}$	$\mathcal{D} : x = -1$
$f(x) = \cos^4 x - 2\cos^2 x$	$\mathcal{D} : x = \dfrac{\pi}{2}$

Exercice 9

Equations trigonométriques

Dans chaque équation, l'inconnue x est une mesure d'angle en radians.

Résoudre ces équations dans $\mathbb{R}$ et représenter leurs solutions par des points du cercle trigonométrique.

$\cos x = \frac{1}{2}$

$2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$

$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$

$\cos 2x = \cos 3x$

$\cos x = \sin 2x$

Exercice 10

Inéquations trigonométriques

Résoudre chacune des inéquations suivantes dans l'intervalle $[0; 2\pi[$.

La résolution sera fondée sur l'observation du cercle trigonométrique.

$\sin x < \frac{1}{2}$

$2\cos x - \sqrt{2} < 0$

$\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin x \ \cos x < 0$

Correction

Exercice 1

• $f(x) = (-2x+1)^2$1. Pour tout x réel, on a :
$f(x) = (-2x)^2 - 4x + 1$
$f(x) = 4x^2 - 4x + 1$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel, on a : $f'(x) = 8x - 4$

2. f est la composée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -2x + 1$ et de la fonction carrée h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^2$.
On a alors pour tout x réel : $f(x) = h \circ g(x)$.
Or, $f'(x) = g'(x) \times h' \circ g(x)$.
Pour tout x réel, $g'(x) = -2$ et $h'(x) = 2x$
Donc : pour tout x réel, $f'(x) = -2 \times 2(-2x+1) = -4(-2x+1) = 8x - 4$
• $f(x) = (3x-1)^3$1. Pour tout x réel, on a : $f(x) = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel, on a :
$f'(x) = 27 \times 3x^2 - 27 \times 2x + 9$
$f'(x) = 81x^2 - 54x + 9$

2. f est la composée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par g$(x) = 3x$ - 1 et de la fonction cube h définie sur $\mathbb{R}$ par h$(x) = x^3$.
On a alors pour tout x réel : $f(x) = h \circ g(x)$.
Or, $f'(x) = g'(x) \times h' \circ g(x)$.
Pour tout x réel, $g'(x) = 3$ et $h'(x) = 3x^2$
Donc : pour tout x réel, $f'(x) = 3 \times 3(3x-1)^2 = 9(3x-1)^2$
(en développant on retrouve l'expression obtenue au (1))
• $f(x) = (-x^2+2)^2$1. Pour tout x réel, on a : $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$
f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout x réel, on a :
$f'(x) = 4x^3 - 4 \times 2x$
$f'(x) = 4x^3 - 8x$

2. f est la composée de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par g(x) = -x^2 + 2 et de la fonction carré h définie $\mathbb{R}$ par h$(x) = x^2$.
On a alors pour tout x réel : $f(x) = h \circ g(x)$.
Or, $f'(x) = g'(x) \times h' \circ g(x)$.
Pour tout x réel, $g'(x) = -2x$ et $h'(x) = 2x$
Donc : pour tout x réel, $f'(x) = -2x \times 2(-x^2+2) = 4x(x^2-2)$
(en développant on retrouve l'expression obtenue au (1))

Exercice 2

<u>Remarque :</u> il est préférable d'écrire l'expression de la dérivée de f sous forme factorisée (il est alors plus simple d'étudier son signe par la suite).
• $f(x) = (2x^2 - x + 1)^3 f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout réel x, on a : $f'(x) = 3(4x-1)(2x^2-x+1)^2$.
• $f(x) = (5x-2)^2(x^2+3x-1)^2 f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
f est le produit de deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ par u(x) = $(5x$ - 2$)^2$ et v(x) = (x² + 3x - 1)².
Or, f ' = u'v + uv' avec, pour tout réel x, u'(x) = 10$(5x$ - 2) et v'(x) = 2$(2x$ + 3$)(x^2$ + $3x$ - 1).
Pour tout réel x, on a alors :
f '(x) = 10$(5x$ - 2$)(x^2$ + $3x$ - 1$)^2$ + $(5x$ - 2$)^2$ × 2$(2x$+3$)(x^2$ + $3x$ - 1)
f '(x) = 2$(5x$ - 2$)(x^2$ + $3x$ - 1)[5$(x^2$ + $3x$ - 1) + $(2x$ + 3$)(5x$ - 2)]
f '(x) = 2$(5x$ - 2$)(x^2$ + $3x$ - 1$)(5x^2$ + 15x - 5 + 10x^2 - 4x + 15x - 6)
f '(x) = 2$(5x$ - 2$)(x^2$ + $3x$ - 1)(15x^2 + 26x - 11)
• $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3) f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Développons f : pour tout réel x, on a $f(x) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$.
On a alors pout tout réel x, $f'(x) = 4x^3 + 18x^2 + 22x + 6$.

