Université Hassan II - Ain Chock
Faculté des Sciences Juridiques,
Economiques et Sociales

Semestre : 1
Module : Introduction en Sciences Economiques
Elément : Analyse Economique
Enseignant : Mr BENMOUSSA

Eléments du cours

- Instruments d'analyse démographique et évolution du peuple humain
- Suites arithmétiques et suites géométriques
- Représentations graphiques
- Équations et inéquations
- Instruments du résonnement logique
- Éléments de programmation linéaire
- Le pourcentage d'évolution

Numérisation onception
Mr Mohamed adil IA I

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1 : INSTRUMENTS D'ANALYSE DÉMOGRAPHIQUE ET ÉVOLUTION DU PEUPLE HUMAIN

I- Introduction :

Démographie est un mot grec qui vient de « demos » c'est à dire peuple, et « graphie ».

La démographie traite de la composition des groupes humains et des causes et des influences, des variations de la population. C'est donc l'étude de la population humaine sous l'aspect quantitatif et qualitatif.

- La démographie qualitative traite la population humaine comme un ensemble. Elle suit sa dimension, sa structure et son évolution. Elle se base sur la statistique et ses méthodes dans le but d'obtenir correctement les données et puis de les interpréter.
- La démographie quantitative porte sur l'étude des mouvements qui se produisent dans les populations, ainsi que sur les divers facteurs agissants.

Le nombre de la population dépend des naissances, des décès. Aussi il augmente par l'immigration et diminue par l'émigration.

Pt_0 : population actuelle Pt : Pt_0 + naissance – décès + immigrations – émigrations

Ainsi la population humaine est en perpétuel mouvement, et on a cherché depuis des siècles à établir des systèmes de statistique, pour enregistrer les mariages, les naissances, les décès et les migrations.

Certains pays industrialisés disposent de données démographiques depuis des siècles, en s'étant intéresser au début à des objectifs militaires et fiscaux. Alors que dans les pays en voie de développement, les recensements sont confrontés à quelques obstacles.

La démographie se base sur deux principales catégories qui sont en réalité complémentaires :

- 1ère catégorie : on cherche particulièrement le volume de la population (le nombre), sa structure (comme la répartition par sexe ou par âge), sa répartition géographique et sa répartition par catégorie socioprofessionnelle.
- 2ème catégorie : où l'en s'intéresse au mouvement de la population, à travers l'enregistrement qui contient des naissances, des décès et des migrations.

II- Sources démographiques :

1- Sources de l'état de la population :

Cette état est une caractéristique démographique qui évolue très lentement (effets sensibles à moyen et à long terme) sous l'effet de facteurs très multiples.
Les sources de l'état de la population sont :

- Le recensement : il concerne tous les habitants d'un territoire. Il permet d'établir la population légale d'un pays dans son ensemble par région, par province, par willaya ou par préfecture. Il peut s'intéresser aussi à d'autres aspects socioéconomiques comme le logement, le niveau d'instruction, les équipements ménagers… Au MAROC, il y a eu des recensements généraux préparés et financés par l'Etat (en 1960-1971-1982-1993-2004), les degrés de précision d'un recensement dépend aussi bien de la conception, la préparation, l'exécution, la dispersion de la population sur le territoire national, les préjugés, les traditions, le degré d'instruction des habitants, les questions posées et de la qualité des personnes qui répondent. Des pays peuvent solliciter de l'aide des nations unis pour les activités en matière de population.
- Les enquêtes par sondage : contrairement au recensement qui porte sur toute la population, qui est coûteux et qui demande une durée importante pour sa réalisation, on peut pratiqué des sondages sur des échantillons (sur une partie de la population). Cela engendre des coups modérés et offre la possibilité de mieux orienter les questions, pour cerner un problème. Les enquêtes par sondage sont très pratiquées aussi bien dans les pays développés que dans les pays en voie de développement, et touchent des domaines aussi divers que les opinions politiques et religieuses, l'agriculture, la nutrition, la consommation, l'industrie, la démographie (mortalité, fécondité, migration, planification familiale..). L'objectif par le sondage est de réaliser l'objectif des études statistiques qu'on peut généraliser à l'ensemble de la population.

2- Sources du mouvement de la population :

- L'état civil c'est à dire les naissances et les décès ;
- Les bureaux de douane (les migrations) ;
- Le ministère du travail et de l'emploi (le chômage) ;
- Les communes (les autorisations de construire) ;
- Département de l'agriculture pour la production végétale et animale.

3- Sources démographiques dans les pays en voie de développement :

A la différence avec beaucoup de pays développés, les pays en voie de développement rencontrent des difficultés dans l'organisation et l'exécution des recensements et aussi dans les sondages, dont les principaux sont :

- La déclaration sur l'âge ;
- Le niveau d'instruction très faible et l'existence des coutumes et des préjugés ;
- Les infrastructures de communication limitées à certaines zones ;
- Une administration non encore rodée.

4- Sources démographiques au MAROC :

- En plus des recensements généraux qui ont été pratiqués au MAROC (1960-1971-1982-1993-2004), il y a eu des enquêtes par l'Etat depuis 1960 ;
- La 1ère enquête a été établie en 1961 avec des objectifs multiples (la scolarisation, l'habitation…) ;
- En 1966-1967, il y a eu une autre enquête dont l'objectif est de faire apparaître les attitudes de la planification familiale au milieu urbain et rural ;
- En 1986, il y a eu une enquête qui a étudié les mouvements de la population ;
- Les enquêtes annuelles sur la population active ;
- Les enquêtes de consommations et de dépenses des ménages en 1961-1971-1985-1995.

