Exercice n° 1 :

1. Combien de numéros de téléphones de 9 chiffres peut-on former ?

2. Si les numéros de téléphone qui commencent par 06 sont réservés au GSM ; combien de numéros peut-on distribuer ?

3. Si les numéros qui commencent par 063 sont réservés à un opérateur quelconque. Combien de numéros peut-on distribuer ?

Exercice n° 2 :

Dans une classe de 25 étudiants réputés par le copiage; le professeur décide de préparer 10 examens différents.

1. de combien de manières différentes le professeur peut-il distribuer ses examens ?
2. Si deux élèves sont absents ; combien de manières différentes le professeur peut-il distribuer ses examens ?

Exercice n° 3 :

1. De combien de manières différentes peut-on distribuer 7 couleurs différentes entre 7 modélistes dans un défilé de mode.

2. De combien de manières différentes peut-on distribuer 7 couleurs différentes entre 3 modélistes dans un défilé de mode.

Exercice n° 4 :

Combien de numéros de téléphones de 8 chiffres peut-on former avec les ensembles suivants :

1. E={0 ;1 ;2 ;3 ;5 ;7 ;8 ;9}
2. E={0 ;1 ;1;2 ;3 ;5 ;7 ;9}
3. E={0 ;1 ;1 ;2 ;2;2 ;7 ;9}
4. E={1;1 ;2 ;2 ;2 ;7 ;7 ;7}

Exercice n° 5:

Combien de manières différentes peut-on répartir un groupe de 5 personnes :

1. Dans une rangé de 5 chaises ?
2. Autour d'une table circulaire de 5 chaises ?

Exercice n° 6:

Le code secret d'une carte magnétique bancaire se compose de 4 chiffres.

1. Combien de nombres doit-on composer pour trouver le code ?
2. On sait que le code secret est un multiple de 5 ; combien de nombres peut-on composer ?
3. On sait que le code secret est supérieur à 2000 ; combien de nombres peut-on composer ?
4. On sait que le code secret est inférieur à 2000 ; combien de nombres peut-on composer ?
5. On sait que le code secret est inférieur ou égal à 2000 ; combien de nombres peut-on composer ?

Exercice n° 7:

On a 7 hommes et 5 femmes ; de combien de manières différentes peut-on former un comité de 3 hommes et 2 femmes ?

Exercice n° 8:

Une entreprise veut réaliser un projet ensembliste de 12 tâches parallèles. De combien de façons différentes peut-on distribuer ces 12 tâches entre 4 ouvriers sachant que chaque ouvrier prend 3 tâches ?

Exercice n° 9:

Combien de façons différentes peut-on former 4 groupes de 3 personnes avec 12 personnes ?

Exercice n° 10:

Dans un laboratoire de biologie il y a 100 fourmis. On désire constituer 10 fourmis l'une après l'autre. Combien d'échantillons de taille 10 peut-on former sachant que :

1. Le tirage se fait avec remise ? SAID LAGRANE
2. Le tirage se fait sans remise ?

Exercice n° 11:

On a 5 chemises ; 3 pantalons et 2 paires de chaussures.
De combien de façons différentes on peut s'habiller ?

Exercice n° 12:

Soit un concours national où 8 postes doivent être attribués. 30 candidats se présentent au concours.
Quels sont les choix à faire ?

Exercice n° 13:

Quelle est la capacité d'un code constitué de 5 symboles où les deux premières sont des lettres et les trois suivants sont des chiffres ?

Exercice n° 14:

1. On considère les lettres du mot CLARTE ; quel est le nombre de mots différents ayant ou non un sens qu'il est possible de former ?
2. On considère les lettres du mot SOS ; combien de mots il est possible de former ?

Exercice n° 15:

Une assemblée de 20 personnes doit élire un comité composé d'un président ; d'un trésorier ; d'un secrétaire et d'un vice président.

1. Combien y a-t-il de comités possibles ?
2. Si parmi ces 20 personnes figurent 12 hommes et 8 femmes et si les postes de président et vice président doivent être occupés par des hommes ; combien y aura-t-il de comités possibles ?

Exercice n° 16:

On dispose de 4 ouvrages écrits en français ; 2 écrits en anglais ; 3 en arabes.
Combien y a-t-il de possibilités de choisir 2 ouvrages de langues différentes ?

Exercice n° 17:

Lors d'un recrutement pour six postes non identiques, se présentent 10 garçons et 12 filles.

1. Combien de recrutements distincts sont possibles ?
2. Combien de recrutements distincts sont possibles sachant que l'on embauche deux filles et quatre garçons ?

Solution n° 1:

1. Pour constituer des numéros de téléphones de 9 chiffres nous aurons besoin de prendre :

- Un ensemble de référence E={0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ;9} avec card(E)=n=10.
- Choisir parmi les 10 chiffres de E un nombre de p=9 correspondants à un numéro de tél de 9 chiffres.
- Supposer la *répétition des éléments* puisque chaque chiffre peut être pris même p=9 fois. Un numéro de tél composé par 000 000 000 ou 111 111 111 ou encore 000 111 222, etc. sont donc possibles.
- Considérer aussi *l'ordre* qui doit changer complètement les numéros de tél même avec les mêmes chiffres. Ainsi, les numéros 000 111 000 et 000 000 111 sont complètement différents.

On peut en conclure par conséquent qu'il s'agit de choisir p=9 chiffres parmi les 10 qu'on a en total en respectant *l'ordre et la répétition* des éléments. Ce qui signifie des arrangements avec répétition.

Le nombre recherché sera donc égale à :

$\mathcal{A}_{10}^{9} = 10^{9} = 1.000.000.000$ numéros de téléphone à composer.

