*Université Abdelmalek Essaâdi*,
**Faculté Polydisciplinaire de Tétouan** ,
Licence fondamentale en Sciences Economiques et Gestion.
Année universitaire 2016-2017.

**Travaux Dirigés 1 :**
**Lois de Probabilité**

**Loi normale:**

**Exercice 1** (Détermination pratique des probabilités ((En utilisant la table de la loi normale)) :
Pour qu'une pièce fabriquée par une machine soit utilisable, sa longueur doit être comprise entre 14,7 et 15,3 cm, sinon elle est rejetée. Sachant que la longueur de cette pièce est une variable normale de paramètres 15 cm et 0,2 cm, quelle proportion de pièces peuvent être rejetées.

**Exercice 2** (Propriété d'additivité (La somme de deux ou plusieurs variables normales indépendantes)) :
Pour se rendre à son travail un ouvrier prend deux bus. La durée du trajet du premier bus est une variable normale de paramètres 27 minutes et 5 minutes. La durée du trajet du deuxième bus est une variable normale de paramètres 30 minutes et 2 minutes. Quelle est la probabilité que cet ouvrier n'arrive pas en retard s'il dispose d'une heure ?

**Exercice 3** (Le théorème central limite):
Une caisse d'assurance maladie reçoit 120 personnes pour l'obtention de remboursements. On suppose que la somme à rembourser à chaque personne est une variable aléatoire de moyenne 1000 dirhams et d'écart type 600 dirhams. La caisse dispose de 130000 dirhams. Quelle est le risque que cette somme ne soit pas suffisante pour rembourser toutes les personnes ?

**Exercice 4** (Approximation de la loi binomiale par la loi normale) :
On suppose que la probabilité qu'un étudiant réussisse un examen est de 0,8. Quelle est la probabilité qu'au moins 75 étudiants parmi 100 étudiants réussissent l'examen ?

**Exercice 5 :**
Le taux de respiration des tissus dans les diaphragmes de rats (mesuré en microlitre par mg de tissu sec et par heure) sous des conditions normales de température, est distribué suivant un loi normale et moyenne m= 2,03 et écart-type $\sigma$= 0,44. Quelle est la probabilité d'obtenir chez un rat choisi au hasard un taux d'au moins 2,5 ?

**Exercice 6 :**
Supposons que le pH d'échantillons de sol prélevés dans une région donnée soit distribué suivant une loi normale de moyenne pH=6,00 et la déviation standard 0,1. Quelle est la probabilité que le pH d'un échantillon pris au hasard dans cette région soit compris entre 5,9 et 6,15 ?

**Exercice 7 :**
Les tests de QI d'une population européenne sont distribués de maniére approximative suivant une loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 15. Quelle est la probabilité qu'un individu sélectionné au hasard ait un $QI \geq 125$? Attention: ici les tests de QI ne prennent que des valeurs entiéres; donc un $QI \geq 125$ correspond à un $QI \geq 124,5$ ; on approxime l'histogramme de la fonction de probabilité de QI avec des rectangles centrés sur les entiers par la courbe de la densité de la loi normale.

**Exercice 8 :**
Un contrôle au calibre, effectué depuis plusieursmois sur le diamètre des pièces usinées par une machine outil, indique que le pourcentage de pièces « défectueuses » est égal à 8 %.
Un échantillon de 100 pièces de la production est prélevé et le diamètre de ces pièces est vérifié. Soit X la variable aléatoire « nombre de pièces défectueuses » dans un échantillon de 100 pièces.
La variable X suit la loi binomiale B(100 ; 0,08).
Calculer, par exemple, la probabilité d'avoir au moins 10 pièces classées défectueuses dans un échantillon de 100 pièces.

**Exercice 9 :**(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)
Un échantillon d'effectif n doit être extrait d'une distribution de moyenne m et d'écart-type s. Cherche le plus petit entier n vérifiant la condition :

$$Pr(|\overline{X} - m| < \frac{\sigma}{4}) \geq 0,09$$

**Exercice 10 :**(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)
Un sac contient 6 boules dont 2 noires et 4 blanches, on effectue n tirages avec remises. A chaque tirage $1 \leq i \leq n$ on associe la variable aléatoire $X_i$ telle que:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la boule tirée est noire} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On définie alors la v.a.r. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$
1) En utilisant l'Inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $\overline{X}$ converge en probabilité vers une v.a. certaine que l'on déterminera.
2) Déterminer le nombre minimum $n_0$ de tirages nécessaires pour que $Pr(|\overline{X} - \frac{1}{3}| \geq 0,04) \leq 0,02$, en utiliser l'Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

**Loi Exponentielle :**

**Exercice 11 :**
On suppose que le temps, en heures, nécessaire pour réparer une machine est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,5$.
a) Quelle est La probabilité pour que le temps de réparation dépasse 2 heures ?
b) Sachant que la réparation a déjà dépassé 9 heures, quelle est la probabilité qu'elle prenne au moins 10 heures ?

**Exercice 12 :**
Soit X une varaible aléatoire positive de densité f et de fonction de répartition F, et soit la fonction g définie par:
$g(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}, x \in IR^+$.
Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ ($\lambda > 0$) Calculer g(x)?

**Loi du Khi-deux** ($\chi^2$) **:**(En utilisant la table de la loi du Khi-deux)

**Exercice 13 :**
Considérons une variable aléatoire X de loi $\chi^2$ à 10 degrés de liberté. Déterminer c tel que:
a)$P(X > c) = 0,10$?
b)$P(X \leq c) = 0,10$?
c)Que vaut $P(X > 2,558)$?

**Loi de Student :**

**Exercice 14 :**(En utilisant la table de la loi du Student)
Considérons une variable aléatoire X de loi Student à 7 degrés de liberté. Cherche c tel que :
a)$P(-c < X \leq c) = 0,10$?
b)$P(X > c) = 0,10$?
c)Que vaut $P(X > 0,5415)$?

~~Ex 1~~

Si on désigne par la variable la longueur des pièces, $X$ suit une loi Normale :

$$X \sim N(15\,;\,0{,}2)$$

La probabilité de rejet d'une pièce est :

$$P(\text{rejet}) = 1 - P(\text{accepter})$$

$$P(\text{accepter}) = P(14{,}3 \leq X \leq 15{,}3) = P(X \leq 15{,}3) - P(X \leq 14{,}7)$$

$$P(\text{accepter}) = P\left(\frac{X-15}{0{,}2} \leq \frac{15{,}3-15}{0{,}2}\right) - P\left(\frac{X-15}{0{,}2} \leq \frac{14{,}7-15}{0{,}2}\right)$$

$$P(\text{accepter}) = P(Z \leq 1{,}50) - P(Z \leq -1{,}50)$$

$$= P(Z \leq 1{,}50) - (1 - P(Z \leq 1{,}50))$$

$$= 2P(Z \leq 1{,}50) - 1$$

$$P(\text{accepter}) = 2 \times 0{,}93319 - 1 = 0{,}86638$$

Chaque pièce a une probabilité de 0,13362 d'être rejetée ou il y a un risque de rejet de 13% des pièces fabriquées.

~~Ex 3~~

. Désignons par $X_1$ la durée du trajet du premier bus

$$X_1 \sim N(27;5)$$

. Désignons par $X_2$ la durée du trajet du deuxième bus

$$X_2 \sim N(30;2)$$

. Désignons par $X$ la durée totale des deux trajets :

$$X = X_1 + X_2 .$$

la variable $X$ est la somme de deux variable normal indépendants, elle suit donc une loi normale :

$$X = N\left(30+27; \sqrt{5^2+2^2}\right) = N\left(57;5,4\right)$$

Pour ne pas arriver en retard la durée totale des deux trajets ne doit pas dépasser 60 minutes.

$$\underline{P}(X \leq 60) = \underline{P}\left(\frac{X-57}{5,4} \leq \frac{60-57}{5,4}\right) = \underline{P}(z \leq 956)$$

$$\Rightarrow \underline{P}(X \leq 60) = 0,7123$$

L'ouvrier a donc 71% de chance de ne pas arriver en retard ou il y a un risque de 29% d'arriver en retard.

EX3

- Désignons par $X_i$ ($i=1$ à $120$) la somme à rembourser à chaque personne.
- Désignons par $X$ la somme totale que la caisse doit payer aux personnes :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_{120} = \sum_{i=1}^{120} X_i$$

D'aprs le théorème central limite (T.C.L), on peut affirme que $X$ suite une loi normale de moyenne la somme des moyennes et l'ecart-type la racine-carrée de la somm des variance.

$$X \sim N\left(120 \times 1000 ; \sqrt{120 \times 600^2}\right) = N(12000 ; 6572,67)$$

la somme de 130000 DH ne sera pas suffisants si la somm total à rembourse aux 120 personnes dépasse : 130000 DH

$$P(X > 130000) = 1 - P(X \leq 130000)$$

$$= 1 - P\left(\frac{X - 12000}{6572,67} \leq \frac{130000 - 12000}{6572,67}\right)$$

$$\rightarrow P(X > 130000) = 1 - P(Z < 1,52) = 1 - 0,93574 = 0,0643$$

→ Il y a donc un risque de 6,5% que la somme de 130000 DH ne soit pas suffisants pour rembourser touts le personnes

$x_4$

Désignons par X le nombre d'étudiants qui réussissent l'examen.

X est une variable discrète qui prend les valeurs entiers : 0 à 100. Elle suite une loi binomiale de paramètres 100 et 0,8

$$X \rightsquigarrow B(100\,;0{,}8)$$

la probabilité qu'au moins 75 étudiants parmi 100 étudiants réussissent l'examen est : $P(X \geq 75)$.

les produits np et nq respectivement $100 \times 0{,}8 = 80$ et $100 \times 0{,}2 = 20$, ils sont supérieurs à 5.

on peut donc effectuer le calcule de cette probabilité d'une manière approchée à l'aide de la loi normale de paramètres $np = 80$ et $\sqrt{npq} = 4$

$$X \rightsquigarrow B(100\,;0{,}8) \approx N(80\,;4)$$

pour améliorer la qualité de l'approximation on ~~utilise~~ introduit la correction de continuité, la probabilité $P(X \geq 75)$ devient :

$$P(X \geq 75 + 0{,}5) = 1 - P(X < 75{,}5).$$

L-Ex4

$$P(X \geq 75{,}5) = 1 - P\left(\frac{X-80}{4} < \frac{75{,}5-80}{4}\right)$$
$$= 1 - P(Z < -1{,}13)$$

$$P(X \geq 75{,}5) = 1 - P(Z < -1{,}13)$$
$$= P(Z \leq 1{,}13)$$
$$= 0{,}8708$$

$$P(X \geq 75) \approx 0{,}8708.$$

La probabilité qu'au moins 75 étudiants parmi 100 étudiants réussissent l'examen est à peu près 0,8708.

Le calcul exact à partir de la loi binomial donne un résultat de 0,8686. on constate que l'approximation est très satisfaisante.

Ex 5

$$P(X \geq 2,5) = P\left(\frac{X - 2,03}{0,44} \geq \frac{2,5 - 2,03}{0,44}\right)$$

$$= P(t \geq 1,07)$$

ou t est une variable aléatoire de loi normale $N(0,1)$, donc c'est donné par :

$$1 - F(1,07) = 1 - P(t \leq 1,07)$$

$$= 0,1423$$

la fonction de répartition de la loi normale standard (c.réd) :

$F(z) = P(t \leq z)$ est donné dans table !

$$P(5,9 \leq P_H \leq 6,15) = P\left(\frac{5,9-6}{0,1} \leq t \leq \frac{6,15-6}{0,1}\right)$$
$$= P(-1 \leq t \leq 1,5)$$
$$= P(z \leq 1,5) - P(z \leq -1)$$
$$= F(1,5) - F(-1)$$
$$= 0,9332 - 0,1587$$
$$= 0,7755.$$

Quelle valeur A de $P_H$ ne sera dépassée que par 5% de toutes les mesures ?

on cherche A tel que $P(P_H \leq A) = 0,95$.

donc $\frac{A-6}{0,1} = z$ avec $F(z) = P(z \leq z) = 0,95$

Ce qui donne $z = 1,645$ donc $A = 6,1645$

La loi normale est souvent utilisé comme approximation d'une loi d'une variable discrète.

Ex 7

* On approxime l'histogramme de la fonction de probabilité de QI avec des rectangles centrés sur les entiers par la courbe de la densité de la loi normale

$$\cdot \ P(QI \geqslant 125) = P\left(\frac{QI - 100}{15} \geqslant \frac{124{,}5 - 100}{15}\right)$$

$$= P(Z \geqslant 1{,}63) = 1 - F(z).$$

(où $Z$ est une v.a de loi normale $N(0,1)$)

$$= 1 - F(z)$$
$$= 1 - F(1{,}63)$$
$$= 1 - P(Z \leq 1{,}63)$$
$$= 1 - 0{,}9484 = 0{,}0516.$$

Un grand nombre de méthodes de statistique (inférentielle sont basées sur l'hypothèse que la v. que l'on "échantillon" suit une loi normale. Quand on a un grand échantillon.

Ex : 8 La variable $X \leadsto B(100; 0,08)$ ← loi binomiale

Comme, $np = 100 \times 0,08 = 8 > 5$ et

$n(1-p) = 100 \times 0,92 = 92 > 5$, on peut utiliser

l'approximation par la loi normale $N(8; 2,713)$

la moyenne $m = np = 8$ et la variance est égale à

$np(1-p) = 7,36 = (2,713)^2$

En utilisant cette approximation, on peut calculer, par exemple, la probabilité d'avoir au moins 10 pièces classées défectueuses dans un échantillon de 100 pièces, soit $P(X \geq 10)$ qui devient avec la correction de continuité $P(X > 9,5)$ :

$$P(X > 9,5) = P\left(\frac{X-8}{2,713} > \frac{9,5-8}{2,713}\right)$$

$$= P(Z > 0,552)$$

$$= 0,2903.$$

avec $Z \leadsto N(0,1)$.

Ex 10

1) $E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X=x_i) = 1\times\frac{1}{3} + 0\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} EX_i = \frac{1}{n}\times n\times\frac{1}{3}$

$= \frac{1}{3}$.

$\rightarrow E(\bar{X}) = \frac{1}{3}$.

$V(X_i) = E(X_i)^2 - (EX_i)^2$

$E(X_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X=x_i) = 1^2\times\frac{1}{3} + 0^2\times\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$\rightarrow V(X_i) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

d'après l'inégalité de Bienaymé - Tchebychev.

$\forall \varepsilon > 0 \; P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$.

on remplace $X$ par $\bar{X}$ on aura;

$\forall \varepsilon > 0 \; P(|\bar{X} - E(\bar{X})| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(\bar{X})}{\varepsilon^2}$.

et $V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \frac{1}{n^2}\times n\times\frac{2}{9} = \frac{2}{9\times n}$.

soit $P\left(|\bar{X} - \frac{1}{3}| \geqslant \varepsilon\right) < \frac{2}{9n\varepsilon^2}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{9n\varepsilon^2} = 0$, donc $\bar{X} \xrightarrow{P} \frac{1}{3}$.

2) Il suffit que $\frac{2}{9n\times(0{,}44)^2} \leqslant 0{,}02$, soit $n \geqslant 6944$

on choisit $n = n_0 = 6944$.

Ex 11

1) la densité de probabilité est : $f(t) = 0,5\, e^{-0,5t}$.

et la fonction de répartition $F(t) = 1 - e^{-0,5t}$.

la probabilité pour que le temps de réparation dépasse 2 heures est :

$$P(T>2) = 1 - P(T<2) = 1 - F(2) = e^{-1} = 0,368.$$

2) sachant que la réparation a déjà dépassé 9 heures, Quelle est la probabilité qu'elle prenne au moins 10 heures ?

la loi exponentielle étant une loi sans « mémoire », on obtient :

$$P(T>10 / T>9) = P(T > 10 - 9 = 1)$$
$$= P(T>1) = e^{-0,5} = 0,606.$$

Ex:12. $X \sim \exp(\lambda)$ calculer $g(x)$ !

comme $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ càd $F'(x) = f(x)$.