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2}f$ est définie sur $\mathbb{R}\{0$ et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

f est la composée de la fonction carrée et de la fonction inverse. Donc, pour tout réel x, on a :

$f'(x) = 2x \times \dfrac{-1}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$

- $f(x) = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{x^3}f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et pour tout réel x, on a :

$f'(x) = -\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) + 3 \times 3x^2 \times \dfrac{-1}{x^6}$

$f'(x) = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{9}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{x^2-9}{x^4}$

$f'(x) = \dfrac{(x-3)(x+3)}{x^4}$

(Cette dernière expression sera utilisée pour étudier le sens de variations de la fonction f).

- $f(x) = -2x^3 + x + \frac{4}{x^2}f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout réel x, on a :

$f'(x) = -2 \times 3x^2 + 1 + \dfrac{-4 \times 2x}{x^4}$

$f'(x) = -6x^2 + 1 - \frac{8}{x^3}$

Exercice 3

- $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x : $f\,'(x) = 4x^3 - 12x$.

$f\,'$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $f\,''(x) = 12x^2 - 12$.

$f\,''$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $f\,'''(x) = 24$x.

f''' est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a : $f^{(4)}$(x) = 24.

Pour tout n $\geqslant$ 5, $f^{(n)}(x) = 0$.

- $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$ I $=]2\,;+\infty[$. f est dérivable sur I et pour tout réel x, on a :

$f'(x) = \dfrac{-1}{(x-2)^2}$, dérivable sur I, et pour tout réel x, on a :

$f''(x) = \dfrac{-1 \times 2(x-2)}{(x-2)^4}$.

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, on a "$f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \times n!}{(x-2)^{n+1}}$".

La proposition est initialisée (vraie pour n = 1 et pour , = 2).

Suppsons la proposition vraie au rang k : $f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k \times k!}{(x-2)^{k+1}}$.

La fonction $f^{(k)}$ est dérivable sur I, et pour tout réel x, on a :

$\left(f^{(k)}\right)'(x) = f^{(k+1)}(x) = (-1)^k \times k! \times \dfrac{-1 \times (k+1)}{(x-2)^{k+2}}$.

Soit $f^{(k+1)}(x) = \dfrac{(-1)^{k+1} \times (k+1)!}{(x-2)^{k+2}}$.

La proposition est donc héréditaire. On a donc :

pour tout entier naturel n, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n \times n!}{(x-2)^{n+1}}$.

- $f(x) = \cos(3x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme composée des fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x$ et $h(x) = \cos x$.

Pour tout réel x, on a :

$f'(x) = -3\sin(3x) = 3\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$

$f''(x) = 3 \times (-3)\sin\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 3^2\cos\left(3x + \dfrac{2\pi}{2}\right)$

$f'''(x) = 3^2 \times (-3)\sin\left(3x + \dfrac{2\pi}{2}\right) = 3^3\cos\left(3x + \dfrac{3\pi}{2}\right)$

On montrera par récurrence que : $\boxed{f^{(n)}(x) = 3^n\cos\left(3x + \dfrac{n\pi}{2}\right)}$

Exercice 4

Rappel :
La tangente en $x = a$ de la fonction f a pour équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

• $f(x) = 3x^2 - 5x + 1 f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel x, on a : $f'(x) = 6x - 5$.
Equation de la tangente en a = -1 :
$f'(-1) = 6 \times (-1) - 5 = -11$ et $f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 5 \times (-1) + 1 = 9$
Une équation de la tangente en a = -1 est y = -11(x + 1) + 9 = -11x - 2

