PROBABILITÉS : GÉNÉRALITÉS - CONDITIONNEMENT - INDÉPENDANCE

1. Expérience aléatoire, événements, loi de probabilité (Rappels de première et compléments)

1.1. Choix d'un modèle

Lors de la réalisation d'une expérience aléatoire, on est amené à choisir successivement :

a. **Un univers Ω**

Il représente l'ensemble toutes les issues **envisagées** de l'expérience. Il est donc fonction de l'idée de modélisation ***a priori*** que l'on se fait de l'expérience. Si lors du lancer d'une pièce de monnaie on considère usuellement qu'il y a deux issues "PILE" et "FACE", rien n'empêche d'en rajouter une troisième, par exemple "TRANCHE". C'est à chacun (ou à chaque énoncé) de le définir. À défaut, on considère tacitement, qu'il s'agit de l'univers usuellement utilisé dans telle ou telle situation.

Exemples :

L'issue "obtenir la face portant le numéro 1" est notée abusivement 1. Idem pour les autres.

- On lance un dé et on regarde le numéro de la face obtenue :
$$\Omega = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6\}$$
- On lance un dé et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair :
$$\Omega = \{P ; I\}$$
- On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P ; F\}$
- On lance deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP ; PF ; FP ; FF\}$
- On lance deux dés : $\Omega = \{(i, j) \text{ où } 1 \leqslant i \leqslant 6 \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant 6\}$

Remarquons que l'univers dépend de l'observation qui est faite : par exemple, si on lance deux dés et qu'on fait le produit P ou la somme S des deux numéros obtenus, on obtient respectivement :

$$\Omega_P = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 ; 10 ; 12 ; 15 ; 16 ; 18 ; 20 ; 24 ; 25 ; 30 ; 36\}$$

$$\Omega_S = \{2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12\}$$

Notons aussi qu'il existe des expériences aléatoires qui comportent une infinité d'issues :

- On choisit un entier naturel au hasard : $\Omega = \mathbb{N}$ (Ce type d'ensemble infini est dit "dénombrable")
- On choisit un réel au hasard entre 0 et 1 : $\Omega = [0, 1]$ (Ce type d'ensemble infini n'est pas dénombrable)
- On choisit un rationnel au hasard entre 0 et 1: $\Omega = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$
- On choisit un nombre premier au hasard : $\Omega = \{\text{nombres premiers}\}$

On verra aussi (au point c.) que, dans certaines situations, l'expression "choisir au hasard" peut déboucher sur des univers différents suivant le protocole de choix utilisé.

b. **Une famille de parties de Ω appelées "événements"**

Il s'agit des issues **discernables ou mesurables** par l'observateur. Lorsque l'univers Ω est fini ou dénombrable (c'est-à-dire en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$), chaque partie de l'univers peut être considérée comme un événement.[1]

[1] Cependant, si Ω a la puissance du continu (par exemple $\Omega = [0, 1]$), on ne peut plus considérer chaque partie de Ω comme un événement (car certaines parties de Ω se révèlent si complexes qu'on est incapable de dire si elles sont réalisées ou non). On fait donc le choix d'une partie stricte $\mathcal{T}$ de $\wp(\Omega)$ (appelée tribu) vérifiant un minimum structurel afin de pouvoir calculer de manière commode des probabilités :

- $\varnothing \in \mathcal{T}$ et $\Omega \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ contient la "partie vide" et la "partie pleine")
- $A \in \mathcal{T} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ est stable par passage au complémentaire)
- $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ famille d'éléments de $\mathcal{T} \Rightarrow \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{T}$ ($\mathcal{T}$ est stable par union au plus dénombrable)

Exemples :

- On lance deux dés et on regarde la somme des résultats obtenus. (Voir l'univers Ω_S ci-dessus).

  La partie $E = \{2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 10 ; 12\}$ est un événement qui peut se décrire par la phrase "la somme obtenue est un nombre pair".
- On choisit 6 numéros au hasard entre 1 et 49. Les événements sont toutes les combinaisons de 6 numéros choisis parmi 49. (On montrera qu'il y en a $\dfrac{49\times 48\times 47\times 46\times 45\times 44}{6\times 5\times 4\times 3\times 2}$, voir la leçon sur le dénombrement...)

Rappelons que les éléments de Ω sont appelés des événements élémentaires. Un événement élémentaire est donc une partie de Ω réduite à un seul élément (singleton).

c. **Une loi de probabilité (c'est-à-dire une application P à valeurs dans $[0, 1]$)**

On demande à cette application P de vérifier les deux conditions :

- $P(\Omega) = 1$
- Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'événements deux à deux disjoints, alors :

$$P\left(\coprod_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) \quad \text{(Propriété de } \sigma\text{-additivité[1])}$$

Le symbole $\coprod$ désigne une union. Il est juste utilisé à la place de $\cup$ pour préciser que l'union est disjointe.

En particulier, si A et B sont deux événements incompatibles (i.e. disjoints), alors :

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

En conséquence, on a : $1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing)$

Donc : $P(\varnothing) = 0$

Une telle application P s'appelle probabilité ou loi de probabilité.

Grâce à la propriété d'additivité, on en déduit la propriété suivante indispensable pour calculer des probabilités de manière conforme à notre intuition :

la probabilité $P(E)$ d'un événement E est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le composent.

Remarque : le triplet $(\Omega, \wp(\Omega), P)$ (ou $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ si Ω n'est pas dénombrable) s'appelle un espace probabilisé.
Modéliser une expérience aléatoire, c'est choisir un tel triplet.

Un choix particulier de P :

Lorsque Ω est de cardinal fini et que l'on affecte la même probabilité à chaque événement élémentaire, on dit que l'on choisit une probabilité P équirépartie. On a alors :

- pour tout événement élémentaire ω de Ω : $P(\omega) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$
- pour tout événement E : $P(E) = \dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$

On dit aussi, dans une telle situation, qu'il y a équiprobabilité.

[1] Notons que la somme peut contenir une infinité de termes non nuls mais qu'elle est nécessairement finie car majorée par 1.

Et pour finir, notons bien que, dans certaines situations, l'expression "choisir au hasard" mérite d'être expliquée. En effet, sans protocole de choix, certaines expériences peuvent aboutir à des univers différents et générer des calculs qui paraissent alors contradictoires. Imaginons, pour illustrer, l'expérience suivante : on dispose de deux bancs de deux places (les places sont numérotées a_1, a_2, a_3 et a_4 comme ci-dessous). On suppose que toutes les places sont vides sauf la place a_4 qui est occupée. Arrive une deuxième personne à qui on demande de s'asseoir "au hasard". Quelle est la probabilité que les deux personnes soient assises sur le même banc ?

banc 1			banc 2	
a_1	a_2		a_3	a_4

<u>Protocole 1</u> : *choix d'un banc*

La seconde personne choisit l'un des deux bancs, de manière équiprobable.

L'univers est donc Ω = {banc 1 ; banc 2}.

La loi de probabilité est donnée ici par :

Événement élémentaire	banc 1	banc 2
Probabilité	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

La probabilité que les deux personnes soient assises sur le même banc est donc :

$$p_1 = \frac{1}{2}$$

<u>Protocole 2</u> : *choix d'une place*

La seconde personne choisit l'une des trois places restantes, de manière équiprobable.

L'univers est donc $\Omega = \{a_1 ; a_2 ; a_3\}$.

La loi de probabilité est donnée ici par :

Événement élémentaire	place a_1	place a_2	place a_3
Probabilité	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

La probabilité que les deux personnes soient assises sur le même banc est donc :

$$p_2 = \frac{1}{3}$$

Et vous ? Choisissez-vous d'abord le banc puis la place ou directement la place ?

Moralité : il y a parfois des règles à préciser lorsqu'on fait un choix "au hasard"...