2. Si maintenant les numéros de téléphone qui commencent par 06 sont réservés au GSM, le nombre de numéros qu'on peut distribuer sera donné en considérant que les deux premières places de ceux-ci soient déjà remplies par les chiffres 0 et 6.

Ce qui ne nous laisse en conséquence que sept places à remplir par la totalité des chiffres que compte l'ensemble E. cela revient donc à choisir p=7 chiffres parmi les n=10 dont nous disposons.

D'où, le résultat final :

$\mathcal{A}_{10}^{7} = 10^{7} = 10.000.000$ numéros de téléphone GSM à composer.

3. De même si les numéros qui commencent par 063 sont réservés à un opérateur quelconque, le nombre de numéros de tél qu'on peut distribuer pour cet opérateur sera donné par :

$\mathcal{A}_{10}^{6} = 10^{6} = 1.000.000$ numéros de téléphone à distribuer pour cet opérateur.

Solution n° 2:

Si dans une classe de 25 étudiants réputés par le copiage le professeur décide de préparer 10 examens différents, cela revient à la manière dont le professeur répartira les 25 étudiants dans la salle pour passer effectivement les dix examens.

1. Toute l'épreuve est à voir dans cette répartition de ces étudiants là et non la répartition des 10 examens.

Nous ne devons pas bien entendu confondre les deux comme nous ne pouvons pas se réserver aux seuls examens à répartir sur les 25 étudiants puisque cela va réduire l'épreuve à un choix très restreint.

L'épreuve ne se limite pas donc à la répartition des 10 examens sur les 25 étudiants mais à la manière dont le professeur peut répartir les 25 dans la même salle dans l'objectif de trouver des situations idéales ou du moins faiblement risquées pour le copiage.

Il s'agit donc des permutations des 25 étudiants en respectant un ordre quelconque mais sans aucune répétition puisque un étudiant ne peut pas passer plus qu'un seul examen.

D'où, le nombre des choix différents dont le professeur peut distribuer ses examens sera donné par :

$$P_{25} = 25\,! = 1.2.3.....25$$

2. Si deux élèves sont absents, le nombre de manières différentes dont le professeur peut distribuer ses examens sera égale à :

$$P_{23} = 23\,! = 1.2.3.....23$$

Solution n° 3:

1. Comme dans le cas précédent, distribuer 7 couleurs différentes entre 7 modélistes dans un défilé de mode, revient à constituer des permutations sans répétition des 7 couleurs ou, ce qui revient au même, des 7 modélistes.

Ce qui nous donne : $P_7 = 7! = 1.2.3.....7 = 5.040$

2. Par contre, s'il s'agit de distribuer 7 couleurs différentes à distribuer entre 3 modélistes seulement dans un défilé de mode, cela concernera les classements (arrangements) mais sans répétition des p=3 modélistes à répartir entre les n=7 couleurs. Les répétitions ne sont pas permises vu que la même modéliste ne peut pas mettre plus qu'une seule couleur.

Ce qui donne aussi : $A_7^3 = \dfrac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210$

Solution n° 4:

Quant il s'agit de numéros de téléphones, il faut automatiquement considérer aussi bien *l'ordre* que *la répétition des éléments* à prendre. Tout dépend donc de la composition de l'ensemble de départ E qui ici change cela les cas.

Sachant que l'on compose des numéros de 8 chiffres, cela revient à choisir p=8 chiffres parmi les n éléments des ensembles considérés.

D'où :

1. Pour E={0 ;1 ;2 ;3 ;5 ;7 ;8 ;9} avec card(E)=n=8 et p=8 on aura un nombre de téléphone égale au nombre de permutations avec répétition.
Ce qui donne :

$$\mathcal{P}_8 = \frac{8!}{0!.0!....0!} = 40.320$$

0! ici signifie qu'aucun élément ne se répète plus qu'une seule fois dans E.

2. Pour E={0 ;1 ;1;2 ;3 ;5 ;7 ;9} avec card(E)=n=8 et p=8 on aura un nombre de téléphone égale aussi au nombre de permutations avec répétition.
Ce qui donne :

$$\mathcal{P}_8 = \frac{8!}{2!} = 20.160$$

2! signifie ici que le chiffre « 1 » se répète deux fois dans E. La permutation entre 1 et 1 est inutile dans ce cas puisqu'elle n'introduit aucune différence sur le numéro de téléphone. Ainsi, pour l'éliminer on doit diviser par 2!.

3. Idem pour E={0 ;1 ;1 ;2 ;2;2 ;7 ;9} avec card(E)=n=8 et p=8 on aura un nombre de téléphone égale au nombre de permutations avec répétition.
Ce qui donne :

$$\mathcal{P}_8 = \frac{8!}{2!.3!} = 3.360$$

2! et 3! représentent ici resp. le chiffre « 1 » qui se répète deux fois et le chiffre « 2 » qui se répète trois fois dans E. Les permutations entre les 1 et les 2 sont inutiles aussi. Leur élimination se fait donc en divisant par 2! et 3!.

4. Pour E={1;1 ;2 ;2 ;2 ;7 ;7 ;7} on aura :

$$\mathcal{P}_8 = \frac{8!}{2!.3!.3!} = 560$$

2!; 3! et 3! représentent resp. le chiffre « 1 » qui se répète deux fois ; le chiffre « 2 » qui se répète trois fois et le chiffre « 7 » qui se répète aussi trois fois dans E.

Solution n° 5:

La répartition des groupes de personnes se fait en général en respectant l'ordre et moins la répétition. C'est beaucoup plus la situation qui est proche de la réalité mais tout dépend finalement des exemples et des cas.

