Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences Juridiques,
Économiques et Sociales

Correction
Des Travaux Dirigés

Pr. Hamid EL AMRANI

Analyse Mathématiques I

Semestre 1

2019 - 2020

15 Novembre 2019

1) Montrons que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

Après qu'on remplace x par 0 on obtient $\dfrac{0}{0}$

Alors, dans ce cas, on peut appliquer la règle d'Hôpital (dite aussi règle d'Hospital ou de Bernoulli)

On a : $\sin'(x) = \cos(x)$ et $(x)' = 1$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)}{1} = \dfrac{\cos(0)}{1} = 1$

- **Déduisons** que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1$:

Si on remplace x par 0, on obtient : $\dfrac{0}{0}$

Appliquons alors la règle d'hôpital :

On a : $\dfrac{(1-\cos(x))'}{\left(\frac{x^2}{2}\right)'} = \dfrac{\sin(x)}{x}$

Donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos(x))'}{\left(\frac{x^2}{2}\right)'}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$
$$= 1$$

Car d'après le résultat précédent on a :
$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

- **Conclusion** : on remarque qu'on a appliqué la règle d'Hôpital deux. Pour la 1$^{\text{ère}}$ fois pour monter que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ et pour la 2$^{\text{ème}}$ fois pour montrer que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ et conclure la valeur de cette limite.

Ainsi, on peut appliquer la règle d'Hôpital autant qu'on veut dès que les conditions de leur application sont vérifiées.

2) Déduisons que « $\tan(x) \sim x$ » au point $x = 0$

On a d'après la question 1) : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

Et on a : $\dfrac{\tan(x)}{x} = \dfrac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} = \dfrac{\sin(x)}{x} \times \dfrac{1}{\cos(x)}$

Donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan(x)}{x} = \dfrac{\sin(x)}{x} \times \dfrac{1}{\cos(x)} = 1 \times \dfrac{1}{1} = 1$

Alors enfin, on a : $\tan(x) \sim x$ » au point $x = 0$

- **Déduisons** que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x} = 0$:

On a : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1$

Donc :

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{\frac{x^2}{2}} \times \frac{x}{2}$$
$$= 1 \times 0 = 0$$

3) Calculons les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 3} x^2 - 2x + 2$:

$\lim\limits_{x \to 3} x^2 - 2x + 2 = 3^2 - 2 \times 3 + 2 = 5$

Car les polynômes sont continus sur $\mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x \to 27} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 2}$:

$\lim\limits_{x \to 27} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 3}{x - 2} = \dfrac{\sqrt[3]{27} - 3}{27 - 2} = \dfrac{\sqrt[3]{24}}{25} = \dfrac{2\sqrt[3]{3}}{25}$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{x^2 - 3x + 2}$:

Après qu'on replace x par 0, on trouve $\dfrac{0}{0}$

Donc, on peut appliquer la règle d'Hôpital

<u>Rque</u> : si les conditions d'applications de la règle d'Hôpital, on applique directement cette règle sans préciser ses conditions.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)'}{(x^2 - 3x + 2)'}$$
$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{2x - 3} = \frac{1}{2 \times 2 - 3} = 1$$

2$^{\text{ème}}$ Méthode : on peut factoriser le dénominateur puis on simplifie par $x - 2$

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^3}{x^3}$:

En appliquons la règle d'Hôpital, on trouve :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1+x^3}{x^3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(1+x^3\right)'}{\left(x^3\right)'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3\cancel{x^2}}{3\cancel{x^2}} = 1$$

e) $\lim_{x \to +\infty} \left(1+e^{-3x}\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty} (1 + e^{-3x}) = 1 + 0 = 1$$

f) $\lim_{x \to 0} \frac{(x+3)^2-9}{x}$:

1ère Méthode :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+3)^2-9}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\left((x+3)^2-9\right)'}{(x)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2(x+3)}{1} = 6$$

2ème Méthode :

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+3)^2-9}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x+3)^2-3^2}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{((x+3)-3)((x+3)+3)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}(x+6)}{\cancel{x}} = 6$$

