

Exercices Corrigés  
Matrices

**Exercice 1** – Considérons les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Si elles ont un sens, calculer les matrices  $AB, BA, CD, DC, AE, CE$ .

**Exercice 2** – (extrait partiel novembre 2011)

On considère les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Calculer, s'ils ont un sens, les produits  $AB, BA, AC, CA, B^2$ .

**Exercice 3** – On considère les matrices à coefficients réels :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

- 1) Calculer s'ils ont un sens les produits  $AB, BA, AC, CA, BC, CB, B^2$ .
- 2) En déduire, sans plus de calcul, que  $A$  et  $C$  sont inversibles et préciser leurs inverses.

**Exercice 4** – Soit  $A$  la matrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$  et  $B$  la matrice de  $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbf{R})$  définies par :

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Si elles ont un sens, calculer les matrices  $AB, BA, A^2, B^2$  et  $A + 2\text{Id}_2$ .

**Exercice 5** – Soit  $A, B, C$  les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbf{R}) \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbf{R}) \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R})$$

Déterminer les produits définis 2 à 2 de ces trois matrices.

**Exercice 6** –  $T_{i,j}(\lambda)$  étant la matrice élémentaire qui correspond à ajouter à la ligne  $i$  le produit par  $\lambda$  de la ligne  $j$ , préciser la matrice  $T_{2,1}(\frac{1}{2})$  de  $M_{2,2}(\mathbf{R})$ , puis la matrice  $T_{1,2}(-2)T_{2,1}(\frac{1}{2})$

**Exercice 7** – 1) Préciser les matrices élémentaires de  $M_{3,3}(\mathbf{R})$  :

$$D_2(-2) \quad , \quad T_{3,2}(3) \quad , \quad T_{2,1}(-2) \quad .$$

2) Calculer la matrice  $A = T_{3,2}(3)D_2(-2)T_{2,1}(-2)$ .

3) Donner  $A^{-1}$  sous forme de produit de matrices élémentaires. Puis, calculer  $A^{-1}$ .

**Exercice 8** – Appliquer avec précision aux matrices  $M$  et  $N$  suivantes l'algorithme du cours qui détermine si une matrice est inversible et donne dans ce cas son inverse :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}).$$

**Exercice 9** – (extrait partiel novembre 2011)

1) En utilisant l'algorithme du cours, montrer que la matrice suivante est inversible et préciser son inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Puis, donner une expression de  $A^{-1}$  et de  $A$  comme produit de matrices élémentaires.

**Exercice 10** – 1) Appliquer avec précision l'algorithme du cours pour inverser la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}) \quad .$$

2) Donner une expression de  $M^{-1}$ , puis de  $M$  comme produit de matrices élémentaires.

**Exercice 11** – ) Appliquer avec précision l'algorithme du cours pour inverser la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbf{R}) \quad .$$

Préciser une expression de  $M^{-1}$ , puis de  $M$  comme produit de matrices élémentaires.

**Exercice 12** – Soit  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de même ordre, on suppose que la matrice  $AB$  est inversible d'inverse la matrice  $C$ . Montrer alors que  $B$  est inversible et préciser  $A^{-1}$ .

**Exercice 13** – (extrait partiel novembre 2011)

Soit  $X$  et  $Y$  deux matrices carrées non nulles de même taille à coefficients réels, montrer que si  $XY = 0$ , les matrices  $X$  et  $Y$  ne sont pas inversibles.

**Exercice 14** – Soit  $M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

1) Montrer en appliquant les algorithmes du cours que  $M$  est inversible. Préciser la matrice  $M^{-1}$  ainsi que la décomposition de  $M^{-1}$  comme produit de matrices élémentaires.

- 2) En déduire une décomposition de  $M$  comme produit de matrices élémentaires.
- 3) Montrer que nous avons aussi  $M = T_{2,3}(1)T_{1,3}(1)T_{3,1}(1)T_{2,1}(1)T_{1,2}(2)$ .
- 4) En déduire une deuxième expression de  $M^{-1}$  comme produit de matrices élémentaires.
- 5) Calculer  $\det(M)$  et retrouver la valeur de  $M^{-1}$  en utilisant la formule d'inversion donnée dans le cours.

**Exercice 15** – (extrait partiel novembre 2009)

- 1) Appliquer avec précision l'algorithme du cours pour déterminer l'inverse  $M^{-1}$  de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \quad .$$

Quelle est la valeur de  $M^{-1}$  ?