III- Structures démographiques de la population :

1- Effectif de la population :

L'indice qui mesure la variation de la population est un taux de croissance qui est le résultat de l'accroissement naturel de la population (exprimé en ‰) et du sole des mouvements migratoires (exprimé en ‰).
L'effectif (le volume) de la population a une action décisive sur l'économie, comme par exemple quant on parle du revenu moyen par tête d'habitant, ou de la consommation moyenne.

2- Structure par sexe :

A la naissance, il y a un excédent masculin puisqu'il a été confirmé dans toutes les populations que sur 205 naissances, il y a 105 garçons et 100 filles. Et avec l'avancement dans l'âge, il y a un renversement de situation à cause des guerres, des travaux pénibles…

- **Rapport de masculinité :**

C’est le rapport :

$$\frac{Effectif \quad des \quad hommes}{Effectif \quad des \quad femmes} \; . \text{ (En \%)}$$

Remarque : ce rapport peut être calculé à un âge donné ou par groupe d’âge.
Exemple : à la naissance le rapport de masculinité est 105/100 = 105 %.

- **Taux de masculinité :**

C’est le rapport :

$$\frac{Effectif \quad des \quad hommes}{Effectif \quad de \quad la \quad population} \quad \text{(En \%)}$$

Remarque : ce rapport peut être calculé à un âge donné ou par groupe d’âge.

3- Structure par âge :

La répartition selon l’âge représente la caractéristique fondamentale de la connaissance de la population, elle sert à l’établissement des précisions démographiques et des études concernant l’activité économique.

- Une génération est constituée des personnes qui sont nées au cours de la même année civile. Ainsi les personnes nées entre le 1er janvier et le 31 décembre 1982 constituent la génération de 1982.
- On parle aussi d’un groupe de générations, comme par exemple le groupe de 1980-1984 qui concerne les gens nés entre le 1er janvier 1980 et le 31 décembre 1984.

IV- Lexique et concepts de base :

Remarque : on peut considérer les nombres absolus, comme par exemple l’annuelle de naissance ou de décès ou encore de mariage ou du divorce. Mais on préfère s’intéresser à des indices pour tenir compte des évoluions de l’entité étudiée, du volume de la population étudiée et de sa structure.

1- Pourcentage :

C'est un rapport entre deux valeurs × 100.

Exemple :

Prénom	Constitution en DHS	% contribution
ADIL	500	$\frac{500}{800}\times 100 = 62.5\%$
SANAA	300	$\frac{300}{800}\times 100 = 37.5\%$
Total	800	$\frac{800}{800}\times 100 = 100\%$

2- Taux de variation :

C'est le rapport :

$$\frac{Niveau \quad final - Niveau \quad initial}{Niveau \quad initial}$$

Exemple :

1 kg de sucre coûte 1.40 DH (début janvier 2003).Il a coûté 6 DH (début janvier 2004). Le taux de variation sur le prix du sucre est :

$$\frac{Niveau \quad final - Niveau \quad initial}{Niveau \quad initial} = \frac{6-5{,}4}{5{,}4} = 0.11 = 11\%.$$

3- Indice :

C'est le rapport :

$$\frac{Niveau \quad final}{Niveau \quad initial} \times 100.$$

Exemple : on prend en considération l'exemple précédent :

L'indice est le suivant : $\frac{6}{5{,}4} = 111.11\%$

4- Accroissement de la population :

C'est la variation (positive ou négative) d'une population durant une période donnée.

Remarque : on parle d'accroissement naturel si on ne tient compte que des naissances et des décès, et on parle d'accroissement total si on tient compte du solde migratoire.

5- Âge :

On parle de l'âge exact (exemple 18 ans 3 mois 10 jours), dans certaines situations, on s'intéresse à l'âge en année révolue (finie).
*Age moyen des mères à la naissance de leurs enfants, ou l'âge moyen à la maternité, c'est une moyenne qui se calcule à partir du tableau de fécondité dans l'absence de toute mortalité.
*Age moyen au 1er mariage.

6- Taux brut de mortalité :

C'est le rapport :
Effectif des naissances au cours d'une année civile donnée / Effectif moyen de la population.

7- Taux global de fécondité :

C'est le rapport des naissances suivantes au cours d'une année en cours à la population moyenne féminine dont l'âge entre 15 et 50 ans.
Ce taux tient compte aussi bien de la fécondité légitime que celle illégitime.

8- Taux de mortalité enfantine :

Le rapport au cours d'une année donnée du nombre des décès de moins d'un an et l'effectif des naissances vivantes.

apitre UI E I UE E UI E E I UE

I u'est ce qu'une suite

Idée intuitive

Intuitivement une suite de nombre réel est une liste ordonnée de nombres ela si nifie que parmi ses nombres il a un premier que nous pourrons noter U le deu i me U le troisi me U et de mani re énérale on peut noter U_n

Notations et définitions

n note U_n la suite U U U U n U_n
e nombre U_n est appelé terme d'indice n de la suite
Il est parfois utile de noter U au premier terme

II uite arit métique

u'est ce qu'une suite arit métique

artant d'un e emple considérant la suite des naturelles impaires

n constate que l'on passe d'un terme un suivant en a outant le m me nombre n dit alors que la suite des naturelles impaires est une suite arit métique de raison

e mani re énérale lorsqu'on passe d'un terme U_n au terme suivant U_n en a outant un nombre fi e on dit que la suite est arit métique

