UNIVERSITE IBN ZOHR Année Universitaire 2014-2015
Faculté des Sciences Juridiques
Economiques et Sociales S5
Agadir

Recherche Opérationnelle
Corrigé de la série 3: Résolution par la méthode des tableaux

Pr. O.Chadli

Exercice 1

1- Notons par x_1, x_2 et x_3 respectivement les quantités des produits A, B et C fabriqués par la société.

- *Contraintes de signes*: $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.
- *Contraintes économiques*:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 1800 \\ \frac{1}{6}x_1 + \frac{4}{30}x_2 + \frac{1}{6}x_3 \leq 60 \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{10}x_3 \leq 60 \\ \frac{4}{30}x_1 + \frac{1}{10}x_2 + \frac{1}{10}x_3 \leq 72 \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 \leq 80 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 1800 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1800 \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 1800 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 2160 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 960 \end{cases}$$

- *Fonction économique*: On détermine le bénéfice unitaire réalisé par la vente de chaque produit. On le fera pour le produit A et de façon similaire on le déduira pour les autres produits. Notons ce bénéfice par b_A, b_B et b_C. Alors, on a

$$b_A = 15 - (2 + 3 + \alpha)$$
$$b_A = 19.40 - (3 + 5 + \beta)$$
$$b_A = 15 - (2 + 3 + \gamma),$$

où α, β et γ représentent respectivement le coût de la main-d'oeuvre pour produire une unité des produits A, B et C. On sait que pour produire A la main-d'oeuvre coute 4 Dh l'heure et la fabrication d'une unité de A nécessite 15 minutes de main-d'oeuvre. Par conséquent le coût en main-d'oeuvre pour produite une unité de A est $\alpha = 1$ Dh. De la même manière on calcule β et γ et on trouve $\beta = 1.4$ Dh, $\gamma = 1$ Dh. Par suite la fonction économique est donnée par :

$$z = 9\ x_1 + 10\ x_2 + 8\ x_3.$$

Le programme canonique (I) pour l'entreprise est donc

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} \text{Max } [9\ x_1 + 10\ x_2 + 8\ x_3] \\ \text{s.c.} \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 2000 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 1800 \\ 5x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 1800 \\ 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 1800 \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 2160 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 960 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{Programme canonique}$$

Le programme standard (I') est donné par :

$$
(\mathrm{I}) \quad \left\{ \begin{array}{l}
\text{Max } [9\ x_1 + 10\ x_2 + 8\ x_3] \\
\text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l}
4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 = 2000 \\
2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_5 = 1800 \\
5x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_6 = 1800 \\
6x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_7 = 1800 \\
4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_8 = 2160 \\
3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_9 = 960 \\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \\
x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0,\ x_8 \geq 0,\ x_9 \geq 0
\end{array} \right.
\end{array} \right. \qquad \text{Programme standard}
$$

Tableau (0):

B \ HB	1	2	3	·	·	·	·	·	·	C
4	4	5	2	1	0	0	0	0	0	2000
5	2	5	4	0	1	0	0	0	0	1800
6	5	4	5	0	0	1	0	0	0	1800
7	6	5	3	0	0	0	1	0	0	1800
8	4	3	3	0	0	0	0	1	0	2160
9	3	4	3	0	0	0	0	0	1	960
Δ	9	10	8	0	0	0	0	0	0	

La solution de base de départ est :

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2000,\ x_5 = 1800,$$

$$x_6 = 1800,\ x_7 = 1800,\ x_8 = 2160,\ x_9 = 960$$

Première itération:

B \ HB	1	2	3	·	·	·	·	·	·	C	R
4	4	5	2	1	0	0	0	0	0	2000	(2000/5)=400
5	2	5	4	0	1	0	0	0	0	1800	(1800/5)=360
6	5	4	5	0	0	1	0	0	0	1800	(1800/4)=450
7	6	5	3	0	0	0	1	0	0	1800	(1800/5)=360
8	4	3	3	0	0	0	0	1	0	2160	(2160/3)=720
9	3	4	3	0	0	0	0	0	1	960	(960/4)=240
Δ	9	10	8	0	0	0	0	0	0	z	

Variable entrante: x_2
Variable sortante: x_9
Pivot: 4.