1. C'est ainsi que pour répartir les 5 personnes dans une « rangé » de 5 chaises nous devons le faire avec les permutations faites à 5 éléments mais sans répétition, vu que :

   - Le terme *« rangé »* signifie parfaitement l'ordre dans lequel seront prises ces personnes. Ce sont donc des arrangements.
   - Et puisque n=p=5 cela signifie que les arrangements sont exactement des *permutations* faites avec le total des 5 personnes.
   - La *répétition* n'étant pas possible vu qu'on ne peut pas mettre la même personne sur deux places par exemple.

D'où, le nombre de manière dont on peut répartir les 5 personnes dans une rangé de 5 places est calculé comme suit :

$$P_5 = 5! = 1.2.3.4.5 = 120 \text{ fois}$$

2. Par contre, quant il s'agit de répartir les mêmes personnes autour d'une table « circulaire » de 5 chaises, cela doit correspondre au nombre de combinaisons qu'on peut effectuer de p=5 dans une table à n=5 places et sans répétition, vu que :

- Le terme *« circulaire »* n'introduit aucun ordre dans les dispositions de ces personnes. Ce sont donc des combinaisons.

- La *répétition* n'étant pas possible vu qu'on ne peut pas mettre la même personne sur deux places différentes aussi.

D'où, le nombre de manière dont on peut répartir les 5 personnes dans une table circulaire de 5 places est calculé comme suit :

$$C_5^5 = \frac{5!}{5!.0!} = 1 \text{ fois}$$

Solution n° 6:

Pour un code secret d'une carte magnétique bancaire qui se compose de 4 chiffres, on aura besoin en fait de choisir quatre chiffres parmi les 10 qui existent.

Comme dans le cas de saisie de ce code sur un guichet bancaire ou encore des codes PIN d'un téléphone portable, cela revient à remplir les cases suivantes :

1	2	3	4
1	2	4	3

à partir des éléments que compte l'ensemble E={0 ;1 ;2 ;3 ;4 ;5 ;6 ;7 ;8 ;9}.

Nous constatons par conséquent que *l'ordre est important* et la *répétition est possible.*

1. On en conclut donc que le nombre qu'on peut composer pour trouver ce code est à calculer par les arrangements de p=4 éléments choisis parmi n=10 éléments de E.
Soit donc :

$$\mathcal{A}_{10}^4 = 10^4 = 10.000 \text{ codes.}$$

2. Si le code secret est un multiple de 5 cela signifie qu'il se termine soit par 0 soit par 5 (qui représentent les multiples de 5).

			0	la 4° case étant déjà prise par 0
			5	la 4° case étant déjà prise par 5

Cela suppose aussi que l'on choisit plutôt p=3 éléments seulement (au lieu de 4) pour les deux cas de «0» et «5», parmi les n=10 qui ne changent pas avec toujours ordre et répétition.

D'où, le nombre qu'on peut composer dans ce cas est donné par :

$$\mathcal{A}_{10}^3 + \mathcal{A}_{10}^3 = 2 \times 10^3 = 2.000 \text{ codes.}$$

(le premier correspondant à 0 et le second correspondant à 5)

Attention : vu que le chiffre « 0000 » n'est pas un multiple de 5, il faut donc l'éliminer du nombre total de 2.000.
Le nombre exacte des codes dans ce cas et qui sont multiples de 5 doit être égale à :

$$2.000 - 1 = 1.999 \text{ codes}$$

3. Si par contre le code secret est supérieur à 2000 (même strictement), cela revient à prendre tous les codes à 4 chiffres mais seulement ceux qui commencent avec au moins un chiffre de « 2 ». Tous ceux qui commencent par « 0 » ou « 1 » seront donc éliminés.

2				la 1° case étant déjà prise par **2** reste 3 autres
3				la 1° case étant déjà prise par **3** reste 3 autres
4				la 1° case étant déjà prise par **4** reste 3 autres
5				la 1° case étant déjà prise par **5** reste 3 autres
6				la 1° case étant déjà prise par **6** reste 3 autres
7				la 1° case étant déjà prise par **7** reste 3 autres
8				la 1° case étant déjà prise par **8** reste 3 autres
9				la 1° case étant déjà prise par **9** reste 3 autres

Cela suppose que l'on choisit aussi p=3 éléments dans les 8 cas qui existent et parmi les n=10 qui ne changent pas toujours avec ordre et répétition aussi.

D'où, le nombre qu'on peut composer dans ce cas est donné par :

$$8\times\mathcal{A}_{10}^{3} = 8\times10^{3} = 8.000 \text{ codes.}$$

Là également et vu que le chiffre « 2000 » n'est pas strictement supérieur à 2000 mais il lui est égale, il faut donc l'éliminer du nombre total de 8.000.
Ce qui donne un nombre exacte des codes qui sont sup. strictement à 2.000 égal à :

8.000-1= 7.999 codes

4. Pour les codes secrets qui sont inférieurs à 2000 (c.à.d. strictement inférieur), et en appliquant le même raisonnement que dans la question précédente on aura le nombre égal à :

$$2\times\mathcal{A}_{10}^{3} = 2\times10^{3} = 2.000 \text{ codes.}$$

Ce qui suppose en fait de choisir p=3 éléments parmi les n=10 éléments de E avec toujours ordre et répétition mais pour les codes qui commencent exactement par les deux chiffres de « 0 » et « 1 », tels que :.

0				la 1° case étant déjà prise par **0** reste 3 autres
1				la 1° case étant déjà prise par **1** reste 3 autres

On peut constater que le dernier code inf. strictement à 2.000 soit égale à « 1999 ».

5. Si le code secret est inférieur ou égal à 2000, il faut dans ce cas juste rajouter au résultat de la dernière question le code composé par les chiffres « 2000 ».