éfinitions

ire q'une suite U_n est arit métique si nifie qu'il e iste un réel r tel que pour tout naturel n on a U_n U_n r
e réel r est appelé raison de la suite U_n Et il peut tre positif ou né atif

E pression de Un en fonction de n

U_n est une suite arit métique de raison r
lors pour tout naturel n nous avons l'e pression suivante U_n U n r
En effet U U r
U U r U r r U r
U_n U n r

E emple U_n est une suite arit métique tel que U et r
alculer U U

4- Relation entre Um et Up :

U_m est une suite arithmétique de raison « r ».
Alors pour tout naturel « m » et tout naturel « p » nous avons :

$$U_m = U_p + (m - p) .r$$

Nous savons que $U_m = U_0 + m.r$ de même $U_p = U_0 + p.r$

Donc on peut constater que $U_m - U_p = m.r - p.r$

$$\Leftrightarrow \quad U_m = U_p + (m - p).\ r$$

Remarque : cette formule permet de calculer n'importe quel terme U_m d'une suite arithmétique, tel que l'on connaît l'un des ses termes U_p et sa raison « r ».

☛ Application :

U_m est une suite arithmétique tel que $U_{15} = 9$ et $r = 1.5$

Calculer U_{32} : $U_{32} = 9 + (32 - 15) . 1.5 = 34.5$

5- Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique :

La somme $S = U_1 + U_2 + U_3 ......+U_p$. De p terme consécutif est une suite arithmétique sous forme de : $S = p\ (U_1 - U_p) / 2.$

En effet, il s'agit de vérifier si : $2S = p\ (U_1 + U_p)$.

On a $2S = (U_1 + U_2 + U_3 +..... + U_p) + (U_p + U_{p-1} + ... + U_1)$

☛ Application:

Soit U_n une suite arithmétique de raison « r », déterminer :

A/ $U_0 = 2$; $r = 3$; $U_{17} = ?$

$U_{17} = 2 + (17 \times 3) = 53$

B/ $U_0 = 3$; $U_4 = 4$; $r = ?$

$U_4 = U_0 + (4 \times r)$

$\Rightarrow U_4 - U_0 = 4 \times r$

$\Rightarrow r = (U_4 - U_0) / 4$

$\Rightarrow r = ¼$

C/ $U_7 = 5$; $r = -1$; $U_0 = ?$

$U_7 = U_0 - 2$

$\Rightarrow U_0 = 5 + 2 = 7$

D/ $U_5 = 1$; $U_9 = 7$; $r = ?$

$U_9 = U_5 + (9 - 5) \times 2 \quad \Rightarrow U_9 = 3/2.$

III- Suite géométrique de raison strictement positive:

1- Qu'est ce qu'une suite géométrique ?

Partant d'un exemple, considérant la suite de puissance de 2 :
1 – 2 – 4 – 8 – 16 ….
On passe d'un terme à son suivant en multipliant toujours par le nombre 2. On dit alors que cette suite est géométrique de raison 2.
De manière générale, lorsqu'on passe d'un terme U_n au terme suivant U_{n+1} en multipliant toujours par le même nombre fixe, on dit que la suite U_n est géométrique.

☛ **Définition :**

Dire qu'une suite U_n est géométrique d'une raison strictement positive, signifie qu'il existe un réel $q>0$. Tel que pour tout naturel « n » nous avons :

$$U_{n+1} = q \, . \, U_n$$

Le réel « q » est appelé raison de la suite.

2- Expression de Un en fonction de « n » :

U_n est une suite géométrique de raison $q>0$.
Alors que pour tout naturel « r » nous avons $U_n = q^n \, . \, U_0$
En effet : $U_1 = q \, . \, U_0$
$U_2 = q \, . \, U_1 = q^2 \, . \, U_0$
$U_n = q \, . \, U_{n-1} = q^n \, . \, U_0$

☛ **Exemple :**

U_n est une suite géométrique avec $U_0 = 3$ et $q = ½$

Calculer $U_3 = (½)^3 \times 3 = \frac{3}{8}$

3- Relation entre Un et Up :

U_n est une suite géométrique de raison « q », alors pour tout naturel « p » et « n » nous avons : $U_n = U_p \, . \, q^{n-p}$

☛ **Remarque :**

Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique, dès que l'on connaît l'un de ses termes et sa raison « q ».

☛ **Exemple :**

U_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{9}{2}$ tel que $U_{10} = 5$.

Calculer U_{40} : $U_{40} = 5 \times (\frac{9}{2})^{40}$

4- Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique:

S représente la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison « q », dont « a » le premier terme de S et « k » le dernier terme.
$S = a + a.\ q^2 + a.\ q^n + ... + k$

$\Leftrightarrow S = \frac{a - k.q}{1 - q}$ si $q \neq 1$

IV- Exercices :

1- 1er exercice :

Mr. X verse 100 DH le 1er janvier 1998 sur son compte bancaire, puis chaque mois il verse 10 DH de plus que le mois précédent.
Quelle somme va-t-il versée à la veille de l'an 2000 ?