On divise la ligne correspondant au pivot par le pivot 4, ce qui donne

B \ HB	1	2	3	·	·	·	·	·	·	C
4	4	5	2	1	0	0	0	0	0	2000
5	2	5	4	0	1	0	0	0	0	1800
6	5	4	5	0	0	1	0	0	0	1800
7	6	5	3	0	0	0	1	0	0	1800
8	4	3	3	0	0	0	0	1	0	2160
9	3/4	1	3/4	0	0	0	0	0	1/4	240
Δ	9	10	8	0	0	0	0	0	0	

On procède par la suite à l'élimination de x_2 dans les lignes 1,2,3,4, 5 et Δ. Pour cela,

- pour éliminer x_2 de la ligne 1, on multiplie la ligne 6 (correspondant au pivot) par 5 et on la retranche à la ligne 1;
- pour éliminer x_2 de la ligne 2, on multiplie la ligne 6 (correspondant au pivot) par 5 et on la retranche à la ligne 2;
- pour éliminer x_2 de la ligne 3, on multiplie la ligne 6 (correspondant au pivot) par 4 et on la retranche à la ligne 3;
- pour éliminer x_2 de la ligne 4, on multiplie la ligne 6 (correspondant au pivot) par 5 et on la retranche à la ligne 4;
- pour éliminer x_2 de la ligne 5, on multiplie la ligne 6 (correspondant au pivot) par 3 et on la retranche à la ligne 5;
- pour éliminer x_2 de la ligne Δ, on multiplie la ligne 6 (correspondant au pivot) par 10 et on la retranche à la ligne Δ.

Tableau (1):

B \ HB	1	·	3	·	·	·	·	·	9	C
4	1/4	0	(-7)/4	1	0	0	0	0	(-5)/4	875
5	(-7)/4	0	1/4	0	1	0	0	0	(-5)/4	600
6	2	0	2	0	0	1	0	0	-1	840
7	9/4	0	(-3)/4	0	0	0	1	0	(-5)/4	600
8	7/4	0	3/4	0	0	0	0	1	(-3)/4	1440
2	3/4	1	3/4	0	0	0	0	0	1/4	240
Δ	3/2	0	1/2	0	0	0	0	0	(-5)/2	z-2400

La première itération nous permet d'atteindre la solution de base extrême

$$x_1 = 0,\ x_2 = 240,\ x_3 = 0,\ x_4 = 875,\ x_5 = 600,$$

$$x_6 = 840,\ x_7 = 600,\ x_8 = 1440,\ x_9 = 0$$

qui constituera la solution de base de départ pour atteindre la prochaine solution de base extrême (ou prochain sommet).

Deuxième itération:

B \ HB	1	·	3	·	·	·	·	·	9	C	R
4	1/4	0	(-7)/4	1	0	0	0	0	(-5)/4	875	3500
5	(-7)/4	0	1/4	0	1	0	0	0	(-5)/4	600	(-2400)/7
6	2	0	2	0	0	1	0	0	-1	840	420
7	$\boxed{9/4}$	0	(-3)/4	0	0	0	1	0	(-5)/4	600	$\boxed{800/3}$
8	7/4	0	3/4	0	0	0	0	1	(-3)/4	1440	5760/7
2	3/4	1	3/4	0	0	0	0	0	1/4	240	320
Δ	3/2	0	1/2	0	0	0	0	0	(-5)/2	z-2400	

Variable entrante: x_1
Variable sortante: x_7
Pivot: 9/4.

