Loi binomiale et loi hypergéométrique

Sans R

Exercice 1

Une urne contient 3 boules dont 2 blanches et 1 noire. On effectue 2 tirages indépendants d'une boule chacun : soit X le nombre de boules blanches obtenues.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Solution :

1. D'après l'énoncé de l'exercice, on a :

$N = 3$ dont N_1 (boules blanches)=2 et N_2 (boules noires)=1.

On tire $n = 2$.

Soit X : le nombre de boules blanches obtenues lors de ce tirage.

Puisqu'on a :

- X prend des valeurs discrètes $(X = 0\ ;\ 1\ ;\ 2)$;
- Deux éventualités mutuellement exclusives :

  - Boules blanches, avec $p = \dfrac{2}{3}$;

- Boules non blanches, avec $1-p=q=\dfrac{1}{3}$.

- Un tirage avec remise (tirage indépendant) ;
- La taille de l'échantillon est égale à 2 $(n=2)$;
- La probabilité d'avoir des boules blanches est fixe $\left(p=\dfrac{2}{3}\right)$;

Donc, ceci nous permet de noter que X suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\dfrac{2}{3}\left(X \sim \mathcal{B}\left(2\ ;\ \dfrac{2}{3}\right)\right)$.

2. Pour une variable aléatoire X suivant une loi binomiale de paramètres n et $p\left(X \sim \mathcal{B}(n\ ;\ p)\right)$, on sait que :

$$E(X)=np \quad \text{et} \quad V(X)=npq.$$

Donc :

- $E(X)=np=2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{4}{3}$;
- $V(X)=npq=2\times\left(\dfrac{2}{3}\right)\times\left(\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{4}{9}$.

Exercice 2

20 % des articles produits par une usine sont défectueux. Parmi 5 articles choisis au hasard :

1. Quelle est la probabilité qu'il y a un article défectueux ?
2. Quelle est la probabilité qu'il n'y a aucun article défectueux ?
3. Quelle est la probabilité qu'il y a moins de 2 articles défectueux ?
4. Quelle est la probabilité qu'il y a au moins 2 articles défectueux ?
5. Donner le nombre moyen d'articles défectueux ? $E(X)$

Solution :

Soit X le nombre d'articles défectueux parmi 5.

Puisqu'on a :

- X prend des valeurs discrètes $(X=0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5)$
- Deux éventualités mutuellement exclusives :
  - Articles défectueux, avec $p=0{,}2$;
  - Articles non défectueux, avec $1-p=q=0{,}8$.
- Le tirage est assimilé à un tirage avec remise (tirage indépendant) ;
- La taille de l'échantillon est égale à 5 $(n=5)$;

- La probabilité d'avoir un article défectueux est fixe $(p = 0.2)$.

Donc, ceci nous permet de considérer que X suit une loi binomiale de paramètre 5 et $0{,}2$ $\left(X \sim \mathcal{B}(5\ ;\ 0{,}2)\right)$.

1. La probabilité qu'il y a un article défectueux parmi les 5 articles choisis au hasard, est calculée comme suit :

$$p(X = 1) = C_5^1 (0{,}2)^1 (0{,}8)^4 = 0{,}4096.$$

2. La probabilité qu'il n'y a aucun article défectueux parmi les 5 articles choisis au hasard est calculée comme suit :

$$p(X = 0) = C_5^0 (0{,}2)^0 (0{,}8)^5 = 0{,}33.$$

3. La probabilité qu'il y a moins de 2 articles défectueux parmi les 5 articles choisis au hasard est calculée de la manière suivante :

$$p(X \prec 2) = p(X = 1) + p(X = 0) = 0{,}4096 + 0{,}33 = 0{,}7396.$$

4. La probabilité qu'il y au moins 2 articles défectueux parmi les 5 articles choisis au hasard est calculée comme suit :

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X \prec 2) = 1 - 0{,}7396 = 0{,}2604.$$

5. Le nombre moyen des articles défectueux est donné par $E(X)$ de la façon suivante :

$$E(X) = np = 5 \times 0{,}2 = 1.$$

Exercice 3

Un sac contient 7 boules blanches et 3 boules noires. On tire une boule au hasard et on répète l'opération avec remise. Calculer la probabilité d'obtenir :

1. 5 boules blanches en 6 tirages.
2. Au plus 4 boules blanches en 6 tirages.
3. Ni plus de 5 boules blanches ni moins de 2 boules blanches en 6 tirages.

Solution :

Soit X le nombre de boules blanches obtenues.

D'après l'énoncé de l'exercice, on peut très bien vérifier toutes les conditions d'application de la loi binomiale (comme nous l'avons noté dans les deux exercices précédents). Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 6$ et $p = 0{,}7$ $\left(X \sim \mathcal{B}(6\ ;\ 0{,}7)\right)$:

1. La probabilité de tirer 5 boules blanches en 6 tirages, est donnée par :

$$p(X = 5) = C_6^5 (0{,}7)^5 (0{,}3)^1 = 0{,}30.$$

2. La probabilité de tirer au plus 4 boules blanches en 6 tirages, est donnée de la manière suivante :

$$p(X \leq 4) = 1 - p(X \succ 4) = 1 - p(X = 5) - p(X = 6)$$
$$= 1 - 0{,}30 - (0{,}7)^6 = 0{,}58.$$

3. La probabilité de tirer ni plus de 5 boules blanches ni moins de 2 boules blanches en 6 tirages, est donnée par :

$$p(2 \leq X \leq 5) = p(X=2) + p(X=3) + p(X=4) + p(X=5)$$

$$= C_6^2(0,7)^2(0,3)^4 + C_6^3(0,7)^3(0,3)^3 + C_6^4(0,7)^4(0,3)^2 + C_6^5(0,7)^5(0,3)^1 = 0,87.$$

Exercice 4

On jette simultanément deux dés, on s'intéresse à l'événement sorti d'une paire.