4) Calculons les limites suivantes :

a) $\lim_{x \to \infty} \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - 2$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3}{x} + \frac{5}{x^2} - 2 = 0 + 0 - 2 = -2$$

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{10x^2-2}{15x^2-3}$:

1ère Méthode : Règle d'Hôpital

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{10x^2-2}{15x^2-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(10x^2-2\right)'}{\left(15x^2-3\right)'}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{20\cancel{x}}{30\cancel{x}} = \frac{2}{3}$$

2ème Méthode : factorisation et simplification

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{10x^2-2}{15x^2-3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(10-\frac{2}{x^2}\right)'}{\cancel{x^2}\left(15-\frac{3}{x^2}\right)'} = \frac{2}{3}$$

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+xe^{-x}}{6x^2+2}$:

On a : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{xe^x} = \frac{1}{+\infty} = 0$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+xe^{-x}}{6x^2+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(1+\frac{e^{-x}}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(6+\frac{2}{x^2}\right)} = \frac{1+0}{6+0} = \frac{1}{6}$$

5) Calculons les limites suivantes :

$$a)\ \lim_{x \to -\infty} \frac{x-3-\frac{1}{x^2}}{2x+5+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x}\left(1-\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x}\left(2+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}\right)} = \frac{1}{2}$$

$b)$ $\lim_{x \to 0^-} \frac{(x^4+2)|x|}{x}$

Quand $x \to 0^-$ alors $x \to 0$ et $x < 0$

Ainsi, $|x| = -x$

Et par la suite,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{(x^4+2)|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\cancel{x}(x^4+2)}{\cancel{x}} = 0 + 2 = 2$$

$c)$ $\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{\sqrt{(2x-1)^2}}{x-\frac{1}{2}}$:

Puisque $x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+$ alors $x > \frac{1}{2}$

Donc $2x > 1$ par la suite $2x - 1 > 0$

Et enfin, on a : $|2x-1| = 2x - 1$

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{\sqrt{(2x-1)^2}}{x-\frac{1}{2}} = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{|2x-1|}{x-\frac{1}{2}} == \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{2x-1}{x-\frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{2\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}}{\cancel{x-\frac{1}{2}}} = 2$$

À l'étape de la simplification, on peut utiliser la règle d'Hôpital.

7) Calculons les limites suivantes :

6) Calculons les limites suivantes :

$a)$ $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x(x+3)}{(x-1)(x-2)}$

Quand on obtient un résultat de forme $\dfrac{l \neq 0}{0}$ on devrait étudier le signe de dénominateur pour bien savoir est ce que le dénominateur tend vers 0^+ ou bien 0^-.

Cherchons maintenant le signe de $(x-1)(x-2)$:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		-	0	+		+	
$x-2$		-		-	0	+	
$(x-1)(x-2)$		+	0	-	0	+	

Alors quand $x \to 1^+$ on a : $2 > x > 1$
Et par la suite $(x-1)(x-2) < 0$
Ainsi $(x-1)(x-2) \to 0^-$

Donc, $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x(x+3)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{4}{0^-} = -\infty$

Autrement, on peut encadrer $(x-1)(x-2)$ pour qu'on puisse savoir est ce qu'elle tend vers 0^+ ou 0^- .

$b)$ $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \dfrac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2}}$

On a : $x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-$ donc $x < \frac{1}{2}$

Ainsi, $|2x-1| = -(2x-1)$

$$\lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^2}} = \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{2x-1}{|2x-1|}$$

$$= \lim_{x \to \left(\frac{1}{2}\right)^-} \frac{\cancel{2x-1}}{-(\cancel{2x-1})} = -1$$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^n - 1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(x^n-1)'}{(x-1)'} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{n \times x^{n-1}}{1} = n$

On peut utiliser la division euclidienne pour factoriser $x^n - 1$

$d)$ $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{e^x - 1}{x-1} = \dfrac{e-1}{0^+} = +\infty$
car $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$