On divise la ligne correspondant au pivot par le pivot 9/4, ce qui donne

B \ HB	1	·	3	·	·	·	·	·	9	C
4	1/4	0	(-7)/4	1	0	0	0	0	(-5)/4	875
5	(-7)/4	0	1/4	0	1	0	0	0	(-5)/4	600
6	2	0	2	0	0	1	0	0	-1	840
7	1	0	(-1)/3	0	0	0	4/9	0	(-5)/9	800/3
8	7/4	0	3/4	0	0	0	0	1	(-3)/4	1440
2	3/4	1	3/4	0	0	0	0	0	1/4	240
Δ	3/2	0	1/2	0	0	0	0	0	(-5)/2	z-2400

Tableau (2):

B \ HB	·	·	3	·	·	·	7	·	9	C
4	0	0	(-5)/3	1	0	0	(-1)/9	0	(-10)/9	2425/3
5	0	0	(-1)/3	0	1	0	7/9	0	(-20)/9	3200/3
6	0	0	8/3	0	0	1	(-8)/3	0	1/9	920/3
1	1	0	(-1)/3	0	0	0	4/9	0	(-5)/9	800/3
8	0	0	19/2	0	0	0	-7/9	1	2/9	2920/3
2	0	1	1	0	0	0	(-1)/3	0	2/3	40
Δ	0	0	1	0	0	0	(-2)/3	0	(-5)/3	z-2800

La deuxième itération nous permet d'atteindre la solution de base extrême

$$x_1 = 800/3,\ x_2 = 40,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2425/3,\ x_5 = 3200/3,$$

$$x_6 = 920/3,\ x_7 = 0,\ x_8 = 2920/3,\ x_9 = 0$$

Troisième itération:

B \ HB	·	·	3	·	·	·	7	·	9	C	R
4	0	0	(-5)/3	1	0	0	(-1)/9	0	(-10)/9	2425/3	-485
5	0	0	(-1)/3	0	1	0	7/9	0	(-20)/9	3200/3	-3200
6	0	0	8/3	0	0	1	(-8)/3	0	1/9	920/3	115
1	1	0	(-1)/3	0	0	0	4/9	0	(-5)/9	800/3	-800
8	0	0	19/2	0	0	0	-7/9	1	2/9	2920/3	5840/57
2	0	1	1	0	0	0	(-1)/3	0	2/3	40	$\boxed{40}$
Δ	0	0	1	0	0	0	(-2)/3	0	(-5)/3	z-2800	

Variable entrante: x_3
Variable sortante: x_2
Pivot: 1.

Le pivot est égal à 1, donc nous n'avons pas à faire de division.

B \ HB	·	·	3	·	·	·	7	·	9	C
4	0	0	(-5)/3	1	0	0	(-1)/9	0	(-10)/9	2425/3
5	0	0	(-1)/3	0	1	0	7/9	0	(-20)/9	3200/3
6	0	0	8/3	0	0	1	(-8)/3	0	1/9	920/3
1	1	0	(-1)/3	0	0	0	4/9	0	(-5)/9	800/3
8	0	0	19/2	0	0	0	-7/9	1	2/9	2920/3
2	0	1	1	0	0	0	(-1)/3	0	2/3	40
Δ	0	0	1	0	0	0	(-2)/3	0	(-5)/3	z-2800

On élimine x_3 des lignes 2,3,4,5,6 et 8.

B \ HB	·	2	·	·	·	·	7	·	9	C
4	0	5/3	0	1	0	0	(-2)/3	0	0	875
5	0	1/3	0	0	1	0	2/3	0	-2	1080
6	0	(-8)/3	0	0	0	1	(-16)/9	0	(-5)/3	200
1	1/3	0	0	0	0	0	1/3	0	(-7)/9	280
8	0	(-19)/2	0	0	0	0	43/18	1	(-55)/9	1780/3
3	0	1	1	0	0	0	(-1)/3	0	2/3	40
Δ	0	-1	0	0	0	0	(-1)/3	0	(-7)/3	z-2840

On constate que tous les coefficients sur la ligne Δ sont négatifs, on arrète les itérations et donc on a atteint la solution optimale du programme standard. Elle correspond à

$$x_4 = 875,\ x_5 = 1080,\ x_6 = 200,\ x_1 = 280,\ x_8 = 1780/3,\ x_3 = 40;$$

$$x_2 = 0,\ x_7 = 0,\ x_9 = 0.$$

La solution optimale du programme cononique est donc

$$x_1^* = 280,\ x_2^* = 0,\ x_3^* = 40.$$

La valeur maximale de la fonction économique est : $z^* = 2840$. Le programme pour l'entreprise est donc

$$(280; 0; 40)$$

2- Puisque à l'optimum on a $x_7 = 0,\ x_9 = 0$, alors l'entreprise exploite entièrement ses ressources en main-d'oeuvre ainsi que le départment de contrôle. Les autres ressources ne sont pas entièrement exploitées.