1. Soit X le nombre de paire que l'on peut obtenir en lançant les deux dés 4 fois de suite. Déterminer sa loi de probabilité et calculer son espérance mathématique et son écart-type.
2. L'individu A propose à l'individu B le jeu suivant : tous les deux misent la même somme d'argent puis B lance 4 fois de suite les deux dés, s'il obtient au moins une fois une paire, il gagne la mise sinon, c'est A qui gagne. Le jeu est-il équitable ?

Solution :

1. La probabilité d'obtenir une paire est égale à $\frac{1}{6}$. On lance les deux dés 4 fois ; donc il s'agit d'une loi binomiale :

$$\left(X \sim B\left(4\,;\ \frac{1}{6}\right)\right).$$

$$E(X) = np = 4 \times \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3};$$

$$\sigma_{(x)} = \sqrt{npq} = \sqrt{4 \times \left(\frac{1}{6}\right) \times \left(\frac{5}{6}\right)} = \sqrt{\frac{20}{36}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

2. Soit X : ne pas avoir une paire :

$$p(X=0) = C_4^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,4822$$

Par conséquent, la probabilité d'avoir au moins une paire est donnée par :

$$1 - p(X=0) = 1 - 0,4822 = 0,5178$$

Puisque, $0,5178 \succ 0,4822$, donc on peut dire que le jeu n'est pas équitable.

Exercice 5

Soit un restaurant de 50 places. La probabilité pour qu'une personne ayant réservé une table ne vienne pas est de 20%. Un jour le patron a pris 52 réservations. Quelle est la probabilité de se trouver dans une situation embarrassante ?

Solution

Soit X le nombre de clients qui maintiennent leur réservation. X suit une loi binomiale$\left(X \sim \mathcal{B}(52\ ;\ 0,8)\right)$.

Pour que le patron se trouve dans une situation embarrassante, il faut que X soit supérieure à 50 avec une probabilité égale à :

$$p(X \succ 50) = p(X = 51) + p(X = 52)$$

$$= 52\left(\frac{8}{10}\right)^{51}\left(\frac{2}{10}\right)^{1} + \left(\frac{8}{10}\right)^{52} = 0{,}000127.$$

Exercice 6

Dans une entreprise fabriquant des lampes, 10% de ces lampes peuvent être classées comme défectueuses. Un échantillon de 10 lampes est tiré au hasard. On demande de calculer :

1. La probabilité d'obtenir exactement 3 lampes défectueuses.
2. La probabilité d'obtenir plus de 4 lampes défectueuses.
3. La probabilité d'obtenir au plus 6 lampes défectueuses.
4. La probabilité d'obtenir au plus 2 lampes défectueuses.
5. En moyenne, combien de lampes seront défectueuses pour n=10.

Solution :

X suit une loi binomiale$\left(X \sim \mathcal{B}(10\ ;\ 0,1)\right)$.

1. $p(X = 3) = C_{10}^{3}(0{,}10)^{3}(0{,}9)^{7} = 0{,}0574.$
2. $p(X \succ 4) = \sum_{k=5}^{10} C_{10}^{k}(0{,}10)^{k}(0{,}9)^{10-k} = 0{,}0016.$
3. $p(X \leq 6) = \sum_{k=0}^{6} C_{10}^{k}(0{,}10)^{k}(0{,}9)^{10-k} = 0{,}9999.$
4. $p(X \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} C_{10}^{k}(0{,}10)^{k}(0{,}9)^{10-k} = 0{,}9298.$
5. On sait que $E(X) = np = 10 \times 0{,}1 = 1$. En moyenne sur un échantillon de 10, on aura une lampe défectueuse.

Exercice 7

Des chambres à air sont produites en série et 5% ont des défauts. Un garagiste en achète 10.

1. Quelle est la probabilité que les 10 soient en bon état ?
2. On suppose qu'il annule sa commande si plus de deux articles sont défectueux. Quelle est la probabilité qu'il annule sa commande ?
3. La proportion des pneus défectueux est en moyenne 2% ; le même garagiste en achète 5 pour équiper une voiture.
   a. Quelle est la probabilité que l'un au moins des pneus soit défectueux ?

b. Si un des pneus est défectueux, il en demande l'échange standard ; si deux sont défectueux, il annule sa commande. Quelle est la probabilité d'annuler sa commande ?

Solution :

1. Soit X le nombre de chambre à air en bon état suivant une loi binomiale $\left(X \sim \mathcal{B}(10\ ;\ 0{,}95)\right)$. Donc la probabilité pour que les dix pneus soient bons est donnée comme suit :

$$p(X = 10) = C_{10}^{10}(0{,}95)^{10}(0{,}05)^{0} = 0{,}6.$$

2. Soit Y le nombre de chambres à air défectueuses suivant une loi binomiale $\left(Y \sim \mathcal{B}(10\ ;\ 0{,}05)\right)$,donc la probabilité d'annuler la commande est donnée comme suit :

$$p(Y \succ 2) = 1 - \left[p(Y=0) + p(Y=1) + p(Y=2)\right]$$

$$= 1 - \left[\underbrace{C_{10}^{0}(0{,}05)^{10}(0{,}95)^{0}}_{0{,}5987} + \underbrace{C_{10}^{1}(0{,}05)^{1}(0{,}95)^{9}}_{0{,}3151} + \underbrace{C_{10}^{2}(0{,}05)^{2}(0{,}95)^{8}}_{0{,}0746}\right]$$

$$p(Y \succ 2) = 1 - 0{,}9884 = 0{,}0116.$$

3. Soit Z le nombre de pneus défectueux suivant une loi binomiale $\left(Z \sim \mathcal{B}(5\ ;\ 0{,}02)\right)$

a. $p(Z \geq 1) = 1 - p(Z = 0) = 0{,}096.$

b. $p(Z \geq 2) = 1 - p(Z \leq 1) = 1 - p(Z = 0) - p(Z = 1)$

$$= 1 - 0{,}9039 - 0{,}0922 = 1 - 0{,}9961 = 0{,}0039.$$

Exercice 8

Sur 60 postulants à l'entrée d'un établissement, 40 sont du sud. Si 20 postulants sont sélectionnés, calculer la probabilité pour que :

1. 10 postulants soient originaires du sud.