Le nombre des codes que l'on peut composer doit être alors de :

2*10*10*10 + 1 = 2.001 codes

Solution n° 7:

Dans cet exercice on peut récapituler l'énoncé comme suit :

- L'ensemble de référence est donné par E={7 hommes et 5 femmes } soit card(E)= n=13
- Le mot « comité » signifie que les dispositions à prendre ne respectent pas l'ordre ;
- Le même comité ne peut pas être également composé par le même élément (personne ici) plus qu'une fois. Les répétitions ne sont donc possibles.

Donc, le nombre de manières différentes dont on peut former un comité de 3 hommes et 2 femmes, revient à calculer les combinaisons à p=5 éléments avec exactement p_1=3 H et p_2=2 F choisis parmi n=13 éléments resp. n_1=7 H et n_2=5 F.

Ce qui donne :

$$C_7^3\times C_5^2 = \frac{7!}{3!.(7-3)!}\times\frac{5!}{2!.(5-2)!} = 350 \text{ comités}$$

Solution n° 8:

La récapitulation de l'énoncé dans ce cas peut être faite comme suit :

- Nous disposons d'un ensemble (une entreprise) de 12 tâches parallèles à répartir en totalité. Ce qui donne déjà $n=p=12$.

- Le mot « parallèles » renferme ici un certain *ordre* dans lequel s'inscrivent les différentes tâches à répartir.

- Les 12 tâches sont à distribuer ensemble oui mais entre 4 ouvriers sachant que chaque ouvrier prend 3 tâches. Ce qui signifie *la répétition de chaque ouvrier exactement 3 fois* dans cette répartition.

On peut donc en conclure que ce sont des permutations avec répétitions dans un ensemble qui contient 12 éléments, tels que :

$\mathcal{P}_{12} = \dfrac{12!}{3!.3!.3!.3!} = 369.600$ façons différentes pour répartir les 12 tâches entre les 4 ouvriers.

Solution n° 9:

Cet exercice peut être traité exactement de la même façon que le précédent.
On peut effectivement constater que le nombre de façons dont on peut former 4 groupes de 3 personnes avec un groupe qui comprend en total 12 personnes, revient à constituer des permutations avec répétitions.
Sauf que dans ce cas, il faut considérer non seulement les « 3 » éléments des différents (les 4) groupes qui se répètent sur l'ensemble mais aussi le nombre des « 4 » groupes eux-mêmes qui peut se reproduire successivement.

Ce qui nous donne un nombre de permutations égale à :

$$\mathcal{P}_{12} = \frac{12!}{3!.3!.3!.3!.4!} = 15.400 \text{ façons}$$

Solution n° 10:

Le laboratoire de biologie à 100 fourmis correspond à l'ensemble de référence E={100 fourmis}.

Et pour constituer des échantillons de taille 10 fourmis prises « l'une après l'autre » (*ordre*), le nombre qu'on peut former doit dépendre de la nature de tirage.
D'où :

1. Si le tirage est avec remise, on aura les *arrangements avec répétition* de $p=10$ fourmis prises parmi $n=100$.

Ce qui donne :

$$\mathcal{A}_{100}^{10} = 100^{10}$$

2. Si par contre le tirage est sans remise, on aura les *arrangements sans répétition* de $p=10$ fourmis prises parmi $n=100$.

Ce qui donne :

$$A_{100}^{10} = 91 \times 92 \times 93 \times .... \times 100$$

Solution n° 11:

Quant on dispose de :
- 5 chemises ;
- 3 pantalons ;
- et 2 paires de chaussures.

Les façons de s'habiller reviennent à choisir en même temps une (1) chemise parmi les 5 existantes ; un (1) pantalon parmi les 3 existants et une (1) paire de chaussure parmi les 2 existantes.

Ce qui donne un nombre égale à :

$C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1 = 5 \times 3 \times 2 = 30$ manières différentes

Solution n° 12:

En général, dans le cadre des concours nationaux on spécifie les qualités des postes à pourvoir sur le marché en indiquant un certain nombre de critères et/ou des conditions à vérifier sur les candidats. Chose qui n'est pas respectée dans ce cas.

1. Si on suppose donc que les postes sont différents correspondant ainsi à des catégories professionnelles différentes (ce qui suppose un certain *classement*), alors on peut attribuer les 8 postes sur les 30 candidats qui se présentent au concours en passant par les arrangements de p=8 candidats dans un ensemble à n=30 candidats.

Ce qui donne :

$$A_{30}^{8} = 30\times 29\times 28\times \ldots\times 22$$

2. Si par contre on suppose que les postes ne sont pas différents correspondant ainsi à des catégories professionnelles identiques (ce néglige le *classement*), alors on peut attribuer les 8 postes sur les 30 candidats qui se présentent au concours en passant par les combinaisons de p=8 candidats dans un ensemble à n=30 candidats.

Ce qui donne :

$$C_{30}^{8} = \frac{30!}{8!.22!} = \frac{30\times 29\times \ldots\times 21}{8\times 7\times \ldots\times 2}$$

NB. Des simplifications de calcul peuvent être utilisées afin de trouver le résultat exact.

Solution n° 13:

Pour composer des codes constitués de 5 symboles et où les deux (2) premières sont des lettres et les trois (3) suivants sont des chiffres cela suppose de choisir p_1=2 lettres parmi un ensemble contenant n_1=26 lettres et p_2=3 chiffres parmi un autre ensemble contenant n_2=10 chiffres.

On peut donc définir deux ensembles de référence tels que :

E_1={a ;b ;c ; .... ;z} avec card(E_1)=26.
et E_2={0 ;1 ;2 ; .... ;9} avec card(E_2)=10.

Bien entendu, *l'emplacement des lettres et des chiffres est important* dans la composition des codes.

Comme *la répétition doit être aussi possible.* Rien n'empêche en effet que la même lettre ou le même chiffre apparait plus qu'une seule fois sur le même code.