$\rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, et comme $F(x)$ est la primitive de $f(x)$.

$\rightarrow F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t}\,dt = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}$ et $1 - F(x) = e^{-\lambda x}$.

donc $g(x) = \dfrac{f(x)}{1 - F(x)} = \dfrac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda$

Ex : 9 on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. à la variable $\bar{X}$ qui a pour moy $m$ et pour variance $\frac{\sigma^2}{n}$ :

$$P\left(|\bar{X} - m| \leq \frac{k\sigma}{\sqrt{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

$$\rightarrow 1 - \frac{1}{k^2} = 0,99$$

$$\Rightarrow \frac{k}{\sqrt{n}} = \frac{1}{4} \Rightarrow n = 1600.$$

~~Ex n°3~~

$X \rightsquigarrow \chi^2(10)$

- $P(X > c) = 0{,}10$?

on se place à l'intersection de la ligne degré de liberté $n = 10$ et $P = 0{,}10$ et on obtient :

$$c = 15{,}987.$$

- $P(X \leq c) = 0{,}10$? la table de $\chi^2$ donne la probabilité $P(X \geq c)$ et non $P(X \leq c)$. Il suffit donc d'écrire $P(X \leq c) = 1 - P(X > c)$ et on trouve $c$ tel que : $P(X > c) = 0{,}9$

soit : $c = 4{,}865$.

- $P(X > 2{,}558)$? Il faut trouver :

$c = 2{,}558$ à l'intérieur du tableau $\chi^2$ sur la ligne $n = 10$ et on obtient :

$$P(X > 2{,}558) = 0{,}99.$$

Ex. 14 $X \rightsquigarrow \mathcal{T}_{(10)}$

la table donne les valeurs de $P(|X| \geq t)$

on cherche $P(X \leq t)$?

- $P(-t < X \leq t) = 0,10$?

on se place à l'intersection de la ligne degré de liberté $n = 10$ et $P = P(|X| \geq t) = 0,90$ et on obtient : $t = 0,128$

- $P(X > t) = 0,10$?

on ne peut pas lire directement dans la table, mais du fait de la symétrie de la densité, on peut écrire

$$P(|X| \geq t) = 2P(X > t) = 0,20 \text{ et ainsi},$$

on cherche $t$ tel que $P = 0,20$ càd $t = 1,3722$.

- $P(X > 0,54415)$?

A l'intérieur de la table, à la ligne degré de liberté $n = 10$, on voit que $P(|X| \geq 0,5415) = 0,60$,

on en déduit que :

$$P(X > 0,5415) = \frac{1}{2}\left(P(|X| \geq 0,5415)\right)$$

$$= 0,3.$$

*Université Abdelmalek Essaâdi ,*
**Faculté Polydisciplinaire de Tétouan ,**
Licence fondamentale en Sciences Economiques et Gestion.
Année universitaire 2016-2017.

**Travaux Dirigés 2:**
**Echantillonnage**

**Exercice 1 :** (Construction d'un échantillon : Stratifications proportionnelle et optimale)
Le tableau ci-après, établi la répartition des 10000 étudiants d'une faculté de Droit et d'Economie en licence selon le niveau d'étude et le sexe:

| Niveau<br>Sexe | $S_1$ | $S_2$ | $S_3$ | $S_4$ | $S_5$ | $S_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Masculin | 2000 | 1600 | 1000 | 900 | 400 | 250 |
| Féminin | 1500 | 900 | 600 | 500 | 200 | 150 |

On se propose de réaliser une enquete auprès d'un échantillon de 1000 étudiants pour obtenir des informations sur la qualité de l'enseignement au sein de cette faculté. Comment répartir cet échantillon entre les différentes strates des 10000 étudiants, en tenant compte du niveau et du sexe ?

**Exercice 2 :** (La méthode des Quotas)
Sur une population de 15000 entreprises étudiées selon le chiffre d'affaires (variable X) et le nombre d'employés (variable Y). On obtient les résultats suivants:

| X(en milliers de DH) | Effectifs | Y | Effectifs |
|---|---|---|---|
| 0-50 | 5500 | 0-10 | 7050 |
| 50-100 | 4500 | 10-50 | 3700 |
| 100-200 | 1750 | 50-100 | 2500 |
| 200-500 | 2000 | 100-500 | 1500 |
| 500-1000 | 500 | $> 500$ | 250 |
| $> 1000$ | 750 | | |
| Total | 15000 | Total | 15000 |

Soit un taux de sondage de 0,10. Quelle méthode peut-on utiliser pour déterminer un échantillon ? On supposera que l'institut responsable du sondage dispose de 30 enqueteurs.
Expliquez votre démarche et les concepts utilisés.

**Exercice 3 :** (La méthode des Quotas)
Soit une population étudiée selon deux variable, l'age des individus et le nombre d'enfants par individus. Les modalités de la première varaible sont inférieures à 20 ans ; de 20 à 25 ans ; de 25 à 30 ans ; de 30 à 35 ans ; de 35 à 40 ans et supérieur ou égal à 40 ans.
Les modalités pour la seconde variable sont 0 enfant; 1 enfant ; 2 enffants ; 3 enffants ; 4 enffants ; supérieur ou égal à 5 enffants.
Les effectifs obtenus en fonction des modalités ci-dessus sont:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Première variable | 110 | 150 | 200 | 250 | 190 | 100 |
| Deuxième variable | 50 | 550 | 100 | 150 | 75 | 75 |

Un organisme de sondage dispose de 10 enqueteurs. Chaque enqueteur doit faire 20 interviews. L'institut de sondage décide d'un taux de sondage de 20%.
a) Définir les variable de controle.
b)Définir le taux de sondage et donner les effectifs de l'échantillon et de la population.
c)Donner le principe de la méthode des Quotas.
d) Applique la méthodes des quotas à l'exemples ci-dessus.
e)Donner la structure d'interviews(en fonction des variable de controle) que doit faire chaque enqueteur.
f) Donner les conditions de mise en oeuvre de la méthode des quotas.

## Table 11 : Quantiles $\chi^2_{v,p}$ de la variable $\chi^2_v$

$$p\left(\chi^2_v \le \chi^2_{v,p}\right) = p$$

| $v$ | $p$ | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0.005 | 0.01 | 0.025 | 0.05 | 0.075 | 0.10 | 0.90 | 0.925 | 0.95 | 0.975 | 0.99 | 0.995 |
| 1 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 2.71 | 3.17 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 |
| 2 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.10 | 0.16 | 0.21 | 4.61 | 5.16 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.60 |
| 3 | 0.07 | 0.11 | 0.22 | 0.35 | 0.47 | 0.58 | 6.25 | 6.90 | 7.81 | 9.35 | 11.35 | 12.84 |
| 4 | 0.21 | 0.30 | 0.48 | 0.71 | 0.90 | 1.06 | 7.78 | 8.50 | 9.49 | 11.14 | 13.28 | 14.86 |
| 5 | 0.41 | 0.55 | 0.83 | 1.15 | 1.39 | 1.61 | 9.24 | 10.01 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 |
| 6 | 0.68 | 0.87 | 1.24 | 1.64 | 1.94 | 2.20 | 10.65 | 11.47 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 |
| 7 | 0.99 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.53 | 2.83 | 12.02 | 12.88 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.14 | 3.49 | 13.36 | 14.27 | 15.51 | 17.54 | 20.09 | 21.96 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 3.78 | 4.17 | 14.68 | 15.63 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.46 | 4.87 | 15.99 | 16.97 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.12 | 5.58 | 17.28 | 18.29 | 19.68 | 21.92 | 24.73 | 26.76 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 5.82 | 6.30 | 18.55 | 19.60 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 6.52 | 7.04 | 19.81 | 20.90 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.24 | 7.79 | 21.06 | 22.18 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 7.97 | 8.55 | 22.31 | 23.45 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 8.71 | 9.31 | 23.54 | 24.72 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 9.45 | 10.09 | 24.77 | 25.97 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.21 | 10.86 | 25.99 | 27.22 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 10.97 | 11.65 | 27.20 | 28.46 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 11.73 | 12.44 | 28.41 | 29.69 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.28 | 11.59 | 12.50 | 13.24 | 29.62 | 30.92 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 13.28 | 14.04 | 30.81 | 32.14 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 |
| 23 | 9.26 | 10.20 | 11.69 | 13.09 | 14.07 | 14.85 | 32.01 | 33.36 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 |
| 24 | 9.89 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 14.85 | 15.66 | 33.20 | 34.57 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 |
| 25 | 10.52 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 15.65 | 16.47 | 34.38 | 35.78 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 |
| 26 | 11.16 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 16.44 | 17.29 | 35.56 | 36.98 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 |
| 27 | 11.81 | 12.88 | 14.57 | 16.15 | 17.24 | 18.11 | 36.74 | 38.18 | 40.11 | 43.20 | 46.96 | 49.65 |
| 28 | 12.46 | 13.57 | 15.31 | 16.93 | 18.05 | 18.94 | 37.92 | 39.38 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 |
| 29 | 13.12 | 14.26 | 16.05 | 17.71 | 18.85 | 19.77 | 39.09 | 40.57 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 |
| 30 | 13.79 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 19.66 | 20.60 | 40.26 | 41.76 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 |
| 31 | 14.46 | 15.66 | 17.54 | 19.28 | 20.49 | 21.43 | 41.42 | 42.95 | 44.99 | 48.23 | 52.19 | 55.00 |
| 32 | 15.13 | 16.36 | 18.29 | 20.07 | 21.30 | 22.27 | 42.59 | 44.13 | 46.19 | 49.48 | 53.49 | 56.33 |
| 33 | 15.82 | 17.07 | 19.05 | 20.87 | 22.12 | 23.11 | 43.75 | 45.31 | 47.40 | 50.73 | 54.78 | 57.65 |
| 34 | 16.50 | 17.79 | 19.81 | 21.66 | 22.94 | 23.95 | 44.90 | 46.49 | 48.60 | 51.97 | 56.06 | 58.96 |
| 35 | 17.19 | 18.51 | 20.57 | 22.47 | 23.76 | 24.80 | 46.06 | 47.66 | 49.80 | 53.20 | 57.34 | 60.28 |
| 36 | 17.89 | 19.23 | 21.34 | 23.27 | 24.59 | 25.64 | 47.21 | 48.84 | 51.00 | 54.44 | 58.62 | 61.58 |
| 37 | 18.59 | 19.96 | 22.11 | 24.08 | 25.42 | 26.49 | 48.36 | 50.01 | 52.19 | 55.67 | 59.89 | 62.88 |
| 38 | 19.29 | 20.69 | 22.88 | 24.88 | 26.25 | 27.34 | 49.51 | 51.17 | 53.38 | 56.90 | 61.16 | 64.18 |
| 39 | 20.00 | 21.43 | 23.65 | 25.70 | 27.09 | 28.20 | 50.66 | 52.34 | 54.57 | 58.12 | 62.43 | 65.48 |
| 40 | 20.71 | 22.16 | 24.43 | 26.51 | 27.93 | 29.05 | 51.81 | 53.50 | 55.76 | 59.34 | 63.69 | 66.77 |
| 41 | 21.42 | 22.91 | 25.22 | 27.33 | 28.77 | 29.91 | 52.95 | 54.66 | 56.94 | 60.56 | 64.95 | 68.05 |
| 42 | 22.14 | 23.65 | 26.00 | 28.14 | 29.61 | 30.77 | 54.09 | 55.82 | 58.12 | 61.78 | 66.21 | 69.34 |
| 43 | 22.88 | 24.40 | 26.79 | 28.97 | 30.45 | 31.63 | 55.23 | 56.98 | 59.30 | 62.99 | 67.46 | 70.62 |
| 44 | 23.58 | 25.15 | 27.58 | 29.79 | 31.29 | 32.49 | 56.37 | 58.13 | 60.48 | 64.20 | 68.71 | 71.89 |
| 45 | 24.31 | 25.90 | 28.37 | 30.61 | 32.14 | 33.35 | 57.51 | 59.29 | 61.66 | 65.41 | 69.96 | 73.17 |
| 46 | 25.04 | 26.66 | 29.16 | 31.44 | 32.99 | 34.22 | 58.64 | 60.44 | 62.83 | 66.62 | 71.20 | 74.44 |
| 47 | 25.78 | 27.42 | 29.96 | 32.27 | 33.84 | 35.08 | 59.77 | 61.58 | 64.00 | 67.82 | 72.44 | 75.70 |
| 48 | 26.51 | 28.18 | 30.76 | 33.10 | 34.69 | 35.95 | 60.91 | 62.74 | 65.17 | 69.02 | 73.68 | 76.97 |
| 49 | 27.25 | 28.94 | 31.56 | 33.93 | 35.54 | 36.82 | 62.04 | 63.69 | 66.34 | 70.22 | 74.92 | 78.23 |

***Université Abdelmalek Essaâdi ,***
**Faculté Polydisciplinaire de Tétouan ,**
Licence fondamentale en Sciences Economiques et Gestion.
Année universitaire 2016-2017.

**Travaux Dirigés 3 :**
**Distribution d'échantillonage**

**Exercice 1:** Une population est constituée des 5 nombres : 2 ; 3 ; 6 ; 8 ; 11. On considère tous les échantillons aléatoires non exhaustifs de taille 2.

Trouver:
1. La moyenne et l'écart-type de la population.
2. La moyenne et l'écart-type de la distribution d'échantillonnage des moyennes dans le cas d'un tirage indépondant.
3. Résoudre le problème dans le cas ou les échantillons sont exhaustifs.

**Exercice 2:** Etant donné deux ensembles A et B, avec:

$$A = \{1; 3; 4\} \ \ et \ \ B = \{2; 5\}$$

1.Former la distribution D d'échantillonnage des différences (A-B).
2.Calculer la moyenne de D.
3. Calculer l'écart-type de D.

**Exercice 3:** Une population $E$ est composée de quatre éléments suivants:

$$E = \{1; 2; 4; 6\}.$$

1. Calculer la proportion $p$ des chiffres impairs.

2.
a) Donner tous les échantillons de taille, deux, qui peuvent etre extraits, avec remise de la population $E$.
b) Calculer pour chacun des échantillons précédents la fréquence $f$ des chiffres impairs.
c) Calculer la moyenne $\mu_f$ de la distribution d'échantillonnage des fréquence $f$.
d) Calcule l'écart-type $\sigma_f$ de la distribution d'échantillonnage des fréquences $f$.
3. Répondre à la question précédente en considérant un tirage sans remise.

**Exercice 4:** Supposons qu'une population est constituée des unités statistiques dont le caractère mesurable de chacun est:

$$x_1 = 2; \ \ x_2 = 4; \ \ x_3 = 6; \ \ x_4 = 8; \ \ x_5 = 10.$$

1.Quelles sont la taille $N$ de la population, la moyenne et la variance ?
2.On veut prélever de cette population des échantillons de taille $n = 2$ en effectuant un tirage sans remise et calculer la moyenne de chacun.
3. Déterminer les paramétres de la distribution d'échantillonnage de $\overline{X}$
4. Laquelle des deux relations peut-on vérifier?

$$V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad ou \quad V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n}.\frac{N-n}{N-1}$$

5. Quel est le taux de sondage? Doit-on ignorer le facteur de correction pour le calcul de $V(X)$

**Exercice 5:** On suppose que les poids de 3000 étudiants d'une université suivent une loi normale de moyenne 68kg et d'écart-type 3kg.