2. Pas plus de 2 postulants soient originaires du sud.

Solution :

Soit X le nombre de postulants originaires du sud.

Puisqu'on a :

- X prend des valeurs discrètes $\left(X = 0\ ;\ 1\ ;\ \dots\ ;\ 20\right)$
- Deux éventualités mutuellement exclusives :

  - Postulants d'origine du sud, avec $p = \dfrac{2}{3}$;

  - Postulants d'autres origines, avec $1 - p = q = \dfrac{1}{3}$.

- Le tirage est assimilé à un tirage sans remise (tirage dépendant) ;

- La taille de l'échantillon est égale à 20 $(n = 20)$;
- La taille de la population est égale à 60 $(N = 60)$;
- La probabilité de sélectionner un postulant d'origine du sud est fixe : $\left(p = \frac{2}{3}\right)$.

Donc, ceci nous permet de considérer que X suit une loi hypergéométrique de paramètres $N = 60$, $n = 20$ *et* $p = \frac{2}{3}$ $\left(X \sim \mathrm{H}\left(60\ ;\ 20\ ;\ \frac{2}{3}\right)\right)$.

1. La probabilité pour que les 10 postulants soient originaires du sud, est donnée comme suit :

$$p(X = 10) = \frac{C_{40}^{10} C_{20}^{10}}{C_{60}^{20}} = 0{,}0374.$$

2. La probabilité pour que pas plus de 2 postulants soient originaires du sud, est donnée comme suit :

$$p(X \leq 2) = p(X = 0) + p(X = 1) + p(X = 2)$$

$$= \frac{C_{40}^{0} C_{20}^{20}}{C_{60}^{20}} + \frac{C_{40}^{1} C_{20}^{19}}{C_{60}^{20}} + \frac{C_{40}^{2} C_{20}^{18}}{C_{60}^{20}} = 3{,}55 \times 10^{-11} \simeq 0.$$

Exercice 9

Une population P de taille N est divisée en 2 groupes : G_1 et G_2. Les unités de G_1 possèdent le caractère C et sont en proportion p, les unités de G_2 ne possèdent pas le caractère C et sont en proportion $q = 1 - p$.

On choisit n éléments de l'ensemble de la population et on appelle X : le nombre d'unités de G_1 dans l'échantillon.

1. Indiquer la loi de probabilité de X dans les deux cas suivants :

   a. Si le tirage est fait avec remise. B

   b. Si le tirage est sans remise. H

2. Application numérique pour : $p = 0{,}4$ *et* $n = 5$.

   Calculer la probabilité pour $X = 2$, $X = 3$ et $X = 2$ ou 3 dans le cas d'un tirage avec remise.

Solution :

1. Soit X le nombre d'unités de G_1

   a. Si le tirage est avec remise $X \sim \mathcal{B}(n\ ;\ p)$;

   b. Si le tirage est sans remise $X \sim \mathrm{H}(N\ ;\ n\ ;\ p)$.

2. Application numérique :

- $p(X=2)=C_5^2(0,4)^2(0,6)^3=0,3456.$
- $p(X=3)=C_5^3(0,4)^3(0,6)^2=0,2304.$
- $p(X=2 \text{ ou } X=3)=p(X=2)+p(X=3)$
$$=0,3456+0,2304=0,576.$$

Exercice 10

Un étudiant doit passer un examen. Il a dix sujets à apprendre, il n'en apprend que 3. Sachant qu'on lui pose deux questions. On vous demande de :

1. Calculer la probabilité pour que le sujet soit parmi les 3 sujets appris.
2. Combien aurait-t-il du au minimum à apprendre de sujets pour que la probabilité soit supérieure ou égale à 0,5 ?

Solution :

Soit X le nombre de sujets parmi les 2 posés à l'examen.

Il s'agit d'un tirage simultané à deux éventualités dont les valeurs vont de 0 à 2 et d'une manière discrète.

Il s'agit donc d'une distribution hypergéométrique avec $N=10,\ p=\frac{3}{10}\ et\ n=2\left(X\sim \mathrm{H}\left(10\ ;\ 2\ ;\ \frac{3}{10}\right)\right)$

1. $p(X=2)=\frac{C_3^2C_7^0}{C_{10}^2}=\frac{3}{45}.$

2. $$\frac{C_n^2C_{10-n}^0}{C_{10}^2}=\frac{\frac{n!}{2!(n-2)!}}{\frac{10!}{2!8!}}=\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{10\times 9}{2}}=\frac{n(n-1)}{90}\geq 0,5$$

$$\Rightarrow \mathrm{n}^2-\mathrm{n}-45\geq 0\Rightarrow \Delta=1+(4\times 45)=181$$

$$\Rightarrow n_1=\frac{1+\sqrt{181}}{2}\approx 7,22\ et\ n_2=\frac{1-\sqrt{181}}{2}=-6,23$$

Donc cet étudiant doit apprendre au moins 8 sujets pour que la probabilité soit supérieure ou égale à 0,5.