Equation de la tangente en a = 2 :
$f'(2) = 6 \times 2 - 5 = 7$ et $f(2) = 3 \times 2^2 - 5 \times 2 + 1 = 3$
Une équation de la tangente en a = 2 est y = 7(x - 2) + 3 = 7x - 11

Equation de la tangente en a = 3 :
$f'(3) = 6 \times 3 - 5 = 13$ et $f(3) = 3 \times 3^2 - 5 \times 3 + 1 = 13$
Une équation de la tangente en a = 3 est y = 13(x - 3) + 13 = 13x - 26
• $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+2} f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}\{2$, et pour tout réel x de $\mathbb{R}\{2$, on a : $f'(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2}$.
Equation de la tangente en a = -4 :
$f'(-4) = 1 - \frac{1}{(-4+2)^2} = \frac{3}{4}$ et $f(-4) = -4 - 1 + \frac{1}{-4+2} = -\frac{11}{2}$
Une équation de la tangente en a = -4 est y = $\frac{3}{4}(x+4) - \frac{11}{2} = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$

Equation de la tangente en a = 1 :
$f'(1) = 1 - \frac{1}{(1+2)^2} = \frac{8}{9}$ et $f(1) = 1 - 1 + \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$
Une équation de la tangente en a = 1 est y = $\frac{8}{9}(x-1) + \frac{1}{3} = \frac{8}{9}x - \frac{5}{9}$

Equation de la tangente en a = 2 :
$f'(2) = 1 - \frac{1}{(2+2)^2} = \frac{15}{16}$ et $f(2) = 2 - 1 + \frac{1}{2+2} = \frac{5}{4}$
Une équation de la tangente en a = 2 est y = $\frac{15}{16}(x-2) + \frac{5}{4} = \frac{15}{16}x - \frac{5}{8}$
• $f(x) = \tan(x)$ f est définie et dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout réel x de cet intervalle, on a : $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$
Equation de la tangente en a = 0 :
$f'(0) = 1 + \tan^2 0 = 1$ et $f(0) = \tan 0 = 0$
Une équation de la tangente en a = 0 est y = $1 \times (x - 0) + 0 = x$

Equation de la tangente en a = $\frac{\pi}{6}$:
$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4}{3}$ et $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
Une équation de la tangente en a = $\frac{\pi}{6}$ est y = $\frac{4}{3}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4}{3}x + \frac{3\sqrt{3}-2\pi}{9}$

Equation de la tangente en a = $\frac{\pi}{4}$:
$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 + \tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ et $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
Une équation de la tangente en a = $\frac{\pi}{4}$ est y = $2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 2x + \frac{2-\pi}{2}$

Exercice 5

Rappel :
La courbe représentative de la fonction f admet une **asymptote verticale** d'équation $x = \ell$ si $\lim_{x \to \ell} f(x) = \pm\infty$.
La courbe représentative de la fonction f admet une **asymptote horizontale** d'équation $y = \ell$ si $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$.

- $f(x) = \dfrac{2x+1}{x}$ $\mathrm{D_f} = \mathbb{R}\{0$
- Etudions la limite de la fonction f en 0 :

On a : $\lim_{x\to 0}(2x+1) = 1$ et $\lim_{x\to 0 x>0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc : $\lim_{x\to 0 x>0} f(x) = +\infty$

On a : $\lim_{x\to 0 x<0} \dfrac{1}{x} = -\infty$, donc : $\lim_{x\to 0 x<0} f(x) = -\infty$

D'où : la courbe représentative de ma fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

- Etudions la limite de la fonction f en l'infini :

Pour tout x de D_f, on a : $f(x) = \frac{2x+1}{x} = \frac{x(2+\frac{1}{x})}{x} = 2 + \frac{1}{x}$

Or, $\lim_{x\to+\infty} 2 = 2$ et $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$

De même, $\lim_{x\to-\infty} 2 = 2$ et $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$D'où : la droite d'équation y = 2 est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en l'infini.