- 2) Donner une expression de  $M^{-1}$ , puis de  $M$  comme produit de matrices élémentaires.
- 3) Dédire de la question 1 une matrice  $X$  de  $M_{3,3}(\mathbf{R})$  telle que :

$$2XM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

**Exercice 16** – 1) Appliquer avec précision l'algorithme du cours pour déterminer l'inverse  $M^{-1}$  de la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \quad .$$

- 2) Donner une expression de  $M^{-1}$ , puis de  $M$  comme produit de matrices élémentaires.
- 3) Vérifier le calcul en effectuant les calculs des matrices  $MM^{-1}$  et  $M^{-1}M$ .

**Exercice 17** – Soit  $M$  la matrice de  $\mathcal{M}_3(\mathbf{R})$  définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

- 1) Calculer le déterminant de  $M$ , sa comatrice et l'inverse de  $M$ .
- 2) Déterminer l'inverse de  $M$  sous forme de produit de matrices élémentaires. Ecrire  $M$  comme produit de matrices élémentaires.
- 3) Résoudre à l'aide de l'inverse de  $M$  le système suivant où  $m$  est un réel fixé :

$$*(m) \quad \begin{cases} x_1 & & - x_3 & = & m \\ -2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & = & 1 \\ & + & x_2 & + & x_3 & = & 2m \end{cases} \quad .$$

**Correction de l'exercice 1 :**

Le lecteur vérifiera que :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} , \quad BA = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} .$$

$$CD = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} , \quad DC = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad AE = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} .$$

Le produit  $CE$  n'a pas de sens car la taille des colonnes (à savoir 2) de  $E$  est différent de la taille des lignes (à savoir 3) de  $C$ .

**Correction de l'exercice 2 :**

On trouve :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad CA = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} .$$

Les deux autres produits  $B^2$  et  $BA$  n'ont pas de sens.

**Correction de l'exercice 3 :**

1)

$$AB = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} .$$

$BA$  n'a pas de sens car la taille des lignes de  $B$  n'est pas égale à celle des colonnes de  $A$ .

$$AC = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2\text{Id}_2 .$$

$$CA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = -2\text{Id}_2 .$$

$$CB = \begin{pmatrix} 22 & -15 & -7 \\ -10 & 7 & 3 \end{pmatrix} .$$

$BC$  n'a pas de sens car la taille des lignes de  $B$  n'est pas égale à celle des colonnes de  $C$ .

$B^2$  n'a pas de sens car la taille des lignes de  $B$  n'est pas égale à celle des colonnes de  $B$ .

2) Nous avons :  $AC = CA = -2\text{Id}_2$ , nous en déduisons :

$$A\left(-\frac{1}{2}C\right) = \left(-\frac{1}{2}C\right)A = \text{Id}_2 .$$

Il en résulte que la matrice  $A$  est inversible, d'inverse :

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}C = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} .$$

De même :

$$\left(-\frac{1}{2}A\right)C = C\left(-\frac{1}{2}A\right) = \text{Id}_2 \quad .$$

Il en résulte que la matrice  $C$  est inversible, d'inverse :

$$C^{-1} = -\frac{1}{2}A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad .$$

**Correction de l'exercice 4 :**

$$AB = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -11 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice  $BA$  n'a pas de sens.

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 13 & -9 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad .$$

La matrice  $B^2$  n'a pas de sens.

$$A + 2\text{Id}_2 = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

**Correction de l'exercice 5 :**

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 14 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 10 & 2 & -4 \\ -10 & -8 & 6 \end{pmatrix}, \quad CA = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 10 & 2 & -4 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}, \quad C^2 = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

Les matrices  $AC$ ,  $CB$ ,  $A^2$  et  $B^2$  ne sont pas définis.