Une autre situation de ce type est le "paradoxe de Bertrand". (Voir exercices sur les probabilités continues)

1.2. Rappel de quelques propriétés des probabilités

Propriété 1 : la probabilité de la réunion de deux événements est donnée par :

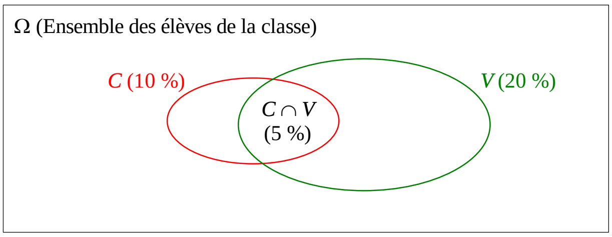
$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

Exemple : dans une classe, 10% des élèves jouent d'un instrument à corde, 20% des élèves jouent d'un instrument à vent et 5% des élèves jouent d'un instrument à corde et d'un instrument à vent. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il joue d'un instrument à corde ou à vent ?

Notons C l'événement : "l'élève joue d'un instrument à corde" et V : "l'élève joue d'un instrument à vent"

D'après les données, on a : $P(C) = 0{,}1$; $P(V) = 0{,}2$ et $P(C \cap V) = 0{,}05$

D'après la propriété 1, on obtient : $P(C \cup V) = P(C) + P(V) - P(C \cap V) = 0{,}25$



Exercice : démontrer que si C, D et E sont trois événements alors,

$$P(C \cup D \cup E) = P(C) + P(D) + P(E) - P(C \cap D) - P(D \cap E) - P(E \cap C) + P(C \cap D \cap E)$$

En effet : $P(C \cup D \cup E) = P(C \cup (D \cup E)) = P(C) + P(D \cup E) - P(C \cap (D \cup E))$

$$P(C \cup D \cup E) = P(C) + P(D) + P(E) - P(D \cap E) - P((C \cap D) \cup (C \cap E))$$

$$P(C \cup D \cup E) = P(C) + P(D) + P(E) - P(D \cap E) - P(C \cap D) - P(C \cap E) + P(C \cap D \cap E)$$

En généralisant cette formule à une union de n événements, on obtient la fomule du "crible" :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_p \leqslant n} P\left(\bigcap_{1 \leqslant k \leqslant p} A_{i_k}\right)$$

(Les courageux peuvent tenter une démonstration par récurrence)

Remarque : la probabilité d'une union d'événements est toujours inférieure à la somme des probabilités de ces événements :

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Et en particulier : $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$

Propriété 2 :

- **la probabilité de l'événement contraire $\overline{A}$ de A est $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$. En particulier, La probabilité d'un événement impossible (par exemple : "obtenir 7 en lançant un dé") est nulle : $P(\varnothing) = 0$.[(1)]**
- **Si $A \subset B$ alors $P(A) \leqslant P(B)$ ("croissance" de la probabilité)**
- **$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$**

$A \setminus B$ désigne l'ensemble des éléments qui sont dans A et pas dans B :

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}$$

---

(1) Réciproquement, si un événement E est tel que $P(E) = 0$. E est-il un événement impossible (c'est-à-dire : a-t-on nécessairement $E = \varnothing$) ? Réponse : non, en général ! En effet, considérons l'expérience suivante : on choisit un nombre réel compris entre 0 et 4 au hasard (en cochant par exemple un point au hasard sur le segment). L'univers est $\Omega = [0 ; 4]$ qui est un ensemble infini non dénombrable. Soit E l'événement : "le nombre choisi est π". E n'est pas impossible car $\pi \in [0 ; 4]$ et pourtant $P(E) = 0$. Cependant, si Ω est fini, on a l'équivalence entre E impossible et $P(E) = 0$. Par contre, si Ω est infini, on est amené à définir : "E est dit impossible lorsque $E = \varnothing$" et "E est dit P-quasi-impossible lorsque $P(E) = 0$".

Démonstrations :

Prouvons déjà la propriété 2 :

- Par définition, A et $\overline{A}$ sont incompatibles et $A \cup \overline{A} = \Omega$.

  D'après la définition d'une probabilité , on a donc :

$$P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

  Et comme $P(A \cup \overline{A}) = P(\Omega) = 1$, il vient : $P(A) + P(\overline{A}) = 1$

- Si $A \subset B$ alors B est l'union disjointe de A et de $(B \setminus A)$ donc :

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

  Et comme $P(B \setminus A) \geqslant 0$, on obtient bien : $P(A) \leqslant P(B)$

Le principe de ces démonstrations est de se ramener à des événements incompatibles afin d'avoir des unions disjointes et d'utiliser la relation

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Ensuite, il est clair que les événements $A \setminus B$ et $A \cap B$ sont incompatibles et que $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$

  (voir figure ci-dessous)

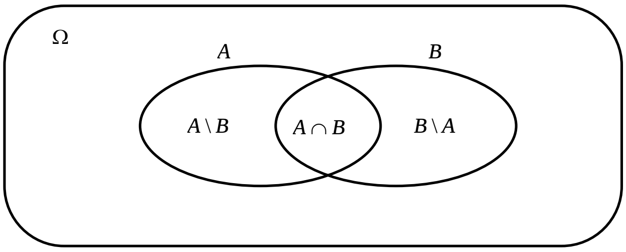
  D'après la définition d'une probabilité, on a donc :

$$P(A) = P(A \setminus B) \cup (A \cap B)) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

  D'où le résultat.

Prouvons maintenant la propriété 1 :

Il suffit d'écrire que : $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$



Comme les événements $A \setminus B$ et B sont incompatibles, on a :

$$P((A \setminus B) \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$$

Et d'après la propriété 2 : $P(A \cup B) = P(A) - P(A \cap B) + P(B)$

D'où le résultat.

2. Variables aléatoires (Rappels de première et compléments)

Dans ce paragraphe, on ne considère que des univers Ω finis ou infinis dénombrables.

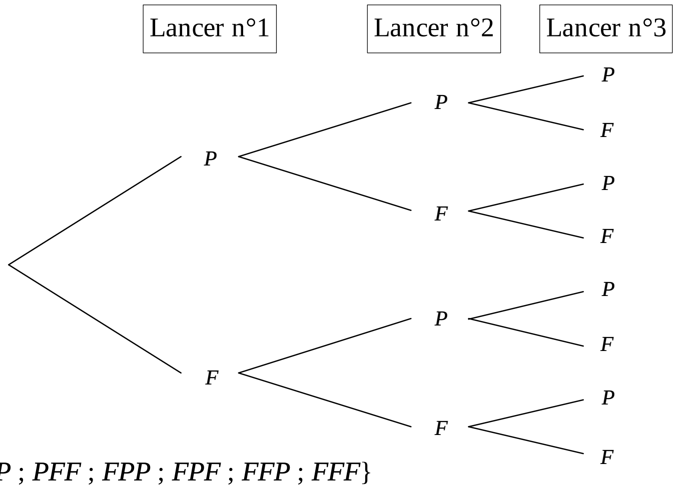
2.1. Définition *Variable aléatoire*

Lorsqu'à chaque événement élémentaire ω d'un univers Ω on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une variable aléatoire (réelle). Une variable aléatoire est donc une application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.[1]

[1] Cette définition reste encore valable si Ω est infini dénombrable et si l'on a choisi $\wp(\Omega)$ comme tribu. Par contre, si Ω a la puissance du continu, il faut rajouter dans la définition la condition suivante : "pour tout intervalle I de $\mathbb{R}$, l'ensemble $X^{-1}(I)$ est un événement" sinon le calcul des probabilités risque fort d'être très limité.

Exemple :

On lance une pièce de monnaie trois fois de suite.