Dans ce problème, on va appliquer les règles d'une suite arithmétique.
On sait que : $U_n = U_0 + n.r$
Donc $U_{24} = U_0 + (24 - 1) . r$
$\Rightarrow U_{24} = 100 + 230 = 330.$
Après avoir calculer le terme U_{24}, on peut appliquer l'apport de la somme S d'une suite arithmétique.
On sait que : $S = \frac{p(U_1 - U_p)}{2}$

Donc $U_1 + U_2 + ... + U_{24} = \frac{24 \times (U_1 + U_{24})}{2}$

$= \frac{24 \times (10 + 330)}{2}$

$= 5160.$

Et enfin la somme qu'il va verser à la veille de l'an 2000 est de 5160 DH.

2- 2ème exercice :

U_n est la suite définie pour tout naturel « n » nous avons $U_n = 25 - 10.n$

Montrer que U_n est une suite arithmétique et donner sa raison.

☛ Méthode :

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, on peut démontrer que pour tout naturel « n » : $U_{n+1} - U_n$ = constant.

Cette constante est la raison de la suite.

☛ Solution de l'exercice :

On sait que $U_n = 25 - 10.n$, donc on doit démontrer le formule de U_{n+1}

$U_{n+1} = 25 - 10\ (n + 1)$

$= 25 - 10n - 10$

Donc on peut calculer $U_{n+1} - U_n$:

$U_{n+1} - U_n = -10 = r$

Enfin on peut dire que U_n est une suite arithmétique de raison $r = -10$.

3- 3ème exercice :

U_n est la suite définie pour tout naturel « n », nous avons : $U_n = \frac{3^n}{5^{n-1}}$

Montrer que U_n est une suite géométrique et trouver la raison.

☛ Méthode :

Pour démontrer que U_n est une suite géométrique, dont tous les termes sont non nuls, on peut démontrer que $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ = constante, et cette constante est la raison de la suite.

☛ Solution de l'exercice :

Après avoir trouver la formule de U_{n+1}.

On trouvera que $\frac{U_{n+1}}{U_n} = q = 3/5$

Donc on constate que U_n est une suite géométrique, dont la raison est $q = 3/5$.

4- 4ème exercice :

U_n est une suite arithmétique tel que $U_5 = 15$ et $U_{30} = 65$

Calculer U_{100}.

☛ Méthode :

La formule $U_m = U_p + (m - p) .r$ permet de calculer « r » dès que l'on connaît deux termes U_m et U_p d'une suite arithmétique.

Et on peut calculer ensuite n'importe quel autre terme à l'aide de cette formule.

☛Solution de l'exercice :

En constatant que $U_m = U_5 = 15$ et $U_p = U_{30} = 65$

On peut écrire la formule suivante : $U5 = U_{30} + (5 - 30).\ r$

$\Rightarrow -50 = -25.\ r$

$\square$ — r

$\square$ r

onc puisqu'on a la raison r on peut appliquer la formule Um Up m p r pour avoir U

Chapitre 3 : REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

I- Caractère qualitatif :

Les représentations graphiques du caractère qualitatif sont très nombreuses, elles sont fonction des différentes modalités du caractère. Mais on va se limiter à la présentation du diagramme à bandes.

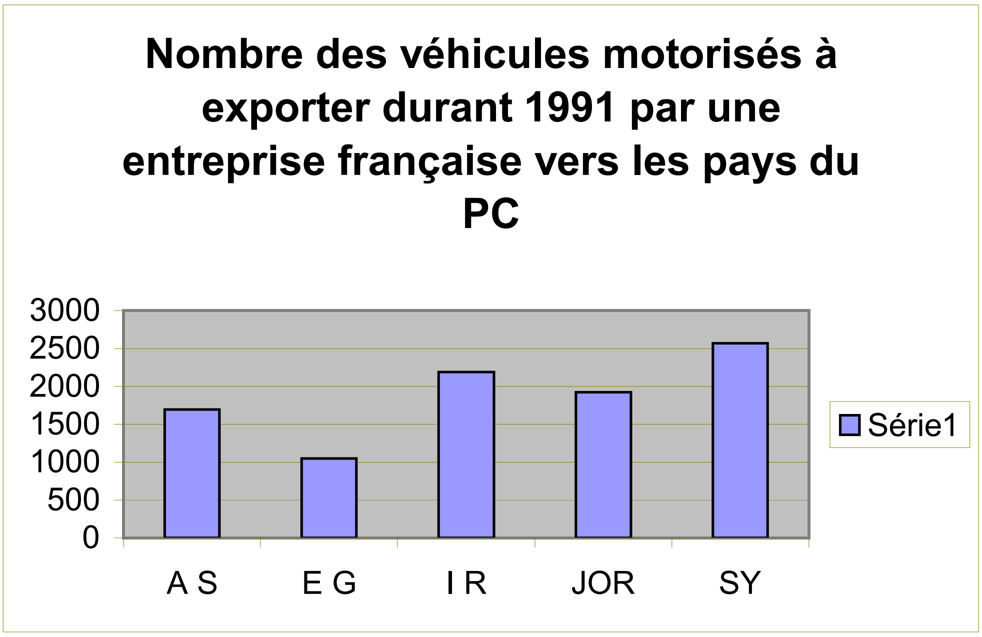
⇨ Diagramme à bondes :

Le caractère est en qualitatif, on place sur une droite horizontale les modalités du caractère, on porte sur un axe vertical les effectifs ou les fréquences, et puis on trace une bonde verticale.

☛ Application :

Le tableau suivant correspond au nombre des véhicules motorisés à exporter durant 1991 par une entreprise française vers les pays du PC.