Exercice 11

En une semaine, un agent de change de monnaie distribue 1000 pièces dont 50 sont fausses. Un utilisateur a reçu 15 pièces de cet agent. Donner la probabilité pour qu'au moins 3 de ces pièces soient fausses.

Solution :

Le cardinal de l'ensemble fondamental est égal à : $Car(\Omega)=C_{1000}^{15}$

Soit X qui désigne le nombre de pièces fausses reçues par cet utilisateur.

X suit une loi hypergéométrique approchée par une loi binomiale :

Avec $X \sim \mathrm{H}\left(1000\ ;\ 15\ ;\ \dfrac{1}{20}\right) \Rightarrow X \sim \mathcal{B}\left(15\ ;\ \dfrac{1}{20}\right)$

Donc, $p\left(X \geq 3\right) = 1 - p\left(\ X \prec 3\right) = 0,0362.$

Loi de Poisson

Exercice 12

Calculer à l'aide de la table de la loi de Poisson (en annexe) de paramètre $m = 6$, les probabilités suivantes :

1. $p\left(4 \prec X \prec 8\right)$;
2. $p\left(4 \leq X \prec 8\right)$;
3. $p\left(4 \leq X \leq 8\right)$;
4. $p\left(4 \prec X \leq 8\right)$;
5. $p\left(X = 9\right)$;
6. $p\left(X \succ 0\right)$ avec $m = 7$.

Solution :

La loi de Poisson est une loi discrète et infinie.

1.
$$p\left(4 \prec X \prec 8\right) = p\left(X \succ 4\right) - p\left(X \geq 8\right) = p\left(X \succ 4\right) - p\left(X \succ 7\right).$$

Sur la table cumulée de Poisson en annexe, on peut déterminer cette probabilité comme suit :

$$p\left(4 \prec X \prec 8\right) = 0,715 - 0,256 = 0,459.$$

2. $p\left(4 \leq X \prec 8\right) = p\left(X \geq 4\right) - p\left(X \geq 8\right) = p\left(X \succ 3\right) - p\left(X \succ 7\right)$

$$= 0,849 - 0,256 = 0,593.$$

3.
$$p\left(4 \leq X \leq 8\right) = p\left(X \geq 4\right) - p\left(X \succ 8\right) = p\left(X \succ 3\right) - p\left(X \succ 8\right)$$

$$= 0,849 - 0,153 = 0,696.$$

4. $p\left(4 \prec X \leq 8\right) = p\left(X \succ 4\right) - p\left(X \succ 8\right) = 0,715 - 0,153 = 0,562.$

5. $p\left(X = 9\right) = p\left(9 \leq X \prec 10\right) = p\left(X \geq 9\right) - p\left(X \geq 10\right)$

$$= p\left(X \succ 8\right) - p\left(X \succ 9\right) = 0,153 - 0,084 = 0,069.$$

6. $p\left(X \succ 0\right) = 0,999.$

Exercice 13

On a constaté sur un guichet que le nombre moyen de client par minute arrivant vers ce guichet est de 0,8. Sachant que le nombre de client par minute suit une loi de Poisson.

Déterminer la probabilité :

1. Pour qu'il n'y ait aucun client entre 14h 30 et 14h 31.
2. Pour qu'il y ait 2 clients entre 14h 30 et 14h 31.
3. Pour qu'il y ait 1 ou 2 clients entre 14h 30 et 14h 31.
4. Pour qu'il y ait au plus 3 clients entre 14h 30 et 14h 31.
5. Pour qu'il y ait plus de 2 clients entre 14h 30 et 14h 31.

Solution :

Soit l'événement X qui désigne le nombre de clients arrivant dans le guichet dans une minute.

X suit une loi de Poisson de paramètre 0,8 $\left(X \sim P(0{,}8)\right)$.

On lit directement les probabilités demandées sur la table non cumulée de Poisson en annexe.

1. $p(X=0)=0{,}449.$
2. $p(X=2)=0{,}143.$
3. $p(X=1)+p(X=2)=0{,}3595+0{,}1438=0{,}5033.$
4.

$$p(X\leq 3)=p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)+p(X=3)$$
$$=0{,}4493+0{,}3595+0{,}1438+0{,}0383=0{,}991.$$

5. $p(X\succ 2)=1-\ p(X=2)-p(X=1)-p(X=0)$

$$=1-0{,}1438-0{,}3595-0{,}4493=0{,}047.$$

Exercice 14

Soit X le nombre de client arrivant à un magasin pendant une durée déterminée. Sachant que le nombre moyen des arrivées est de 120 clients par heure. Quelle est la probabilité que :

1. Personne ne se présente à ce magasin pendant une durée de 5 mn ?
2. Deux personnes se présentent à ce magasin pendant une durée de 30 secondes ?

Solution :

Soit X le nombre de personnes se présentant au magasin pendant une durée d'une heure. X suit donc un processus de Poisson de paramètre m avec $E(X)=m=120$.

1. Soit Y le nombre de personne se présentant à ce magasin pendant une durée de 5 mn. Donc :

$$Y=\frac{X}{12}\Rightarrow E(Y)=\frac{120}{12}=10.$$

On constate que Y suit aussi une loi de Poisson de paramètre 10.

Donc, $p(Y=0)=0$ d'après la table de Poisson.

2. Soit Z le nombre de personne se présentant à ce magasin pendant une durée de 30 secondes. Donc :

$$Z = \frac{30X}{3600} = \frac{X}{120} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}(Z) = \frac{\mathrm{E}(X)}{120} = 1$$

Par conséquent, Z suit aussi une loi de Poisson de paramètre 1.