Ce qui donne un total des codes possibles égale à :

$$\mathcal{A}_{26}^{1}\times\mathcal{A}_{26}^{1}\times\mathcal{A}_{10}^{1}\times\mathcal{A}_{10}^{1}\times\mathcal{A}_{10}^{1} = 26\times 26\times 10\times 10\times 10$$
$$= 676.000 \text{ codes.}$$

Solution n° 14:

- On considère les lettres du mot CLARTE. Ce qui peut correspondre à un ensemble E de cardinale égale à 6 lettres.

La composition des mots « ayant ou non » un sens doit correspondre au fait de choisir les p=6 lettres parmi le même total des lettres n=6 aussi même avec répétition, sauf qu'ici aucune lettre n'est répétée sur l'ensemble de départ E.

Ce qui donne un nombre possible qu'on peut former de :

$$\mathcal{P}_6 = 6! = 720 \text{ mots possibles.}$$

2. Pour le mot SOS càd un ensemble E={S ; O ;S} avec card(E)=3 et la lettre « S » qui apparait deux (2) fois, le nombre des mots possibles qu'on peut former avec les « 3 » lettres aussi revient à calculer :

$$\mathcal{P}_6 = \frac{3!}{2!} = 3 \text{ mots possibles } (\textit{OSS/ SSO/ SOS}).$$

2! Représente ici, comme indiqué là haut, les répétions qu'on doit éliminer par division.

N.B. Les tirages qui peuvent être successifs (avec ou sans remise) sont différents des tirages simultanés.

Solution n° 15:

L'assemblée de 20 personnes peut être l'ensemble de référence E avec card(E)=n=20 personnes.

Or, le fait d'élire un comité composé exactement d'un président; d'un trésorier; d'un secrétaire et d'un vice président, cela suppose de prendre p=4 personnes parmi les 20 disponibles, mais avec *une sorte de classement qui représente ici les qualités* des postes de président, vice président, trésorier et secrétaire.

Bien évidemment, *la répétition ne doit pas être permise* étant donné qu'on ne peut pas prendre la même personne pour les quatre responsabilités notamment dans la même unité.

1. Donc le nombre de comités possibles sera définit par le nombre d'arrangement sans répétition, tel que :

$$A_{20}^{4} = 20\times19\times18\times17 = 116.280 \text{ comités.}$$

2. Si parmi ces 20 personnes figurent 12 hommes et 8 femmes et si les postes de président et vice président doivent être occupés par des hommes et donc les autres postes de trésorier et secrétaire par les femmes, on aura un nombre de comités possibles correspondant aux arrangements de p_1=2 H parmi les n_1=12 H existants et p_2=2 F parmi les n_2=8 F existantes.

Les répétitions ne sont pas naturellement possibles.

Ce qui donne :

$$A_{12}^{2}\times A_{8}^{2} = (12\times11)\times(8\times7) = 40.392 \text{ comités mixtes.}$$

Solution n° 16:

On dispose de 4 ouvrages écrits en français ; 2 écrits en anglais et 3 en arabes.

Choisir 2 ouvrages de langues différentes, revient à prendre distinctement un (1) ouvrage de chaque panier d'ouvrages de langues différentes comme :

- « 1 en français et 1en anglais » : $\left(C_4^1\times C_2^1\right)$;
- <u>Ou</u> « 1 en français et 1en arabe » : $\left(C_4^1\times C_3^1\right)$;
- <u>Ou</u> encore « 1 en anglais et 1en arabe » : $\left(C_2^1\times C_3^1\right)$.

Ce sont donc des choix différents mais *sans aucun classement ni répétition.*

Ce qui donne un nombre de choix égale à :

$$\left(C_4^1\times C_2^1\right)+\left(C_4^1\times C_3^1\right)+\left(C_2^1\times C_3^1\right) = 26 \text{ choix possibles}$$

NB. Nous raisonnons en termes de multiplication (x) afin de compléter le choix de la disposition en utilisant « et » par exemple ici « 1 ouvrage en F **<u>et</u>** 1 ouvrage en Ar ». Alors qu'il faut utiliser l'addition (+) quant il faut passer sur un autre choix en utilisant « ou » par exemple ici « 1 ouvrage en F **<u>et</u>** 1 ouvrage en Ar » **<u>ou</u>** (ou bien) « 1 ouvrage en Ar **<u>et</u>** 1 ouvrage en Ag ». Le **<u>ou</u>** représente ainsi un autre choix différent.

Solution n° 17:

Les données dans cet exemple peuvent être récapitulées comme suit :

- L'ensemble de référence est composé par les 22 candidats tels que : E={10 garçons et 12 Filles] avec card(E)= n = 10G + 12F = 22.
- p = 6 càd le fait de prendre 6 candidats parmi les 22 personnes candidates (garçons et filles).

- Le mot « non identiques » est très significatif aussi dans le sens où il signifie qu'il y a une différence entre les postes proposés et donc l'*ordre dans le choix des candidats* devient important.

- A l'évidence au contraire, la *répétition dans les choix des candidats* n'étant pas possible.

1. Ce qui représente ainsi cette épreuve dans les arrangements qu'on peut former de 6 personnes prises parmi 22 mais *sans aucune répétition* puisqu'on ne peut pas prendre la même personne pour deux ou plus d'un poste d'emploi.