L'arbre ci-contre permet de déteminer l'univers Ω associé à cette expérience aléatoire. Il est constitué de 8 événements élémentaires (nombre de listes de 3 éléments de l'ensemble $\{P\ ;\ F\}$) :

$$\Omega = \{PPP\ ;\ PPF\ ;\ PFP\ ;\ PFF\ ;\ FPP\ ;\ FPF\ ;\ FFP\ ;\ FFF\}$$

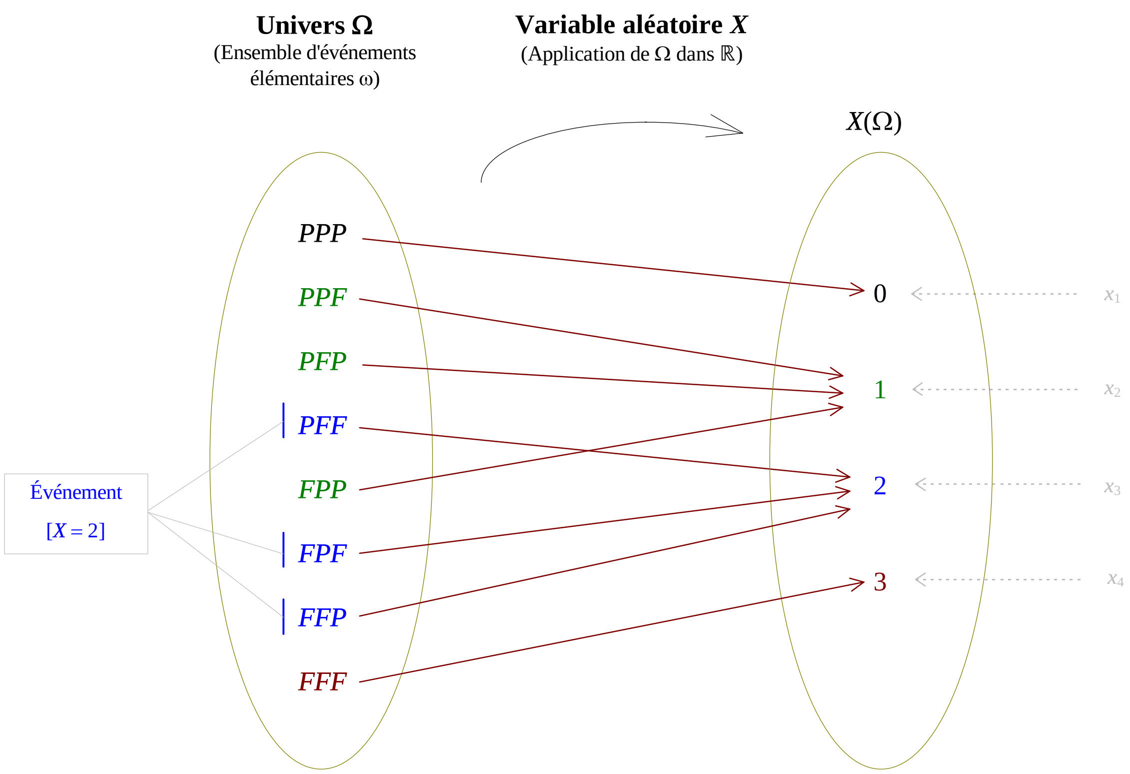
Si on suppose la pièce bien équilibrée, on peut considérer que ces huit issues sont équiprobables.

Notons X le nombre de côtés "face" obtenus. X est une variable aléatoire qui prend les valeurs 0 ; 1 ; 2 ou 3. Plus précisément, on a $X(\Omega) = \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$. On notera, par exemple "$X = 2$" ou $(X = 2)$ ou encore $[X = 2]$ l'événement "face est sorti exactement deux fois". Plus précisément :

$$\text{"}X = k\text{"} = \{\omega \in \Omega \text{ tels que } X(\omega) = k\} = X^{-1}(k)$$

Ce que l'on a noté $X^{-1}(k)$ est l'ensemble des antécédents de k par X.

Remarque : on n'a pas besoin de probabilité pour définir une variable aléatoire.



*La variable aléatoire X permet de définir un nouvel univers **numérique** $X(\Omega)$. Si l'univers inital Ω est muni d'une probabilité P, la variable aléatoire X induit également une nouvelle probabilité P_X sur cet univers $X(\Omega)$.*

2.2. Définition *Loi de probabilité P_X associée à une variable aléatoire*

Soit P une probabilité sur un univers Ω.

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini de cardinal n.

Lorsqu'à chaque valeur x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) de X on associe les probabilités p_i de l'événement "$X = x_i$", on dit que l'on définit la loi de probabilité P_X de la variable aléatoire X.

Pour illustrer, sur l'exemple précédent, à la valeur $x_3 = 2$, nous pouvons associer la probabilité $p_3 = \frac{3}{8}$ puisque nous avons 3 chance sur 8 d'obtenir exactement deux fois le côté "face". Ainsi :

$$P_X(2) = P(X = 2)$$

Remarque (hors programme) : on peut montrer que l'application P_X vue comme application de

$$\begin{aligned} \wp(X(\Omega)) &\to [0\,;1] \\ A &\mapsto \sum_{x \in A} P(X^{-1}(x)) \end{aligned}$$

est une probabilité sur $X(\Omega)$. En effet :

$$P_X(X(\Omega)) = \sum_{x \in X(\Omega)} P\left(X^{-1}(x)\right) = P\left(\coprod_{x \in X(\Omega)} X^{-1}(x)\right) = P(\Omega) = 1 \text{ (car } P \text{ est une probabilité sur } \Omega)$$

Soient A_1, A_2, ... A_n des événements (éléments $\wp(X(\Omega))$) deux à deux disjoints, on a :

$$P_X\left(\coprod_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{x \in \coprod_{i=1}^{n} A_i} P(X^{-1}(x)) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x \in A_i} P(X^{-1}(x)) = \sum_{i=1}^{n} P_X(A_i)$$

On a donc bien montré que P_X est une probabilité sur $X(\Omega)$.

En pratique, la loi de probabilité P_X de X est présentée sous forme de tableau.

Avec l'exemple de la pièce de monnaie lancée trois fois et X = nombre de face obtenus, cela donne :

Valeur x_i de la variable aléatoire X	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$	$x_4 = 3$
Probabilité p_i de l'événement "$X = x_i$"	$p_1 = \frac{1}{8}$	$p_2 = \frac{3}{8}$	$p_3 = \frac{3}{8}$	$p_4 = \frac{1}{8}$

On remarquera que l'on a bien $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Autre exemple : toujours avec le lancer d'une pièce 3 fois de suite.

Posons cette fois : $$Y = \begin{cases} 1 \text{ si deux faces identiques apparaissent successivement} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a :

Valeurs k de Y	0	1
$P(Y = k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

2.3. Définition *Espérance, variance et écart type d'une variable aléatoire*

Soit Ω l'univers correspondant à une expérience aléatoire.

Soit P une probabilité sur Ω.

Soit X une variable aléatoire définie sur Ω telle que $X(\Omega)$ soit fini[1] de cardinal n.

Notons $\{x_1 ; x_2 ; ... ; x_n\}$ l'ensemble $X(\Omega)$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs prises par X.

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre, noté $E(X)$, défini par :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n \qquad \boxed{p_i = P(X = x_i)}$$

l'espérance est la moyenne des valeurs x_i pondérées par les probabilités p_i

La variance de la variable aléatoire X est le nombre, noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - E(X)\right)^2 = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + ... + p_n(x_n - E(X))^2$$

la variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne

L'écart type de la variable aléatoire X est le nombre, noté $\sigma(X)$, défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Remarque : la variance est une quantité positive, donc l'écart type est bien défini.