1.Quelle est la moyenne et l'écart-type d'échantillonnage des moyennes si l'on extrait 80 échantillons de 25 étudiants chacun.
a) Dans le cas d'un tirage non exhaustif.
b) Dans le cas d'un tirage exhaustif

2. Pour combien d'échantillons peut-on s'attendre à trouver une moyenne:

a) Comprise entre 68,3kg et 68,8kg
b) Inférieure à 68,4kg.

**Exercice 6:** Le directeur de ressources humaines d'une entreprise a établi que les résultats à un test mesurant la dextérité manuelle de la main d'oeuvre affectée à des taches d'assemblages de pièces complixes sont distribués d'après la loi normale de moyenne $m = 72$ et de variance $\sigma^2 = 36$.

1.Quelle est la probabilité qu'un employé sélectionné au hasard obtienne un résultat inférieur à 63 au test de dextérité manuelle?
2.Un échantillon aléatoire de 25 employés a subi le test de dextérité manuelle.
i) Quelle est la distribution de la moyenne de l'échantillon?
ii) Quels sont la moyenne et l'écart-type de la distribution de la moyenne ?
3.Quelle est la probabilité que la moyenne de cet échantillon se situe entre 69 et 75 ?
4.Quelle est la probabilité que l'écart-type entre la moyenne de cet échantillon et celle de la population soit supérieur à 3 ?

**Exercice 7:** On suppose que les étudiants d'un cours de Echantillonnage, Estimation aient des notes normalement distribuées avec une moyenne $m = 72$ et un écart-type $\sigma = 9$.

1. Trouver la probabilité pour qu'un seul étudiant choisit au hasard ait une note supérieure à 80.
2. Trouver la probabilité pour qu'un échantillon aléatoire de 10 étudiants ait une note moyenne supérieure à 80.
3.Répondre à la question précédente (2.) en supposant que la population ne suit pas une loi normale.

**Exercice 8:** La taille d'une population d'étudiants suit une loi normale de moyenne égale à 1,70 m et un écart-type égale à 0,8 m. Si un échantillon de 10 étudiants est prélevé, quelle est la probabilité pour que la moyenne de l'échantillon s'écarte de 6 cm de la moyenne de la population m.

**Exercice 9:** La moyenne de poids de métal contenu dans une certaine marque de cables pour automoblie est de 355g et la variance de $15g^2$. De plus après plusieures controles de qualité il s'avère que $0,7\%$ des cables ne sont pas conforme aux exigences des clients importateurs. On se propose de tirer un échantillon de taille 40, donner pour un tel échantillon les notations et les valeurs respectives de :

1. L'espérance de la moyenne,
2. La variance de la moyenne,
3. L'espérance de la variance,
4. L'espérance de la proportion des cables non conformes,
5. La variance de la proportion des cables non conformes.

**Exercice 10:** Un bureau de conseil en organisation et méthodes auprès des entreprises a mis au point un système d'appréciation ou d'évaluation de cadres d'entreprise. Diverses caractéristiques des cadres sont évaluées et on a établi sur une période de quatre ans que le score global à cette batterie de tests était distribué normalement avec une moyenne $m = 600$ et un écart-type $\sigma = 50$. Supposons qu'on fait subir à un échantillon aléatoire de 25 cadres d'une multinationale l'ensemble des tests.

1.Caractériser la distribution d'échantillonnage de la moyenne en précisant la forme, la moyenne et la variance.
2.Quelle est la probabilité que la moyenne de cet échantillon soit comprise entre 590 et 610 ?.
3.Dans $95\%$ des cas, autour de m, la moyenne d'échantillon peut varier entr quelle valeurs?.

**EX : 1** * Solution *

1 : la moyenne et l'écart-type de la population sont donnés comme suit :

$$m = \frac{\sum_{s=1}^{N} (X_s)}{N} = \frac{(2+3+6+8+11)}{5} = 6 .$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{s=1}^{N} (X_s^2)}{N} - m^2 = 10,6 .$$

2 : la moyenne et la variance de l'échantillonnage des moyennes dans le cas d'un tirage indépende sont données comme suit !

$$E(\bar{X}) = m = 6 \quad , V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{10,8}{2} = 5,4$$

3. Dans le cas d'un tirage exhaustif on sonsremise la moyenne et la variance de la moyenne de l'échantillonn sont données comme suit :

$$E(\bar{X}) = m = E(X) = 6 \quad ; V(\bar{X}) = \left(\frac{\sigma^2}{n}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \left(\frac{10,8}{2}\right)\left(\frac{5-2}{5-1}\right) = 5,4 \times 0,75 = 4$$

**EX : 2**

1 : les échantillon que l'on peut formé à partir de (A-B) sont com suit ! $(1-2)$ ; $(3-2)$ ; $(4-2)$ ; $(1-5)$ ; $(3-5)$ ; $(4-5)$.

Soit la distribution D suivante : $(-1)$ ; $(1)$ ; $(2)$ ; $(-4)$ ; $(-2)$ ; $(-$

2 : soit $\mu_{(D)}$ qui désigne la moyenne de D, donnée comme suit

$$\mu_{(D)} = \frac{-1+1+2+\dots-1}{6} = -\frac{5}{6}$$

on peut remarquer aussi que $\mu_{(D)} = \mu_{(A)} - \mu_{(B)} = \frac{8}{3} - \frac{7}{2} = -\frac{5}{6}$

3 : la variance de D est par définition égale à ;

$$\sigma^2_{(D)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (\mu_{(D)})^2 \; ; \; \sigma^2_{(D)} = \frac{1+16+1+4+4+1}{6} - \left(-\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{137}{36}$$

$$\Rightarrow \sigma_{(D)} = 1,95$$

Il convient de notre que : $\sigma^2_{(D)} = \sigma^2_{(A)} + \sigma^2_{(B)}$.

EX: 3 1: calculer la population paires chiffres impa

$$\frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{1}{4} = 0,25$$

2: a. les échantillons de taille deux, qui peuvent être entraite avec remise de la population E sont au nombre de $4 \times 4 = 16$ (c'est un arrangement avec répetition de p d'entre les n éléments, a $p = 2$ et $n = 4$, soit au total $A_4^2 = 4^2 = 16$ échantillon, ils sont donnés dans le tableau ci-après :

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1;1) | (1;2) | (1;4) | (1;6) |
| (2;1) | (2;2) | (2;4) | (2;6) |
| (4;1) | (4;2) | (4;4) | (4;6) |
| (6;1) | (6;2) | (6;4) | (6;6) |

b. Pour chacun des 16 échantillon précédents la fréquence des chiffres impairs est respectivement :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,5 | 0,5 | 0,5 |
| 0,5 | 0 | 0 | 0 |
| 0,5 | 0 | 0 | 0 |
| 0,5 | 0 | 0 | 0 |

c. la moyenne $\gamma_{(f)}$ de la distribution d'échantillonnage des fréquenc précédents est : $\gamma_{(f)} = \frac{1+0,5+0,5+0,5+\cdots+0+0}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} = 0,25 = p$.

d: l'écart-type $\sigma_{(f)}$ de la distribution d'échantillonnage des fréqu f est défini par :

$$\sigma_{(f)} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{16}(f_i - \gamma_{(f)})^2}{16}}.$$

$$\sigma_{(f)} = \sqrt{\frac{(1-0,25)^2 + 6\times(0,5-0,25)^2 + 9(0-0,25)^2}{16}} = 0,306.$$

l'écart-type $\sigma_{(f)}$ de la distribution d'échantillonnage des fréquen f défini à partir de la théorie est : $\sigma_{(f)} = \sqrt{\frac{pq}{n}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}}{2}} = 0,306$

**EX : 4** 1) la taille $N = 5$

la moyenne $\mu = \frac{\sum x_i}{5} = 6$, la variance $V = \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \mu^2 = 8$

2) On a $C_5^2$ échantillon possible $C_5^2 = 10$

| Echantillon | moyenne |
|---|---|
| (2;4) | 3 ← $\overline{x}_1$ |
| (2;6) | 4 |
| (2;8) | 5 |
| (2;10) | 6 |
| (4;6) | 5 |
| (4;8) | 6 |
| (4;10) | 7 |
| (6;8) | 7 |
| (6;10) | 8 |
| (8;10) | 9 |

3) $E(\overline{X}) = \frac{\sum \overline{x}_i}{10} = 6 = \mu$

$\sigma^2(\overline{X}) = \frac{1}{10} \sum \overline{x}_i^2 - \mu^2 = 3$

4) puisque la taille de l'échantillon dépasse 5% de la taille de la population

$V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1} = \frac{8}{4} \times \frac{5-}{5}$
$= 3$

5) $\frac{n}{N} = \frac{2}{5} = 0,4$

le taux de sondage est égale à 40%, on ne peut pas alors de co ignorer le facteur de correction.

**EX 3** D'après l'énoncé de l'exercice on a :

$N = 3000$ ; $m = 68$ ; $\sigma = 3$.

X désigne le poids des étudiants, avec $X \sim N(m;3)$

**1.** La moyenne et l'écart-type d'échantillonnage des moyennes si l'on extrait 80 échantillons de 25 étudiants chacun sont données comme suit :

a) Dans le cas d'un tirage non exhaustif :

$$E(\bar{X}) = m = 68 \quad \text{et} \quad \sigma_{(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{5} = 0,6$$

b) Dans le cas d'un tirage exhaustif :

$$E(\bar{X}) = m = 68$$

et $$\sigma_{(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{3}{5} \times \sqrt{\frac{3000-25}{3000-1}} \simeq \frac{3}{5} = 0,6$$

Il convient de noter que $\sigma_{(\bar{X})_{T.S.R}} \simeq \sigma_{(\bar{X})_{T.A.S}}$ puisque le coefficient d'exhaustivité $\frac{N-n}{N-1} \sim 1$ et le rapport $\frac{n}{N} \sim 0$.

**2. a :** puisque $X \sim N(m;\sigma) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(E(\bar{X});\sigma_{(\bar{X})}\right)$

(Ou si $X \sim N(m, V(x)) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(E(\bar{x}), V(\bar{x})\right)$)

Donc, le nombre d'échantillons dont la moyenne est comprise entre :

EX : 5 → suite

68,3 Kg et 68,8 Kg et calculé comme suit :

$$P(68{,}3 \leq \overline{X} \leq 68{,}8) = P\left(\frac{68{,}3-68}{0{,}6} \leq \frac{\overline{X}-68}{0{,}6} \leq \frac{68{,}8-68}{0{,}6}\right)$$

$$= P(0{,}5 \leq T \leq 1{,}33) \Rightarrow F(1{,}33) - F(0{,}5)$$

$$= 0{,}9066 - 0{,}6915 = 0{,}2151.$$

D'où le nombre d'échantillon dont la moyenne est compris entre 68,3 Kg et 68,3 Kg est égal à 80×0,2151 = 17 échantillon.

b. De la même façon, on va calculer le nombre d'échantillon dont la moyenne est inférieure à 68,4 Kg

$$P(\overline{X} \leq 68{,}4) = P\left(T \leq \frac{68{,}4-68}{0{,}6}\right) = P(T \leq 0{,}67)$$

$$\Rightarrow F(0{,}67) = 0{,}7486.$$

D'où le nombre d'échantillons dont la moyenne est inférieur à 68,4 kg. est égale à 80×7486 = 6 échantillon.

$\boxed{EX : 6}$ $X \rightsquigarrow N(72, 6)$

1) $P(X < 63) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{63 - 72}{6}\right)$

$= P(Z < -1{,}5) = 1 - F(1{,}5)$

$= 1 - 0{,}933$

$= 0{,}0668.$

2) i) distribution de la moyenne de l'échantillon :

$n = 25$

ii) $\bar{X} \rightsquigarrow N\left(72 ; \frac{6}{\sqrt{25}}\right) = N(72 ; 1{,}2)$

3) $P(69 < \bar{X} < 75) = P\left(\frac{69 - 72}{1{,}2} < Z < \frac{75 - 72}{1{,}2}\right)$

$= 2F(2{,}5) - 1 = 0{,}9876.$

$P(|\bar{X} - 72| > 3) = 1 - P(|\bar{X} - 72| < 3)$

$= 1 - P(69 < \bar{X} < 75)$

$= 1 - 0{,}9876$

$= 0{,}012.$

**EX 7**

1. Soit la v.a $X$ qui désigne les notes des étudiants
D'après l'énoncé de l'exercice, $X$ suit une loi normale de paramètres :

$E(X) = m = 72$ et $\sigma_{(X)} = \sigma = 9$ $\left(X \rightsquigarrow N(72; 9)\right)$

Donc la probabilité pour qu'un seul étudiant choisi au hasard ait une note supérieure à 80 est calculée comme suit :

$P(X > 80) = P\left(\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)} > \dfrac{80 - 72}{9}\right) = P(Z > 0,$

$\Rightarrow 1 - P(Z \leq 0,89) = 1 - F(0,89) = 1 - 0,8133 = 0,186$

2) puisque $X \rightsquigarrow N(72; 9) \Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow N\left(E(\bar{X}); \sigma_{(\bar{X})}\right)$

avec : $E(\bar{X}) = E(X) = m = 72$ et $\sqrt{V(\bar{X})} = \sigma_{(\bar{X})} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \dfrac{9}{\sqrt{10}}$

Donc la prob pour qu'un éch aléatoire de 10 étudiants ait une note moy sup à 80 est calculée comme suit :

$P(\bar{X} > 80) = P\left(\dfrac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma_{(\bar{X})}} > \dfrac{80 - 72}{\left(\frac{9}{\sqrt{10}}\right)}\right) = P(T > 2,8$

$= 0,0026$

3) Si $X$ ne suit pas une loi normale alors on supposera que $\bar{X}$ suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté $(10-1=9)$.

Dans ce cas $P(\bar{X} > 8) = P(T > 2,8) = 0,02$.

**EX : 8** soit la v.a X qui désigne la taille des étudiants. Pour un échantillon de 10 étudiants on sait que :

$$E(\overline{X}) = m = 1,70$$

$$V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{0,8^2}{10} = 0,064 \Rightarrow \sigma_{(\overline{X})} = 0,2$$

la prob pour que la moyenne de l'échantillon s'éca de 6 cm de la moyenne de la population m st calculée comme suit :

$$P\left(E(\overline{X}) - 0,06 \leq \overline{X} \leq E(\overline{X}) + 0,06\right) \Rightarrow P(m - 0,06 \leq \overline{X} \leq m +$$

$$\Rightarrow P(1,7 - 0,06 \leq \overline{X} \leq 1,7 + 0,06) \Rightarrow P(1,64 \leq \overline{X} \leq 1,$$

puisque $X \rightsquigarrow N(m ; \sigma) \Rightarrow \overline{X} \rightsquigarrow N\left(E(\overline{X}) ; \sigma_{(\overline{X})}\right)$.

donc $T = \frac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sigma_{(\overline{X})}} \rightsquigarrow N(0,1)$.

$$\rightarrow P(1,64 \leq \overline{X} \leq 1,76) \Rightarrow P\left(\frac{1,64 - m}{\sigma_{(\overline{X})}} \leq \frac{\overline{X} - m}{\sigma_{(\overline{X})}} \leq \frac{1,76 - m}{\sigma_{(\overline{X})}}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1,64 - 1,7}{0,25} \leq T \leq \frac{1,76 - 1,7}{0,25}\right) = P(-0,24 \leq T \leq 0,24) = 0,1891$$

$$\simeq 19\%$$

Donc, on a 19 chance sur 100, pour que la moyenne de l'échantillon soit comprise entre 1,64 m et 1,76 m.