D'après la table de Poisson, $p(Z=2) = 0{,}1839$.

Exercice 15

On suppose, au sein d'une population de 50.000 individus, qu'il y a 2 suicides en moyenne par an. Calculer la probabilité théorique pour que, dans une ville de 100000 habitants, le nombre de suicides pendant une année donnée soit :

1. Egal à 0.
2. Egal à 1.
3. Egal ou supérieur à 2.

Solution :

Soit X le nombre de suicides par an pour une population de 50000 habitants avec, $E(X) = 2$. Puisqu'il s'agit d'un phénomène rare, on peut considérer que la loi suivie par X est une loi de Poisson de paramètre 2 : $(X \sim P(2))$.

Soit Y le nombre de suicides par an pour une population de 100000 habitants. Avec $Y = 2X$ d'où, $E(Y) = 4$.

1. $p(Y=0) = 0{,}018$ d'après la table de Poisson.
2. $p(Y=1) = 0{,}073$ d'après la table de Poisson.

3. $p(Y \geq 2) = 1 - p(Y \prec 2) = 1 - p(Y=0) - p(Y=1)$

$$= 1 - 0{,}018 - 0{,}073 = 0{,}909.$$

Exercice 16

Dans une entreprise industrielle, le taux moyen des accidents de travail est de 2 par semaine, en supposant que la loi de probabilité de ces accidents est une loi de Poisson (événement rare).

Calculer la probabilité pour qu'il y ait :

1. Moins de 2 accidents par semaine.
2. Plus de 2 accidents par semaine.
3. Au moins 2 accidents par semaine.
4. Aucun accident en 2 semaines.
5. Exactement 3 accidents en 3 semaines.

On note par ailleurs que l'indépendance entre le nombre d'accidents d'une semaine à l'autre soit respectée.

Solution :

Soit X le nombre d'accidents par semaine, avec $X \sim P(2)$.

1. $p(X \prec 2) = 1 - p(X \succ 1) = 1 - 0{,}594 = 0{,}406$.
2. $p(X \succ 2) = 0{,}323$ d'après la table de Poisson.
3. $p(X \geq 2) = p(X \succ 1) = 0{,}594$.

4. Soit X_1 le nombre d'accidents pour la semaine de type 1 ;

X_2 le nombre d'accidents pour la semaine de type 2 ;

$$X_1 \sim P(2) \ \ et \ \ X_2 \sim P(2).$$

Le nombre d'accidents pour une durée de 2 semaines est :

$$Y = X_1 + X_2 \ \ et \ \ E(Y) = E(X_1) + E(X_2) = 4.$$

Donc $Y \sim P(4)$, la probabilité de n'avoir aucun accident en 2 semaines est :

$$p(Y=0) = 0{,}018 \text{ d'après la table de Poisson}$$

5. La probabilité d'avoir exactement 3 accidents en 3 semaines est déterminée comme suit :

Soit Z le nombre d'accidents en trois semaines, avec :

$$E(Z) = 6 \text{ et donc } Z \sim P(6).$$

$$p(Z=3) = p(3 \leq Z \prec 4) = p(Z \geq 3) - p(Z \geq 4)$$

$$= p(Z \succ 2) - p(Z \succ 3) = 0{,}938 - 0{,}849 = 0{,}089.$$

Exercice 17

Le nombre de clients d'un magasin dans une journée suit une loi de Poisson de paramètre $m = 9$. Pour payer ses achats, chaque client utilise l'une des 3 caisses mises à sa disposition. Les 3 caisses sont identiques et ont autant de chance d'être utilisées les unes que les autres. On suppose que tous les clients prennent au

moins un objet dans les rayons. Soit X, la variable aléatoire égale au nombre d'utilisateurs par jour de la caisse numéro 1.

1. Donner la loi de probabilité de X dans le cas où tous les clients payent les objets choisis dans les rayons.
2. Déterminer la loi de X dans le cas où, en moyenne, un client sur 10 sort du magasin sans payer les objets qu'il a choisi.

Solution :

1. Soit Y le nombre de clients du magasin en une journée, avec $Y \sim P(9)$ puisque tous les clients payent les objets choisis, la probabilité pour qu'un client du magasin passe par la caisse 1 est de $\frac{1}{3}$; donc, $X \sim P\left(\frac{9}{3} = 3\right)$.

2. La loi de X est donnée par : $X \sim P\left[\left(\frac{9}{3}\right) \times 10 = 30\right]$.

Exercice 18

Lors d'un contrôle, sur la production d'un bien pouvant présenter plusieurs défauts, on a constaté que le nombre de défauts sur chaque unité suit une loi de Poisson de paramètre m = 2. On tire au hasard un échantillon de 2 unités et on définit deux variables aléatoires.

X : nombre de défauts sur la première unité.

Y : nombre de défauts sur la deuxième unité.

4. Soit X_1 le nombre d'accidents pour la semaine de type 1 ;

X_2 le nombre d'accidents pour la semaine de type 2 ;

$$X_1 \sim P(2) \text{ et } X_2 \sim P(2).$$

Le nombre d'accidents pour une durée de 2 semaines est :

$$Y = X_1 + X_2 \quad et \quad E(Y) = E(X_1) + E(X_2) = 4.$$

Donc $Y \sim P(4)$, la probabilité de n'avoir aucun accident en 2 semaines est :

$$p(Y=0) = 0{,}018 \text{ d'après la table de Poisson}$$

5. La probabilité d'avoir exactement 3 accidents en 3 semaines est déterminée comme suit :

Soit Z le nombre d'accidents en trois semaines, avec :

$$E(Z) = 6 \text{ et donc } Z \sim P(6).$$

$$p(Z=3) = p(3 \leq Z \prec 4) = p(Z \geq 3) - p(Z \geq 4)$$

$$= p(Z \succ 2) - p(Z \succ 3) = 0{,}938 - 0{,}849 = 0{,}089.$$

Exercice 17

Le nombre de clients d'un magasin dans une journée suit une loi de Poisson de paramètre $m = 9$. Pour payer ses achats, chaque client utilise l'une des 3 caisses mises à sa disposition. Les 3 caisses sont identiques et ont autant de chance d'être utilisées les unes que les autres. On suppose que tous les clients prennent au

moins un objet dans les rayons. Soit X, la variable aléatoire égale au nombre d'utilisateurs par jour de la caisse numéro 1.