D'où, le nombre de recrutement distincts qu'on peut avoir correspondra à :

$$A_{22}^{6}=\frac{22!}{(22-6)!}=\frac{22!}{16!}=22\times21\times20\times19\times18\times17=53.721.360$$

2. Si dans ce recrutement on suppose embaucher exactement deux filles prises parmi 12 ($A^2{}_{12}$) et quatre garçons pris parmi 10 ($A^4{}_{10}$), cela donne un nombre de recrutement égale à 420 calculés comme suit :

$$A_{12}^{2}\times A_{10}^{4}=\frac{12!}{10!}\times\frac{10!}{6!}=(12\times11)\times(10\times9\times8\times7)=665.280$$

2. Série d'applications

Exercice n° 1 :

A la sortie d'une chaine de fabrication, des boulons sont susceptibles de présenter deux sortes de défauts. Un grand nombre d'observations a permis d'établir que :

- la proportion de boulons fabriqués ayant le défaut a est de 5%.
- la proportion de boulons fabriqués ayant le défaut b est de 3%.
- la proportion de boulons fabriqués ayant les a et b est de 1%.

Déterminer la probabilité qu'un boulon présente :

1. Le défaut a ou le défaut b ?
2. Le défaut a seulement ?
3. Aucun défaut ?

Exercice n° 2 :

L'entreprise SALAS emploie 36 personnes dont 1[illegible] [illegible]emmes. Un salarié de cette entreprise est tiré au sort pour répondre à un sondage.

1. Quelle est la probabilité que se soit un homme ?
2. Quelle est la probabilité que se soit une femme?

Exercice n° 3 :

Un libraire reçoit un carton de 50 exemplaires d'un livre dont 3 sont dédicacés par l'auteur. On tire au hasard 10 livres du carton.

Déterminer la probabilité des événements :

1. On obtient les 3 livres dédicacés ?
2. On obtient un seul livre dédicacé ?
3. On obtient au moins un livre dédicacé ?

Exercice n° 4 :

Trois usines H_1, H_2, H_3, produisent respectivement 50%, 30%, et 20% de moteurs de voitures.

Parmi la production de chaque usine 5%, 3%, et 2% des moteurs fabriqués sont défectueux.

TAF : calculer la probabilité qu'un moteur défectueux provienne de l'usine H_1, H_2, H_3

Exercice n° 5 :

Un chirurgien estime que la mort de ses opérés est due à deux causes possibles supposées être incompatibles : soit par insuffisance propre au patient, en lui accordant une probabilité a priori de 0.7, soit par insuffisance propre aux techniques opératoires, en lui accordant une probabilité de 0.3.

Ce chirurgien accorde une durée de vie dépassant 13 jours, une probabilité de 0.3 si c'est la première raison et de 0.2 si c'est la seconde.

1. Sachant qu'un patient récemment opéré vient de mourir après 13 jours de survie, calculer la probabilité de chacune de ces deux causes définies.
2. Si la cause de la mort soit l'insuffisance des techniques d'opération doit être $\leq 0,10$. En se basant sur les probabilités de Bayes, le chirurgien doit-il continuer à opérer ?

Exercice n° 6 :

Trois enseignants E_1, E_2, et E_3 peuvent donner le sujet d'un examen avec les probabilités suivantes :

$$P(E_1) = 0.2$$
$$P(E_2) = 0.6$$
$$P(E_3) = 0.85$$

Un étudiant doit passer un examen et n'a pas révisé un chapitre X qu'il redoute le jour de l'examen.

Par conséquent, l'étudiant donne une probabilité de 0.35 si l'enseignant E_1 pose l'examen ; 0.7 si l'enseignant E_2 et 0.05 si l'enseignant E_3.

Le jour de l'examen, l'étudiant constate que le chapitre X a été posé.

TAF :

Calculer la probabilité que le sujet de l'examen ait été posé par E1, E2, E3.

Exercice n° 7 :

La promotion 2ième année d'un établissement d'enseignement est supposée être composée de :

- 55% de filles ;
- 30% des garçons ayant réussi l'examen n'ont jamais doublé
- et 20% des filles ayant réussi l'examen n'ont jamais doublé.

Si on prend au hasard un étudiant de cette promotion, et s'il n'a jamais doublé ; quelle serait la probabilité que ce soit une fille ?

Exercice n° 8 :

Après la correction des copies, sur 100 copies de redoublants 15 sont en dessous de la moyenne, et sur 100 copies de non-redoublants 25 sont en dessous de la moyenne.
On tire une copie dont la note est inférieure à la moyenne.
Calculer la probabilité qu'elle soit celle –ci d'un redoublant sachant que 30% sont des redoublants.

Exercice n° 9 :

Pour se rendre au travail , une personne peut choisir entre 4 chemins X ; Y ; Z et V.
La probabilité de choisir le chemin X est 1/4, Y 1/12, et Z 1/3.
La probabilité d'arriver en retard en passant par X est de1/10 ; Y est de 1/5 et pour Z est 1/4. En passant par V il n'est jamais en retard.
<u>TAF :</u>

1. Quelle est la probabilité que la personne passe par le chemin V ?
2. La personne arrive en retard au travail. Quelle est la probabilité quelle soit passée par le chemin X ?

3. Solution des cas

Solution n° 1 :

On note :

- A : « un boulon présente le défaut a » avec P(A)=0,05.
- B : « un boulon présente le défaut b » avec P(B)=0,03.
- Et la probabilité que A et B se réalisent simultanément est donnée par P(A∩B)=0,01.

D'où :

1. La probabilité qu'un boulon présente le défaut «a» ou le défaut «b» revient à calculer *la probabilité dite totale* et donnée par P(A∪B).

Telle que : $P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
$= 0{,}05 + 0{,}03 - 0{,}01$
$= \underline{\mathbf{0{,}07}}$

Il y a donc 7% des produits qui peuvent présenter soit le défaut «a» soit le défaut «b».

2. Notons :

A' : « un boulon présente le défaut a seulement »

On peut écrire $A' \cup (A\cap B) = A$

Comme ***A'*** et (A∩B) sont incompatibles alors :

$P(A') + P(A\cap B) = P(A)$

Donc : $P(A') = 0{,}05 - 0{,}01 = \underline{\mathbf{0{,}04}}$
Les produits qui présentent le seul défaut « a » représentent donc 4%.