## EX : 9

. on a $E(X) = 355$ ; $V(X) = 1,5$

$p = 0,007$ ; $n = 4$

1) l'espérence de la moyenne : $E(\bar{X}) = 355$

2) $V(\bar{X}) = \dfrac{1,5}{40} = 0,03$

3) $E(S^2) = \dfrac{n-1}{n} \times \sigma^2 = \dfrac{39}{40} \times 1,5 = 1,4625$.

4) $E(f) = p = 0,007$.

5) $V(f) = \dfrac{p(1-p)}{n} = \dfrac{0,007 \times 0,993}{40} = 1,73.10^{-4}$.

## EX : 10

la population est normale et infinie.

1) on a : $\mu = 600$ ; $\sigma = 50$ ; $n = 25$

$\bar{X} \leadsto N\left(600, \dfrac{50}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \bar{X} \leadsto N(600, 10)$, $V(\bar{X}) = 1$

2) $P(590 < \bar{X} < 610) = P\left(\dfrac{590-600}{10} < Z < \dfrac{610-600}{10}\right)$

$= P(-1 < Z < 1) = 2F(1) - 1 = 0,68$.

3) cherchons $x$ tel que :

$P(\mu - x < \bar{X} < \mu + x) = 0,95$

$\Rightarrow P(-x < \bar{X} - \mu < x) = 0,95$

$\Rightarrow P\left(\dfrac{-x}{10} < Z < \dfrac{x}{10}\right) = 0,95$

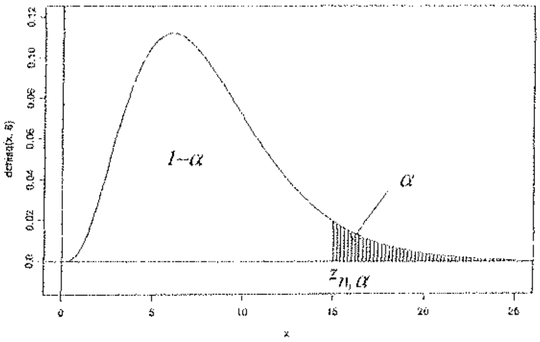
$\Rightarrow 2F\left(\dfrac{x}{10}\right) - 1 = 0,95$

$\Rightarrow F\left(\dfrac{x}{10}\right) = 0,975 \Rightarrow \dfrac{x}{10} = 1,96 \Rightarrow \boxed{x = 19,6}$

# TABLE DE LA LOI DU $\chi^2$

$X$ étant une variable aléatoire de loi du $\chi^2$ à $n$ degrés de liberté, et $\alpha$ un réel de $[0,1]$, la table donne la valeur $z_{n,\alpha} = F^{-1}_{\chi^2_n}(1-\alpha)$, telle que $P(X > z_{n,\alpha}) = \alpha$.

En R, la commande correspondante est `qchisq(1-alpha,n)`.




| $n$ \ $\alpha$ | 0.995 | 0.990 | 0.975 | 0.95 | 0.9 | 0.8 | 0.7 | 0.5 | 0.3 | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.00004 | 0.0002 | 0.001 | 0.004 | 0.02 | 0.06 | 0.15 | 0.46 | 1.07 | 1.64 | 2.71 | 3.84 | 5.02 | 6.63 | 7.88 | 10.80 |
| 2 | 0.01 | 0.02 | 0.05 | 0.10 | 0.21 | 0.45 | 0.71 | 1.39 | 2.41 | 3.22 | 4.61 | 5.99 | 7.38 | 9.21 | 10.60 | 13.82 |
| 3 | 0.07 | 0.11 | 0.22 | 0.35 | 0.58 | 1.01 | 1.42 | 2.37 | 3.66 | 4.64 | 6.25 | 7.81 | 9.35 | 11.34 | 12.84 | 16.27 |
| 4 | 0.21 | 0.30 | 0.48 | 0.71 | 1.06 | 1.65 | 2.19 | 3.36 | 4.88 | 5.99 | 7.78 | 9.49 | 11.14 | 13.28 | 14.86 | 18.47 |
| 5 | 0.41 | 0.55 | 0.83 | 1.15 | 1.61 | 2.34 | 3.00 | 4.35 | 6.06 | 7.29 | 9.24 | 11.07 | 12.83 | 15.09 | 16.75 | 20.52 |
| 6 | 0.68 | 0.87 | 1.24 | 1.64 | 2.20 | 3.07 | 3.83 | 5.35 | 7.23 | 8.56 | 10.64 | 12.59 | 14.45 | 16.81 | 18.55 | 22.46 |
| 7 | 0.99 | 1.24 | 1.69 | 2.17 | 2.83 | 3.82 | 4.67 | 6.35 | 8.38 | 9.80 | 12.02 | 14.07 | 16.01 | 18.48 | 20.28 | 24.32 |
| 8 | 1.34 | 1.65 | 2.18 | 2.73 | 3.49 | 4.59 | 5.53 | 7.34 | 9.52 | 11.03 | 13.36 | 15.51 | 17.53 | 20.09 | 21.95 | 26.12 |
| 9 | 1.73 | 2.09 | 2.70 | 3.33 | 4.17 | 5.38 | 6.39 | 8.34 | 10.66 | 12.24 | 14.68 | 16.92 | 19.02 | 21.67 | 23.59 | 27.88 |
| 10 | 2.16 | 2.56 | 3.25 | 3.94 | 4.87 | 6.18 | 7.27 | 9.34 | 11.78 | 13.44 | 15.99 | 18.31 | 20.48 | 23.21 | 25.19 | 29.59 |
| 11 | 2.60 | 3.05 | 3.82 | 4.57 | 5.58 | 6.99 | 8.15 | 10.34 | 12.90 | 14.63 | 17.28 | 19.68 | 21.92 | 24.72 | 26.76 | 31.26 |
| 12 | 3.07 | 3.57 | 4.40 | 5.23 | 6.30 | 7.81 | 9.03 | 11.34 | 14.01 | 15.81 | 18.55 | 21.03 | 23.34 | 26.22 | 28.30 | 32.91 |
| 13 | 3.57 | 4.11 | 5.01 | 5.89 | 7.04 | 8.63 | 9.93 | 12.34 | 15.12 | 16.98 | 19.81 | 22.36 | 24.74 | 27.69 | 29.82 | 34.53 |
| 14 | 4.07 | 4.66 | 5.63 | 6.57 | 7.79 | 9.47 | 10.82 | 13.34 | 16.22 | 18.15 | 21.06 | 23.68 | 26.12 | 29.14 | 31.32 | 36.12 |
| 15 | 4.60 | 5.23 | 6.26 | 7.26 | 8.55 | 10.31 | 11.72 | 14.34 | 17.32 | 19.31 | 22.31 | 25.00 | 27.49 | 30.58 | 32.80 | 37.70 |
| 16 | 5.14 | 5.81 | 6.91 | 7.96 | 9.31 | 11.15 | 12.62 | 15.34 | 18.42 | 20.47 | 23.54 | 26.30 | 28.85 | 32.00 | 34.27 | 39.25 |
| 17 | 5.70 | 6.41 | 7.56 | 8.67 | 10.09 | 12.00 | 13.53 | 16.34 | 19.51 | 21.61 | 24.77 | 27.59 | 30.19 | 33.41 | 35.72 | 40.79 |
| 18 | 6.26 | 7.01 | 8.23 | 9.39 | 10.86 | 12.86 | 14.44 | 17.34 | 20.60 | 22.76 | 25.99 | 28.87 | 31.53 | 34.81 | 37.16 | 42.31 |
| 19 | 6.84 | 7.63 | 8.91 | 10.12 | 11.65 | 13.72 | 15.35 | 18.34 | 21.69 | 23.90 | 27.20 | 30.14 | 32.85 | 36.19 | 38.58 | 43.82 |
| 20 | 7.43 | 8.26 | 9.59 | 10.85 | 12.44 | 14.58 | 16.27 | 19.34 | 22.77 | 25.04 | 28.41 | 31.41 | 34.17 | 37.57 | 40.00 | 45.31 |
| 21 | 8.03 | 8.90 | 10.28 | 11.59 | 13.24 | 15.44 | 17.18 | 20.34 | 23.86 | 26.17 | 29.62 | 32.67 | 35.48 | 38.93 | 41.40 | 46.80 |
| 22 | 8.64 | 9.54 | 10.98 | 12.34 | 14.04 | 16.31 | 18.10 | 21.34 | 24.94 | 27.30 | 30.81 | 33.92 | 36.78 | 40.29 | 42.80 | 48.27 |
| 23 | 9.26 | 10.20 | 11.69 | 13.09 | 14.85 | 17.19 | 19.02 | 22.34 | 26.02 | 28.43 | 32.01 | 35.17 | 38.08 | 41.64 | 44.18 | 49.73 |
| 24 | 9.89 | 10.86 | 12.40 | 13.85 | 15.66 | 18.06 | 19.94 | 23.34 | 27.10 | 29.55 | 33.20 | 36.42 | 39.36 | 42.98 | 45.56 | 51.18 |
| 25 | 10.52 | 11.52 | 13.12 | 14.61 | 16.47 | 18.94 | 20.87 | 24.34 | 28.17 | 30.68 | 34.38 | 37.65 | 40.65 | 44.31 | 46.93 | 52.62 |
| 26 | 11.16 | 12.20 | 13.84 | 15.38 | 17.29 | 19.82 | 21.79 | 25.34 | 29.25 | 31.79 | 35.56 | 38.89 | 41.92 | 45.64 | 48.29 | 54.05 |
| 27 | 11.81 | 12.88 | 14.57 | 16.15 | 18.11 | 20.70 | 22.72 | 26.34 | 30.32 | 32.91 | 36.74 | 40.11 | 43.19 | 46.96 | 49.64 | 55.48 |
| 28 | 12.46 | 13.56 | 15.31 | 16.93 | 18.94 | 21.59 | 23.65 | 27.34 | 31.39 | 34.03 | 37.92 | 41.34 | 44.46 | 48.28 | 50.99 | 56.89 |
| 29 | 13.12 | 14.26 | 16.05 | 17.71 | 19.77 | 22.48 | 24.58 | 28.34 | 32.46 | 35.14 | 39.09 | 42.56 | 45.72 | 49.59 | 52.34 | 58.30 |
| 30 | 13.79 | 14.95 | 16.79 | 18.49 | 20.60 | 23.36 | 25.51 | 29.34 | 33.53 | 36.25 | 40.26 | 43.77 | 46.98 | 50.89 | 53.67 | 59.70 |

Pour $n > 30$, on admet que : $z_{n,\alpha} \approx \frac{1}{2}\left(u_{2\alpha} + \sqrt{2n-1}\right)^2$ si $\alpha < \frac{1}{2}$

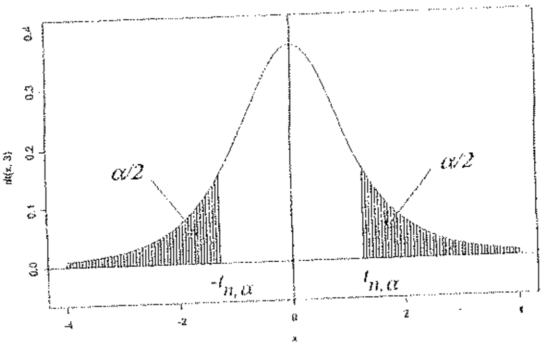
$$z_{n,\alpha} \approx \frac{1}{2}\left(\sqrt{2n-1} - u_{2(1-\alpha)}\right)^2 \text{ si } \alpha \geq \frac{1}{2}$$

# TABLE DE LA LOI DE STUDENT

$X$ étant une variable aléatoire de loi $St(n)$ et $\alpha$ un réel de $[0,1]$,

la table donne la valeur $t_{n,\alpha} = F^{-1}_{St(n)}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$ telle que $P(|X| > t_{n,\alpha}) = \alpha$.

En R, la commande correspondante est `qt(1-alpha/2,n)`. $t_{+\infty,\alpha} = u_\alpha$