$a)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\pi x^2 + 4}{6x^2 + 9} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\pi x}{12x} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2\pi}{12} = \dfrac{\pi}{6}$

$b)$ $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 1}{x-1} \overset{R.H}{=} \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2}{1} = 1$

$c)$ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^2 - 3x + 2} \overset{R.H.}{=} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{2x-3} = \dfrac{1}{1} = 1$

$d)$ $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^{2n+1} + 1}{x+1} = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{(2n+1)x^{2n}}{1} = 2n+1$

8) Calculons les limites suivantes :

À retenir

Montrons d'abord que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$,

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-x} = e^{-1}$

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$?

Posons $u = \dfrac{1}{x} \Rightarrow u \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{u \to 0} e^{\frac{1}{u}\ln(1+u)}$$

$$= \lim_{u \to 0} e^{\frac{\ln(1+u)}{u}} = e^1 = e$$

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x = e^{-1}$?

Posons $u = -x \Rightarrow u \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \mp\infty$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u \to \mp\infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{-u} = \lim_{u \to \mp\infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u}$$

$$= \frac{1}{e} = e^{-1}$$

- $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{-x} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{1}{\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \dfrac{1}{e} = e^{-1}$

Ainsi, on peut adopter l'une des célèbres limites ci-dessus pour modéliser la limite $a)$

a)

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{2x^2+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^2+5-2}{2x^2+5}\right)^{2x^2+3}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{2}{2x^2+5}\right)^{2x^2+3}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1-\frac{1}{x^2+\frac{5}{2}}\right)^{2\left(x^2+\frac{5}{2}\right)-2}$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\left(\left(1-\frac{1}{x^2+\frac{5}{2}}\right)^{\left(x^2+\frac{5}{2}\right)}\right)^2\times\left(1-\frac{1}{x^2+\frac{5}{2}}\right)^{-2}\right)$$

$$=e^2\times 1^{-2}=e^2$$

b) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}\overset{R.H}{=}\lim_{x\to 2}\frac{2x}{2x-4}=\frac{4}{0}$

Dans ce cas, on devrait étudier le signe de la binôme $2x-4$. Ainsi, on discute les deux cas $x>2$ et $x<2$ quand x tend vers 2.

- 1[er] cas $x>2$:
  On a : $2x>4\Rightarrow 2x-4>0$ Alors
  $$\lim_{\substack{x\to 2\\ x>0}}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}\overset{R.H}{=}\lim_{\substack{x\to 2\\ x>0}}\frac{2x}{2x-4}=\frac{4}{0^+}=+\infty$$
- 2[ème] cas $x<2$:
  On a : $2x<4\Rightarrow 2x-4<0$ Alors
  $$\lim_{\substack{x\to 2\\ x<0}}\frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}\overset{R.H}{=}\lim_{\substack{x\to 2\\ x<0}}\frac{2x}{2x-4}=\frac{4}{0^-}=-\infty$$

c) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^3}\right)$

Si on remplace directement on trouve une forme indéterminée

- Si $x>1$ alors $x^3>1$ donc $0>1-x^3$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1-1}{1-x^3}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x}{1-x^3}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

- Si $x<1$ alors $x^3<1$ donc $0<1-x^3$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x^3}\right)=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

d) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{e^x+4}\right)^x$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{e^x+4}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(\frac{2x}{e^x+4}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(\frac{1}{\frac{e^x}{2x}+\frac{4}{2x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}e^{-x\ln\left(\frac{1}{2}\times\frac{e^x}{x}+\frac{2}{x}\right)}$$

$$=e^{-\infty\times(+\infty)}=0$$

9) Résolvons les limites suivantes :

a) $\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{\sin(x)}}=\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{x}{\sin(x)}\times\frac{1}{x}}=e^{1\times(+\infty)}=+\infty$

$\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{\sin(x)}}=\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{x}{\sin(x)}\times\frac{1}{x}}=e^{1\times(-\infty)}=0$

b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sqrt[3]{\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^2}}$