Exercice 2

Le programme cononique (I) est donné par

$$(\mathrm{I}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } [3\ x_1 + 6\ x_2 -\ x_3 + x_4] \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + (1/2)x_2 + 2x_3 \leq 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 \leq 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \text{Programme standard}$$

Le programme standard (I') est donné par

$$(\mathrm{I'}) \left\{ \begin{array}{l} \text{Max } [3\ x_1 + 6\ x_2 -\ x_3 + x_4 + 0\ x_5 + 0\ x_6 + 0\ x_7] \\ \text{s.c.} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + (1/2)x_2 + 2x_3 + x_5 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + x_7 = 4 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0, \\ \ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \qquad \text{Programme standard}$$

Tableau (0):

B \ HB	1	2	3	4	·	·	·	C
5	1	1/2	1	0	1	0	0	2
6	1	3	1	-1	0	1	0	3
7	2	-1	-1	3	0	0	1	4
Δ	3	6	-1	1	0	0	0	z

Première itération:

B \ HB	1	2	3	4	·	·	·	C	R
5	1	1/2	1	0	1	0	0	2	4
6	1	$\boxed{3}$	1	-1	0	1	0	3	$\boxed{1}$
7	2	-1	-1	3	0	0	1	4	-4
Δ	3	$\boxed{6}$	-1	1	0	0	0	z	

Variable entrante: x_2
Variable sortante: x_6
Pivot: 3.

On divise la ligne du pivot par le pivot 3. On obtient

B \ HB	1	2	3	4	·	·	·	C
5	1	1/2	1	0	1	0	0	2
6	1/3	$\boxed{1}$	1/3	-1/3	0	1/3	0	1
7	2	-1	-1	3	0	0	1	4
Δ	3	6	-1	1	0	0	0	z

Tableau (1):

B \ HB	1	·	3	4	·	6	·	C
5	5/6	0	5/6	1/6	1	(-1)/6	0	3/2
2	1/3	1	1/3	-1/3	0	1/3	0	1
7	7/3	0	(-2)/3	8/3	0	1/3	1	5
Δ	1	0	-3	3	0	-2	0	z-6

La première itération nous amène donc à la solution de base

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 3/2,\ x_6 = 0,\ x_7 = 5.$$

La valeur de la fonction économique pour cette solution de base: $z = 6$.

Deuxième itération:

B \ HB	1	·	3	4	·	6	·	C	R
5	5/6	0	5/6	1/6	1	(-1)/6	0	3/2	9
2	1/3	1	1/3	-1/3	0	1/3	0	1	-3
7	7/3	0	(-2)/3	$\boxed{8/3}$	0	1/3	1	5	$\boxed{15/8}$
Δ	1	0	-3	$\boxed{3}$	0	-2	0	z-6	

Variable entrante: x_4
Variable sortante: x_7
Pivot: 8/3.

On divise la ligne du pivot par le pivot 8/3. On obtient

B \ HB	1	·	3	4	·	6	·	C
5	5/6	0	5/6	1/6	1	(-1)/6	0	3/2
2	1/3	1	1/3	-1/3	0	1/3	0	1
7	7/8	0	(-1)/4	$\boxed{1}$	0	1/8	3/8	15/8
Δ	1	0	-3	$\boxed{3}$	0	-2	0	z-6

Tableau (2):

B \ HB	1	·	3	·	·	6	7	C
5	11/6	0	7/8	0	1	(-3)/16	(-1)/16	19/16
2	5/8	1	1/4	0	0	3/8	1/8	13/8
4	7/8	0	(-1)/4	1	0	1/8	3/8	15/8
Δ	(-13)/8	0	(-9)/4	0	0	(-19/8)	(-9/8)	z-(93/8)

On observe que tous les coefficients sur la ligne Δ sont négatifs, donc on arrète les itérations et par suite nous avons atteint la solution optimale du programme standard:

$$x_1 = 0,\ x_3 = 0,\ x_6 = 0,\ x_7 = 0,\ x_5 = 19/16,\ x_2 = 13/8,\ x_4 = 15/8.$$

La solution optimale du programme canonique est donc

$$x_1^* = 0,\ x_2^* = 13/8,\ x_3^* = 0,\ x_4^* = 15/8.$$

La valeur maximale de z est donc $z^* = 93/8$.