**Correction de l'exercice 6 :**

$$T_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right) = T_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right)I_2 = T_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

De même, en utilisant les propriétés des actions à gauche par les matrices élémentaires, on obtient :

$$T_{1,2}(-2)T_{2,1}\left(\frac{1}{2}\right) = T_{1,2}(-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

**Correction de l'exercice 7 :**

1.1)

$$D_2(-2) = D_2(-2)I_3 = D_2(-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$T_{3,2}(3) = T_{3,2}(3)I_3 = T_{3,2}(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$T_{2,1}(-2) = T_{2,1}(-2)I_3 = T_{2,1}(-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

1.2)

$$A = T_{3,2}(3)D_2(-2)T_{2,1}(-2) = T_{3,2}(3)D_2(-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$A = T_{3,2}(3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 12 & -6 & 1 \end{pmatrix} .$$

1.3)

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= (T_{3,2}(3)D_2(-2)T_{2,1}(-2))^{-1} \\
&= T_{2,1}(-2)^{-1}D_2(-2)^{-1}T_{3,2}(3)^{-1} \\
&= T_{2,1}(2)D_2(-1/2)T_{3,2}(-3) \\
&= T_{2,1}(2)D_2(-1/2)T_{3,2}(-3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= T_{2,1}(2)D_2(-1/2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= T_{2,1}(2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -(1/2) & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -(1/2) & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

**Correction de l'exercice 8 :**

a) Les deux lignes de  $M$  sont d'ordre 1. Donc,  $M$  est ordonnée.

$$M_1 = T_{2,1}(-\frac{1}{2}) M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad B_1 = T_{2,1}(-\frac{1}{2}) I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad B_1 M = M_1$$

La matrice  $M_1$  est triangulaire (on dit aussi échelonnée). La première phase de l'algorithme est terminée. Les éléments de la diagonale de  $M$  étant non nuls, on peut conclure que  $M$  est inversible.

$$M_2 = D_2(2) M_1 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = D_2(2) B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_2 M = M_2$$

$$M_3 = D_1(\frac{1}{2}) M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_3 = D_1(\frac{1}{2}) B_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_3 M = M_3$$

$$M_4 = T_{1,2}(\frac{3}{2}) M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad B_4 = T_{1,2}(\frac{3}{2}) B_3 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad B_4 M = M_4 = I_2$$

On obtient donc :

$$M^{-1} = B_4 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} .$$

Soit encore en remontant les calculs :

$$M^{-1} = T_{1,2}(\frac{3}{2})D_1(\frac{1}{2})D_2(2)T_{2,1}(-\frac{1}{2}) .$$

b) Les deux lignes de  $N$  sont d'ordre 1. Donc,  $N$  est ordonnée.

$$N_1 = T_{2,1}(-2) N = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_1 = T_{2,1}(-2) I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B_1 N = N_1$$

La matrice  $N_1$  est triangulaire (on dit aussi échelonnée). La première phase de l'algorithme est terminée. Une ligne de  $N_1$  est constituée de 0. La matrice  $N$  n'est donc pas inversible.

**Correction de l'exercice 9 :**

1) On a :

$$T_{2,1}(-3)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D_2(-1/2)T_{2,1}(-3)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

Ainsi,  $A$  est inversible et

$$A^{-1} = T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3) = T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit

$$A^{-1} = T_{1,2}(-2)D_2(-1/2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = T_{1,2}(-2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

2) On a vu :

$$A^{-1} = T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3) \quad .$$

Il en résulte :

$$A = (A^{-1})^{-1} = (T_{1,2}(-2)D_2(-1/2)T_{2,1}(-3))^{-1}$$

Soit :

$$A = T_{2,1}(-3)^{-1}D_2(-1/2)^{-1}T_{1,2}(-2)^{-1} = T_{2,1}(3)D_2(-2)T_{1,2}(2) \quad .$$

**Correction de l'exercice 10 :**

2.1) Les deux lignes de  $M$  sont d'ordre 1. Donc,  $M$  est ordonnée.

$$M_1 = T_{2,1}(-2) M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B_1 = T_{2,1}(-2) I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad B_1 M = M_1$$



La matrice  $M_1$  est triangulaire (on dit aussi échelonnée). La première phase de l'algorithme est terminée. Les éléments de la diagonale de  $M$  étant non nuls, on peut conclure que  $M$  est inversible.

$$M_2 = D_2(-1) M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = D_2(-1) B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B_2 M = M_2$$

$$M_3 = T_{1,2}(1) M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \quad B_3 = T_{1,2}(1) B_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B_3 M = M_3$$