- $f(x) = \frac{5x^2-2x+1}{x^2-4}$Le dénominateur s'annule en x = -2 et x = 2, donc : $\mathrm{D_f} = \mathbb{R}${-2 ; 2
- Etudions la limite de la fonction f en -2 :

On a : $\lim_{x\to-2}(5x^2-2x+1) = 25$ et $\lim_{x\to-2 x>-2}(x^2-4) = 0^-$, donc : $\lim_{x\to-2 x>-2} f(x) = -\infty$

Et : $\lim_{x\to-2 x<-2}(x^2-4) = 0^+$, donc $\lim_{x\to-2 x<-2} f(x) = +\infty$

D'où : la droite d'équation x = -2 est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f en l'infini.

- Etudions la limite de la fonction f en 2 :

On a : $\lim_{x\to 2}(5x^2-2x+1) = 17$ et $\lim_{x\to 2 x>2}(x^2-4) = 0^+$, donc : $\lim_{x\to 2 x>2} f(x) = +\infty$

Et : $\lim_{x\to 2 x<2}(x^2-4) = 0^-$, donc $\lim_{x\to -2 x<2} f(x) = -\infty$.

D'où : la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction f en l'infini.

- Etudions la limite de la fonction f en l'infini :

Pour tout x de D_f, on a : $f(x) = \frac{5x^2-2x+1}{x^2-4} = \frac{x^2\left(5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{4}{x^2}\right)} = \frac{5-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}$

Or, $\lim_{x\to+\infty}\left(5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right) = 5$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right) = 1$, donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 5$

De même, $\lim_{x\to-\infty}\left(5-\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right) = 5$ et $\lim_{x\to-\infty}\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right) = 1$, donc : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 5$

D'où : la droite d'équation y = 5 est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en l'infini.

- $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$Le dénominateur s'annule en x = -2, donc D_f = $\mathbb{R}${-2
- Etudions la limite de la fonction f en -2 :

On a : $\lim_{x\to-2}(3x-1) = -7$ et $\lim_{x\to-2 x>-2}(x+2) = 0^+$, donc : $\lim_{x\to-2 x>-2} f(x) = -\infty$

Et, $\lim_{x\to-2 x<-2}(x+2) = 0^-$, donc : $\lim_{x\to-2 x<-2} f(x) = +\infty$

D'où : la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation x = -2.

- Etudions la limite de la fonction f en l'infini :

Pour tout x de D_f, on a : $f(x) = \frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$

Or, $\lim_{x\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{x}\right) = 3$ et $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right) = 1$, donc : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)=3$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)=1$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=3$
D'où : la droite d'équation y = 3 est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en l'infini.
• $f(x)=\frac{2x-1}{x^2-3x+2}$Le dénominateur s'annule en $x=1$ et $x=2$, donc $D_f=\mathbb{R}\{1\,;2$
• Etudions la limite de la fonction f en 1 :
On a : $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)=1$ et $\lim\limits_{x\to1x>1}(x^2-3x+2)=0^-$, donc : $\lim\limits_{x\to1x>1}f(x)=-\infty$
Et : $\lim\limits_{x\to1x<1}(x^2-3x+2)=0^+$, donc : $\lim\limits_{x\to1x<1}f(x)=+\infty$
D'où : la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

• Etudions la limite de la fonction f en 2 :
On a : $\lim\limits_{x\to2}(2x-1)=3$ et $\lim\limits_{x\to2x>2}(x^2-3x+2)=0^+$, donc : $\lim\limits_{x\to2x>2}f(x)=+\infty$
Et : $\lim\limits_{x\to2x<2}(x^2-3x+2)=0^-$, donc : $\lim\limits_{x\to2x<2}f(x)=-\infty$
D'où : la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x=2$.

• Etudions la limite de la fonction f en l'infini :
Pour tout x de D_f, on a : $f(x)=\frac{2-\frac{1}{x}}{x-3+\frac{2}{x}}$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-3+\frac{2}{x}\right)=+\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-3+\frac{2}{x}\right)=-\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$
D'où : la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en l'infini.
• $f(x)=\frac{x^2-x+3}{x^2+x+1}$Le dénominateur ne s'annule jamais, donc $D_f=\mathbb{R}$
• Etudions la limite de la fonction f en l'infini :
Pour tout x de D_f, on a : $f(x)=\frac{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}\right)=1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=1$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$
D'où : la droite d'équation y = 1 est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en l'infini.
• $f(x)=\frac{2x^3-3x}{x^3-x^2}$Le dénominateur s'annule en $x=0$ et $x=1$, donc $D_f=\mathbb{R}\{0\,;1$
• Etudions la limite de la fonction f en 0 :
Pour tout x de D_f, on a : $f(x)=\frac{x(2x^2-3)}{x(x^2-x)}=\frac{2x^2-3}{x^2-x}$
On a : $\lim\limits_{x\to0}(2x^2-3)=-3$ et $\lim\limits_{x\to0x>0}(x^2-x)=0^-$, donc : $\lim\limits_{x\to0x>0}f(x)=+\infty$
Et : $\lim\limits_{x\to0x<0}(x^2-x)=0^+$, donc : $\lim\limits_{x\to0x<0}f(x)=-\infty$
D'où : la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