Exercice 3

Le programme linéaire considéré dans cet exercice est le suivant:

$$(\text{I}) \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Min } [Z = 0.4x_1 + 0.5x_2] \\ \text{s.c.} \left\{\begin{array}{l} 0.3x_1 + 0.1x_2 \leq 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \text{Programme canonique}$$

En introduisant les variables d'écarts, le programme standard (I') est comme suite

$$(\text{I'}) \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Min } [Z = 0.4x_1 + 0.5x_2] \\ \text{s.c.} \left\{\begin{array}{l} 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 = 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ x_4 \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \qquad \text{Programme standard}$$

Pour le programme standard (I'), comme on le voit bien, on ne peut pas déterminer facilement une solution de base de départ. En effet, si on prend $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$, alors les contraintes ne sont pas vérifées; plus précisement la deuxième équation n'est pas verifée et la troisième équation nous donne une valeur de $x_4 = -6$ qui est négative. Donc on doit faire intervenir des variables artificielles x_5 et x_6 au niveau des équations où il y a un problème de vérification des contraintes, ç.a.d. les équations 2 et 3. Les variables artificielles doivent intervenir dans la fonction économique avec un coefficient M très élevé (dans le but que une fois une variable artificielle passe hors- base elle ne reviendra plus jamais dans la base, et donc à l'optimum elle sera nulle et comme ça on n'aurra pas modifié le programme linéaire étudié). Le programme linéaire devient

$$(\text{II'}) \quad \left\{\begin{array}{l} \text{Min } [Z = 0.4x_1 + 0.5x_2 + 0x_3 + 0x_4 + Mx_5 + Mx_6] \\ \text{s.c.} \left\{\begin{array}{l} 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 + x_5 = 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_4 + x_6 = 6 \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0, \ x_3 \geq 0, \ x_4 \geq 0, \ x_5 \geq 0, \ x_6 \geq 0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

Considérons le système

$$(S_0) \quad \left\{\begin{array}{l} 0.3x_1 + 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 + x_5 = 6 \\ 0.6x_1 + 0.4x_2 - x_4 + x_6 = 6. \end{array}\right.$$

Tableau initial (0) et Calcul des taux marginaux de substitution (TMS):

Variables hors-base: x_1, x_2, x_4

Variables dans la base: x_3, x_5, x_6.

Le calcul du TMS pour chaque variable hors-base se base sur le principe suivant: On calcul la diffrérence entre ce que coûte une unité d'une variable hors-base et ce que coûte son équivalent en unités de variables dans la base.

- TMS pour x_1: On prend dans (S_0) les variables $x_2 = 0$ et $x_4 = 0$, on obtient

$$(S_0) \quad \left\{\begin{array}{l} 0.3x_1 + x_3 = 2.7 \\ 0.5x_1 + x_5 = 6 \\ 0.6x_1 + x_6 = 6 \end{array}\right.$$

Par conséquent, faire <u>augmenter</u> x_1 de une unité est équivalent à faire <u>diminuer</u> x_3 de 0.3 unité, x_5 de 0.5 unité et x_6 de 0.6 unité.
D'après la fonction économique, 1 unité de x_1 coûte 0.4; 0.3 unité de x_3 coûte $0 \times 0.3 = 0$; 0.5 unité de x_5 coûte $0.5 \times M$ et 0.6 unité de x_6 coûte $0.6 \times M$. Par suite,

$$\text{Le TMS pour } x_1 \text{ est égal à } (0.4 - 1.1M).$$

- <u>TMS pour x_2</u>: On prend dans (S_0) les variables $x_2 = 1$ et $x_4 = 0$, on obtient

$$(S_0) \quad \begin{cases} 0.1x_2 + x_3 = 2.7 \\ 0.5x_2 + x_5 = 6 \\ 0.4x_2 + x_6 = 6 \end{cases}$$