On obtient donc :

$$M^{-1} = B_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

2.2) Soit en remontant les calculs :

$$M^{-1} = T_{1,2}(1) D_2(-1) T_{2,1}(-2) .$$

On sait que l'inverse de  $T_{i,j}(\lambda)$  est  $T_{i,j}(-\lambda)$  et que pour  $a \neq 0$ , l'inverse de  $D_i(a)$  est  $D_i(1/a)$ . On rappelle que si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois matrices carrées de taille  $n$  inversibles :  $(ABC)^{-1} = C^{-1} B^{-1} A^{-1}$ . On obtient alors :

$$M = (M^{-1})^{-1} = (T_{1,2}(1) D_2(-1) T_{2,1}(-2))^{-1} = T_{2,1}(2) D_2(-1) T_{1,2}(-1) .$$

### Correction de l'exercice 11 :

Mise en place :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad I_2 M = M$$

Les deux lignes de  $M$  sont d'ordre 1. Donc,  $M$  est ordonnée.

$$M_1 = T_{2,1}(-3/2) M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad B_1 = T_{2,1}(-3/2) I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1 \end{pmatrix} \quad B_1 M = M_1$$

La matrice  $M_1$  est triangulaire (on dit aussi échelonnée). La première phase de l'algorithme est terminée. Les éléments de la diagonale de  $M$  étant non nuls, on peut conclure que  $M$  est inversible.

$$M_2 = D_2(2) D_1\left(\frac{1}{2}\right) M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 = D_2(2) D_1\left(\frac{1}{2}\right) B_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad B_2 M = M_2$$

$$M_3 = T_{1,2}(-1/2) M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_3 = T_{1,2}(-1/2) B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad B_3 M = M_3$$

On obtient donc :

$$M^{-1} = B_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} .$$

Soit en remontant les calculs :

$$M^{-1} = T_{1,2}(-1/2)D_2(2)D_1(\frac{1}{2})T_{2,1}(-3/2) \quad .$$

On sait que l'inverse de  $T_{i,j}(\lambda)$  est  $T_{i,j}(-\lambda)$  et que pour  $a \neq 0$ , l'inverse de  $D_i(a)$  est  $D_i(1/a)$ . On rappelle que si  $A$  et  $B$  sont deux matrices carrées de taille  $n$  inversibles :  $(MN)^{-1} = N^{-1}M^{-1}$ . On obtient alors :

$$M = (M^{-1})^{-1} = (T_{1,2}(-1/2)D_2(2)D_1(\frac{1}{2})T_{2,1}(-3/2))^{-1} = T_{2,1}(3/2)D_1(2)D_2(1/2)T_{1,2}(1/2) \quad .$$

**Correction de l'exercice 12 :**

Soit  $n$ , l'ordre des matrices carrées  $A, B, C$ . Par définition :  $ABC = BCA = I_n$ . Ainsi  $B$  admet le matrice  $CA$  comme inverse à droite. D'après le cours, si une matrice carrée a un inverse à droite, elle est inversible (c.a.d. admet un inverse à gauche égal à son inverse à droite). Ainsi,  $B$  est inversible d'inverse la matrice  $CA$ .

De même,  $A$  admet le matrice  $BC$  comme inverse à gauche. Ainsi (mêmes raisons),  $A$  est inversible d'inverse la matrice  $BC$ .

**Correction de l'exercice 13 :**

Si  $X$  était inversible, on obtiendrait :

$$X^{-1}(XY) = X^{-1} 0 = 0 = (X^{-1}X)Y = Y \quad .$$

Ainsi, la matrice  $Y$  serait nulle, ce qui est impossible.

Si  $Y$  était inversible, on obtiendrait :

$$(XY)Y^{-1} = 0 Y^{-1} = 0 = X(YY^{-1}) = X \quad .$$

Ainsi, la matrice  $X$  serait nulle, ce qui est impossible.

**Correction de l'exercice 14 :**

1) Partons du couple de matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad I_3 M = M$$

Supprimons aux deuxièmes lignes de ces matrices leurs premières lignes et supprimons aux troisièmes lignes de ces matrices la moitié des premières ligne :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad , \quad A_1 = T_{3,1}(-\frac{1}{2})T_{2,1}(-1)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad A_1 M = M_1$$

Multiplions les premières lignes de ces matrices par 1/2 et multiplions les troisièmes lignes par 2, on obtient :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_2 = D_3(2)D_1(1/2)A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad : \quad A_2 M = M_2$$

Supprimons aux premières de ces matrices le produit par  $1/2$  des troisièmes lignes :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = T_{1,3}(-\frac{1}{2})A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} : \quad A_3M = M_3$$

Supprimons aux premières lignes de ces matrices le produit par 2 de leurs deuxièmes, on obtient :