• Etudions la limite de la fonction f en 1 :
On a : $\lim\limits_{x\to1}(2x^3-3x)=-1$ et $\lim\limits_{x\to1x>1}(x^3-x^2)=0^+$, donc : $\lim\limits_{x\to1x>1}f(x)=-\infty$
Et : $\lim\limits_{x\to1x<1}(x^3-x^2)=0^-$, donc : $\lim\limits_{x\to1x<1}f(x)=+\infty$
D'où : la courbe représentative de la fonction f admet une asymptote verticale d'équation $x=1$.

• Etudions la limite de la fonction f en l'infini :
Pour tout x de D_f, on a : $f(x)=\frac{2-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{3}{x^2}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2-\frac{3}{x^2}\right)=2$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)=1$, donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=2$
D'où : la droite d'équation y = 2 est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction f en l'infini.

Exercice 6

• On a : $2x^2 - x + 3 = x^2\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$.
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3}{x^2} = 0$.
Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} (2x^2 - x + 3) = +\infty$.
On sait que $\lim\limits_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$, donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2x^2 - x + 3} = +\infty$.

• De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{2x^2 - x + 3} = +\infty$.

• Pour tout réel x, on a $\tan^2(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}$.
Or, $\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ et $\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, donc $\lim\limits_{x\ \to\frac{\pi}{2}} \tan^2(x) = +\infty$.

• $\cos\left(\sqrt{x}\right) = \cos 0 = 1$

• C'est une forme indéterminée, il faut donc factoriser $x - \sqrt{x^3 - 1}$:
$x - \sqrt{x^3 - 1} = x - \sqrt{x^2\left(x - \frac{1}{x^2}\right)} = x - |x|\sqrt{x - \frac{1}{x^2}}$
Or $x > 0$, donc : $x - \sqrt{x^3 - 1} = x - x\sqrt{x - \frac{1}{x^2}} = x\left(1 - \sqrt{x - \frac{1}{x^2}}\right)$
Or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x - \dfrac{1}{x^2}}\right) = +\infty$
D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \sqrt{x^3 - 1}\right) = -\infty$

Exercice 7

Rappel :
La fonction f est T-périodique si pour tout x de son ensemble de définition, on a : $f(T + x) = f(x)$

• $f(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$La fonction cosinus est 2π-périodique, donc f également.
• $f(x) = sin(\frac{x}{3})$La fonction sinus est 2π-périodique, donc $\sin(X + 2\pi) = \sin X$.
Donc : $\sin\left(\frac{x}{3} + 2\pi\right) = \sin\left(\frac{x+6\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$.
D'où : f est 6π-périodique.
• $f(x) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos x$La fonction cosinus est 2π-périodique, donc $\cos(x + 2\pi) = \cos(x + 4\pi) = \cos x$.
La fonction sinus est 2π-périodique, donc $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ est 4π-périodique.
D'où : f est 4π-périodique.
• $f(x) = tan(2\pi x)$la fonction tangente est π-périodique.
En effet : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$; $\cos(\pi + x) = -\cos x$, donc $\tan(\pi + x) = \tan x$.
Donc :
$\tan(2\pi x + \pi) = \tan(2\pi x)$
$\tan\left(2\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)\right) = \tan(2\pi x)$
On en conclut que f est périodique de période $\frac{1}{2}$.

Exercice 8

Rappel :
La droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de la courbe représentative de f si :
• pour tout $x = a + h$ de D_f, $a - h$ est dans D_f
• et $f(a + h) = f(a - h)$.