A S	1700
E G	1050
I R	2190
JOR	1920
SY	2570



II- Caractère quantitatif direct :

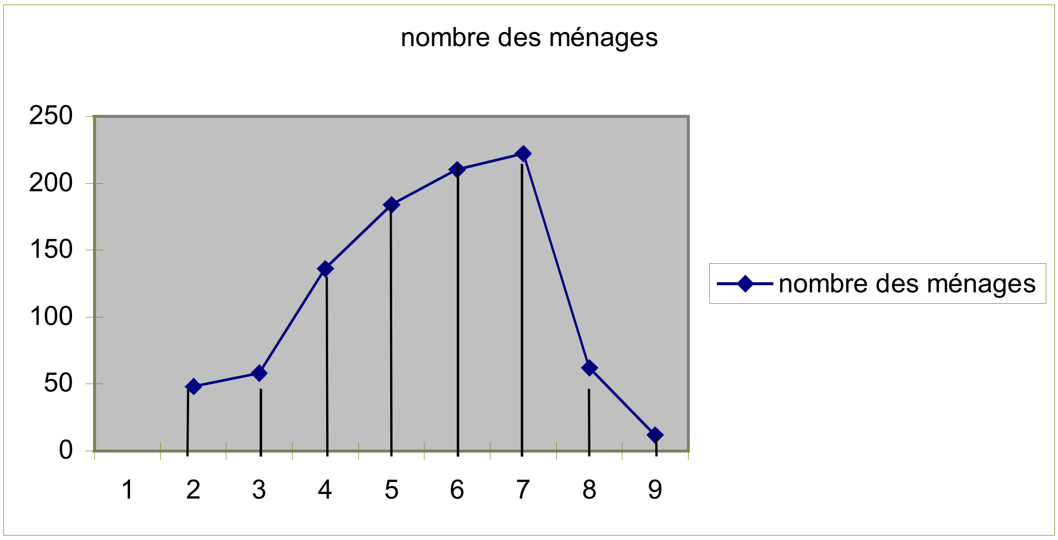
⇨ Diagramme en battons :

Le caractère est en quantitatif emporte sur l'axe des abscisses les valeurs discrètes, et sur l'axe des coordonnés les valeurs associés au programme.
On trace les battons verticaux dont la langueur est proportionnelle aux effectifs ou aux fréquences.

☛ Application :

Une population de méninges a été répartie en fonction du nombre des parts familiales, permettant le calcul de l'impôt sur le revenu.

nombre des parts	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5
nombre des ménages	48	58	136	184	210	222	62	12



III- Caractère quantitatif avec regroupement en classe :

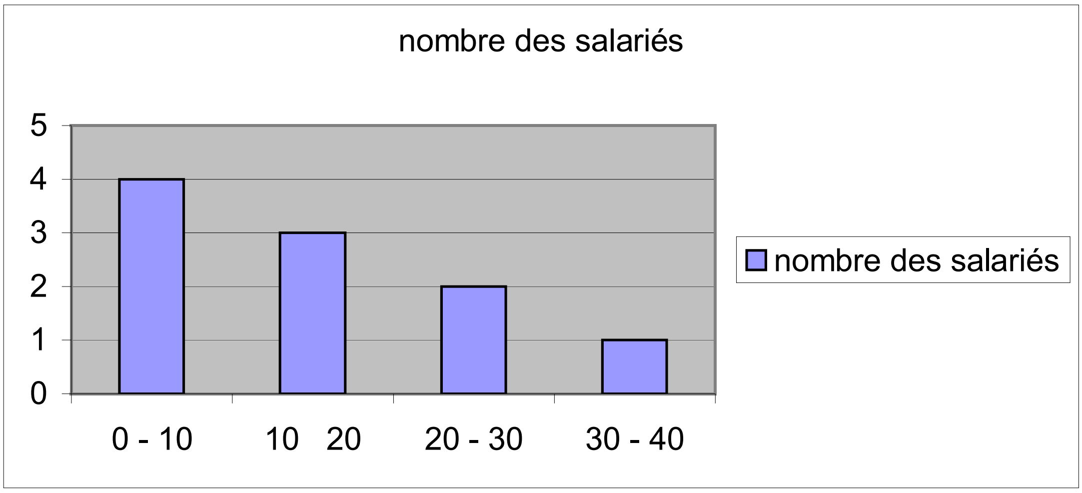
⇨ Histogramme :

Un histogramme est un ensemble de rectangles, chaque rectangle associé à chaque classe, ayant une surface proportionnelle à l'effectif de cette classe.
* Classe d'amplitude égale : il suffit que chaque rectangle a une hauteur proportionnelle à l'effectif de chaque classe.

☛ Application :

Soit la distribution donnant le nombre des salariés par classe de salaire.

classes de salaire	nombre des salariés
0 - 10	4
10 - 20	3
20 - 30	2
30 - 40	1



* Classe d'amplitude inégale : les classes étant d'amplitude inégale, la hauteur proportionnelle à l'effectif ne permet plus de construire un histogramme. Il faut alors construire des rectangles dont la hauteur est proportionnelle à l'intensité ce qui permet d'assurer une surface proportionnelle à l'effectif.

Chapitre 4 : ÉQUATIONS ET INÉQUATIONS

I- Équations du 1er degré à un inconnu :

Une équation de la forme particulière « ax + b = 0 » où « a » et « b » sont des nombres réels et l'inconnu « x » est réel.

☛ Résolution :

Le binôme « ax + b » avec $a \neq 0$.