Exemples :

Reprenons l'exemple de la pièce de monnaie lancée trois fois de suite et les variables aléatoires X et Y :

$$E(X) = \frac{1}{8}\times 0 + \frac{3}{8}\times 1 + \frac{3}{8}\times 2 + \frac{1}{8}\times 3 = \frac{3}{2}$$

$$V(X) = \frac{1}{8}\left(0-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(1-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{8}\left(3-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

D'où :
$$\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

De même avec Y :
$$E(Y) = \frac{1}{4}\times 0 + \frac{3}{4}\times 1 = \frac{3}{4}$$

$$V(Y) = \frac{1}{4}\left(0-\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} \quad \text{et} \quad \sigma(Y) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Interprétation : lorsque X représente le gain du joueur à un jeu de hasard, $E(X)$ représente l'espoir de gain moyen par partie, lorsqu'on joue un grand nombre de fois. Si $E(X) > 0$ (resp. $E(X) < 0$) alors le jeu est avantageux (resp. désavantageux) pour le joueur. Si $E(X) = 0$ alors le jeu est dit équitable.

L'écart-type est une caractéristique de la dispersion des valeurs de X.

Remarque : on pourrait aussi calculer l'espérance $E(X)$ en revenant aux événements élémentaires de l'univers Ω au lieu d'utiliser les valeurs x_i de la variable aléatoire X :

$$E(X) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\omega)X(\omega)$$

Sur l'exemple précédent, comme $P(\omega) = \frac{1}{8}$ cela donnerait :

$$E(X) = \frac{1}{8}\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) = \frac{1}{8}(X(PPP) + X(PPF) + X(PFP) + X(PFF) + X(FPP) + X(FPF) + X(FFP) + X(FFF))$$

[1] Si $X(\Omega)$ est infini dénombrable, l'espérance existe encore sous réserve de la convergence (absolue) de la série de terme général x_np_n.
Si $X(\Omega)$ a la puissance du continu, l'espérance est donnée par une intégrale.

$$E(X) = \frac{1}{8}(0 + 1 + 1 + 2 + 1 + 2 + 2 + 3) = \frac{3}{2}$$

Le calcul peut paraître plus long mais dans certaines situations, il peut s'avérer plus pratique (voir par exemple la démonstration de la linéarité de l'espérance en 2.4.)

Exercice théorique : démontrer que l'espérance $E(X)$ minimise la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - x)^2$$

f est la fonction "moyenne des carrés des écarts" tandis que g est la fonction "moyenne des écarts".

mais pas la fonction g définie par : $$g(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i |x_i - x|$$

La fonction f est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = -2\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - x) = -2\sum_{i=1}^{n} p_i x_i - 2x\sum_{i=1}^{n} p_i = -2(E(X) - x)$$

On en déduit : $$f'(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant E(X)$$

Donc f admet un minimum en $E(X)$ (et ce minimum est $f(E(X)) = V(X)$ ...)

L'espérance est donc la quantité qui minimise la moyenne des carrés des écarts. Par contre, elle ne minimise pas la moyenne des écarts. En effet, considérons la variable aléatoire X définie par la loi suivante :

x_i	0	1000
p_i	0,9	0,1

On a : $$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = 100$$

$$g(E(X)) = p_1|x_1 - 100| + p_2|x_2 - 100| = 90 + 90 = 180$$

Or : $$g(0) = E(X) = 100$$

Donc : $$g(0) < g(E(X))$$

Conclusion : $E(X)$ ne minimise pas la fonction g

Quelle est donc la quantité qui minimise la fonction g ? Etudions ça de près.

Quitte à réindexer les indices des x_i, on peut supposer sans perte de généralité que :

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n$$

Donnons-nous $k \in [\![1, n - 1]\!]$ et $x \in [x_k, x_{k+1}]$. En coupant la somme en deux, il vient :

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i |x_i - x| = \sum_{i=1}^{k} p_i (x - x_i) + \sum_{i=k+1}^{n} p_i (x_i - x) = x\sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=1}^{k} p_i x_i + \sum_{i=k+1}^{n} p_i x_i - x\sum_{i=k+1}^{n} p_i$$

Donc g est affine sur $[x_k, x_{k+1}]$: $$g(x) = a_k x + b_k$$

avec : $$a_k = \sum_{i=1}^{k} p_i - \sum_{i=k+1}^{n} p_i = 2\sum_{i=1}^{k} p_i - 1 \quad \text{et} \quad b_k = \sum_{i=k+1}^{n} p_i x_i - \sum_{i=1}^{k} p_i x_i$$

Elle est donc croissante sur $[x_k, x_{k+1}]$ si et seulement si $a_k \geqslant 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\sum_{i=1}^{k} p_i \geqslant \frac{1}{2}$.

Donc g est une fonction affine par morceaux, décroissante sur les intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ tels que $\sum_{i=1}^{k} p_i \leqslant \frac{1}{2}$ et croissante sur les intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ tels que $\sum_{i=1}^{k} p_i \geqslant \frac{1}{2}$.

Elle admet donc un minimum en la valeur médiane de la série des x_i ($1 \leqslant i \leqslant n$).

2.4. Théorème *Linéarité de l'espérance*

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers Ω de cardinal fini.

Soit P une probabilité sur Ω.

On a : $$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Et en particulier, pour tout réel b : $$E(X + b) = E(X) + b$$

$$E(kX) = kE(X) \text{ pour tout réel } k$$

Démonstration :

$$E(X + Y) = \sum_{\omega\in\Omega} (X+Y)(\omega)P(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)P(\omega) = E(X) + E(Y)$$

On calcule les espérances relativement aux événements élémentaires afin de pouvoir utiliser la linéarité de l'opérateur Σ.

En prenant Y constante égale à b, on obtient :

$$E(X + b) = E(X) + E(b) = E(X) + b$$

$$E(kX) = \sum_{i=1}^{n} kp_i x_i = k\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = kE(X)$$

Exemple :

On lance 4 dés, et on note S la somme des résultats obtenus. Calculer $E(S)$.

Soient X_1, X_2, X_3 et X_4 les résultats obtenus pour chaque dé. On a :

$$E(X_1) = E(X_2) = E(X_3) = E(X_4) = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3{,}5$$

Or, $S = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, d'où :

$$E(S) = E(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) = 4E(X_1) = 4 \times 3{,}5 = 14$$

2.5. Théorème *Calcul pratique de la variance : formule de Koenig-Huyghens*

La variance d'une variable aléatoire X peut se calculer avec la relation suivante :

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

la variance est l'écart entre la moyenne des carrés et le carré de la moyenne

Démonstration : on rappelle que l'espérance d'une variable aléatoire constante $X = b$ est égale à la constante b.

D'après la linéarité de l'espérance :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2 - 2XE(X) + E(X)^2) = E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2E(1)$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Pour le calcul de la variance, on préférera l'emploi de cette dernière formule plutôt que celle vue en 2.3. En effet, outre un intérêt pratique indéniable pour mener le calcul, la formule de Koenig-Huyghens est surtout plus fiable lorsque l'espérance $E(X)$ ne tombe pas juste. En effet, dans la formule vue en 2.3. l'erreur due à l'arrondi de $E(X)$ se propage tout au long du calcul alors qu'elle n'apparaît que dans le dernier terme dans la formule 2.5.

Exemple :

Reprenons l'exemple de la pièce de monnaie lancée trois fois de suite. X désigne le nombre de "face" obtenu.

$$E(X^2) = \frac{1}{8}\times 0^2 + \frac{3}{8}\times 1^2 + \frac{3}{8}\times 2^2 + \frac{1}{8}\times 3^2 = 3$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

2.6. Corollaire *Effet d'un changement affine sur la variance et l'écart type*

Soit X une variable aléatoire. Soient a et b deux réels.