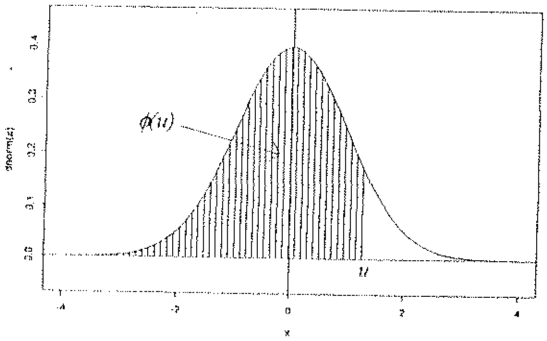



| $n$ \ $\alpha$ | 0.90 | 0.80 | 0.70 | 0.60 | 0.50 | 0.40 | 0.30 | 0.20 | 0.10 | 0.05 | 0.02 | 0.01 | 0.001 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0.158 | 0.325 | 0.510 | 0.727 | 1.000 | 1.376 | 1.963 | 3.078 | 6.314 | 12.706 | 31.821 | 63.657 | 636.62 |
| 2 | 0.142 | 0.289 | 0.445 | 0.617 | 0.816 | 1.061 | 1.386 | 1.886 | 2.920 | 4.303 | 6.965 | 9.925 | 31.599 |
| 3 | 0.137 | 0.277 | 0.424 | 0.584 | 0.765 | 0.978 | 1.250 | 1.638 | 2.353 | 3.182 | 4.541 | 5.841 | 12.924 |
| 4 | 0.134 | 0.271 | 0.414 | 0.569 | 0.741 | 0.941 | 1.190 | 1.533 | 2.132 | 2.776 | 3.747 | 4.604 | 8.610 |
| 5 | 0.132 | 0.267 | 0.408 | 0.559 | 0.727 | 0.920 | 1.156 | 1.476 | 2.015 | 2.571 | 3.365 | 4.032 | 6.869 |
| 6 | 0.131 | 0.265 | 0.404 | 0.553 | 0.718 | 0.906 | 1.134 | 1.440 | 1.943 | 2.447 | 3.143 | 3.707 | 5.959 |
| 7 | 0.130 | 0.263 | 0.402 | 0.549 | 0.711 | 0.896 | 1.119 | 1.415 | 1.895 | 2.365 | 2.998 | 3.499 | 5.408 |
| 8 | 0.130 | 0.262 | 0.399 | 0.546 | 0.706 | 0.889 | 1.108 | 1.397 | 1.860 | 2.306 | 2.896 | 3.355 | 5.041 |
| 9 | 0.129 | 0.261 | 0.398 | 0.543 | 0.703 | 0.883 | 1.100 | 1.383 | 1.833 | 2.262 | 2.821 | 3.250 | 4.781 |
| 10 | 0.129 | 0.260 | 0.397 | 0.542 | 0.700 | 0.879 | 1.093 | 1.372 | 1.812 | 2.228 | 2.764 | 3.169 | 4.587 |
| 11 | 0.129 | 0.260 | 0.396 | 0.540 | 0.697 | 0.876 | 1.088 | 1.363 | 1.796 | 2.201 | 2.718 | 3.106 | 4.437 |
| 12 | 0.128 | 0.259 | 0.395 | 0.539 | 0.695 | 0.873 | 1.083 | 1.356 | 1.782 | 2.179 | 2.681 | 3.055 | 4.318 |
| 13 | 0.128 | 0.259 | 0.394 | 0.538 | 0.694 | 0.870 | 1.079 | 1.350 | 1.771 | 2.160 | 2.650 | 3.012 | 4.221 |
| 14 | 0.128 | 0.258 | 0.393 | 0.537 | 0.692 | 0.868 | 1.076 | 1.345 | 1.761 | 2.145 | 2.624 | 2.977 | 4.140 |
| 15 | 0.128 | 0.258 | 0.393 | 0.536 | 0.691 | 0.866 | 1.074 | 1.341 | 1.753 | 2.131 | 2.602 | 2.947 | 4.073 |
| 16 | 0.128 | 0.258 | 0.392 | 0.535 | 0.690 | 0.865 | 1.071 | 1.337 | 1.746 | 2.120 | 2.583 | 2.921 | 4.015 |
| 17 | 0.128 | 0.257 | 0.392 | 0.534 | 0.689 | 0.863 | 1.069 | 1.333 | 1.740 | 2.110 | 2.567 | 2.898 | 3.965 |
| 18 | 0.127 | 0.257 | 0.392 | 0.534 | 0.688 | 0.862 | 1.067 | 1.330 | 1.734 | 2.101 | 2.552 | 2.878 | 3.922 |
| 19 | 0.127 | 0.257 | 0.391 | 0.533 | 0.688 | 0.861 | 1.066 | 1.328 | 1.729 | 2.093 | 2.539 | 2.861 | 3.883 |
| 20 | 0.127 | 0.257 | 0.391 | 0.533 | 0.687 | 0.860 | 1.064 | 1.325 | 1.725 | 2.086 | 2.528 | 2.845 | 3.850 |
| 21 | 0.127 | 0.257 | 0.391 | 0.532 | 0.686 | 0.859 | 1.063 | 1.323 | 1.721 | 2.080 | 2.518 | 2.831 | 3.819 |
| 22 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.532 | 0.686 | 0.858 | 1.061 | 1.321 | 1.717 | 2.074 | 2.508 | 2.819 | 3.792 |
| 23 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.532 | 0.685 | 0.858 | 1.060 | 1.319 | 1.714 | 2.069 | 2.500 | 2.807 | 3.768 |
| 24 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.531 | 0.685 | 0.857 | 1.059 | 1.318 | 1.711 | 2.064 | 2.492 | 2.797 | 3.745 |
| 25 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.531 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.316 | 1.708 | 2.060 | 2.485 | 2.787 | 3.725 |
| 26 | 0.127 | 0.256 | 0.390 | 0.531 | 0.684 | 0.856 | 1.058 | 1.315 | 1.706 | 2.056 | 2.479 | 2.779 | 3.707 |
| 27 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.531 | 0.684 | 0.855 | 1.057 | 1.314 | 1.703 | 2.052 | 2.473 | 2.771 | 3.690 |
| 28 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.530 | 0.683 | 0.855 | 1.056 | 1.313 | 1.701 | 2.048 | 2.467 | 2.763 | 3.674 |
| 29 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.530 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.311 | 1.699 | 2.045 | 2.462 | 2.756 | 3.659 |
| 30 | 0.127 | 0.256 | 0.389 | 0.530 | 0.683 | 0.854 | 1.055 | 1.310 | 1.697 | 2.042 | 2.457 | 2.750 | 3.646 |
| 40 | 0.126 | 0.255 | 0.388 | 0.529 | 0.681 | 0.851 | 1.050 | 1.303 | 1.684 | 2.021 | 2.423 | 2.704 | 3.551 |
| 80 | 0.126 | 0.254 | 0.387 | 0.527 | 0.678 | 0.846 | 1.043 | 1.292 | 1.664 | 1.990 | 2.374 | 2.639 | 3.416 |
| 120 | 0.126 | 0.254 | 0.386 | 0.526 | 0.677 | 0.845 | 1.041 | 1.289 | 1.658 | 1.980 | 2.358 | 2.617 | 3.373 |
| $+\infty$ | 0.126 | 0.253 | 0.385 | 0.524 | 0.674 | 0.842 | 1.036 | 1.282 | 1.645 | 1.960 | 2.326 | 2.576 | 3.291 |

# TABLE 1 DE LA LOI NORMALE CENTREE REDUITE

$U$ étant une variable aléatoire de loi $N(0,1)$, la table donne la valeur de $\Phi(u) = P(U \le u)$.

En R, la commande correspondante est `pnorm(u)`.




| $u$ | 0.00 | 0.01 | 0.02 | 0.03 | 0.04 | 0.05 | 0.06 | 0.07 | 0.08 | 0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.5000 | 0.5040 | 0.5080 | 0.5120 | 0.5160 | 0.5199 | 0.5239 | 0.5279 | 0.5319 | 0.5359 |
| 0.1 | 0.5398 | 0.5438 | 0.5478 | 0.5517 | 0.5557 | 0.5596 | 0.5636 | 0.5675 | 0.5714 | 0.5753 |
| 0.2 | 0.5793 | 0.5832 | 0.5871 | 0.5910 | 0.5948 | 0.5987 | 0.6026 | 0.6064 | 0.6103 | 0.6141 |
| 0.3 | 0.6179 | 0.6217 | 0.6255 | 0.6293 | 0.6331 | 0.6368 | 0.6406 | 0.6443 | 0.6480 | 0.6517 |
| 0.4 | 0.6554 | 0.6591 | 0.6628 | 0.6664 | 0.6700 | 0.6736 | 0.6772 | 0.6808 | 0.6844 | 0.6879 |
| 0.5 | 0.6915 | 0.6950 | 0.6985 | 0.7019 | 0.7054 | 0.7088 | 0.7123 | 0.7157 | 0.7190 | 0.7224 |
| 0.6 | 0.7257 | 0.7291 | 0.7324 | 0.7357 | 0.7389 | 0.7422 | 0.7454 | 0.7486 | 0.7517 | 0.7549 |
| 0.7 | 0.7580 | 0.7611 | 0.7642 | 0.7673 | 0.7704 | 0.7734 | 0.7764 | 0.7794 | 0.7823 | 0.7852 |
| 0.8 | 0.7881 | 0.7910 | 0.7939 | 0.7967 | 0.7995 | 0.8023 | 0.8051 | 0.8078 | 0.8106 | 0.8133 |
| 0.9 | 0.8159 | 0.8186 | 0.8212 | 0.8238 | 0.8264 | 0.8289 | 0.8315 | 0.8340 | 0.8365 | 0.8389 |
| 1.0 | 0.8413 | 0.8438 | 0.8461 | 0.8485 | 0.8508 | 0.8531 | 0.8554 | 0.8577 | 0.8599 | 0.8621 |
| 1.1 | 0.8643 | 0.8665 | 0.8686 | 0.8708 | 0.8729 | 0.8749 | 0.8770 | 0.8790 | 0.8810 | 0.8830 |
| 1.2 | 0.8849 | 0.8869 | 0.8888 | 0.8907 | 0.8925 | 0.8944 | 0.8962 | 0.8980 | 0.8997 | 0.9015 |
| 1.3 | 0.9032 | 0.9049 | 0.9066 | 0.9082 | 0.9099 | 0.9115 | 0.9131 | 0.9147 | 0.9162 | 0.9177 |
| 1.4 | 0.9192 | 0.9207 | 0.9222 | 0.9236 | 0.9251 | 0.9265 | 0.9279 | 0.9292 | 0.9306 | 0.9319 |
| 1.5 | 0.9332 | 0.9345 | 0.9357 | 0.9370 | 0.9382 | 0.9394 | 0.9406 | 0.9418 | 0.9429 | 0.9441 |
| 1.6 | 0.9452 | 0.9463 | 0.9474 | 0.9484 | 0.9495 | 0.9505 | 0.9515 | 0.9525 | 0.9535 | 0.9545 |
| 1.7 | 0.9554 | 0.9564 | 0.9573 | 0.9582 | 0.9591 | 0.9599 | 0.9608 | 0.9616 | 0.9625 | 0.9633 |
| 1.8 | 0.9641 | 0.9649 | 0.9656 | 0.9664 | 0.9671 | 0.9678 | 0.9686 | 0.9693 | 0.9699 | 0.9706 |
| 1.9 | 0.9713 | 0.9719 | 0.9726 | 0.9732 | 0.9738 | 0.9744 | 0.9750 | 0.9756 | 0.9761 | 0.9767 |
| 2.0 | 0.9772 | 0.9778 | 0.9783 | 0.9788 | 0.9793 | 0.9798 | 0.9803 | 0.9808 | 0.9812 | 0.9817 |
| 2.1 | 0.9821 | 0.9826 | 0.9830 | 0.9834 | 0.9838 | 0.9842 | 0.9846 | 0.9850 | 0.9854 | 0.9857 |
| 2.2 | 0.9861 | 0.9864 | 0.9868 | 0.9871 | 0.9875 | 0.9878 | 0.9881 | 0.9884 | 0.9887 | 0.9890 |
| 2.3 | 0.9893 | 0.9896 | 0.9898 | 0.9901 | 0.9904 | 0.9906 | 0.9909 | 0.9911 | 0.9913 | 0.9916 |
| 2.4 | 0.9918 | 0.9920 | 0.9922 | 0.9925 | 0.9927 | 0.9929 | 0.9931 | 0.9932 | 0.9934 | 0.9936 |
| 2.5 | 0.9938 | 0.9940 | 0.9941 | 0.9943 | 0.9945 | 0.9946 | 0.9948 | 0.9949 | 0.9951 | 0.9952 |
| 2.6 | 0.9953 | 0.9955 | 0.9956 | 0.9957 | 0.9959 | 0.9960 | 0.9961 | 0.9962 | 0.9963 | 0.9964 |
| 2.7 | 0.9965 | 0.9966 | 0.9967 | 0.9968 | 0.9969 | 0.9970 | 0.9971 | 0.9972 | 0.9973 | 0.9974 |
| 2.8 | 0.9974 | 0.9975 | 0.9976 | 0.9977 | 0.9977 | 0.9978 | 0.9979 | 0.9979 | 0.9980 | 0.9981 |
| 2.9 | 0.9981 | 0.9982 | 0.9982 | 0.9983 | 0.9984 | 0.9984 | 0.9985 | 0.9985 | 0.9986 | 0.9986 |

Grandes valeurs de $u$

| $u$ | 3.0 | 3.5 | 4.0 | 4.5 |
|---|---|---|---|---|
| $\Phi(u)$ | 0.9987 | 0.99977 | 0.999968 | 0.999997 |

Exp 1 : Soient X : le revenu mensuel,

$E(X) = m = 7000$ DH $\rightarrow$ le revenu moy mensuel de la population

$\sigma_{(X)} = \sigma = 1200 \rightarrow$ l'écart-type de la variable X au niveau de la population

Pour déterminer l'étendue de l'intervalle, appliquons l'inégalité de B-T à la v.a X : on aura donc :

$$P\left(|X - E(X)| \leq t\,\sigma_{(X)}\right) \geq 1 - \frac{1}{t^2} \Rightarrow P\left(|X - m| \leq t\sigma\right) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow P\left(m - t\sigma \leq X \leq m + t\sigma\right) \geq 0,95$$

et puisque : $1 - \frac{1}{t^2} = 0,95 \Rightarrow t = \sqrt{20}$.

Donc en remplaçant t, m, σ par leurs valeurs dans la relation précédente, on obtient donc l'étendue de l'intervalle de la v. X comme suit :

$$P\left(7000 - \sqrt{20} \times 1200 \leq X \leq 7000 + \sqrt{20} \times 1200\right) \geq 0,95$$

$$\Rightarrow P\left(1636 \leq X \leq 12364\right) \geq 0,95$$

Interprétation : on constate que plus de 95% des familles ont un revenu mensuel compris entre 1636 et 12364 DH.

Expl : 2 Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchébicheff à la variable $\frac{N}{n}$ (ou N désigne le nombre d'apparition du numéro six, on aura alors

$$P\left(\left|\frac{N}{n}-E\left(\frac{N}{n}\right)\right| < t\,\sigma_{\left(\frac{N}{n}\right)}\right) \geq 1-\frac{1}{t^2} \qquad (1)$$

Avec • $E\left(\frac{N}{n}\right)=p=\frac{1}{6}$,

• $V\left(\frac{N}{n}\right)=\frac{p\times(1-p)}{n}=\frac{\left(\frac{1}{6}\right)\times\left(\frac{5}{6}\right)}{n}=\frac{\left(\frac{5}{36}\right)}{n}=\frac{5}{36n}$

$\Rightarrow \sigma_{\left(\frac{N}{n}\right)}=\sqrt{\frac{5}{36n}}$.

En remplaçant $E\left(\frac{N}{n}\right)$ et $\sigma_{\left(\frac{N}{n}\right)}$ par leurs valeurs dans la relation (1), on obtient donc :

$$P\left(\left|\frac{N}{n}-\frac{1}{6}\right| < t\sqrt{\frac{5}{36n}}\right) \geq 0,9 \qquad (2)$$

La détermination de $t$ : on $1-\frac{1}{t^2}=0,9 \Rightarrow t=\sqrt{10}$

" " " $n$ : En remplace $t$ par sa valeur dans (

$\Rightarrow t\sqrt{\frac{5}{36n}} \leq 0,01 \Rightarrow t^2\frac{5}{36n} \leq (0,01)^2 \Rightarrow \frac{36n}{5t^2} \geq \frac{1}{(0,01)^2} \Rightarrow n \geq 138$

Interprétation : pour que la fréquence d'apparition d'un six converge en prob vers son Esp Math avec une prob sup ou égale à 90% lors du lancement d'un dé, il faut prévoir au moins 13889 lancement

***Université Abdelmalek Essaâdi ,***
**Faculté Polydisciplinaire de Tétouan ,**
Licence fondamentale en Sciences Economiques et Gestion.
Année universitaire 2016-2017.

**Travaux Dirigés 4 :**
**Estimation**

**Exercice 1:**
On considère un échantillon constitué par deux valeurs $x_1$ et $x_2$.
Expliquer en fonction de $x_1$ et $x_2$ l'estimation (non biaisée) de l'écart-type.

**Exercice 2:**
Soient $T_1$ et $T_2$ deux estimateurs différents du meme paramétre $\theta$. On suppose que : $E(T_1) = \theta + b_1$ et $E(T_2) = \theta + b_2$ ($b_1$ et $b_2$ sont deux valeurs numériques connues). Soit $T = \alpha T_1 + \beta T_2$.
Déterminer $\alpha$ et $\beta$ pour que T soit un estimateur sans biais de $\theta$:
1. Lorsque $b_1 \neq b_2$.
2. Lorsque $b_1 = b_2$.

**Exercice 3:**
On considère l'échantillon statistique (1, 0, 2, 1, 1, 0, 1, 0, 0).
1.Calculer sa moyenne et sa variance empiriques.
2.En supposant que les données de cet échantillon sont des réalisations d'une variable de loi inconnue, donner une estimation non biaisée de l'espérance et de la variance de cette loi.
3.On choisit de modéliser les valeurs de cet échantillon par une loi binomiale $B(2; p)$. Utiliser la moyenne empirique pour proposer une estimation ponctuelle pour p.
4.Avec le meme modèle, utiliser la variance empirique pour proposer une autre estimation de p.
5.On choisit de modéliser les valeurs de cet échantillon par une loi de Poisson $P(\lambda)$, qui a pour espérance $\lambda$, Quelle estimation ponctuelle proposez-vous pour $\lambda$?

**Exercice 4:**
On veut estimer la loi de probabilité de la durée de vie des moteurs de voitures. On teste 125 moteurs et on relève le nombre de kilomètres parcourus avant révision totale. En désignant par X le nombre de kilomètres parcourus, on a trouvé dans cet échantillon (en milliers de Km):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{125} X_i}{125} = 70 \;\; ; \;\; \sum_{i=1}^{125} (X_i - \bar{x})^2 = 28125$$

1. En faisant l'hypothèse que la loi de probabilité de X est normale, en estimer les paramètres. 2. La loi de probabilité de X étant supposée celle déterminée d'après le calcul précèdent, on veut juger si l'adoption d'une huile spéciale est susceptible d'accroitre la vie moyenne des moteurs. Pour cela, on prélève dans la fabrication un nouvel échantillon de 9 moteurs. Sur cet échantillon on note les durées d'utilisation obtenues avec le nouveau lubrifiant.