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3, \quad A_4 = T_{1,2}(-2)A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} : \quad A_4M = I_3$$

Il en résulte :

$$M^{-1} = A_4 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = T_{1,2}(-2)T_{1,3}(-\frac{1}{2})D_3(2)D_1(\frac{1}{2})T_{3,1}(-\frac{1}{2})T_{2,1}(-1).$$

2) On en déduit :

$$\begin{aligned} M = (M^{-1})^{-1} &= T_{2,1}(-1)^{-1}T_{3,1}(-\frac{1}{2})^{-1}D_1(\frac{1}{2})^{-1}D_3(2)^{-1}T_{1,3}(-\frac{1}{2})^{-1}T_{1,2}(-2)^{-1} \\ &= T_{2,1}(1)T_{3,1}(\frac{1}{2})D_1(2)D_3(\frac{1}{2})T_{1,3}(\frac{1}{2})T_{1,2}(2) \end{aligned}$$

3) Posons  $N = T_{2,3}(1)T_{1,3}(1)T_{3,1}(1)T_{2,1}(1)T_{1,2}(2)$ . On a successivement :

$$\begin{aligned} N &= T_{2,3}(1)T_{1,3}(1)T_{3,1}(1)T_{2,1}(1)T_{1,2}(2)I_3 \\ &= T_{2,3}(1)T_{1,3}(1)T_{3,1}(1)T_{2,1}(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= T_{2,3}(1)T_{1,3}(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= T_{2,3}(1) \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= M \end{aligned}$$

4) Nous en déduisons :  $M^{-1} = T_{1,2}(-2)T_{2,1}(-1)T_{3,1}(-1)T_{1,3}(-1)T_{2,3}(-1)$ .

5) Un calcul donne  $\det M = 2(5 - 2) - 2(4 - 2) + (4 - 5) = 6 - 4 - 1 = 1$ .

Ainsi, par la formule donnée à la fin de la sous-section ?? :

$$M^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 5 - 2 & -(4 - 2) & 4 - 5 \\ -(2 - 1) & 2 - 1 & -(2 - 2) \\ 4 - 5 & -(4 - 4) & 10 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Correction de l'exercice 15 :**

1) Partons du couple de matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad I_3 M = M \quad .$$

La première ligne est d'ordre 1, les deux suivantes d'ordre 2. Utilisons la deuxième ligne pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_1 = T_{3,2}(-4)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad A_1 M = M_1 \quad .$$

La matrice  $M_1$  est triangulaire. Multiplions sa première ligne par  $-(1/2)$  pour que sa diagonale soit formée de 1 :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = D_3(-(1/2))A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -(1/2) \end{pmatrix} \quad : \quad A_2 M = M_2 \quad .$$

La matrice  $M_2$  est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Utilisons la troisième ligne pour transformer la deuxième en  $(0, 1, 0)$  :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = T_{2,3}(-2)A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -(1/2) \end{pmatrix} \quad : \quad A_3 M = M_3 \quad .$$

Utilisons maintenant la troisième ligne de  $M_3$  pour transformer la première ligne en  $(1, 2, 0)$  :

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = T_{1,3}(-3)A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3/2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -(1/2) \end{pmatrix} \quad : \quad A_4 M = M_4 \quad .$$

Utilisons maintenant la deuxième ligne de  $M_4$  pour transformer la première ligne en  $(1, 0, 0)$  :

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = T_{1,2}(-2)A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(1/2) \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -(1/2) \end{pmatrix} \quad : \quad A_5 M = M_5 = I_5 \quad .$$

2) Il en résulte :

$$M^{-1} = A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(1/2) \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & -(1/2) \end{pmatrix} = T_{1,2}(-2)T_{1,3}(-3)T_{2,3}(-2)D_3(-(1/2))T_{3,2}(-4) \quad .$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} M &= (M^{-1})^{-1} = T_{3,2}(-4)^{-1}D_3(-(1/2))^{-1}T_{2,3}(-2)^{-1}T_{1,3}(-3)^{-1}T_{1,2}(-2)^{-1} \\ &= T_{3,2}(4)D_3(-2)T_{2,3}(2)T_{1,3}(3)T_{1,2}(2) \quad . \end{aligned}$$

3) Multiplions l'équation par  $M^{-1}$  à droite. Notre équation équivaut à :

$$X \in M_{3,3}(\mathbf{R}) \quad \text{et} \quad 2X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} .$$