On a : $$V(aX+b) = a^2V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$$

En particulier : $$V(aX) = a^2V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a|\sigma(X)$$

$$V(X+b) = V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(X+b) = \sigma(X)$$

Démonstration :

D'après 2.5., on a : $$V(aX+b) = E(a^2X^2 + 2abX + b^2) - [E(aX+b)]^2$$

Et d'après la linéarité de l'espérance :

$$V(aX+b) = a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - [aE(X)+b]^2$$

$$V(aX+b) = a^2E(X^2) + 2abE(X) + b^2 - a^2[E(X)]^2 - 2abE(X) - b^2$$

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

D'où, par passage à la racine carrée : $$\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$$

En particularisant $b = 0$, puis $a = 1$, on obtient :

$$V(aX) = a^2V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(aX) = |a|\sigma(X)$$

$$V(X+b) = V(X) \quad \text{et} \quad \sigma(X+b) = \sigma(X)$$

Interprétation des dernières relations : une translation n'a pas d'incidence sur la variance ou l'écart type d'une variable aléatoire (en effet, cela ne modifie pas son degré de dispersion).

2.7. Définition *Fonction de répartition d'une variable aléatoire*

Soit X une variable aléatoire. La fonction de répartition F associée à X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = P(X \leqslant x)$$

La fonction de répartition est toujours une fonction croissante et bornée par 0 et 1.

Exemple : avec toujours les mêmes données précédentes, on a :

Pour $x \in]-\infty ; 0[$, on a : $$F(x) = 0$$

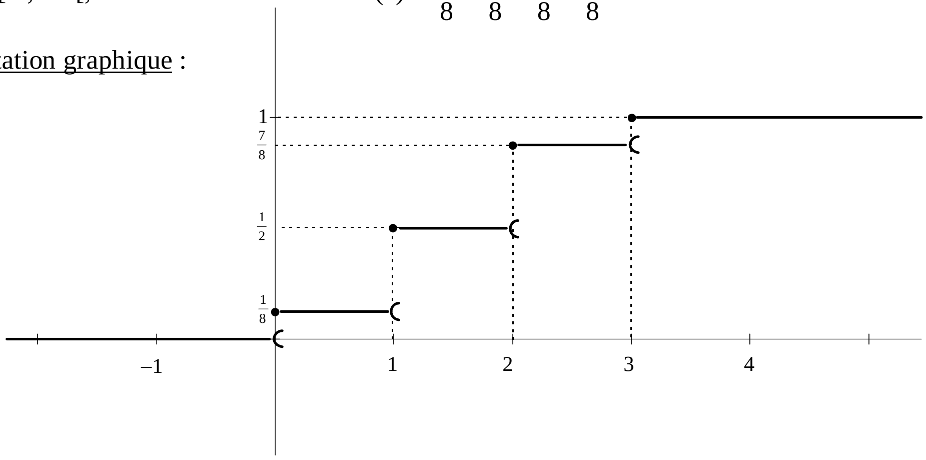
Pour $x \in [0 ; 1[$, on a : $$F(x) = \frac{1}{8}$$

Pour $x \in [1 ; 2[$, on a : $$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$$

Pour $x \in [2 ; 3[$, on a : $$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

Pour $x \in [3 ; +\infty[$, on a : $$F(x) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = 1$$

Représentation graphique :



3. Probabilités conditionnelles

3.1. Exemple introductif : un joueur tire, au hasard, une carte d'un jeu de 32 cartes.

On considère les événements suivants :

F = "la carte tirée est une figure" et R = "la carte tirée est un roi"

1) Calculer $P(F)$, $P(R)$ et $P(R \cap F)$ (où P désigne la probabilité correspondant à l'équirépartition)

2) Le joueur affirme : "la carte tirée est une figure". Quelle est alors la probabilité que ce soit un roi ?

Solution :

1) Ici, l'univers Ω est constitué de 32 événements élémentaires équiprobables. On a donc :

$$P(F) = \frac{\text{Card}(F)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8} \;\; ; \;\; P(R) = \frac{\text{Card}(R)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \;\; \text{et} \;\; P(R \cap F) = \frac{\text{Card}(R \cap F)}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$$

2) Maintenant, nous n'avons plus l'équiprobabilité sur Ω. Les seuls événements de probabilité non nulle sont ceux qui sont constitués d'une partie des 12 figures du jeu de cartes. Nous allons choisir une nouvelle probabilité P_F qui sera nulle pour les événements élémentaires ne correspondant pas à une figure et équirépartie pour les événements élémentaires correspondant à une figure. Pour déterminer la probabilité que la carte soit un roi, nous devons seulement considérer les rois qui sont des figures, donc compter les éléments de $R \cap F$, si bien que :

$$P_F(R) = \frac{\text{Card}(R \cap F)}{\text{Card}(F)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

La probabilité $P_F(R)$ s'appelle la **probabilité conditionnelle de *R* par rapport à *F***. On la note parfois $P(R|F)$ où $R|F$ représente l'événement "***R* est réalisé" sachant que *F* est réalisé**. (Cette dernière notation étant déconseillée car ne faisant pas ressortir le fait que l'on a une nouvelle probabilité).

Nous remarquons que : $$P_F(R) = \frac{P(R \cap F)}{P(F)}$$

Généralisons ce résultat :

3.2. Théorème

Soit une expérience aléatoire d'univers Ω (avec Ω de cardinal fini), P une probabilité sur Ω et B un événement tel que $P(B) \neq 0$. L'application P_B de $\wp(\Omega)$ dans $[0\,;\,1]$ définie par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{pour tout } A \in \wp(\Omega)$$

est une probabilité sur Ω.

Démonstration (Hors programme)

On a : $$P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$$

Soient $A_1, A_2, \ldots, A_n$ des événements (donc des éléments $\wp(\Omega)$) deux à deux disjoints. On a :

$$P_B\left(\coprod_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{P\left(\left(\coprod_{i=1}^{n} A_i\right) \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P\left(\coprod_{i=1}^{n} A_i \cap B\right)}{P(B)}$$

Or, les événements $A_i \cap B$ sont deux à deux disjoints puisque les A_i le sont, donc :

$$P\left(\coprod_{i=1}^{n} A_i \cap B\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

D'où :
$$P_B\left(\coprod_{i=1}^{n} A_i\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{n} P_B(A_i)$$

L'application P_B est bien une probabilité, le théorème est donc démontré.

<u>3.3. Définition</u> *Probabilité conditionnelle*

L'application P_B ainsi définie s'appelle "<u>probabilité *B*-conditionnelle</u>".

La quantité $P_B(A)$ se lit "**probabilité, sachant *B*, de *A***" parfois (et abusivement) notée $P(A|B)$.

On a ainsi :
$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

<u>Remarques</u> :

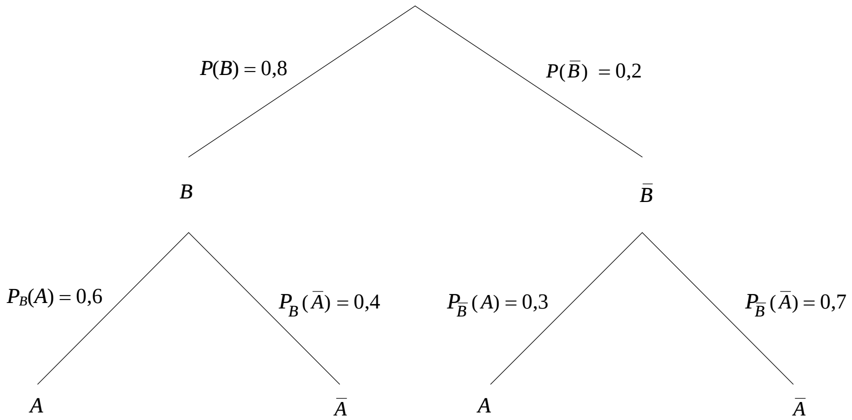
- la relation ci-dessus est très utile également dans l'autre sens :
$$P(A \cap B) = P_B(A)\,P(B) = P_A(B)\,P(A)$$
- l'événement contraire de $A \mid B$ est $\overline{A} \mid B$ ("*A* n'est pas réalisé" sachant que *B* l'est).
- cas particulier : si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$ et $P(A \cap B) = P(A)$.