- Il s'annule pour $x = \frac{-b}{a}$.
- Il est du signe de (a) pour $x > \frac{-b}{a}$.
- Il est du signe de (- a) pour $x < \frac{-b}{a}$.

C'est ce que nous permet de construire le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
ax + b	-a	0	a

II- Système linéaire d'équation:

Un système linéaire de deux équations à deux inconnus se résout par combinaison linéaire : c'est presque toujours la méthode la plus rapide.

☛ Exemple :

Déterminer les deux nombres réels x et y du système.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 6y = 10 \\ -15x - 6y = 3 \end{cases} \qquad \Rightarrow \begin{cases} 10x + 15y = 25 \\ -10x - 4y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -11x = 13 \qquad \Rightarrow 11y = 27$$

$$\Rightarrow x = \frac{-13}{11} \qquad \Rightarrow y = \frac{27}{11}$$

III quations du second de ré un inconnu

□ éfinition

Une équation du second de ré un inconnu est une équation qui peut s'écrire sous forme de a b c vec a□b

ésolution de l'équation a b c

'e istence de solution de l'équation a b c dépend du si ne des nombres

□□	'équation a b c as de racines	e trin me a b c Ne se factorise pas
□□	Il e iste une seule solution l'équation a b c □ □ $\frac{b}{a}$	a b c □ a □
□□	Il e iste deu solutions l'équation a b c □ $\frac{□b □\sqrt{□}}{a}$ E $\frac{□b □\sqrt{□}}{a}$	a b c □ a □ E

emarque lorsque a et c sont de si nes contraires on peut affirmer son calcul de l'équation a b c deu solutions distinctes En effet dans ce cas le nombre ac est strictement né atif donc ac est strictement positif donc □ est strictement positive

Chapitre 5 : INSTRUMENTS DU RÉSONNEMENT LOGIQUE

I- Définitions :

1- Définition de la proposition logique :

On appelle proposition tout énoncé susceptible de recevoir l'une des valeurs de la logique qui sont : la valeur « vrai » et la valeur « faux ». On exprimera cette bivalence par la table de vérité.

2- Table de vérité :

La table de vérité d'une proposition quelconque « p » se présente de la manière suivante :

p
V
F

Ou

p
1
0

V et 1 désignent la valeur « vrai ».
F et 0 désignent la valeur « faux ».

Le premier usage que l'on peut faire de ses tables est la construction d'une nouvelle proposition à partie d'une proposition donnée.
S'il y a deux propositions « p » et « q », on présente la table de vérité qui résume toutes les situations possibles de la façon suivante :

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

S'il y a trois propositions « p », « q » et « R » la table de vérité comportera huit lignes.

P	Q	R
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

S'il y a « n » propositions, c'est à dire Q_1 , Q_2 , Q_3 …. Q_n , la table de vérité comportera 2^n lignes.
A partie des tables de vérité, on peut construire des nouvelles propositions.

a- Négation :

La négation d'une proposition P est une proposition notée $\overline{p}$ (cette proposition se lie : non P) qui est vraie lorsque P est fausse et fausse lorsque P est vraie.

P	$\overline{p}$
1	0
0	1

On peut également construire de nouvelles propositions à partir de deux propositions P et Q. On parle de propositions logiques.

3- Composition logique : principe de correction :

A partir de deux propositions quelconques P et Q, de nouvelles propositions peuvent être construites. Ces propositions composées seront définies par leurs tables de vérité. Si on a deux propositions et deux valeurs alors quatre cas sont possibles :

P	Q
V	V
V	F
F	V
F	F

La correction est l'opération qui permet de construire ces nouvelles constructions.

4- Différentes corrections de la logique :

a- Conjonction : le signe $\wedge$ (et).

La conjonction de deux propositions P et Q est une proposition notée $P \wedge Q$ qui est vraie uniquement lorsque p et q sont vraies simultanément et fausses dans tous les autres cas.

P	Q	P∧Q
V	V	1
V	F	0
F	V	0
F	F	0

b- Disjonction : le signe ∨ (ou).

La disjonction de deux propositions P et Q est une proposition notée P∨Q, qui est fausse si P et Q sont fausses simultanément et vraie dans tous les autres cas.

P	Q	P∨Q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

5- Lois de Morgon :

a- La négation de la conjonction de deux propositions est équivalente à la disjonction des négations des deux propositions.

$\overline{(P\wedge Q)}$ est synonyme de [(π) ∨ (θ)]

Ce résultat peut être vérifié à l'aide des tables de vérité :

P	Q	π	θ	π∨θ
1	1	0	0	0
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	1	1

P	Q	(P∧Q)	non (P∧Q)
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	1

b- 2ème cas de Morgan : la négation de la disjonction de deux propositions est équivalente à la conjonction des négations de deux propositions.

non (P∨Q) est synonyme de [(π) ∧ (θ)]

Ce résultat peut être vérifié à l'aide des tables de vérités.

P	Q	π	θ	$(\pi \wedge \theta)$
1	1	0	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

P	Q	$(P \vee Q)$	non$(P \vee Q)$
1	1	1	0
1	0	1	0
0	1	1	0
0	0	0	1

6- Implication :

Si P et Q sont deux propositions, la proposition « si P alors Q » encore lue « P entraîne Q » est notée $P \Rightarrow Q$, et elle est appelée une implication. Elle est fausse uniquement si P est vraie et Q est fausse.