3. Notons :

C : « un boulon ne présente aucun défaut »

L'événement contraire de C est donné par $\overline{C} = A \cup B$.

On aura donc :
$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}07 = \underline{\mathbf{0{,}93}}$
La probabilité que les produits ne présentent aucun défaut est de 93%.

Solution n° 2 :

Supposons les deux évènements suivants :

- H : «le tirage au sort désigne un homme».
- F : «le tirage au sort désigne une femme»

Et on a l'ensemble des résultats possibles à l'issu du tirage au sort est constitué de 36 éléments (16 Femmes et 20 Hommes).

On peut donc aisément montrer que :

1. La probabilité que le salarié tiré au hasard dans cette entreprise soit un homme sera donnée par le rapport du nombre de cas favorables (le nombre des H) et le nombre de cas possibles (tous les candidats).

Ce qui donne par définition une probabilité simple égale à :

$$p(H) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

2. La probabilité que ce salarié soit cette fois-ci une femme sera également donnée en utilisant la même notion de probabilité simple (ou élémentaire) en calculant :

$$p(F) = \frac{CF}{CP} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

Vu que ce sont les deux éventualités qui existent(H ou F), on peut constater que la somme des deux probabilités précédentes est égale à 1.

Solution n° 3 :

L'ensemble de référence E est composé par les 50 exemplaires d'ouvrages dont les trois qui sont dédicacés par leur auteur card(E)=n=50.
Et on tire au hasard $p=10$ d'entre eux.

On peut supposer les évènements donnés comme suit :

- A : «on obtient les 3 livres dédicacés ».
- B : «on obtient un seul livre dédicacé ».
- C : « on obtient au moins un livre dédicacé »

D'où les probabilités suivantes :
1. La probabilité de « tirer les trois livres dédicacés » sachant qu'on tire 10 en total, revient à prendre d'abord les trois (parmi les trois existants) puis compléter par sept autres (parmi les 47 ouvrages non dédicacés). D'où :

$$p(A) = \frac{C_3^3 \times C_{47}^7}{C_{50}^{10}} = 0{,}006$$

2. La probabilité d'avoir « un seul livre dédicacé » revient à prendre un parmi les trois dédicacés et neuf autres parmi les 47 ouvrages non dédicacés. D'où :

$$p(B) = \frac{C_3^1 \times C_{47}^9}{C_{50}^{10}} = 0{,}398$$

3. La probabilité d'avoir « au moins un livre dédicacé » revient à prendre un, ou deux ou bien trois parmi les trois dédicacés et le reste soit respectivement neuf, ou huit ou bien sept autres parmi les 47 ouvrages non dédicacés.

$$p(C) = \frac{\left(C_3^1 \times C_{47}^9\right) + \left(C_3^2 \times C_{47}^8\right) + \left(C_3^3 \times C_{47}^7\right)}{C_{50}^{10}} = 0{,}496$$

Cette probabilité peut être calculée aussi par l'évènement contraire donné par $\overline{C}$: « ne tirer aucun livre dédicacé ».
D'où :

$$p(C) = 1 - p(\overline{C}) = 1 - \frac{C_{47}^{10}}{C_{50}^{10}} = 0{,}496$$

- H_1 : supposée être la cause 1 définit par « insuffisance propre au patient » avec $P(H_1) = 0,7$.
- H_2 : étant la cause 2 définit par « insuffisance propre aux techniques opératoires » avec $P(H_2) = 0,3$.
- Et les autres probabilités conditionnelles définies a priori par $P(X/H_1) = 0.3$ et $P(X/H_2) = 0.2$

Pour cela, on détermine la probabilité de l'effet par :

$$\mathbf{P(X) = P(H_1).\ P(X/H_1) + P(H_2).\ P(X/H_2)}$$

$$\Rightarrow P(X) = (0.7*0.3) + (0.3*0.2)$$

$$= 0.21 + 0.06$$

$$= 0.27$$

D'où, la probabilité que la cause de la mort du patient soit l'insuffisance à celui-ci sera donnée par :

$$P(H_1/X) = \frac{P(H_1).P(X/H_1)}{P(H_1).P(X/H_1) + P(H_2).P(X/H_2)}$$

$$= \frac{(0,7 \times 0,3)}{(0.7 \times 0.3) + (0.3 \times 0.2)} = 0,78$$

On aura donc 78% de chance que la mort du patient soit due à son insuffisance H_1 sachant qu'il meurt après 13 jours d'être opéré.

Pour la deuxième cause, on aura aussi :

$$P(H_2/X) = \frac{P(H_2).P(X/H_2)}{P(H_1).P(X/H_1) + P(H_2).P(X/H_2)}$$

$$= \frac{(0,3 \times 0,2)}{(0.7 \times 0.3) + (0.3 \times 0.2)} = 0,22$$

Ce qui donne 22% de chance que la mort du patient soit due cette fois aux insuffisances techniques d'opération H_2 sachant qu'il meurt après 13 jours d'être opéré.

Là aussi, on peut remarquer que la somme des probabilités de toutes les causes est égale à l'unité $(0,78+0,22 = 1)$.

2. Si la cause de la mort soit l'insuffisance des techniques d'opération càd H_2 doit être $\leq 0,10$, alors que dans ce cas la $P(H_2/X) = 0,22$ et elle est supérieure à 0,10, on comprend donc que le chirurgien ne doit pas donc continuer à opérer.