Posons $u=\frac{\pi}{2}-x$ donc $u\underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\longrightarrow}0$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sqrt[3]{\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^2}}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{\sqrt[3]{(1-\cos(u))^2}}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{\sin(u)}{(1-\cos(u))^{\frac{2}{3}}}$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\left(\frac{u^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}}\quad(DL_1(0))$$

$$=\lim_{u\to 0}\frac{1}{\frac{u^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{4}}}=\frac{1}{0}$$

- Si $x > \frac{\pi}{2}$ alors $0 > u = \frac{\pi}{2} - x \to 0^-$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sqrt[3]{\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^2}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- Si $x < \frac{\pi}{2}$ alors $0 < u = \frac{\pi}{2} - x \to 0^+$

$$\lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sqrt[3]{\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$c)$ $\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(\ln(x))'}{(x^2 - 1)'} \overset{RH}{=} \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \frac{1}{2}$$

$2^{\text{ème}}$ Méthode :

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{(x - 1)(x + 1)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x - 1} \times \frac{1}{x + 1} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

10) Résolvons ls limites suivantes :

$a)$ $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x} + \sqrt{x + \sqrt{x}} - \cancel{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x}}\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x}}}}{\cancel{\sqrt{x}}\left(\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}} + 1\right)} = \frac{1}{2}$$

$b)$ $\lim_{x \to 0} \frac{1 + e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}}{2 - e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}}$

Si $x > 0$

Donc $\lim_{x \to 0^+} \frac{1 + e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}}{2 - e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}} = \frac{1 + e^{-\infty}}{2 - e^{-\infty}} = \frac{1}{2}$

Si $x < 0$ alors $\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1 + e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}}{2 - e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}} = \frac{+\infty}{-\infty}$ F.I.

Appliquons la règle d'Hôpital

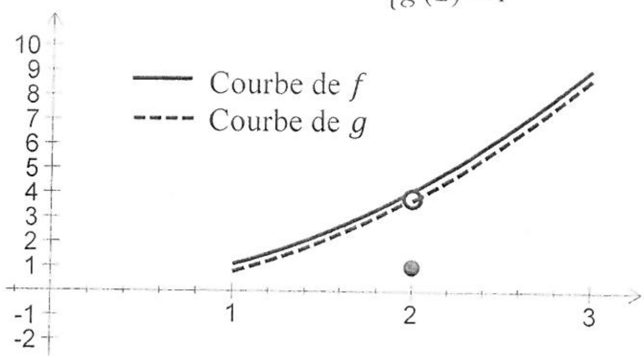
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1 + e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}}{2 - e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{\cancel{\frac{1}{x^2} e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}}}{\cancel{\frac{1}{x^2} e^{\left(-\frac{1}{x}\right)}}} = 1$$

11) f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $[1; 3]$ telles qu'elles coïncident sur tous les points de cet intervalle, sauf au point $x = 2$.

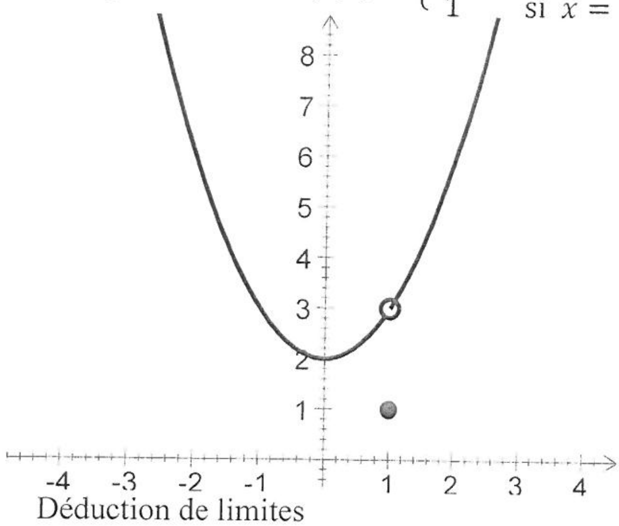
$a)$ Non.