1. Donner la loi de probabilité de X dans le cas où tous les clients payent les objets choisis dans les rayons.
2. Déterminer la loi de X dans le cas où, en moyenne, un client sur 10 sort du magasin sans payer les objets qu'il a choisi.

Solution :

1. Soit Y le nombre de clients du magasin en une journée, avec $Y \sim P(9)$ puisque tous les clients payent les objets choisis, la probabilité pour qu'un client du magasin passe par la caisse 1 est de $\frac{1}{3}$; donc, $X \sim P\left(\frac{9}{3} = 3\right)$.

2. La loi de X est donnée par : $X \sim P\left[\left(\frac{9}{3}\right) \times 10 = 30\right]$.

Exercice 18

Lors d'un contrôle, sur la production d'un bien pouvant présenter plusieurs défauts, on a constaté que le nombre de défauts sur chaque unité suit une loi de Poisson de paramètre m = 2. On tire au hasard un échantillon de 2 unités et on définit deux variables aléatoires.

X : nombre de défauts sur la première unité.

Y : nombre de défauts sur la deuxième unité.

Il est admis que X et Y sont indépendants.

Soit $Z = X + Y$

1. Quelle est la loi de probabilité de Z ?
2. Calculer les probabilités pour l'ensemble des valeurs de $Z = 0,\ 1,\ 2, \ldots, 10$.

Solution :

1. Puisque $X \sim P(2)$ et $Y \sim P(2)$, alors $Z = X + Y \sim P(4)$.

2. Les probabilités pour l'ensemble des valeurs de $Z = 0,\ 1,\ 2, \ldots, 10$ sont données dans le tableau ci-après :

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(Z)$	0,018	0,073	0,146	0,195	0,195	0,156	0,104	0,059	0,030	0,013	0,005

Exercice 19

Une compagnie d'assurance organise la gestion d'un certain type de risque sur la base d'une distinction géographique, qui reflète une différence dans l'intensité de ce risque. Pour la zone A, on peut considérer que le nombre de sinistres enregistrés au cours d'une semaine suit une loi de Poisson de paramètre égal à 3. Pour la zone B, totalement distincte de la zone A, le nombre hebdomadaire de sinistres obéit à une loi de Poisson de paramètre 2.

1. Calculer la probabilité que, pour une semaine donnée, la compagnie ait à indemniser 4 sinistres.
2. Le coût moyen de l'indemnisation d'un sinistre étant de l'ordre de 25 000 DH, calculer la probabilité que, pour une semaine donnée, la compagnie doit débourser plus de 150000 DH.
3. Pour une semaine donnée, calculer la probabilité d'avoir à indemniser le même nombre de sinistres dans chaque zone ; ce nombre commun étant inférieur à 3.

Solution :

Soit X le nombre de sinistres par semaine dans la zone A.

Soit Y le nombre de sinistres par semaine dans la zone B.

Avec $X \sim P(3)$ et $Y \sim P(2)$.

1. Indemniser 4 sinistres revient à écrire :

$X + Y = 4$ or $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $3 + 2 = 5 \left(X + Y \sim P(5)\right)$.

Donc, $p(X + Y = 4) = 0{,}1755$, d'après la table de la loi de Poisson.

2. Dans une semaine on débourse : $25\ 000(X + Y) = Z$.

D'après la table de la loi de Poisson,

$$p\left(25000(X + Y) \succ 150000\right) = p(X + Y \succ 6) = 0{,}238$$

3. La probabilité d'avoir à indemniser le même nombre de sinistres dans chaque zone dans une semaine donnée (avec ce nombre commun étant inférieur à 3) est donnée comme suit :

$$p(X=0\ ;\ Y=0)+p(X=1\ ;\ Y=1)+p(X=2\ ;\ Y=2)$$

Puisque X et Y sont indépendants, alors :

$$\begin{aligned} & p(X=0\ ;\ Y=0)+p(X=1\ ;\ Y=1)+p(X=2\ ;\ Y=2) \\ & =\big(p(X=0)\times p(Y=0)\big)+\big(p(X=1)\times p(Y=1)\big) \\ & \quad +\big(p(X=2)\times p(Y=2)\big) \\ & =(0{,}0498\times 0{,}1353)+(0{,}1494\times 0{,}2707)+(0{,}2240\times 0{,}2707) \\ & =0{,}1078. \end{aligned}$$

La loi Normale

Exercice 20

On considère une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètre $m=3$ et $\sigma=12$.

1. Déterminer x tel que : $p(X\geq x)=0{,}6255$.

2. Calculer $p(3{,}25\leq X\leq 4{,}75)$.

Solution :

Pour utiliser la table $\pi_{(t)}$ de la loi normale en annexe, il faut commencer par centrer et réduire la variable X comme suit :

$T=\dfrac{X-m}{\sigma}$, où T est une variable normale centrée et réduite c'est à dire $T\sim N(0\ ;\ 1)$.