Solution n° 6 :

De même si on suppose les évènements donnés comme suit :

- X : « chapitre X qui est posé à l'examen » (Effet)
- $P(E_1) = 0.1$ et $P(X/E_1) = 0.35$
- $P(E_2) = 0.6$ et $P(X/E_2) = 0.7$
- $P(E_3) = 0.3$ et $P(X/E_3) = 0.05$

Avec : $P(X) = (0.1*0.35) + (0.6*0.7) + (0.3*0.05) = 0.47$

1. La probabilité que l'examen soit posé par l'enseignant 1 (E_1) sachant que le chapitre X soit posé à l'examen sera égale d'après le théorème de Bayes à:

$$P(E_1/X) = \frac{P(E_1).P(X/E_1)}{P(E_1).P(X/E_1) + P(E_2).P(X/E_2) + P(E_3).P(X/E_3)}$$

$$= \frac{(0,1 \times 0,35)}{(0,1 \times 0,35) + (0.6 \times 0.7) + (0.3 \times 0.05)} = 0,07$$

Sachant que le chapitre X est posé à l'examen, il y a une probabilité de 7% que ce soit le 1° enseignant E_1 qui pose l'examen.

2. Pour le deuxième enseignant E_2, on aura aussi :

$$P(E_2/X)=\frac{P(E_2).P(X/E_2)}{P(E_1).P(X/E_1)+P(E_2).P(X/E_2)+P(E_3).P(X/E_3)}$$

$$=\frac{(0.6\times 0.7)}{0,47}=0,89$$

Ce qui donne une probabilité de 89% que ce soit le 2° enseignant E_2 qui pose l'examen, sachant que le chapitre X tombe à l'examen.

3. Pour le troisième enseignant E_3, on aura également :

$$P(E_3/X)=\frac{P(E_3).P(X/E_3)}{P(E_1).P(X/E_1)+P(E_2).P(X/E_2)+P(E_3).P(X/E_3)}$$

$$=\frac{(0.3\times 0.05)}{0,47}=0,03$$

Ce qui représente une probabilité de 3% que ce soit le 3° enseignant qui pose l'examen (E_3) sachant que le chapitre X tombe à l'examen.

On peut toujours vérifier que la somme des probabilités de toutes les causes est égale à l'unité (0,07+0,89+0,03 = 1).

Solution n° 7 :

Considérons les évènements suivants :

- X : l'étudiant n'a jamais doublé.
- F : l'étudiant est une fille
- G : l'étudiant est un garçon

Si on utilise l'approche de Bayes on aura les probabilités a priori suivantes :

- P(F) = 0.55 et P(G) = 0.45
- P(X /F) = 0.2 et P(X/G) = 0.3

Donc, si on prend au hasard un étudiant de cette promotion, et s'il n'a jamais doublé, la probabilité que ce soit une fille doit être ainsi calculée :

$$P(F/X)=\frac{P(F).P(X/F)}{P(F).P(X/F)+P(G).P(X/G)}$$

$$=\frac{(0,55\times 0,2)}{(055\times 0.2)+(0.45\times 0.3)}=44,9\%$$

On aura donc 44,9% de chance que l'étudiant n'ayant jamais doublé dans cet établissement soit une fille.

NB. Pour la deuxième cause, on aura aussi :

$$P(G/X)=\frac{P(G).P(X/G)}{P(F).P(X/F)+P(G).P(X/G)}$$

$$=\frac{(0,45\times 0,3)}{(055\times 0.2)+(0.45\times 0.3)}=55,1\%$$

Solution n° 8 :

Soit les évènements suivants :

- X : avoir une note inférieure à 10
- R : être redoublant
- N : être non-redoublant

D'après les énoncés de l'exercice les probabilités a priori sont récapitulées comme suit :

- P(R) = 0.3 et P(N)=0.7.
- P(X/R) = 0.15 et P(X/N)=0.25

D'où, si on tire une copie dont la note est inférieure à la moyenne, la probabilité que celle-ci soit d'un redoublant est calculée en utilisant la théorie de Bayes par :

$$P(R/X)=\frac{P(R).P(X/R)}{P(R).P(X/R)+P(N).P(X/N)}$$

$$=\frac{(0,3\times 0,15)}{(0,3\times 0,15)+(0.7\times 0.25)}=20,45\%$$

Soit donc une probabilité de 20,45% que la copie tirée dont la note est inférieure à 10 soit celle d'un redoublant. Cette probabilité était a priori de 30%.

Solution n° 9 :

Définissons d'abord les événements suivants :

- X : passer par le chemin X
- Y : passer par le chemin Y
- Z : passer par le chemin Z
- V : passer par le chemin V
- R : arriver en retard au travail

Nous savons aussi que :

- P(X) = 1/4 ; P(Y) = 1/12 ; P(Z) = 1/3 et P(V)= ?
- P(R/X) = 1/10 ; P(R/Y) = 1/5 ; P(R/Z) = 1/4 et P(R/V) = 0.

1. Puisque la personne doit automatiquement choisir l'un des chemins parmi 4 qui restent possibles, on a d'après la définition de la probabilité totale :

P(X) + P(Y) + P(Z) + P(V) = 1

$\Rightarrow$ P(V) = 1- P(X) - P(Y) - P(Z)

$\Rightarrow$ P(V) = 1- 1/4 - 1/12 – 1/3

P(V) =1/3

Soit donc une probabilité d'environ 33,33% que la personne passe par le chemin V.

2. Si la personne arrive en retard au travail, la probabilité quelle soit passée par le chemin X est reformulée en utilisant l'approche Bayésienne sera calculée par:

$$P(X/R)=\frac{P(X).P(R/X)}{P(X).P(R/X)+P(Y).P(R/Y)+P(Z).P(R/Z)+P(V).P(R/V)}$$

$$=\frac{(1/4\times 1/10)}{(1/4\times 1/10)+(1/12\times 1/5)+(1/3\times 1/4)+(1/3\times 0)}$$

$$=20\%$$

Si la personne arrive en retard au travail, il y a 20% de chance qu'elle soit passée par le chemin X.