• $f(x) = x^2 - 2x + 5$Pour tout réel x, on a :

$f(1 - x) = (1 - x)^2 - 2(1 - x) + 5 = x^2 + 4$
et $f(1 + x) = (1 + x)^2 - 2(1 + x) + 5 = x^2 + 4$
Comme $f(1 + x) = f(1 - x)$, alors la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie de la représentation graphique de la fonction f.

- $f(x) = \frac{x^2+2x-2}{2x^2+4x+3}$Pour tout réel x, on a :

$f(-1-x) = \frac{(-1-x)^2+2(-1-x)-2}{2(-1-x)^2+4(-1-x)+3} = \frac{x^2-3}{2x^2+1}$
et $f(-1+x) = \frac{(x-1)^2+2(x-1)-2}{2(x-1)^2+4(x-1)+3} = \frac{x^2-3}{2x^2+1}$
Comme $f(-1 + x) = f(-1 - x)$, alors la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de la représentation graphique de f.

- $f(x) = \cos^4(x) - 2\cos^2(x)$Pour tout réel x, on a :

$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos^4\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
Or, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$, donc : $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin^4 x - 2\sin^2 x$
Et : $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos^4\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ Or, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$, donc $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin^4 x - 2\sin^2 x$

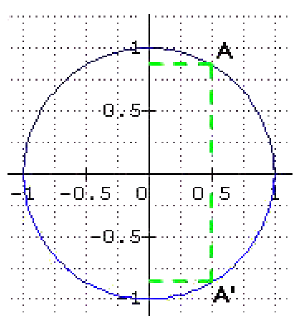
Comme $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, alors la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de la représentation graphique de f.

Exercice 9

Rappel :
cos a = cos b $\Longleftrightarrow$ a = b + 2kπ ou a = -b + 2kπ
sin a = sin b $\Longleftrightarrow$ a = b + 2kπ ou a = π - b + 2kπ

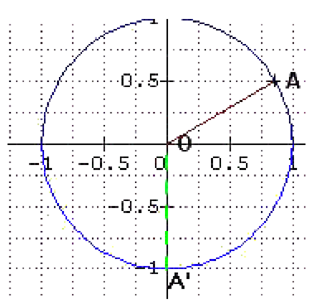
- $\cos x = \dfrac{1}{2}$Comme $\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, alors l'équation équivaut à : $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

D'où : $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ \frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right\}$ où $k \in \mathbb{Z}$

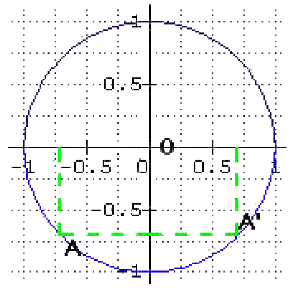


- $2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1\cos(x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$

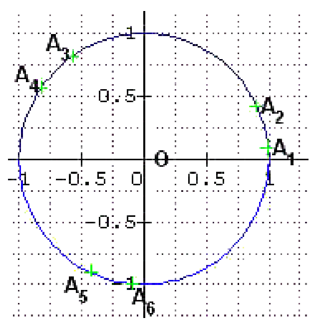
$\Longleftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad$ ou $\quad x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$k $\in \mathbb{Z}$
$\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad$ ou $\quad x = \frac{-\pi}{2} + 2k\pi$k $\in \mathbb{Z}$
D'où : $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right\}$ où $k \in \mathbb{Z}$.



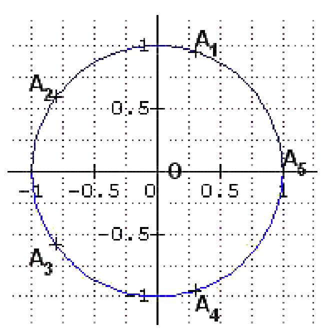
• $\sin x = \frac{-\sqrt{2}}{2}$Comme $\sin(\frac{-\pi}{4}) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$, alors :
$\sin x = \sin(\frac{-\pi}{4}) \iff x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \pi - \frac{-\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\iff x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
D'où : $\mathcal{S} = \{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi;\ \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\}$ où $k \in \mathbb{Z}$.