  D'où :
$$P_B(A) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

<u>Exemples</u> :

- Un élève sérieux de terminale a 80% de chance d'avoir son Bac au mois de juin. Pendant les grandes vacances qui suivent, il passe un concours pour intégrer une école. Le concours est ouvert à tous les élèves (bacheliers ou non) mais notre candidat a 60% de chance d'être admis dans cette école s'il est bachelier et 30% sinon.

  Notons *B* l'événement "l'élève réussi son Bac" et *A* l'événement "l'élève est admis dans l'école".



  Quelle est la probabilité que l'élève réussisse son bac et soit admis à son école ?

  On calcule :
$$P(A \cap B) = P_B(A)P(B) = 0{,}6 \times 0{,}8 = 0{,}48$$

- Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personnes vaccinées. Le vaccin est-il efficace ?

  Pour le savoir, on compare la probabilité d'être malade (notée $P(M)$) avec celle d'être malade sachant que l'on a été vacciné (notée $P_V(M)$).

  On peut aussi comparer $P_{\overline{V}}(M)$ et $P_V(M)$, on trouve : $P_V(M) = 3{,}25\ P_{\overline{V}}(M)$

  Par hypothèse, on a : $P(V) = \dfrac{1}{3}$ et $P_M(V) = \dfrac{2}{15}$

  $$P_V(M) = \frac{P(M \cap V)}{P(V)} = \frac{P_M(V)P(M)}{P(V)} = \frac{2}{15} \times 3\, P(M) = \frac{2}{5} P(M)$$

  On a $P_V(M) < P(M)$. Le vaccin est donc efficace.

  On suppose, de plus, que sur cent personnes vaccinées, huit sont malades.

  Quelle est la proportion de malades dans la population ?

  On a donc : $P_V(M) = \dfrac{8}{100} = \dfrac{2}{25}$

  Or, $P_V(M) = \dfrac{2}{5} P(M)$ d'où : $P(M) = \dfrac{1}{5}$

  Il y a donc 20% de malades.

- Un homme rend visite à une famille ayant deux enfants. L'un des deux enfants, un garçon, ouvre la porte, quelle est alors la probabilité que les deux enfants soient des garçons ?

  Considérons l'expérience aléatoire suivante : choisir au hasard une famille de deux enfants et regarder si ce sont des garçons ou des filles. L'univers associé comporte 4 issues possibles : $\Omega = \{FF, FG, GF, GG\}$ où, par exemple, FG est l'événement "l'aînée est une fille, le cadet est un garçon". Statistiquement, on peut considérer ces quatre événements comme équiprobables. Notons A l'événement "les deux enfants sont des garçons" et B l'événement "un des deux enfants est un garçon".

  On a : $A = \{GG\}$ et $B = \{FG, GF, GG\}$

  Il s'agit donc de calculer : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

  Or, $A \cap B = A$ car $A \subset B$. Donc : $P_B(A) = \dfrac{P(A)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{1}{3}$

  <u>Remarque</u> : cet exercice peut paraître déroutant car l'aspect conditionnel n'apparaît pas assez clairement dans la question qui devrait être plutôt formulée ainsi : "quelle est la probabilité que les deux enfants soient des garçons **sachant** que l'un l'est déjà". D'autre part, si l'on sait que le garçon qui ouvre la porte est l'ainé, la probabilité que l'autre enfant soit aussi un garçon est dans ce cas égale à 0,5 bien sûr.

3.4. Théorème *Formule des probabilités totales*

Soit Ω un univers muni d'une probabilité P.

Si des parties B_1, B_2, ... , B_n, de probabilités non nulles, constituent une partition[1] de Ω, alors pour tout événement A, on a :

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} P_{B_k}(A)P(B_k)$$

Démonstration (Hors programme)

Les ensembles $A \cap B_1$, $A \cap B_2$, ... , $A \cap B_n$ constituent une partition de A :

$$A = \coprod_{k=1}^{n} A \cap B_k \text{ (union disjointe).}$$

D'après l'additivité de la probabilité pour les ensembles disjoints on a :

$$P(A) = P\left(\coprod_{k=1}^{n} A \cap B_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A \cap B_k)$$

Et comme $P(A \cap B_k) = P_{B_k}(A)\ P(B_k)$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on a :

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P_{B_k}(A)P(B_k)$$

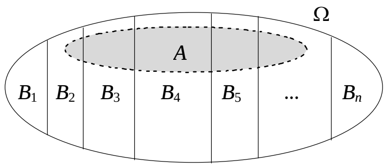
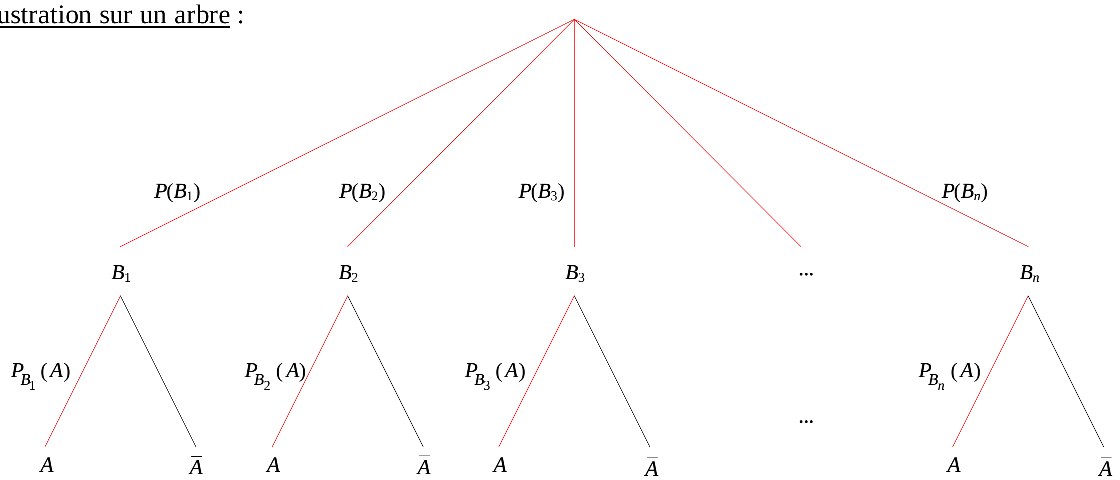


Illustration sur un arbre :



Remarques :

- La formule des probabilités totales reste vraie si B_1, B_2, ... , B_n sont des événements deux à deux incompatibles et si $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_i$.
- On a en particulier : $$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

[1] On dit que des parties B_1, B_2, ... , B_n forment une partition d'un ensemble Ω lorsqu'elles sont deux à deux disjointes ($B_i \cap B_j \neq \varnothing \Rightarrow i = j$) et recouvrent tout l'ensemble Ω ($B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$)

Exemples :

- Reprenons l'exemple de notre élève qui passe son bac et son concours. On rencontre cet élève au mois de septembre et il nous dit qu'il a été admis à l'école. Quelle est la probabilité qu'il ait son bac ?