1. $p(X\geq x)=0{,}6255 \Rightarrow p\left(\dfrac{X-m}{\sigma}\geq\dfrac{x-m}{\sigma}\right)=0{,}6255$

$$\Rightarrow p\left(T\geq\frac{x-m}{\sigma}\right)=0{,}6255\Rightarrow 1-p\left(T\prec\frac{x-m}{\sigma}\right)=0{,}6255$$

$$\Rightarrow 1-\pi_{\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)}=0{,}6255\Rightarrow\pi_{\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)}=0{,}3775\Rightarrow\pi_{(t)}=0{,}3775.$$

Mais le nombre 0,3775 ne figure pas dans la table de π (*la table de la loi normale ne donne que les valeurs* $p(T \prec t)$ *avec des probabilités supérieures ou égales à 0,5*) ; cela signifie que t est négatif. Or on sait que $\pi_{(-t)} = 1 - \pi_{(t)}$ dont

$$\pi_{(-t)} = 1 - 0{,}3775 = 0{,}6255.$$

Par lecture inverse de la table de π on en déduit que :

$$-t = 0{,}32 \Rightarrow \frac{3-x}{12} = 0{,}32 \Rightarrow x = -0{,}84.$$

2. $p(3{,}25 \leq X \leq 4{,}75) = p\left(\frac{3{,}25-3}{12} \leq T \leq \frac{4{,}75-3}{12}\right)$

$$= \pi_{(0{,}146)} - \pi_{(0{,}02)}$$

$$= 0{,}5596 - 0{,}508 = 0{,}0516.$$

Exercice 21

Soit l'effectif des salariés à temps complet. 10% de ces salariés gagnent moins de 40000 DH par an et 10% gagnent plus de 123000 DH par an. En supposant que les salaires suivent une loi normale, déterminer le salaire annuel moyen et l'écart-type du salaire annuel.

Solution :

- $p(X \prec 40000) = 0{,}1 \Rightarrow p\left(T \prec \frac{40000-m}{\sigma}\right) = 0{,}10$

$$\Rightarrow \pi_{\left(\frac{40000-m}{\sigma}\right)} = 0{,}10 \Rightarrow \pi_{(t)} = 0{,}10.$$

Mais le nombre 0,10 ne figure pas dans la table de π ; cela signifie que t est négatif. Or on sait que $\pi_{(-t)} = 1 - \pi_{(t)}$ dont $\pi_{(-t)} = 1 - 0{,}10 = 0{,}90.$

Par lecture inverse de la table de π on en déduit que :

$$-t = 1{,}29 \Rightarrow \frac{m-40000}{\sigma} = 1{,}29 \qquad (1)$$

- $p(X \succ 123000) = 1 - p\left(T \prec \frac{123000-m}{\sigma}\right) = 0{,}1$

$$\Rightarrow p(X \succ 123000) = 1 - \pi_{\left(\frac{123000-m}{\sigma}\right)} = 0{,}1$$

$$\Rightarrow \pi_{\left(\frac{123000-m}{\sigma}\right)} = 0{,}9 \Rightarrow \pi_{(t)} = 0{,}9.$$

Puisque cette probabilité est supérieure à 0,5 ; ce qui d'ailleurs être lisible sur la table de la loi normale centrée réduite. Cela implique que :

$$t = 1{,}29 \Rightarrow \frac{123000 - m}{\sigma} = 1{,}29 \qquad (2)$$

La détermination de m et σ se fait par la résolution des deux équations (1) et (2) comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{m - 40000}{\sigma} = 1{,}29 \Rightarrow m - 40000 = 1{,}29\sigma \\ \dfrac{123000 - m}{\sigma} = 1{,}29 \Rightarrow 123000 - m = 1{,}29\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 81500. \\ \sigma = 32170{,}54. \end{cases}$$

Donc, $E(X) = 81500$ et $\sigma_{(X)} = 32170{,}54.$.

Exercice 22

Soit une variable aléatoire X suivant une loi normale de paramètres m et σ, tel que : $p(X \geq 3) = 0{,}8413$ et $p(X \geq 9) = 0{,}0228$.

Déterminer $E(X)$ et $\sigma_{(X)}$.

Solution :

- $p(X \geq 3) = 0{,}8413 \Rightarrow p(X \geq 3) = 1 - p\left(T \prec \frac{3-m}{\sigma}\right) = 0{,}8413$

$$\Rightarrow p(X \geq 3) = 1 - \pi_{\left(\frac{3-m}{\sigma}\right)} = 0{,}8413$$

$$\Rightarrow \pi_{\left(\frac{3-m}{\sigma}\right)} = 0{,}1587 \Rightarrow \pi_{(t)} = 0{,}1587.$$

Mais le nombre 0,1587 ne figure pas dans la table de π ; cela signifie que t est négatif. Or on sait que $\pi_{(-t)} = 1 - \pi_{(t)}$ dont $\pi_{(-t)} = 1 - 0{,}1587 = 0{,}8413.$

Par lecture inverse de la table de π on en déduit que :

$$-t = 1 \Rightarrow \frac{m-3}{\sigma} = 1. \qquad (1)$$

- $p(X \geq 9) = 0{,}0228 \Rightarrow p(X \geq 9) = 1 - p\left(T \prec \frac{9-m}{\sigma}\right) = 0{,}0228$

$$\Rightarrow p(X \geq 9) = 1 - \pi_{\left(\frac{9-m}{\sigma}\right)} = 0{,}0228$$

$$\Rightarrow \pi_{\left(\frac{9-m}{\sigma}\right)} = 0{,}9772 \Rightarrow \pi_{(t)} = 0{,}9772.$$

Puisque cette probabilité est supérieure à 0,5 ; ce qui d'ailleurs être lisible sur la table de la loi normale centrée réduite. Cela implique que :

$$t = 2 \Rightarrow \frac{9-m}{\sigma} = 2 \qquad (2)$$

La détermination de m et σ se fait par la résolution des deux équations (1) et (2) comme suit :

$$\begin{cases} \dfrac{-3+m}{\sigma} = 1 \Rightarrow -3+m = \sigma \\ \dfrac{9-m}{\sigma} = 2 \Rightarrow 9-m = 2\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 5. \\ \sigma = 2. \end{cases}$$

Donc, $E(X) = 5$ et $\sigma_{(X)} = 2$.