Cette équation a comme unique solution :

$$X = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} M^{-1} = \frac{1}{2} T_{3,2}(-2) M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -(1/2) \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 8 & -(5/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -(1/4) \\ 0 & -3/2 & 1/2 \\ 0 & 4 & -(5/4) \end{pmatrix} .$$

**Correction de l'exercice ?? :**

1) Partons du couple de matrices :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad I_3 M = M$$

La première ligne est d'ordre 1, les deux suivantes d'ordre 2. Utilisons la deuxième ligne pour faire monter l'ordre des suivantes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad A_1 = T_{3,2}(-2) I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} : \quad A_1 M = M_1$$

La matrice  $M_1$  est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Utilisons la troisième ligne pour transformer la deuxième en  $(0, 1, 0)$  :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad A_2 = T_{2,3}(-1) A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} : \quad A_2 M = M_2$$

Utilisons maintenant la troisième ligne de  $M_2$  pour transformer la première ligne en  $(1, 2, 0)$  :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad A_3 = T_{1,3}(-3) A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} : \quad A_3 M = M_3$$

Utilisons maintenant la troisième ligne de  $M_3$  pour transformer la première ligne en  $(1, 0, 0)$  :

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad A_4 = T_{1,2}(-2) A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} : \quad A_4 M = M_4$$

2) Il en résulte :

$$M^{-1} = A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = T_{1,2}(-2) T_{1,3}(-3) T_{2,3}(-1) T_{3,2}(-2) .$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} M = (M^{-1})^{-1} &= T_{3,2}(-2)^{-1}T_{2,3}(-1)^{-1}T_{1,3}(-3)^{-1}T_{1,2}(-2)^{-1} \\ &= T_{3,2}(2)T_{2,3}(1)T_{1,3}(3)T_{1,2}(2) \quad . \end{aligned}$$

3) On en vérifie par des calculs de produits ligne-colonne :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

**Correction de l'exercice 17 :**

1)

$$\begin{aligned} \det M &= 1 \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - (-2) \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 0 \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad . \\ &= -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

Le déterminant de  $M$  est non nul, la matrice carrée  $M$  est donc inversible. La comatrice de  $M$  est donnée par la formule :

$$\text{Com}(M) = \begin{pmatrix} +\det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ -\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ +\det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & -\det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} & +\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad .$$

Soit :

$$\text{Com } M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

On a alors :

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} {}^t(\text{Com}M) = {}^t(\text{Com}M) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad .$$

2)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad I_3 M = M$$

Ajoutons à la deuxième ligne de ces matrices deux fois leurs premières lignes :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad A_1 = T_{2,1}(2)I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad : \quad A_1 M = M_1$$

Ajoutons à la troisième ligne de ces matrices moins  $1/3$  de fois leurs deuxièmes lignes :

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = T_{3,2}(-1/3)A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2/3 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} : \quad A_2M = M_2$$

Multiplions les deuxièmes lignes de ces matrices par  $1/3$  et les troisièmes lignes par  $3$ , on obtient :

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = D_2(1/3)D_3(3)A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} : \quad A_3M = M_3$$

Ajoutons aux deuxièmes lignes de ces matrices le produit par  $-2/3$  de leurs troisièmes lignes :

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = T_{2,3}(-2/3)A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} : \quad A_4M = M_4$$

Ajoutons aux premières lignes de ces matrices leurs troisièmes lignes :

$$M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = T_{1,3}(1)A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} : \quad A_5M = M_5 = I_3 .$$

Il en résulte :

$$M^{-1} = A_5 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = T_{1,3}(1)T_{2,3}(-2/3)D_2(1/3)D_3(3)T_{3,2}(-1/3)T_{2,1}(2) .$$

Chic, on retrouve le résultat de la première question. On peut rajouter que  $M$  s'écrit comme produit de matrices élémentaires :

$$M = (M^{-1})^{-1} = T_{2,1}(-2)T_{3,2}(1/3)D_3(1/3)D_2(3)T_{2,3}(2/3)T_{1,3}(-1) .$$

3) Le système linéaire équivaut à l'équation matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} .$$

Il en résulte :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m \\ 1 \\ 2m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5m - 1 \\ -2m + 1 \\ 4m - 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le système  $*(m)$  admet l'unique solution :

$$(5m - 1, -2m + 1, 4m - 1)$$