Par conséquent, faire <u>augmenter</u> x_2 de une unité est équivalent à faire <u>diminuer</u> x_3 de 0.1 unité, x_5 de 0.5 unité et x_6 de 0.4 unité.
D'après la fonction économique, 1 unité de x_2 coûte 0.5; 0.3 unité de x_3 coûte $0 \times 0.1 = 0$; 0.5 unité de x_5 coûte $0.5 \times M$ et 0.4 unité de x_6 coûte $0.4 \times M$. Par suite,

$$\text{Le TMS pour } x_2 \text{ est égal à } (0.5 - 0.9M).$$

- <u>TMS pour x_4</u>: En prenant $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ dans (S_0), on obtient qu'une <u>augmentation</u> de x_4 de une unité lui correspond une <u>augmentation</u> de x_6 de une unité. Par suite

$$\text{Le TMS pour } x_3 \text{ est égal à } (0 - (-M)) = M.$$

$(-M)$ provient du faite qu'une augmentation de 1 unité dans x_4 lui correspond une augmentation dans x_6, à la différence des autres variables où une aumentation dans la valeur de la variable est suivie par une dimunition dans celle des autres variables équivalentes.

Tableau (0):

B \ HB	1	2	·	4	·	·	B
3	0.3	0.1	1	0	0	0	2.7
5	0.5	0.5	0	0	1	0	6
6	0.6	0.4	0	-1	0	1	6
C	0.4	0.5	0	0	M	M	
Δ (TMS)	(0.4-1.1 M)	(0.5-0.9 M)	0	M	0	0	- 12M

La solution de base de depart est

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2.7,\ x_4 = 0,\ x_5 = 6,\ x_6 = 6.$$

<u>*Première itération*</u>:

B \ HB	1	2	·	4	·	·	B	R
3	$\boxed{0.3}$	0.1	1	0	0	0	2.7	(2.7)/(0.3)= $\boxed{9}$
5	0.5	0.5	0	0	1	0	6	6/(0.5)=12
6	0.6	0.4	0	-1	0	1	6	6/(0.6)=10
C	0.4	0.5	0	0	M	M		
Δ (TMS)	$\boxed{\text{(0.4-1.1 M)}}$	(0.5-0.9 M)	0	M	0	0	- 12M	

Variable entrante: x_1
Variable sortante: x_3
Pivot: 0.3
On divise la ligne du pivot par le pivot 0.3, on obtient (on élimine la ligne correspondant à C)

B \ HB	1	2	·	4	·	·	B
3	$\boxed{1}$	1/3	10/3	0	0	0	9
5	0.5	0.5	0	0	1	0	6
6	0.6	0.4	0	-1	0	1	6
Δ (TMS)	$\boxed{\text{(0.4-1.1 M)}}$	(0.5-0.9 M)	0	M	0	0	- 12M

On élimine x_1 des lignes 2,3 et 4. On obtient le tableau 1 suivant:
Tableau 1

B \ HB	·	2	3	4	·	·	B
1	1	1/3	10/3	0	0	0	9
5	0	1/3	-5/3	0	1	0	1.5
6	0	0.2	-2	-1	0	1	0.6
Δ (TMS)	0	(11/30)-(16/30) M	(-4/3)+(11/3)M	M	0	0	-2.1M-3.6

La première itération nous permet d'atteindre la solution de base extrême

$$x_1 = 9,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 1.5,\ x_6 = 0.6$$

qui constituera la solution de base de départ pour atteindre la prochaine solution de base extrême (ou prochain sommet).
Deuxième itération:

B \ HB	·	2	3	4	·	·	B	R
1	1	1/3	10/3	0	0	0	9	27
5	0	1/3	-5/3	0	1	0	1.5	4.5
6	0	$\boxed{0.2}$	-2	-1	0	1	0.6	$\boxed{3}$
Δ (TMS)	0	$\boxed{\text{(11/30)-(16/30) M}}$	(-4/3)+(11/3)M	M	0	0	-2.1M-3.6	