$b)$ Oui, on peut construire f continue sur $[1;3]$ et nécessairement g sera discontinue en $x = 2$.

Par exemple : $f(x) = x^2$ et $\begin{cases} g(x) = x^2 \text{ si } x \neq 2 \\ g(2) = 1 \end{cases}$



12) Représentation de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



Déduction de limites

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$

Mais n'est pas continue car $f(1) \neq \lim_{x \to 1} f(x)$

Pour que f soit continue on doit avoir $f(1) = \lim_{x \to 1^{+}} f(x)$ et cela ne sera correct sauf si on prend $f(1) = 3$ c.à.d. $f(x) = x^2 + 2$.

13) La définition de g en $x = 0$ pour qu'elle soit continue en $x = 0$ c.à.d. $\lim_{x \to 0} g(x) = g(0)$.

On a :

$$\lim_{t \to 0} g(t) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 + 4t}{t^2 - 4t} \overset{\text{R.H}}{=} \lim_{t \to 0} \frac{2t + 4}{2t - 4} = -1$$

Donc, on doit prendre $g(0) = -1$.

14) Trouvons a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$ et plus précisément au point $x = 2$.

On a déjà f continue sur $]-\infty; 2[$ et $[2; +\infty[$ car f est de forme de polynôme sur ces deux intervalles.

On a $f(x) = 2^3 = 8$ et $\lim_{x \to 2^-} f(x) = a \times 2^2 = 4a$

Pour garantir la continuité on doit avoir $4a = 8$ c.à.d. $a = 2$.

15) On a $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

Donc $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x^2 \geq 0\} = [-1; 1]$

Alors est définit seulement à gauche de 1

Donc, on ne peut pas même discuter la continuité de f à droite de 1.

En général, f est continue à gauche au point 1 et aussi continue à droite au point -1. Par convention on peut dire que f est continue sur l'intervalle $[-1; 1]$.

16) Supposons que f change de signe sur $[a; b]$

Donc il existe un intervalle $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$ tel que $f(\alpha) \times f(\beta) < 0$.

Et puisque f est continue, alors d'après le théorème de Bolzano la fonction f admet une racine dans $[\alpha; \beta] \subset [a; b]$.

Appliquons la loi logique des implications inverse : $[P \Rightarrow Q] \Leftrightarrow [\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}]$

Conclusion : si f est continue et n'admet de racines sur $[a; b]$ alors f ne change pas de signes sur $[a; b]$.

17) Chercher l'ensemble des points sur lesquels la fonction f n'est pas continue et dans quel cas cette non-continuité est évitable ?

$a)$ $f(x) = \begin{cases} x & si \ x \leq 1 \\ x^2 & si \ \ x > 1 \end{cases}$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

$b)$ $f(x) = \begin{cases} -2x & si \ x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 1 & si \ x > 2 \end{cases}$

f n'est pas continue au point $x = 2$ et n'est pas prolongeable par continuité.

$c)$ $f(x) = |x|$

f est continue sur $\mathbb{R}$.

$d)$ $f(x) = \dfrac{|x + 2|}{x + 2}$

f n'est pas défini au point $x = -2$ et n'est pas prolongeable par continuité à ce point. car

$$\left[\lim_{x \to -2^+} f(x) = 1\right] \neq \left[\lim_{x \to -2^-} f(x) = -1\right]$$

$e)$ $f(x) = \begin{cases} \tan\left(\dfrac{\pi x}{4}\right) & si \ |x| \leq 1 \\ x & si \ |x| > 1 \end{cases}$

f est continue aux points 1 et -1

Mais ni continue ni prolongeable par continuité aux points de forme $x = 2 + 4k \quad avec \quad k \in \mathbb{Z}$

$f)$ $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$

f ni définie ni continue au point 0

Mais elle prolongeable par continuité en 0

Tel que son prolongement $\tilde{f}$ est défini comme suit :

D'abord, on a : $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$

Donc, $\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x} & si \quad x \in \mathbb{R}^* \\ \tilde{f}(0) = 1 \end{cases}$