P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	0

7- Négation de l'implication :

La négation de l'implication $P \Rightarrow Q$ est sous forme de $\pi \Rightarrow \theta$.
Une implication et sa négation sont des propositions synonymes, c'est à dire q'elles sont en même temps vraies et en même temps fausses.

P	Q	π	θ	$P \Rightarrow Q$	$\pi \Rightarrow \theta$
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1

8- Réciproque :

La réciproque de l'implication $P \Rightarrow Q$ est la proposition $Q \Rightarrow P$.

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1

9- Equivalence ou double implication :

L'équivalence de deux propositions P et Q est proposition notée $P \Leftrightarrow Q$, qui est vraie si P et Q ont la même valeur de vérité, et elle sera fausse dans les autres cas.

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

L'équivalence est synonyme de la proposition.

$[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow P$	$(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow P)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

10- Loi logique :

Une loi logique est une proposition qui est toujours vraie quelque soit les valeurs de vérité des propositions qui la compose.

☛ **Exemple :**

$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow$ non $(Q \Leftrightarrow P)$

P	Q	π	θ	$P \Leftrightarrow Q$	$2(P \Rightarrow Q)$	$(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow 2(P\Leftrightarrow Q)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1

☛ **Applications :**

On considère l'ensemble P des propositions logiques, et on définit l'applicationφ. φ : Proposition P va être sur l'intervalle $\{0, 1\}$.

$$A \longrightarrow \begin{cases} \varphi(A) = 0 & \text{si A est fausse} \\ \varphi(A) = 1 & \text{si A est vraie} \end{cases}$$

1/ Montrer à l'aide des tables de vérité que :

φ (A et B) = φ (A). (B)

φ (A) = 1 - φ (A)

φ (A ou B) = φ (A) + φ (B) - φ (A). φ (B).

2/ Donner l'expression de φ (A $\Rightarrow$ B)

Solution :

1/ La table de vérité :

φ (A)	φ (B)	φ (A et B)	φ(A). φ(B)	φ (A ou B)	φ(A)+φ(B) - φ(A) . φ(B)
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0

Donc d'après la table de vérité, on peut dire que les équations ci dessus sont vraies.

2/ φ (A $\Rightarrow$ B) = φ (A ou B) = φ (A) + φ (B) - φ (A). φ (B).

= 1- φ (A) + φ (B) - [(1 - φ (A)). φ (B)]

= 1- φ (A) + φ (A). φ (B)

II- Résonnement par récurrence:

Le résonnement par récurrence est la version mathématique du résonnement de proche en proche, il s'énonce comme suit :

Le principe de récurrence : soit P_0, P_1 …… P_n des propriétés mathématiques. On sait que P_0 est vrai, on sait aussi que pour « n » quelconque, si P_n est vraie alors P_{n+1} est aussi vraie, alors toutes les propriétés P_n sont vraies.

Une application simple de ce principe est la définition par concurrence. Si on définit un objet x_0, puis si pour tout entier n , on donne une manière de définir l'objet « x+1 » à partir de l'objet x_n , alors les objets x_n sont bien définis pour tout n. une démonstration par concurrence contient donc toujours deux étapes :

- L'initialisation : c'est la vérification de P_0. il ne faut jamais l'oublier, si non on résonne sur du vide ;
- La récurrence proprement dite : on suppose que la propriété P_n est vraie (on l'appelle de récurrence) et on essaie de démontrer P_{n+1} à partir d'elle.

Chapitre 6 : ÉLÉMENTS DE PROGRAMMATION LINÉAIRE

I- Définition :

Un programme linéaire est un module mathématique qui consiste à optimiser une forme linéaire sous contrainte linéaire. Il existe deux méthodes de résolution du programme linéaire.

- 1ère méthode : la méthode graphique limitée au cas où il n'y a que deux inconnus ;
- 2ème méthode : la méthode algébrique (la méthode de simplexe).

II- Plan de résolution d'un problème :

Il s'agit de partir d'un problème concret, de le mettre sous forme mathématique (équations et inéquations), de le résoudre puis de revenir en langage concret :

- Recherche des inconnus ;
- Désignation des inconnus ;
- Mise sous forme de modules mathématiques (il peut s'agir d'une équation, inéquation ou une forme algébrique à optimiser.)
- Résolution ;
- Retour au problème concret ; et interprétation.

III- Application :

Une entreprise produit des tables et des fauteuils. Une table demande 0.3 m^3 de boit, 100g d'acier et 2 h du travail. Pour fabriquer un fauteuil, il faut 0.2cm^3 de boit, 50g d'acier et 3h du travail.
Le bénéfice est de 300DH par table et 250DH pour un fauteuil. L'entreprise souhaite faire le bénéfice maximum, mais elle dispose chaque jour que de 27cm^3 de boit, de 8kg d'acier et de 36 h du travail.