  Nous devons calculer :

$$P_A(B) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})} = \frac{0,48}{0,48+0,3\times 0,2} = \frac{8}{9}$$

- Reprenons l'exemple de l'épidémie et cherchons la probabilité qu'une personne non vaccinée tombe malade. Nous cherchons donc $P_{\overline{V}}(M)$. Il est clair que les événements V et $\overline{V}$ constituent une partition de l'ensemble de la population. D'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(M) = P_V(M)\,P(V) + P_{\overline{V}}(M)\,P(\overline{V})$$

  D'où :
$$P_{\overline{V}}(M) = \frac{P(M)-P_V(M)P(V)}{1-P(V)} = \frac{\frac{1}{5}-\frac{2}{25}\times\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{13}{50} = 0,26$$

- Le feu tricolore. Un automobiliste arrive à proximité -disons une dizaine de mètres- d'un feu tricolore et aucun véhicule ne le précède. On suppose que, si le feu est vert à ce moment là, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 99/100. Si le feu est orange, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 3/10 et enfin si le feu est rouge, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 1/100 (quelques fous...). Le cycle du feu tricolore dure une minute : vert : 25s, orange : 5s et rouge : 30s.

  Quelle est la probabilité que l'automobiliste passe sans s'arrêter à ce feu tricolore ?

  Notons A l'événement "l'automobiliste passe sans s'arrêter au feu" et V (resp. O et R) = "le feu est vert (resp. orange et rouge)".

  Comme $V \cup O \cup R = \Omega$ (union disjointe), on a :

$$P(A) = P_V(A)P(V) + P_O(A)P(O) + P_R(A)P(R) = \frac{99}{100}\times\frac{5}{12}+\frac{3}{10}\times\frac{1}{12}+\frac{1}{100}\times\frac{1}{2} = \frac{177}{400} < \frac{1}{2} \ldots$$

4. Indépendance

4.1. Définition *Indépendance d'événements*

Soit P une probabilité sur un univers Ω.

On dit que deux événements A et B (de probabilités non nulles) sont P-indépendants lorsque la réalisation (ou non) de l'un n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de l'autre :

$$P_B(A) = P(A) \text{ ou } P_A(B) = P(B)$$

On convient qu'un événement A tel que $P(A) = 0$ est P-indépendant de tout autre.

Conséquence : soient A et B des événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

- Si A et B sont indépendants, alors :

$$P(A \cap B) = P_B(A)\,P(B) = P(A)\,P(B)$$

- Réciproquement, si $P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$ alors on a :

$$P_B(A)\,P(B) = P(A)\,P(B) \text{ d'où } P_B(A) = P(A)$$
$$P_A(B)\,P(A) = P(A)\,P(B) \text{ d'où } P_A(B) = P(B)$$

  Les événements A et B sont donc indépendants.

Ne pas confondre l'indépendance et l'incompatibilité de deux événements. Par exemple, si on lance un dé et si on considère les événements :
A = "obtenir un nombre pair" et
B = "obtenir un nombre impair"
Alors A et B sont incompatibles (puisque $A \cap B = \emptyset$) et dépendants (puisque $P(A) = P(B) = 0,5$ alors que $P(A \cap B) = 0$)

Ce qui fournit un bon critère pour savoir si deux événements sont indépendants :

<u>4.2. Théorème</u> *Critère d'indépendance de deux événements*

Deux événements A et B sont P-indépendants si et seulement si $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

<u>Exemples</u> :

- On lance deux dés et on désigne par A l'événement "le premier dé amène un nombre pair", par B l'événement "le deuxième dé amène un nombre impair" et par C l'événement "les deux dés amènent un nombre pair".

  On a : $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{2}$; $P(C) = \frac{1}{4}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$; $P(A \cap C) = \frac{1}{2}$; $P(B \cap C) = 0$. (Arbres)

  On conclut : A et B sont indépendants ; A et C sont dépendants ; B et C sont dépendants.
- On lance une pièce deux fois de suite et on considère les événements A_1 = "FACE au premier lancer" et A_2 = "FACE au second lancer". On a $\Omega = \{FF ; FP ; PF ; PP\}$ et on calcule $P(A_1) = 0,5$; $P(A_2) = 0,5$ et $P(A_1 \cap A_2) = 0,25$. Les événements sont indépendants, ce qui est rassurant.
- Deux événements A et B incompatibles et de probabilités non nulles sont toujours dépendants puisque $P(A \cap B) = 0$ et $P(A).P(B) \neq 0$.
- L'événement Ω est indépendant de tout événement A puisque $P(A \cap \Omega) = P(A) = P(A) \times 1 = P(A)P(\Omega)$.

<u>Remarque</u> : il faut être méfiant avec la notion d'indépendance. Deux événements peuvent intuitivement sembler indépendants sans pour autant l'être après calculs. Par exemple, considérons l'expérience suivante :

Quatre lots sont répartis entre 5 personnes $P_1, \ldots, P_5$ de la façon suivante : chaque lot est attribué par tirage au sort d'une personne parmi les 5.

L'univers Ω de cette expérience aléatoire est l'ensemble des listes de 4 éléments de $\{P_1 ; \ldots ; P_5\}$. Il y en a 5^4.

Pour tout $k \in [\![1 ; 5]\!]$, notons E_k l'événement décrit par "la personne P_k ne reçoit aucun lot".

Les événements E_k, $1 \leqslant k \leqslant 5$, sont-ils indépendants ? Réponse : non.

En effet, soient h et k distincts compris entre 1 et 5.

L'événement E_k est constitué des listes de 4 éléments de l'ensemble $\{P_1 ; \ldots ; P_5\} \setminus \{P_k\}$. Il y en a 4^4.

Avec la probabilité équirépartie P sur Ω, on a :

$$P(E_k) = \frac{4^4}{5^4}$$

De même :

$$P(E_h) = \frac{4^4}{5^4}$$

Par ailleurs $E_k \cap E_h$ est constitué des listes de 4 éléments de l'ensemble $\{P_1 ; \ldots ; P_5\} \setminus \{P_k ; P_h\}$. Il y en a 3^4.

Donc :

$$P(E_k \cap E_h) = \frac{3^4}{5^4}$$

D'où :

$$P(E_k \cap E_h) \neq P(E_k).P(E_h)$$

Extension à n événements :

$A_1, A_2, ..., A_n$ sont dits mutuellements indépendants lorsque pour toute famille d'indices $K \subset [\![1 ; n]\!]$

$$P\left(\bigcap_{k\in K} A_k\right) = \prod_{k\in K} P(A_k)$$

qu'il ne faut pas confondre avec l'indépendance deux à deux :

$A_1, A_2, ..., A_n$ sont dits deux à deux indépendants lorsque pour tous i et j vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Des événements mutuellement indépendants le sont aussi deux à deux (il suffit de prendre les parties K de deux éléments), mais la réciproque est fausse : il suffit de considérer, pour le lancer de deux pièces de monnaie (bien équilibrées), les événements A : "on obtient PILE au premier lancer", B : "on obtient PILE au second lancer" et C : "on obtient le même côté aux deux lancers". On vérifie facilement à l'aide d'un arbre que $P(A) = P(B) = P(C) = 0{,}5$ puis que $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 0{,}25$ donc A, B et C sont deux à deux indépendants et pourtant $P(A \cap B \cap C) = 0{,}25$ et $P(A)P(B)P(C) = 0{,}125$ donc A, B et C ne sont pas mutuellement indépendants.

Exercice :

Soient A et B deux événements indépendants. $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ? Et $\overline{A}$ et B ?

On peut commencer par répondre à la seconde question :

$$P_B(\overline{A}) = 1 - P_B(A) = 1 - P(A) = P(\overline{A})$$

Donc $\overline{A}$ et B sont indépendants.

Il suffit de passer maintenant à l'événement contraire de B pour obtenir une réponse affirmative à la première question. En effet :

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = 1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)$$

Et en vertu de l'identité $1 - x - y + xy = (1 - x)(1 - y)$:

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B)) = P(\overline{A})P(\overline{B})$$

4.3. Définition *Indépendance de variables aléatoires*

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un univers Ω telles que $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ soient finis.

Notons $x_1, ..., x_n$ et $y_1, ..., y_p$ les valeurs de X et Y.