**Exercice 5:**
Lors d'un concours radiophonique, on note X le nombre de réponses reçues chaque jour, on suppose que X suit une loi normale de paramètres m et $\sigma$. Durant les dix premiers jours, on a obtenu:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $x_1 = 200$ | $x_2 = 240$ | $x_3 = 190$ | $x_4 = 150$ | $x_5 = 220$ |
| $x_6 = 180$ | $x_7 = 170$ | $x_8 = 230$ | $x_9 = 210$ | $x_{10} = 210$ |

Donner une estimation ponctuelle de m et $\sigma^2$ .

**Exercice 6:**
Dans une population d'étudiants en économie, on a prélevé, indépondamment, deux échantillon de taille $n_1 = 120$ et $n_2 = 150$. On constate que 48 étudiants du premier échantillon et 66 étudiants du deuxième échantilln ont une formation secondaire scientifique. Soit p la proportion d'étudiants de la population ayant une formation scientifique.
Calculer trois estimations ponctuelles de p.

**Exercice 7:**
Soient les variables aléatoires $X_i (i = 1; 2)\ i.i.d$ de moyenne m et de variance $\sigma^2$. Lequel des deux estimateurs de m non biaisés choisirez-vous:

$$\overline{X}_1 = \frac{X_1 + X_2}{2} \quad ou \quad \overline{X}_2 = \frac{aX_1 + bX_2}{a+b}$$

$$ou \;\; a, b \in R \; ?$$

**Exercice 8:**
Soit une usine de 350 personnes. Pour effectuer une certaine opération, un chronométrage du temps a été effectué parmi certains employés de cette usine. On obtient la distribution suivante:

| Temps en minutes | Nombre d'employés |
|---|---|
| $12 \leq X \leq 24$ | 4 |
| $24 \leq X \leq 36$ | 10 |
| $36 \leq X \leq 48$ | 20 |
| $48 \leq X \leq 60$ | 12 |
| $60 \leq X \leq 72$ | 4 |

On demande:
1.Par quoi peut-on estimer la moyenne du temps nécessaire dans cette usine pour effectuer cette opération. On se placera dans deux cas:
a. Les employés controlés sont tirés au sort sans remise.
b. Le cas ou le tirage est avec remise.
2. Par quoi peut-on estimer la dispersion de la moyenne du temps néscessaire dans l'usine pour effectuer cette opération. On se placer dans deux cas.
a. Le tirage est sans remise
b. Le tirage est avec remise.
3. Que concluez-vous ?

**Exercice 9:**
On veut estimer la moyenne m d'une variable aléatoire X suivant une loi normale, de varaince connue $\sigma^2 = 6,25$ à l'aide d'un échantillon de taille n=100. La moyenne $\bar{x}$ de l'échantillon observée est 4,3.
1. Construire un intervalle de confiance avec un seuil $1 - \alpha = 0,95$.
2. Comment construire un tel intervalle, si l'on ne connait pas la variance de X, mais seulement la variance empirique de l'échantillon $S^2$ égale à 6,76.

**Exercice 10:**
La moyenne d'un échatillon aléatoire de taille 36 est de 100 et l'écart-type de la population est 24. Trouvez un intervalle de confiance pour la moyenne de la population pour des seuils de probabilité de $90\%$, $95\%$ et $99\%$. Que pouvez-vous conclure?

**Exercice 11:**
Un échantillon aléatoire de 36 étudiants, choisi sans remise d'une classe de 72 étudiants, a un poids moyen de 60 kg. On sait que l'écart-type de tous les étudiants de la calsse est de 2 kg.
Trouver un intervalle de confiance pour le poids moyen de la classe au seuil de confiance de $90\%$

**Exercice 12:** Un agent de location de chambres d'étudiants veut connaitre le loyer mensuel de location de son secteur. Il choisit au hasard 40 des 300 chambres de son secteur et trouve un loyer mensuel de 600 Dirhams avec un écart-type de 100 Dirhams.
Quel est le loyer mensuel moyen de l'ensemble des 300 chambres avec une certitude de $95\%$?

**Exercice 13:**
Une étude sur les salaires mensuels de 50 ouvriers d'une usine a donné une moyenne de 3000 DH et un écart-type de 500 DH. Quel risque faut-il prendre en estimant la moyenne des salaires des 300 ouvriers de l'usine à $3000 \pm 100DH$.

**Exercice 14:**
On reçoit dans une ville donnée 7420 coups de téléphone au cours d'une période donnée. Sur un échantillon de 1/5 tiré au hasard sans remise, on a constaté que 208 coups de téléphone ont été coupés avant la fin.
Au risque de $5\%$, dans quel intervalle se situe la proportion des coups de téléphone qui ont été coups avant terme ?

**Exercice 15:**
Dans une ville, un sondage a été réalisé auprès d'un échantillon indépendant de 400 personnes pour savoir si ces personnes étaient satisfaites ou non dans leur travail. $70\%$ des personnes se sont déclarées satisfaites.
1. Définir la variable X
2. Quelle loi de probabilité suit la variable $X$?
3. Donner au niveau de confiance de $95\%$ le nombre de personnes satisfaites de leur travail que l'on peut rencontrer sur un échantillon de 100 individus.
4. Donner l'estimation de la proportion des personnes satisfaites dans leur travail dans la population considérée et son intervalle de confiance à $95\%$

**Exercice 16:**
On veut controler par sondage l'exactitude d'un stock commercial comprenant plusieurs milliers d'articles. Déterminer la taille d'échantillon requise si l'on considère qu'une marge d'erreur inférieure ou égale à $2\%$ est acceptable dans l'exactitude de l'inventaire, avec un niveau de confiance de $95,44\%$

**Exercice 17:**
Une machine automatique fabrique des entretoises destinées à un montage de roulements. La longueur de ces entretoises doit etre comprise au sens large entre 37,45 et 37,55 mm. La variable aléatoire X qui associe à chaque entretoise sa longueur, est une variable gaussienne de moyenne 37,50.
1. Quel doit etre l'écart-type de la variable aléatoire X pour $99,8\%$ des pièces fabriquées soient bonnes ?
2. On prélève un échantillon, non exhaustif dans la production. Quel doit etre l'effectif de cet échantillon pour que la moyenne des longueurs des pièces prélevées appartienne à l'intervalle $[37,495; 37,505]$ avec une probabilité de $0,95$

**Exercice 18:**
Une entreprise utilise une matière isolante dans l'assemblage d'un certain type de moteurs électriques. Il est important que non seulement l'épaisseur moyenne des composants rencontre les exigences de l'entreprise mais également que la variabilité de l'épaisseur ne présente pas de trop fortes fluctuations.
Un échantillon aléatoire de 20 composantes isolantes prélevé d'un lot donne les épaisseurs suivantes:

Epaisseur en mm

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,6 | 5,9 | 6,2 | 6,1 | 6,6 | 5,9 | 5,9 | 5,6 | 6,2 | 5,8 |
| 5,5 | 5,6 | 6 | 6,3 | 6,2 | 5,9 | 6,2 | 6 | 6,2 | 6,3 |

1.En admettant que l'épaisseur de cette matière isolante est distribuée selon une loi normale, estimer par intervalle de confiance l'écart-type de l'épaisseur pour l'ensemble de la production. Utiliser un niveau de confiance de $95\%$.
2.Estimer également l'épaisseur moyenne de la matière isolante pour l'ensemble de la production avec un niveau de confiance de $95\%$.

**Exercice 19:**
Selon les lois de Mendel une certaine variété de plantes a une probabilité 0,25 de fleurir blanche et une probabilité de 0,75 de fleurir rouge ou rose. Combien faut-il observer de plantes de cette espèce pour que la fréquence du nombre de fleurs blanches ne s'écarte pas plus de 0,05 de la fréquence observée avec une erreur de $1\%$?

**Ex1:** L'estimation non biaisé (sans biais) de l'écart-type en fonction de $x_1$ et $x_2$ st par définition donné par la formule suivante :

$$\hat{S} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} \quad \text{avec} \quad \bar{X} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Donc, $\hat{S} = \sqrt{\frac{1}{2-1}\sum_{i=1}^{2}(X_i - \bar{X})^2}$ si on remplace $\bar{X}$ par sa valeur

on aura : $\hat{S} = \frac{|x_2 - x_1|}{\sqrt{2}}$ estimestimateur sans biais de $\sigma$.

**EX2:** T st un estimateur sans biais de $\theta$, càd. $E(T) = \theta$,

avec $T = \alpha T_1 + \beta T_2$ :

$E(T) = \theta \Rightarrow E(\alpha T_1 + \beta T_2) = \theta \Rightarrow \alpha \times E(T_1) + \beta \times E(T_2) = \theta$ (1)

Et puisque : $E(T_1) = \theta + b_1$ et $E(T_2) = \theta + b_2$, la relation (1) devient :

$$\alpha \times (\theta + b_1) + \beta \times (\theta + b_2) = \theta \Rightarrow (\alpha + \beta)\theta + \alpha b_1 + \beta b_2 = \theta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha b_1 + \beta b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ (1-\beta) b_1 + \beta b_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ b_1 - \beta(b_1 - b_2) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

1) Détermination de $\alpha$ et $\beta$ pour que T soit un estimateur sans biais de $\theta$.

Lorsque $b_1 \neq b_2$

A partir de la relation (2), on a : $\begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ b_1 - \beta(b_1 - b_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{b_2}{(b_1 - b_2)} \\ \beta = \frac{b_1}{(b_1 - b_2)} \end{cases}$

2) Détermination de $\alpha$ et $\beta$ pour que T soit un estimateur sans biais de $\theta$.

Lorsque $b_1 = b_2$ :

A partir de la relation (2), on a : $\begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ b_1 - \beta(b_1 - b_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ b_1 = b_2 = 0 \end{cases}$

**EX:3** 1) la moyenne et la variance empirique de l'échantillon $(1,0,2,1,1,0,1,0,0)$ sont données comme suit :

- $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{(1+0+2+1+1+0+1+0+0)}{9} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$
- $S^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{n} - (\bar{x})^2 = \dfrac{(1^2+0^2+2^2+1^2+1^2+0^2+1^2)}{9} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

2) l'estimation non biaisé de l'espérance et de la variance de cette loi inconnue st déterminée comme suit :

- l'estimation non biaisée de l'espérance de cette loi inconnue st donnée par la moyenne empirique $\bar{x}$ déjà calculée dans la question précédente avec : $E(X) = \bar{x} = \dfrac{2}{3}$
- l'estimation non biaisé de la variance de cette loi inconnue et donnée par $\hat{S}^2 = S_x^2\left(\dfrac{n}{n-1}\right)$. on trouve $\hat{S}^2 = \left(\dfrac{4}{9}\right) \times \left(\dfrac{9}{8}\right) = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

3) puisque $X \rightsquigarrow B(2,p) \Rightarrow E(X) = np = 2p$. L'espérance mathé- de cette loi binomiale st estimée par la moyenne empirique (ici $\bar{x} = \frac{2}{3}$). Donc l'estimation de la prob $p$ peut être déterminée comme suit.

$$E(X) = 2p = \bar{x} \to p = \frac{\bar{x}}{2} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

4) puisque $X \rightsquigarrow B(2,p) \Rightarrow V(X) = np(1-p) = 2p(1-p)$. la variance de cette loi binomiale st estimée par $\hat{S}^2$ (ici $\hat{S}^2 = \frac{1}{2}$). Donc l'estimation de la prob. $p$ peut être déterminée en résolvant l'équation suivante : $2p(1-p) = \dfrac{1}{2} \longrightarrow p = \dfrac{1}{2}$.

5) puisque $X \rightsquigarrow P(\lambda) \Rightarrow E(X) = \lambda$. l'espérance mathématique de cette loi de poisson st estimée par la moyenne empirique (ici $\bar{x} = \frac{2}{3}$). Donc l'estimation de la probabilité de $p$ peut être déterminée comme suit : $E(X) = \lambda = \bar{x} \Rightarrow \lambda = \dfrac{2}{3}$.

**EX 4** : soit la variable $X$ qui désigne le nombre de kilomètres parcourus. Avec $n = 125$, la moyenne et la variance empirique sont calculées comme suit :

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{125} X_i}{125} = 70 \quad \text{et} \quad S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{125} (X_i - \bar{x})^2}{125} = \frac{28125}{125} = 225$$

1) puisque $X \rightsquigarrow N(m; \sigma)$ avec $\sigma$ inconnus, ces derniers seront estimés à partir des caractéristiques calculées sur l'échantillon comme suit :

- pour la moyenne $m$ de la population :

$\bar{x}$ est un estimateur sans biais de la moyenne $m$ de la population. Donc $m$ sera estimée par $\bar{x} = 70$.

- pour la variance $\sigma^2$ de la population :

on sait que $\hat{S}^2$ est un estimateur sans biais de la variance $\sigma^2$ de la population dans le cas d'un tirage avec remise, avec :

$$\hat{S}^2 = S^2 \times \left(\frac{n}{n-1}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{28125}{124} = 226{,}81$$

Donc $\sigma$ sera estimé par $\hat{S} = 15{,}06$.

et puisque $(X \rightsquigarrow N(m; \sigma)$ ; donc $X \rightsquigarrow N(\bar{x}; \hat{S}) \Rightarrow X \rightsquigarrow N(70; 15{,}06)$

2) Dans cette question on s'intéresse à la distribution d'échantillonnage des moyennes $\bar{X}$. puisque $(X \rightsquigarrow N(m; \sigma))$, les échantillons prélevés de cette population vont suivre la même loi. En effet :

$$X \rightsquigarrow N(m; \sigma) \Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow N(E(\bar{X}); \sigma_{(\bar{X})}) \Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow N\left(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow N\left(\bar{x}; \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow N\left(70; \frac{15{,}06}{\sqrt{9}}\right) \Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow N(70; 5{,}02)$$

Donc la vie moyenne des moteurs pour les 9 échantillons de moteurs suit une loi normale de moyenne 70 et d'écart-type 5,02 milliers de km.

**EX 5 :** • Estimateur de la moyenne $\underline{m}$ de la population :
on sait que l'estimateur sans biais de la moyenne $\underline{m}$ de la population est donné par $\bar{x}$, avec $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} = \frac{2000}{10} = 200$.

• Estimateur de la variance $\sigma^2$ de la population.
on sait que l'estimateur sans biais de la variance $\sigma^2$ de la population est donné par $\hat{S}^2$, avec : $\hat{S}^2 = S^2 x \left(\frac{n}{n-1}\right)$.

$$\Rightarrow \hat{S}^2 = S^2 x \left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10} - \bar{x}^2\right) x \left(\frac{10}{9}\right) = (40700 - 40000) x \left(\frac{10}{9}\right)$$

$\simeq 778$. Donc les estimateurs ponctuels de m et $\sigma^2$ sont respectivement 200 et 778.

**EX 6 :** soit la variable aléatoire X qui désigne le nombre des étudiants ayant une formation secondaire.
on sait que $f = \frac{X}{n}$ la fréquence observée dans un échantillon est une estimation ponctuelle de la proportion p dans la population.
Donc, on peut calculer une estimation ponctuelle pour chaque échantillon comme suit : $f_1 = \frac{48}{120} = 0{,}40$ et $f_2 = \frac{66}{150} = 0{,}44$
on peut calculer une troisième estimation ponctuelle en réunissant les deux échantillons en un seul de taille $n_1 + n_2 = 270$.
Autrement dit, on va calculer une moyenne pondérée f des estimations ponctuelles $f_1$ et $f_2$ comme suit

$$f = \frac{n_1 f_1 + n_2 f_2}{n_1 + n_2} = \frac{(120 \times 0{,}4) + (150 \times 0{,}44)}{120 + 150} = 0{,}422.$$

**EX:7** puisque les deux estimateurs $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$ sont sans biais du paramètre m, celui possédant la plus petite variance sera considéré comme meilleur ou efficace.