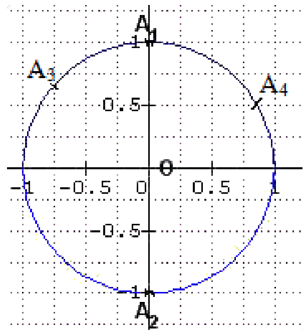
• $2\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{3}\sin(3x + \frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\frac{\pi}{3})$
$\iff 3x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 3x + \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\iff x = \frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \quad \text{ou} \quad x = \frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ où $k \in \mathbb{Z}$
D'où : $\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3};\ p\frac{5\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}\}$ où $k \in \mathbb{Z}$



• $\cos(2x) = \cos(3x)\cos(2x) = \cos(3x) \iff 2x = 3x + 2k\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -3x + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\iff x = 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = \frac{2k\pi}{5}$ où $k \in \mathbb{Z}$
D'où : $\mathcal{S} = \{\frac{2k\pi}{5}\}$ où $k \in \mathbb{Z}$

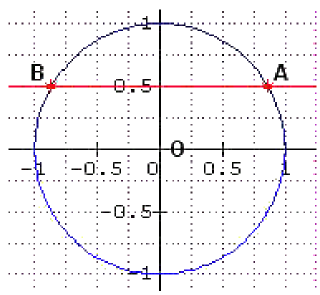


• $\cos(x) = \sin(2x)$ $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, ainsi :
$\cos(x) = \sin(2x) \iff \cos(x)[2\sin(x) - 1] = 0$
$\iff \cos(x) = 0$ ou $\sin(x) = \frac{1}{2}$
$\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
$\sin(x) = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
D'où : $\mathcal{S} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.



Exercice 10

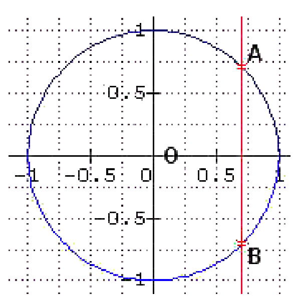
- $\sin x < \dfrac{1}{2}$On trace la droite d'équation y = 1/2 et le cercle trigonométrique.



les abscisses des points A et B sont les solutions sur $[0; 2\pi]$ de l'équation $\sin x = \frac{1}{2}$.
Les solutions de l'inéquation $\sin x < \frac{1}{2}$ sont les abscisses des points situés sur le demi-arc inférieur d'extrémités A et B.
D'où : $\mathcal{S} = \left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right[$.

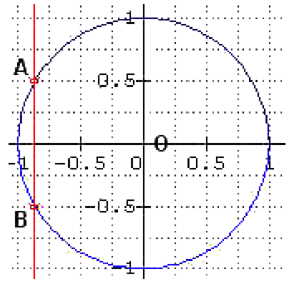
- $2\cos x - \sqrt{2} < 0$Cette inéquation est équivalente à $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Traçons la droite d'équation $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et notons A et B les points d'intersection de cette droite avec le cercle trigonométrique.



D'où : $\mathcal{S} = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$

- $\cos x > \frac{-\sqrt{3}}{2}$Même démarche : traçons la droite d'équation $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



D'où : $\mathcal{S} = [0, \frac{5\pi}{6}] \cup [\frac{7\pi}{6}; 2\pi[$

• $\sin(x)\cos(x) < 0$1ère méthode : *Rappel :* $\sin(2x) = 2\sin(x)\ \cos(x)$.
L'inéquation est donc équivalente à : $\sin(2x) < 0$.
Il faut dans un premier temps résoudre sin X < 0 : $\mathcal{S}_\infty = [k; 2k\pi[$, où k$\in \mathbb{Z}$.
Alors $2x \in [k\pi; 2k\pi[$, ce qui équivaut à $x \in [\frac{k\pi}{2} + k\pi; k\pi[$ où $k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions dans $[0\,;\,2\pi[$ de cette inéquation sont donc : $\mathcal{S} = [\frac{\pi}{2}; \pi[\cup[\frac{3\pi}{2}; 2\pi[$.
2ème méthode : pour que le produit $\sin(x)\cos(x)$ soit négatif il faut que $\sin(x)$ et $\cos(x)$ soit de signe différent, il y a donc deux quarts de cercle et on retrouve le même ensemble de solutions.