Résolution :
Il faut que $x \geq 0$ et $y \geq 0$

$$\begin{cases} 0.3\,x + 0.2\,y \leq 27 \\ 0.1\,x + 0.05\,y \leq 8 \\ 2\,x + 3\,y \leq 360 \\ 300\,x + 250\,y = 8 \end{cases}$$

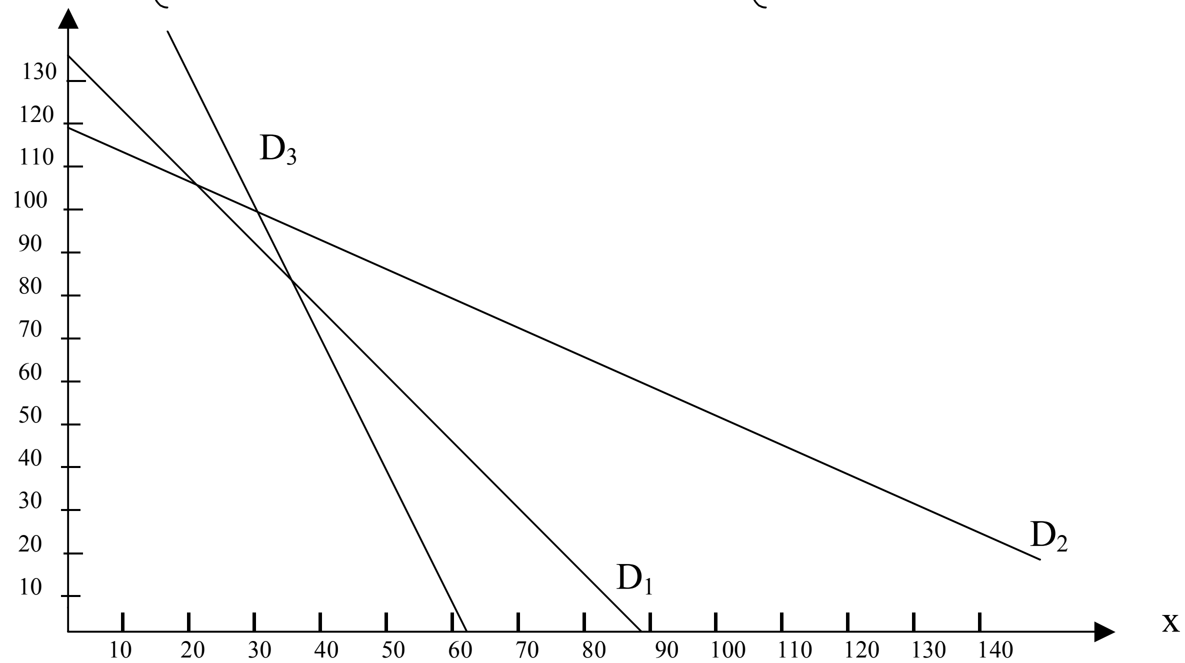
x est le nombre de tables à produire.
Y est le nombre de fauteuil à produire.

$$D_1 \begin{cases} 0.3\,x + 0.23\,y \leq 27 \\ \text{Si } x = 0\,; \quad y = 135 \\ \text{Si } y = 0\,; \quad x = 90 \end{cases}$$

$$D_2 \begin{cases} 0.1\,x + 0.05\,y \leq 8 \\ \text{Si } x = 50\,; \quad y = 60 \\ \text{Si } x = 0\,; \quad y = 160 \end{cases}$$

$$D_3 \begin{cases} 2\,x + 3\,y \leq 360 \\ \text{Si } x = 0\,; \quad y = 120 \\ \text{Si } y = 0\,; \quad x = 180 \end{cases}$$

$$D_4 \begin{cases} 300\,x + 250\,y = S \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$



A (00; 120) S = 30000
B (18; 108) S = 32400
C (50; 060) S = 30000
D (80; 000) S = 24000

On voit que la plus grande valeur est S = 3240.
Donc, on peut écrire l'équation suivante : $300\,x + 250\,y = 32400$.

Chapitre 7 : LE POURCENTAGE D'ÉVOLUTION

I- Hausse et baisse :

Lorsqu'une grandeur évolue entre deux instants, on peut visualiser cette évolution à l'aide d'un schéma.

$$\text{Valeur initiale } V_0 \xrightarrow{\Delta V \text{ (variable absolue)}} \text{Valeur finale } V_1$$

$$\times \left(1 + \frac{t}{100}\right)$$

- CM : désigne le coefficient multiplicateur ;
- t : désigne le pourcentage d'évolution.

➲ $CM = \dfrac{V_1}{V_0} = 1 + \dfrac{t}{100}$

➲ $V_1 = V_0 \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$

➲ $t = (CM - 1) \times 100$

Évolution	Expression
Variation absolue	$\Delta V = V_1 - V_0$
Variation relative	$\dfrac{\Delta V}{V_0} = \dfrac{V_1 - V_0}{V_0}$
Taux de croissance ou Pourcentage d'évolution	$\dfrac{t}{100} = \dfrac{\Delta V}{V_0} = \dfrac{V_1}{V_0} - 1$
Coefficient multiplicateur	$CM = \dfrac{V_1}{V_0} = 1 + \dfrac{t}{100}$
Indice de base	$\dfrac{I_1}{V_0} = \dfrac{V_1}{V_0} . 100$

☛ **Remarques:**

* La variation absolue est toujours exprimée dans l'unité de la grandeur étudiée.
* Le pourcentage d'évolution est surtout utilisée lorsque cette évolution est peu importante (inférieure à 100%).
* Le coefficient multiplicateur est utilisé dans les calcules, et souvent pour exprimer une porte supérieure à 100%.
* Si V_0 varie de t_1%, puis de t_2% alors sa valeur va être multipliée par

t t

$$V \longrightarrow V \longrightarrow V$$

u u

II pplication

a valeur d'une automobile est passée de en une année

alculer le tau de croissance

n a

onc t

a valeur a diminué de car le coefficient multiplicateur est inférieur de et le tau de croissance est né atif