On dit que X et Y sont des variables aléatoires indépendantes lorsque :

pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et tout $j \in [\![1, p]\!]$, les événements "$X = x_i$" et "$Y = y_j$" sont indépendants

Dans ce type de situations (où deux variables aléatoires sont en jeu), il est utile de dresser un tableau à 2 entrées.

Exemple :

On lance deux dés bien équilibrés. On note S la somme des résultats obtenus et P le produit.

Donner, sous forme de tableau la loi de probabilité du couple (S, P).

Les variables aléatoires S et P sont-elles indépendantes ?

Dressons tout d'abord deux petits tableaux donnant les différentes possibilités de sommes et de produits :

S	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

P	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Loi du couple (S, P) :

S \ P	1	2	3	4	5	6	8	9	10	12	15	16	18	20	24	25	30	36	Loi de S
2	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$
3	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$
4	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{3}{36}$
5	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{4}{36}$
6	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$
7	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{6}{36}$
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	0	$\frac{5}{36}$
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{4}{36}$
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{3}{36}$
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
Loi de P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

Les variables aléatoires S et P ne sont pas indépendantes. En effet :

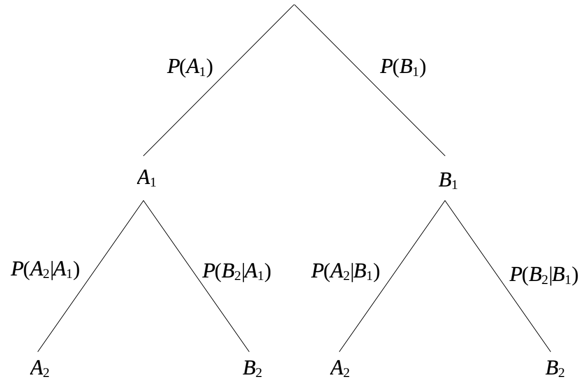
$$P(\text{"}S = 2\text{"} \cap \text{"}P = 2\text{"}) = 0$$

$$P(S = 2)P(P = 2) = \frac{1}{36} \times \frac{2}{36} \neq 0$$

5. Modélisation d'expériences. Répétition d'expériences indépendantes

Voici trois règles pratiques pour calculer des probabilités directement sur des arbres (règles qui sont en relation avec des résultats du cours ci-dessus) :

Exemple de situation où l'on réitère deux fois une expérience comportant deux issues A et B contraires l'une de l'autre. On note A_1 (resp. A_2) l'événement "A se réalise à la première (resp. deuxième) expérience". Mêmes notations pour B. L'univers associé à cette situation comporte 4 issues : $\Omega = \{A_1A_2 ; A_1B_2 ; B_1A_2 ; B_1B_2\}$



R1 : la somme des probabilités des branches partant d'une même racine est toujours égale à 1 :

Exemple : $P(A_1) + P(B_1) = 1$ (ceci provient du fait que A et B sont contraires)

R2 : la probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités des branches de ce chemin :

Exemple : la probabilité du chemin A_1 - A_2 est : $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2|A_1)\,P(A_1)$ (formule de probabilité conditionnelle)

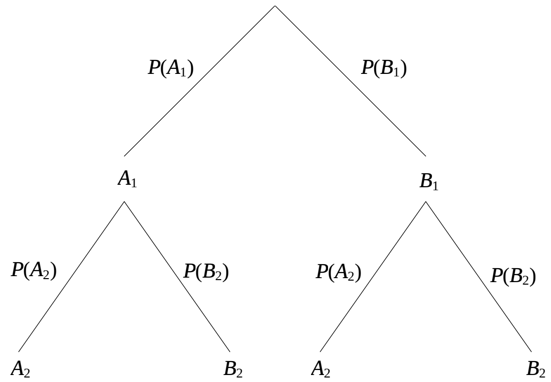
R3 : la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins correspondant à cet événement.

Exemple : La probabilité de l'événement "obtenir exactement une fois A" est : $P(A_1 \cap B_2) + P(B_1 \cap A_2)$

<u>Lien avec l'indépendance</u> : si on suppose que les deux expériences se déroulent de manière indépendante. On a alors l'arbre suivant :

La probabilité du chemin A_1 - A_2 sera donc $P(A_1)P(A_2)$

<u>Cas particulier à connaître</u> : **si on répète n fois, de manière indépendante une expérience. La probabilité p qu'un événement A de cette expérience se réalise n fois sera : $p = (P(A))^n$.**



<u>Exemples</u> :

- On lance un dé n fois ($n \in \mathbb{N}^*$). Comment choisir n pour que la probabilité p_n d'obtenir au moins un 6, au cours des n lancers, soit supérieure ou égale à 0,95 ?

  Notons : A = "on obtient au moins un 6 au cours des n lancers"

  On a : $\overline{A}$ = "on obtient aucun 6 au cours des n lancers"

  L'événement $\overline{A}$ se réalise, si et seulement si, pour chacun des n lancers (qui sont indépendants), on n'obtient pas de 6. D'après le cas particulier vu ci-dessus, on a :

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

  Il s'agit d'un cas particulier de la loi binomiale qui sera abordée dans le chapitre suivant.

  D'où : $$p_n = P(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

  On cherche maintenant n tel que : $p_n \geqslant 0{,}95$

$$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant 0{,}95$$

$$\left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant 0{,}05$$

La fonction ln étant croissante sur $]0, +\infty[$, cette dernière inéquation équivaut à :

$$n \ln \frac{5}{6} \leqslant \ln 0{,}05$$

Et puisque $\ln \frac{5}{6} < 0$ (car $\frac{5}{6} \in]0, 1[$), on a :

$$n \geqslant \frac{\ln 0{,}05}{\ln \frac{5}{6}}$$

La calculatrice donne : $\dfrac{\ln 0{,}05}{\ln \frac{5}{6}} \simeq 16{,}4$ à 10^{-1} près

Et comme n est un entier : $n \geqslant 17$

On doit donc lancer le dés au moins 17 fois pour être sûr à 95% d'obtenir au moins un 6.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On range n objets dans n tiroirs (chaque tiroir pouvant contenir de 0 à n objets).

  Calculer le nombre moyen de tiroirs vides.

  Définissons la variable aléatoire X_i, $(1 \leqslant i \leqslant n)$, par :

$$X_i = \begin{cases} 1 \text{ si le } i^{\text{ème}} \text{ tiroir est vide} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On a : $P(X_i = 1) = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $P(X_i = 0) = 1 - P(X_i = 1) = 1 - \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

Notons $E_n(X_i)$ l'espérance de X_i. (Elle dépend de n)

On a : $$E_n(X_i) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

Notons $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ = nombre de tiroirs vides.

D'après la linéarité de l'espérance, il vient :

$$E_n(X) = \sum_{i=1}^{n} E_n(X_i) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

<u>Remarque</u> : étudions la limite de la proportion $\dfrac{E_n(X)}{n}$ de boîtes vide.

On a : $$\frac{E_n(X)}{n} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \mathbf{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \underset{X=-\frac{1}{n}}{=} \mathbf{e}^{-\frac{\ln(1+X)}{X}}$$

Or, $$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{e}^{n\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)} \underset{X=-\frac{1}{n}}{=} \lim_{X\to 0} \mathbf{e}^{-\frac{\ln(1+X)}{X}}$$

Mais on sait que $\displaystyle\lim_{X\to 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = \ln'(1) = 1$, donc par continuité de l'exponentielle, on en déduit :

$$\lim_{X \to 0} \mathbf{e}^{-\frac{\ln(1+X)}{X}} = \frac{1}{\mathbf{e}}$$

D'où :
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E_n(X)}{n} = \frac{1}{\mathbf{e}}$$

La proportion de boîtes vides tend vers $\frac{1}{\mathbf{e}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.