Variable entrante: x_2
Variable sortante: x_6
Pivot: 0.2

On divise la ligne du pivot par le pivot 1/3. On obtient

B \ HB	·	2	3	4	·	·	B
1	1	1/3	10/3	0	0	0	9
5	0	1/3	-5/3	0	1	0	1.5
6	0	$\boxed{1}$	-10	-5	0	5	3
Δ (TMS)	0	$\boxed{\text{(11/30)-(16/30) M}}$	(-4/3)+(11/3)M	M	0	0	-2.1M-3.6

On élimine x_2 des lignes 1, 2 et 4. On obtient

B \ HB	·	·	3	4	·	6	B
1	1	0	20/3	5/3	0	(-5)/3	8
5	0	0	5/3	5/3	1	(-5)/3	0.5
2	0	1	-10	-5	0	5	3
Δ (TMS)	0	0	(7/3)-(5/3)M	-(5/3)M+(11/6)	0	(8/3)M-(11/6)	-0.5M-4.7

La variable artificielle x_6 est maintenant hors-base et comme on a choisi M très grand alors elle ne passera plus jamais dans la base. Par suite on peut supprimer la colonne correspondant à cette variable. Le tableau précédent devient le tableau 2 de départ pour la troisième itération:
Tableau 2

B \ HB	·	·	3	4	·	B
1	1	0	20/3	5/3	0	8
5	0	0	5/3	5/3	1	0.5
2	0	1	-10	-5	0	3
Δ (TMS)	0	0	(7/3)-(5/3)M	-(5/3)M+(11/6)	0	-0.5M-4.7

La deuxième itération nous permet d'atteindre la solution de base extrême

$$x_1 = 8,\ x_2 = 3,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0.5$$

Troisième itération:

B \ HB	·	·	3	4	·	B	R
1	1	0	20/3	5/3	0	8	4.8
5	0	0	5/3	$\boxed{5/3}$	1	0.5	$\boxed{0.3}$
2	0	1	-10	-5	0	3	-0.6
Δ (TMS)	0	0	(7/3)-(5/3)M	$\boxed{-(5/3)M+(11/6)}$	0	-0.5M-4.7	

Variable entrante: x_4
Variable sortante: x_5
Pivot: 5/3.

On divise la ligne du pivot par le pivot 5/3. On obtient

B \ HB	·	·	3	·	5	B
1	1	0	5	0	-1	7.5
4	0	0	1	1	3/5	0.3
2	0	1	-5	0	3	4.5
Δ (TMS)	0	0	0.5	0	M-1.1	-5.25

Comme M est choisi très grand, alors tous les coefficients sur la ligne Δ sont positifs. Par conséquent, on arrête les itérations et donc on a atteint la solution optimale. Elle correspond à

$$x_1^* = 7.5 \quad \text{et } x_2^* = 4.5$$

La valeur minimale de z est $z^* = 5.25$

Exercice 4

Le programme linéaire considéré dans cet exercice est le suivant:

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} \text{Min } [Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3] \\ \text{s.c. } \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8 \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{Programme canonique}$$

En introduisant les variables d'écarts, le programme standard (I') est comme suite

$$(\mathrm{I'})\quad \begin{cases} \text{Min } [Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5] \\ \text{s.c. } \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 = 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0 \end{cases} \end{cases} \qquad \text{Programme standard}$$

D'après le même argument que celui dans l'exercice précedent, on sera ammener à introduire des variables artificielles x_6 et x_7 pour pouvoir déterminer une solution de base de départ. Ces variables seront affectées d'un coefficient M dans la fonction économique avec M très grand. On considère alors le progamme (II') suivant

$$(\mathrm{II'})\quad \begin{cases} \text{Min } [Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + Mx_6 + Mx_7] \\ \text{s.c. } \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_5 + x_7 = 6 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0,\ x_6 \geq 0,\ x_7 \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

Tableau initial (0):

Le calcul des taux marginaux de substitution (TMS) se fait comme dans l'exercice précedent (voir aussi votre cours).