Exercice 23

On suppose que le poids X d'un individu suit une loi normale et que :

$$p(X \le 80) = 0{,}5 \text{ et } p(X \le 70) = 0{,}25.$$

1. Calculer $E(X)$ et $\sigma_{(X)}$.
2. Calculer $p(X \ge 95)$.
3. Soit l'événement A qui désigne $X \ge 95$ et l'événement B qui désigne $X \ge 100$.

   Calculer $p\left(B/A\right)$ et $p\left(A/B\right)$. En déduire $p\left(\overline{B}/A\right)$.

Solution :

1. Détermination de $E(X)$ et $\sigma_{(X)}$:

$$p(X \le 80) = 0{,}5 \Rightarrow p\left(T \prec \frac{80-m}{\sigma}\right) = 0{,}5 \Rightarrow \pi\left(\frac{80-m}{\sigma}\right) = 0{,}5$$

$$\Rightarrow \frac{80-m}{\sigma} = 0 \Rightarrow m = 80.$$

$$p(X \le 70) = 0{,}25 = p\left(T \le \frac{70-m}{\sigma}\right) = \pi\left(\frac{70-m}{\sigma}\right)$$

Mais le nombre 0,25 ne figure pas dans la table de π ; cela signifie que t est négatif. Or on sait que $\pi_{(-t)} = 1 - \pi_{(t)}$ dont $\pi_{(-t)} = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$

Par lecture inverse de la table de π on en déduit que :

$$-t = 0{,}68 \Rightarrow \frac{m-70}{\sigma} = 0{,}68 \Rightarrow m = 80 \text{ et } \sigma = 14{,}70.$$

Donc $E(X) = m = 80$ et $\sigma_{(X)} = 14{,}7$.

2. $p(X \ge 95) = p\left(T \ge \dfrac{95-80}{14{,}70}\right) = p(T \ge 1{,}02)$

$$= 1 - p(T \prec 1{,}02) = 1 - 0{,}8461 = 0{,}1539.$$

3. Puisque l'événement A désigne $X \ge 95$ et l'événement B désigne $X \ge 100$, on remarque que : $B \subset A$, donc :

2. Le gain unitaire est de 10 DH, les charges fixes mensuelles sont de 175000 DH.

   a. Déterminer la loi suivie par le gain mensuel de l'entreprise et donner ses paramètres.

   b. Calculer la probabilité pour que cette entreprise réalise un gain (un bénéfice) mensuellement.

3. On suppose que le gain trimestriel est égal à la somme des gains de 3 mois.

   a. Donner la loi de probabilité suivie par le gain trimestriel et déterminer ses paramètres.

   b. Calculer la probabilité que le gain trimestriel soit positif.

Solution :

Soit D la demande d'un produit pour l'entreprise.

Soit D suit une loi normale de paramètre m et σ, $D \sim N(m\ ;\ \sigma)$

1. D suit une loi normale de paramètre m et σ, $D\sim N(m\ ;\ \sigma)$

- $p(D \prec 15000) = 0{,}1 \Rightarrow p\left(T \prec \dfrac{15000-m}{\sigma}\right) = 0{,}1$

$$\Rightarrow \pi_{\left(\frac{15000-m}{\sigma}\right)} = 0{,}1 \Rightarrow \pi_{(t)} = 0{,}1.$$

Mais le nombre 0,1 ne figure pas dans la table de π ; cela signifie que t est négatif. Or on sait que $\pi_{(-t)} = 1-\pi_{(t)}$ dont

$\pi_{(-t)} = 1-0{,}1 = 0{,}9.$

Par lecture inverse de la table de π on en déduit que .

$$-t = 1{,}29 \Rightarrow \frac{m-15000}{\sigma} = 1{,}29 \Rightarrow m-15000 = 1{,}29\sigma. \quad (1)$$

- $p(D \succ 25000) = 0{,}1 \Rightarrow p\left(T \succ \dfrac{25000-m}{\sigma}\right) = 0{,}1.$

$$\Rightarrow 1-\pi_{\left(\frac{25000-m}{\sigma}\right)} = 0{,}1 \Rightarrow \pi_{\left(\frac{25000-m}{\sigma}\right)} = 0{,}9 \Rightarrow \pi_{(t)} = 0{,}9.$$

Puisque cette probabilité est supérieure à 0,5 ; ce qui d'ailleurs être lisible sur la table de la loi normale centrée réduite. Cela implique que :

$$t = 1{,}29 \Rightarrow \frac{25000-m}{\sigma} = 1{,}29 \Rightarrow 25000-m = 1{,}29\sigma \quad (2)$$

La détermination de m et σ se fait par la résolution des deux équations (1) et (2) comme suit :

$$\begin{cases} m-15000 = 1{,}29\sigma \\ 25000-m = 1{,}29\sigma \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 20000. \\ \sigma = 3875{,}96. \end{cases}$$

2. Soit G le gain mensuel :

   a. $G = 10X - 175000 \Rightarrow E(G) = 10\times E(X) - 175000 = 25000$

   et $\sigma_{(G)} = 10\times\sigma_{(X)} = 38759{,}6.$

   Donc $G \sim N(25000\ ;\ 38759{,}6)$