Pour cela, il faut comparer les variance de ces deux estimateurs, avec :

$$V(\overline{X}_1) = V\left(\frac{X_1 + X_2}{2}\right) = \frac{V(X_1)+V(X_2)}{4} = \frac{\sigma^2+\sigma^2}{4} = \frac{\sigma^2}{2}.$$

$$V(\overline{X}_2) = V\left(\frac{aX_1 + bX_2}{a+b}\right) = \frac{V(aX_1)+V(bX_2)}{(a+b)^2} = \frac{a^2V(X_1)+b^2V(X_2)}{(a+b)^2}$$

$$\Rightarrow V(\overline{X}_2) = \frac{a^2\sigma^2+b^2\sigma^2}{(a+b)^2} = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\cdot\sigma^2.$$

Il est facile de constater que :

$$\left[V(\overline{X}_1) = \frac{\sigma^2}{2}\right] \leq \left[V(\overline{X}_2) = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\cdot\sigma^2\right] \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}$$

pour tout a et b avec égalité $\Leftrightarrow a = b$.

Il est relativement aisé de généraliser ce résultat au cas de n variables aléatoires iid en considérant les deux estimateurs que sont la moyenne (classique) et la moyenne pondérée de coefficients $a_1, \dots, a_n$.

On peut donc conclure que le meilleur estimateur en terme de variance (critère d'efficacité) dans la classe des estimateurs sous la forme de moyenne pondérées est la moyenne classique.

**Ex 8 :** D'après l'énoncé de l'exercice on a la taille de l'échantillon $n=50$ et la taille de la population $N=350$ le tableau ci-après récapitule le calcul des caractéristique de l'échantillon, en particulier, la moyenne et la variance empiriques :

| $x_i$ | $n_i$ | $c_i$ | $n_i c_i$ | $n_i c_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| [12 ; 24[ | 4 | 18 | 72 | 1296 |
| [24 ; 36[ | 10 | 30 | 300 | 9000 |
| [36 ; 48[ | 20 | 42 | 840 | 35280 |
| [48 ; 60[ | 12 | 54 | 648 | 34992 |
| [60 ; 72[ | 4 | 66 | 264 | 17424 |
| Total | 50 | | 2124 | 97992 |

- la moyenne de l'échantillon : $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} n_i c_i}{50} = \dfrac{2124}{50}$

$= 42,48$ minuts.

- la variance empirique :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5} n_i c_i^2}{50} - (\bar{x})^2 = \left(\frac{97992}{50}\right) - (42,48)^2$$

$= 155,3$ minute.

1) l'estimation sans biais de la moyenne du temps nécessaire dans cette usine pour effectuer cette opération est donné par la moyenne empirique de l'échantillon quelque soit le mode de tirage, puisque : $E(\bar{x}) = m = 42,48$.

2/ L'estimateur sans biais de la dispersion de la moyenne du temps nécessaire dans l'usine pour effectuer cette opération est donné en fonction du mode de tirage :

a) Dans le cas d'un tirage avec remise :

On sait que la variance de la moyenne de l'échantillon $V(\bar{x})$ est donnée comme suit : $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n}$. Et puisque $\sigma^2$ la variance de la population est inconnue, on va la remplacer par son estimateur : $\hat{S}^2 = S^2 \times \frac{n}{n-1}$.

Donc, la variance de la moyenne de l'échantillon est estimée dans le cas d'un tirage avec remise par :

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{\hat{S}^2}{n} = \frac{S^2 \times \left(\frac{n}{n-1}\right)}{n} = \frac{S^2}{n-1} = \frac{155,3}{49} = 3,1$$

b) Dans le cas d'un tirage sans remise :

On sait que la variance de la moyenne de l'échantillon $V(\bar{x})$ est donnée comme suit : $V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$

Et ~~par~~ puisque $\sigma^2$ la variance de la population est inconnue, on va remplacer par son estimation $\hat{S}'^2 = \hat{S}^2 \times \frac{N-1}{N}$.

Donc, la variance de la moyenne de l'échantillon est estimée dans le cas d'un tirage sans remise par :

$$V(\bar{x}) = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1} = \frac{S'^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1}$$

$$= \left( \frac{S^2 \times \left(\frac{N-1}{N}\right)}{n} \right) \times \left( \frac{N-n}{N-1} \right)$$

$$\rightarrow V(\bar{x}) = \frac{S^2}{n} \times \frac{N-n}{N} = \frac{158,47}{50} \times \frac{350-50}{350}$$

$$= 2,71.$$

3) conclusion :

L'estimateur sans biais de la moyenne du temps nécessaire dans cette usine pour effectuer cette opération est donné par la moyenne empirique $\bar{x} = 44,48$ minutes quelque soit le mode de tirage. Tandis que la dispersion est plus faible dans le cas d'un tirage sans remise ($V(\bar{x}) = 2,71$) par rapport au tirage avec remise ($V(\bar{x}) = 3,17$). Donc le tirage sans remise est plus efficace qu'un tirage avec remise.

Ex 9 : 1) l'intervalle de confiance de la moyenne m de la population au seuil 1-α est donné comme suit :

$$P\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(\bar{x}) \leq m \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(\bar{x})\right) = 1-\alpha \quad (1)$$

puisque le tirage est avec remise, la taille de l'échantillon $n = 100$, $X \sim N(m; \sigma)$ et $\sigma_{(X)} = \sigma = \sqrt{6,25} = 2,5$, la relation (1) est reformulée comme suit :

$$P\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \quad (2)$$

- Détermination de la valeur de $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ :

puisque la v.a. X définie au niveau de la population suit une loi normale d'écart-type σ connu ($X \sim N(m; \sigma)$), et d'après le théorème central limite, l'échantillon prélevé de cette population va suivre la même loi.

$$X \sim N(m; \sigma) \Rightarrow \bar{x} \sim N(E(\bar{x}), \sigma_{(\bar{x})}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sigma(\bar{x})} = T \sim N(0, 1)$$

par conséquent, la valeur de $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est donnée par la table de la loi normale centrée réduite ($N(0; 1)$) comme suit :

$$\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \frac{5\%}{2} = 0,975 \Rightarrow F(t) = 0,975$$

$$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96 \quad (a)$$

Si on remplace $\bar{x}$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $\sigma$ et $n$ par leurs valeurs dans la relation (2), l'intervalle de confiance de la moyenne $m$ de la population au seuil de 95% est donnée comme suit :

$$P\left(4,3 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{6{,}25}{100}} \leq m \leq 4{,}3 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{6{,}25}{100}}\right) = 0{,}95$$

$$P(3{,}81 \leq m \leq 4{,}79) = 0{,}95$$

<u>Interprétation</u> : On a 95 chance sur 100 pour que la moyenne $m$ de la population soit comprise entre 3,81 et 4,79.

2) Dans le cas où la variance $\sigma^2$ de la population est supposée inconnue, il faut la remplacer par son estimateur sans biais $\hat{S}^2$ dans le cas d'un tirage avec remise, avec :

$$\hat{S}^2 = S^2 \times \frac{n}{n-1} = 6{,}76 \times \frac{100}{99} = 6{,}8282 \Rightarrow \hat{S} = 2{,}61$$

En remplaçant $\sigma$ par son estimateur $\hat{S}$, l'intervalle de confiance donné dans la relation (2) est reformulé comme suit :

$$P\left(\bar{X} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{X} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Rightarrow P\left(4{,}3 - 1{,}96 \times \sqrt{\frac{6{,}828}{100}} \leq m \leq 4{,}3 + 1{,}96 \times \sqrt{\frac{6{,}828}{100}}\right) = 0{,}95$$

$$\Rightarrow P(3{,}78 \leq m \leq 4{,}81) = 0{,}95.$$

<u>Interprétation</u> : On a 95 chance sur 100 pour que la moyenne $m$ de la population soit comprise entre 3,78 et 4,81.

**EX10 :** on a d'après l'énoncé de l'exercice :

$\bar{x} = 100$, $n = 36$ et $\sigma = 24$. on cherche à estimer la moyenne $m$ de la population par intervalle de confiance.

l'intervalle de confiance de $m$ au seuil de $1-\alpha$ est formulé comme suit :

$$P\left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{(\bar{x})} \leq m \leq \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{(\bar{x})}\right) = 1-\alpha \quad (1)$$

puisque le tirage est avec remise, la taille de l'échantillon $n = 36$ et $\sigma_{(x)} = \sigma = 24$, la relation (1) est reformulée comme suit :

$$P\left(\bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha \quad (2)$$

* Détermination de la valeur de $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ :

puisque la loi de la v.a $X$ définie au niveau de la population est inconnue, d'après le <u>théorème</u> central limite : si la taille de l'échantillon est supérieure à 30 ($n > 30$), quelque soit la loi suivie par $X$, l'échantillon prélevé de cette population va suivre une loi normale de paramètres $E(\bar{x})$ et $\sigma_{(\bar{x})}$. En effet :

$$\bar{X} \rightsquigarrow N\left(E(\bar{x}) ; \sigma_{(\bar{x})}\right) \Rightarrow \left(\frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sigma_{(\bar{x})}}\right) = T \rightsquigarrow N(0,1)$$

par conséquent, la valeur de $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est donnée par la table de la loi normale centrée réduite ($N(0;1)$) pour les différents seuils de risque $\alpha$ :

- pour $\alpha = 10\% \Rightarrow 1 - \frac{10\%}{2} = 0,95 \Rightarrow F(t) = 0,95 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,64$ ;
- pour $\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \frac{5\%}{2} = 0,975 \Rightarrow F(t) = 0,975 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$ ;

pour $\alpha = 1\% \Rightarrow 1 - \frac{1\%}{2} = 0,995 \Rightarrow F(t) = 0,995 \Rightarrow t_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2,58$ ;

si on remplace $\bar{x}$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $\sigma$ et $n$ par leurs valeurs dans la relation (2), les intervalles de confiance de la moyenne $m$ de la population en fonction des différents niveaux de risque $\alpha$ sont données dans le tableau suivant :

| Niveau de confiance $1-\alpha$ | $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ | Intervalles de confiance de $m$ |
|---|---|---|
| 90 % | 1,64 | $P(93,44 \leq m \leq 106,56) = 0,90$ |
| 95 % | 1,96 | $P(92,16 \leq m \leq 107,84) = 0,95$ |
| 99 % | 2,58 | $P(89,68 \leq m \leq 110,32) = 0,99$ |

<u>Conclusion</u> : D'après ce tableau on constate qu'au fur et à mesure que le niveau de confiance augmente (le risque diminue), l'intervalle de confiance s'élargit. Autrement dit, plus l'intervalle de confiance est large, plus la probabilité pour que la moy de la population $m$ soit à l'intérieur de l'intervalle est grande.

**Ex : 11** soit la variable aléatoire X qui désigne le poids des étudiants de cette classe.

D'après l'énoncé de l'exercice, on a :

- La taille de la population $N = 72$ et celle de l'échantillon $n = 36$ ;
- la moyenne observée sur l'échantillon de 36 étudiants est $\bar{x} = 60$ Kg ;
- l'écart-type de la population est $\sigma = 2$ Kg ;
- le niveau de confiance est $1-\alpha = 90\%$.

L'intervalle de confiance de m au seuil de $1-\alpha$, est formulé comme suit :

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{(\bar{x})} \leq m \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{(\bar{x})}\right) = 1-\alpha \quad (1)$$

puisque le tirage est sans remise.

Remarque : On a considéré un tirage sans remise car le coefficient d'exhaustivité n'est pas proche de 1.

Acl : $\frac{N-n}{N-1} = \frac{72-36}{71} \approx 0,5$.

$N = 72$, $n = 36$ et $\sigma_{(X)} = \sigma = 2$, la relation (1) est reformulée comme suit :

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq m \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1-\alpha \quad (2)$$

- Détermination de la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ :

puisque la loi de la v.a $X$ définie au niveau de la population est inconnue, d'après le théorème central limite : si la taille de l'échantillon est supérieure à 30 ($n > 30$), quelque soit la loi suivie par $X$, l'échantillon prélevé de cette population va suivre une loi normale de paramètres $E(\bar{X})$ et $\sigma_{(\bar{X})}$.

En effet :

$$\bar{X} \rightsquigarrow N\left(E(\bar{X}) ; \sigma_{(\bar{X})}\right) \Rightarrow \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma_{(\bar{X})}} \rightsquigarrow N(0;1)$$

par conséquent, la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est donnée par la table de la loi normale centrée réduite $\left(N(0;1)\right)$.

Donc la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est lue sur cette table comme suite :

$$\alpha = 10\% \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{10\%}{2} = 0,95 \Rightarrow F(Z) = 0,95 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,64$$

Si on remplace $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $\sigma$, N et n par leurs valeurs dans la relation (2), l'intervalle de conffiance de la moyenne m de la population au risque de 10 % est donné comme suit :

$$P\left(60-1,64\times\frac{2}{\sqrt{36}}\times\sqrt{\frac{72-36}{72-1}}\leq m\leq 60+1,64\times\frac{2}{\sqrt{36}}\times\sqrt{\frac{72-36}{72-1}}\right)=0,90$$

$$P\left(59,61\leq m\leq 60,38\right)=0,90$$

Interprétation : on a 90 chances sur 100 pour que le poids moyen de tous les étudiants de la classe soit compris entre :

59,61 et 60,38 kg.

**Ex 1** : soit la v.a $X$ qui désigne le loyer mensuel de chambres d'étudiants. D'après l'énoncé de l'exercice on a :

* la taille de la population $N = 300$ et celle de l'échantillon $n = 40$ ;
* la moyenne observée sur l'échantillon de 40 chambres est $\bar{x} = 600$ DH
* l'écart-type de l'échantillon (empirique) est $S = 100$ Dirhams.
* le niveau de confiance est $1 - \alpha = 95\%$.

l'intervalle de confiance de $m$ au seuil de $1-\alpha$ est formulé comme suit :

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(\bar{x}) \leq m \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(\bar{x})\right) = 1 - \alpha \qquad (1)$$

puisque le tirage est sans remise (voir remarque Ex : ...)

$N = 300$ ; $n = 40$, la relation (1) est reformulée comme suit :

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq m \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1 - \alpha \qquad (2)$$

Etant donné que $\sigma$ est inconnu, on va l'estimer par $\hat{S}'$. en effet, la relation (2) prendra la forme suivante :

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{S}'}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \leq m \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\hat{S}'}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right) = 1 - \alpha \qquad (3)$$

- Estimation de $\hat{S}$ :

puisque l'écart-type $\sigma$ de la population est inconnu, on va le remplacer par son estimateur sans biais dans le cas d'un tirage sans remise $\hat{S}'$.

avec :

$$\hat{S}' = \sqrt{\hat{S}^2 \times \frac{N-1}{N}} = \sqrt{S^2 \times \frac{n}{n-1} \times \frac{N-1}{N}}$$

$$= \sqrt{(100)^2 \times \frac{40}{39} \times \frac{299}{300}}$$

$$= 101,105.$$

- Détermination de la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ :

puisque la loi de la v.a $X$ définie au niveau de la population est inconnue, d'après le théorème central limite : si la taille de l'échantillon est supérieure à 30 ($n > 30$), quelque soit la loi suivie par $X$, l'échantillon prélevé de cette population va suivre une loi normale de paramètres $E(\bar{x})$ et $\sigma_{(\bar{x})}$. En effet :

$$\bar{X} \rightsquigarrow N\left(E(\bar{x}); \sigma_{(\bar{x})}\right) \Rightarrow \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sigma_{(\bar{x})}} \rightsquigarrow N(0;1).$$

Par conséquent, la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est donnée par la table de la loi normale $N(0;1)$.