B \ HB	1	2	3	4	5	·	·	B
6	1	4	2	-1	0	1	0	8
7	3	2	0	0	-1	0	1	6
C	2	3	1	0	0	M	M	
Δ (TMS)	(2-4M)	(3-6M)	(1-2M)	M	M	0	0	- 14M

La solution de base de depart est

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 8,\ x_7 = 6.$$

Première itération:

B \ HB	1	2	3	4	5	·	·	B	R
6	1	$\boxed{4}$	2	-1	0	1	0	8	$\boxed{8/4=2}$
7	3	2	0	0	-1	0	1	6	6/2=3
C	2	3	1	0	0	M	M		
Δ (TMS)	(2-4M)	$\boxed{(3-6M)}$	(1-2M)	M	M	0	0	- 14M	

Variable entrante: x_2
Variable sortante: x_6
Pivot: 4
On divise la ligne du pivot par le pivot 4 et on élimine la colonne R et la ligne C. On obtient

B \ HB	1	2	3	4	5	·	·	B
6	1/4	$\boxed{1}$	1/2	-1/4	0	1/4	0	2
7	3	2	0	0	-1	0	1	6
Δ (TMS)	(2-4M)	$\boxed{(3-6M)}$	(1-2M)	M	M	0	0	- 14M

On élimine ensuite x_1 des lignes 2 et 3.

B \ HB	1	·	3	4	5	6	·	B
2	1/4	1	1/2	-1/4	0	1/4	0	2
7	5/2	0	-1	1/2	-1	-1/2	1	2
Δ (TMS)	(5/4)-(5/2)M	0	(-1/2)+M	(3/4)-(1/2)M	M	(3/2)M-(3/4)	0	-6- 2M

La variable artificielle x_6 est maintenant hors-base et comme on a choisi M très grand alors elle ne passera plus jamais dans la base. Par suite on peut supprimer la colonne correspondant à cette variable. Le tableau précédent devient le tableau 1 de départ pour la deuxième itération:
<u>Tableau 1</u>:

B \ HB	1	·	3	4	5	·	B
2	1/4	1	1/2	-1/4	0	0	2
7	5/2	0	-1	1/2	-1	1	2
Δ (TMS)	(5/4)-(5/2)M	0	(-1/2)+M	(3/4)-(1/2)M	M	0	-6- 2M

La première itération nous permet d'atteindre la solution de base extrême

$$x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_7 = 2$$

<u>*Deuxième itération*</u>:

B \ HB	1	·	3	4	5	·	B	R
2	1/4	1	1/2	-1/4	0	0	2	8
7	$\boxed{5/2}$	0	-1	1/2	-1	1	2	$\boxed{4/5=0.8}$
Δ (TMS)	$\boxed{(5/4)-(5/2)M}$	0	(-1/2)+M	(3/4)-(1/2)M	M	0	-6- 2M	

Variable entrante: x_1
Variable sortante: x_7
Pivot: 5/2
On divise la ligne du pivot par le pivot 5/2 et on élimine la colonne R. On obtient

B \ HB	·	·	3	4	5	7	B
2	1/4	1	1/2	-1/4	0	0	2
1	1	0	-2/5	1/5	-2/5	2/5	4/5
Δ (TMS)	$\boxed{(5/4)-(5/2)M}$	0	(-1/2)+M	(3/4)-(1/2)M	M	0	-6- 2M

Par la suite, on élimine x_1 des équations 1 et 3.

B \ HB	·	·	3	4	5	7	B
2	0	1	3/5	-3/10	1/10	-1/10	9/5
1	1	0	-2/5	1/5	-2/5	2/5	4/5
Δ (TMS)	0	0	0	1/2	1/2	M-(1/2)	-7

On constate alors que tous les coefficients sur la ligne Δ sont positif, par suite on arrète les itérations et donc on a atteint la solution optimale:

$$x_1^* = 4/5,\ x_2^* = 9/5,\ x_3^* = 0$$

La valeur minimale de z est $z^* = 7$.