Donc la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ est lue sur cette table comme suit : $\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \frac{5\%}{2} = 0,975 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Si on remplace $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$, $S'$, $N$ et $n$ par leurs valeur dans la relation (3), l'intervalle de confiance de la moyenne $m$ de la population au risque de 5% est donné comme suit :

$$P\left(600 - 1,96 \times \frac{100,105}{\sqrt{40}} \times \sqrt{\frac{300-40}{299}} \leq m \leq 600 + 1,96 \times \frac{100,105}{\sqrt{40}} \times \sqrt{\frac{300-40}{299}}\right) = 0,95$$

$$P(571,071 \leq m \leq 628,928) = 0,95$$

Interprétation : on a 95 chances sur 100 pour que le loyer mensuel moyen du secteur soit compris entre 571,071 et 628,928 DH.

**EX 13** Soit la v.a X qui désigne le salaire mensuel des ouvriers. D'après l'énoncé, on a :

$N = 300$ ; $n = 50$ ; $\bar{x} = 3000$ ; $S = 500$.

A partir de la relation de l'intervalle de confiance de la moyenne m de la population au seuil de confiance $1-\alpha$ :

$$P\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{(\bar{x})} \leq m \leq \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{(\bar{x})}\right) = 1-\alpha \qquad (1)$$

soit $$P\left(|\bar{x} - m| \leq Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{(\bar{x})}\right) = 1-\alpha \qquad (2)$$

Partons de la relation (2), pour que la précision de l'estimation soit au moins égale à 100 DHs, il faut déterminer (ou choisir) le risque $\alpha$ tel que :

$$P\left(|\bar{x} - m| \leq 100\right) = 1-\alpha \qquad (3)$$

De la relation (2) et (3) on peut alors écrire :

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma_{(\bar{x})} = 100 \qquad (4)$$

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = 100 \Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{100}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)} \qquad (5)$$

Puisque l'écart-type $\sigma$ de la population est inconnue, on va le remplacer par son estimateur sans biais alors

Le cas d'un tirage sans remise $\hat{S}'$ :

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{100}{\left(\frac{\hat{S}'}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}\right)} \qquad (6)$$

Avec : $\hat{S}' = \sqrt{\hat{S}^2 \times \frac{N-1}{N}} = \sqrt{S^2 \times \frac{n}{n-1} \times \frac{N-1}{N}}$.

$$\hat{S}' = \sqrt{(500)^2 \times \left(\frac{50}{50-1}\right) \times \left(\frac{300-1}{300}\right)} = 504,23.$$

Si on remplace chaque terme par sa valeur dans la relation (6), on aura :

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = \frac{100}{\left(\frac{504,23}{\sqrt{50}} \times \sqrt{\frac{300-50}{300-1}}\right)} = 1,53$$

Donc afin de déterminer la valeur de $\alpha$ qui correspond à $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,53$, il faut savoir la loi suivie par $\bar{X}$.

*Détermination de la loi suivie par $\bar{X}$ :
Puisque la loi de la variable aléatoire X définie au niveau de la population est inconnue.

, d'après le théorème central limite : Si la taille de l'échantillon est supérieure à 30 ($n > 30$), quelque soit la loi suivie par X, l'échantillon prélevé de cette population va suivre une loi normale de paramètres $E(\bar{x})$ et $\sigma(\bar{x})$. En effet :

$$\bar{x} \sim N\left(E(\bar{x}); \sigma_{(\bar{x})}\right) \Rightarrow \frac{\bar{x} - E(\bar{x})}{\sigma_{(\bar{x})}} \sim N(0;1).$$

Par conséquent, la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}53$ est donnée par la table de la loi normal $N(0;1)$. En effet :

$$F(1{,}53) = 0{,}9370 \Rightarrow \alpha = 3\,\%.$$

Interprétation : On a 97 chance sur 100 (au risque de 3 %) pour que la moyenne des salaires des 300 ouvriers soit comprise entre $3000 \pm 100$ DH.

**Ex : 14** Soient les variables aléatoires suivantes :

X : désigne le nombre des coups de téléphones au cours d'une période donnée

$f = \frac{X}{n}$ ; désigne la fréquence observée des coups de téléphones au cours d'une période.

D'après l'énoncé de l'exercice, on a :

$N = 7420$ ; $n = N \times \frac{1}{5} = 7420 \times \frac{1}{5} = 1484$, $f = \frac{X}{n} = \frac{208}{1484} = 14\%$..

L'intervalle de confiance de la population des coups de téléphones au cours de la période au risque de 5% est donné comme suit :

$$P\left(f - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(f) \leq p \leq f + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(f)\right) = 1 - \alpha \qquad (1)$$

Puisque le tirage est sans remise (voir remarque),

$N = 7420$, $n = 1484$, la relation (1) est reformulée comme suit :

$$P\left(f - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p.q}{n} \times \frac{N-n}{N-1}} \leq p \leq f + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{p.q}{n} \times \frac{N-n}{N-1}}\right) = 1 - \alpha \qquad (2)$$

* Estimation de $\sigma(f)$ :

puisque p est inconnu, on va remplacer $\sigma(f)$ par son estimateur sans biais dans le cas d'un tirage sans remise, avec :

$$\sigma(f) = \sqrt{\left(\frac{N-n}{N}\right) \times \left(\frac{S^2}{n}\right)} = \sqrt{\left(\frac{N-n}{N}\right) \times \left(\frac{f(1-f)}{n-1}\right)}$$

$$\Rightarrow \sigma(f) = \sqrt{\left(\frac{7420-1484}{7420}\right) \times \left(\frac{0{,}14\,(1-0{,}14)}{1484-1}\right)} = 8{,}06 \times 10^{-3}$$

* Détermination de la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ :

puisque la loi de v.a X définie au niveau de la population est inconnu, d'après le théorème central limite : si la taille de l'échantillon est supérieure à 30 $(n > 30)$, quelque soit la loi suivie par X, la fréquence observée va suivre une loi normale de paramètres $E(f)$ et $\sigma(f)$. En effet :

$$f \rightsquigarrow N\left(E(f); \sigma(f)\right) \Rightarrow \left(\frac{f - E(f)}{\sigma(f)}\right) \rightsquigarrow N(0, 1).$$

par conséquent, la valeur de $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ sera déterminée à partir de la table de la loi normale centrée réduit $(N(0;1))$ comme suit :

- Pour $\alpha = 5\% \Rightarrow 1 - \frac{5\%}{2} = 0{,}975 \Rightarrow F(Z) = 0{,}975$

$$\Rightarrow Z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$$

si on remplace $f$; $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ et $\sigma_{(f)}$ par leurs valeurs dans la relation (1), on aura donc :

$$P\left(0{,}14-1{,}96\times 8{,}06\times 10^{-3}\leq p\leq 0{,}14+1{,}96\times 8{,}06\times 10^{-3}\right)=0{,}95$$

$$\Rightarrow P\left(0{,}124\leq p\leq 0{,}156\right)=0{,}95$$

__Interprétation :__ on a 95 chances sur 100 pour que la proportion de coups de fils qui n'ont pas être satisfait au cours de la période soit comprise entre 12,4 % et 15,6 %.

EX: 15 1) X est une variable aléatoire qui désigne le nombre de personnes satisfaites dans leur travail.

2) puisqu'on a :

• Deux éventualité mutuellement exclusives :

+ les personnes satisfaites dans leur travail, avec une proportion $p = 0,7$

+ les personnes qui ne sont pas satisfaites dans leur travail, avec une proportion $q = 1 - p = 0,3$

+ Un tirage indépendant avec remise ;

+ la taille de l'échantillon $n = 400$.

+ la probabilité p est fixe.

Donc, $X \sim B(n; p) \Rightarrow E(X) = np$ et $V(X) = npq$

Avec $n = 400, p = 0,7 \Rightarrow X \sim B(400, 0,7)$. En effet :

* $E(X) = 400 \times 0,7 = 280$.

$V(X) = npq = 400 \times 0,7 \times 0,3 = 84 \Rightarrow \sigma(X) = 9,16$.

3) On sait que pour n très grande, p = trop proche de 0, ni trop proche de 1, Alors la loi $B(n; p)$ est très proche de la loi normal $N(m; \sigma)$ ou $m = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$.

avec $n = 100$, $p = 0,7 \Rightarrow X \sim B(100; 0,7)$ En effet

$E(X) = 100 \times 0,7 = 70$

$V(X) = npq = 100 \times 0,7 \times 0,3 = 21 \Longrightarrow \sigma_{(X)} = 4,58$.

Donc : $X \sim B(100; 0,7) \Longrightarrow X \sim N(70; 4,58)$.

Interprétation : on a 95 chances sur 100 pour que le nombre de personnes satisfaites dans leur travail soit compris entre 61 et 79 personnes.

**4)** soit la v.a. $f = \frac{X}{n}$ qui désigne la fréquence observée des personnes satisfaits dans leur travail.
puisque $f$ est un estimateur sans biais de la proportion $p$ des personnes satisfaits dans leur travail au niveau de la population, on admet que :

$$\text{pour } n = 400 \Rightarrow E(f) = p \Rightarrow f = p = 0,7 .$$

l'intervalle de confiance de la proportion $p$ des personnes satisfaits dans leur travail au risque de 95% est donné comme suit :

$$P\left(f - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(f) \leq p \leq f + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sigma(f)\right) = 1 - \alpha . \quad (1)$$

puisque le tirage est avec remise, (1) est reformulé comme suit

$$P\left(f - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{pq}{n}} \leq p \leq f + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \times \sqrt{\frac{pq}{n}}\right) = 1 - \alpha$$

$\alpha = 5\% \Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

$\Rightarrow P(0,655 \leq p \leq 0,745) = 0,95 .$

Interprétation : on a 95 chances sur 100 pour que la proportion des personnes satisfaits dans leur travail soit compris entre 65,5% et 74,5%.

**EX. 16**

**Rq :** * Si la variance est inconnu et la taille de l'échantillon est grande on peut approcher la loi de student par la loi normale.

* Si la variance est connue, on peut déterminer la taille de l'échantillon **n** en fonction de la précision désirée $\Delta$.

$$n = \left[\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma}{\Delta}\right]^2$$

On suppose que $n \geq 30$

$$n = \left(\frac{z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{0,25}}{\Delta}\right)^2$$

$1-\alpha = 0,9544 \Rightarrow \alpha = 0,456 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,0228.$

$\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0,9772 \Rightarrow F\left(z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,9772$

$\Rightarrow z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2$

Donc $n = \left(\frac{2 \times \sqrt{0,25}}{0,02}\right)^2 \Rightarrow n = 2500$

**Ex : 17**

1) $\mu = 37,5 \rightarrow X \sim N(\mu, \sigma)$

$P(37,45 \leq X \leq 37,55) = 0,998$

$\Rightarrow P\left(\frac{-0,05}{\sigma} \leq t \leq \frac{0,05}{\sigma}\right) = 0,998$

$\Rightarrow 2F\left(\frac{0,05}{\sigma}\right) - 1 = 0,998$

$\Rightarrow F\left(\frac{0,05}{\sigma}\right) = 0,999 \Rightarrow \frac{0,05}{\sigma} = 3 \Rightarrow \sigma = 0,01666$

2) $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

$P(37,495 \leq \bar{X} \leq 37,505) = 0,95$

$\Rightarrow P\left(-\frac{5\times10^{-3}}{0,0166}\sqrt{n} \leq t \leq \frac{5.10^{-3}}{0,0166}.\sqrt{n}\right) = 0,95$

$\Rightarrow P(-0,3\sqrt{n} \leq t \leq 0,3\sqrt{n}) = 0,95$

$\Rightarrow 2F(0,3\sqrt{n}) - 1 = 0,95 \Rightarrow F(0,3.\sqrt{n}) = 0,975$

$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1,96}{0,3} = 6,53$

$\Rightarrow n = 42,68 \Rightarrow n \simeq 43.$

## EX : 18

| $x_i$ | 5,5 | 5,6 | 5,8 | 5,9 | 6 | 6,1 | 6,2 | 6,3 | 6,6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n_i$ | 1 | 3 | 1 | 4 | 2 | 1 | 5 | 2 | 1 |

X suit la loi normale et $\mu$ est inconnue

$$I_c(\sigma^2) = \left[ \frac{(n-1)\hat{S}^2}{x_2} ; \frac{(n-1)\hat{S}^2}{x_1} \right]$$

Pour la variance :

$1-\alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025$.

$$P(\chi^2_{19} > x_2) = \frac{\alpha}{2} = 0,025$$

$$\Rightarrow x_2 = 32,85$$

$$P(\chi^2_{19} > x_1) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,975$$

$$\Rightarrow x_1 = 8,91$$

$$\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=} n_i x_i = \frac{120}{20} = 6.$$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum x_i^2 n_i - \frac{n}{n-1} \bar{x}^2$$

$$= \frac{1}{19} \times \frac{18039}{25} - \frac{20}{19} \times 36$$

$\Rightarrow \hat{S}^2 = 0{,}0821.$

<u>Alors</u> $I_C(\sigma^2) = [0{,}04748 ; 0{,}17507]$

$I_C(\sigma) = [0{,}21789 ; 0{,}40841]$.

2) on a X suit la loi normale et la variance <u>inconnue</u>. $n < 30$

$$I_C = \left[\bar{x} \pm t^{n-1}_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{S}}{\sqrt{n}}\right].$$

$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05.$

donc $t^{19}_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2{,}093$

avec $t^{19}_{1-\frac{\alpha}{2}}$ à (19) degré de liberté.

<u>d'où</u> $I_C = \ldots\ldots\ldots\ldots$

**Ex°19** soit $X$ la variable aléatoire qui désigne le nombre de fleurs blanches. si on tire un échantillon de taille de $n$ plante, de cette espèce. on définit la variable $f = \frac{X}{n}$ qui désigne la fréquence observée des fleurs blanches de cette espèce.

Puisque $X \leadsto B(n\,;p) \Rightarrow E(X) = np$, $V(X) = npq$.

Donc $f = \frac{X}{n} \Rightarrow E(f) = p = 0{,}25$ et

$$V(f) = \frac{pq}{n} = \frac{(0{,}25)\times(0{,}75)}{n}$$

si on applique l'inégalité de Bienaymé-Tchébichef. à la fréquence observée $f$, on aura la relation suivante:

$$P\left(|f - E(f)| \leq t\sigma_{(f)}\right) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow P\left(|f - p| \leq t \times \sqrt{\frac{p\times q}{n}}\right) \geq 1 - \frac{1}{t^2}.$$

$$\Leftrightarrow P\left(|f - 0{,}25| \leq 0{,}05\right) \geq 0{,}99. \qquad (1)$$

Donc partant de la relation (1), on peut calculer la valeur de $n$, mais auparavant, il faut déterminer la valeur de $\underline{t}$

* Détermination de la valeur de $t$

on a d'après la relation (1)

$$1-\frac{1}{t^2}=0,99 \Rightarrow t=10$$

* <u>Détermination</u> de la <u>taille</u> de l'<u>échantillon n</u> :

En remplaçant t par sa valeur dans la relation (1), on peut déterminer la taille de l'échantillon n, comme suit :

$$t \times \sqrt{\frac{pq}{n}} \leq 0,05 \Rightarrow t^2 \times \left(\frac{pq}{n}\right) \leq (0,05)^2$$

$$\Rightarrow n \geq$$



$$\Rightarrow n \geq \frac{10^2 \times 0,25 \times 0,75}{(0,05)^2} = 7500 \text{ fleurs.}$$

<u>Interprétation</u> : il suffit d'observer un échantillon d'effectif au moins égal à 7500 fleurs de cette espèce pour que la fréquence observée de fleurs blanches soit comprise entre 20% (25% − 5%) et 30% (25% + 5%) avec une probabilité au moins égale à 0,99.