Microéconomie II

Chapitre 1: Production de la firme

Pr. Moad El kharrim

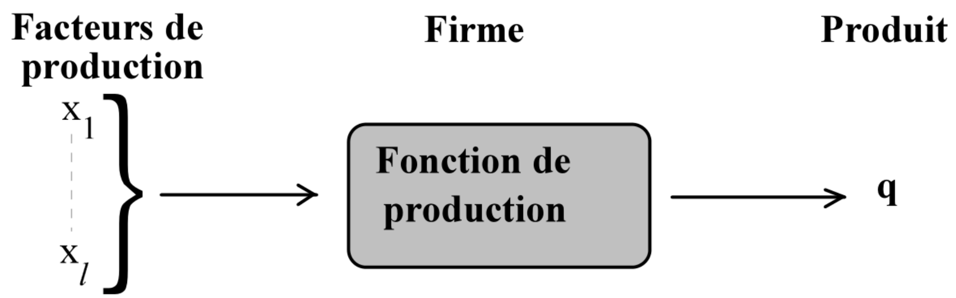
Université AbdelMalek Essaâdi, FSJES - Tétouan

Année Universitaire 2017-2018

Sommaire du chapitre

Introduction

La firme se distingue du consommateur par le fait qu'elle achète des facteurs de production pour les transformer en d'autres biens et services grâce à sa technologie. Elle est donc du coté de la demande sur les marchés des facteurs de production et du coté de l'offre sur le marché du bien final qu'elle produit.



La firme en tant que boîte noire

Facteurs de Production

On peut distinguer les différents facteurs de production selon plusieurs critères;

1. La provenance des facteurs utilisés par la firme permet de distinguer entre ***les matières premières*** et ***les consommations intermédiaires***.
2. Une seconde distinction peut être introduite en considérant les possibilités de modification des quantités utilisées; c-à-d des ***facteurs fixes*** et des ***facteurs variables***.

On suppose en général que les équipements lourds comme les bâtiments ou les machines d'une usine (**le capital** de la firme) et la terre d'une exploitation agricole correspondent à des facteurs fixes, tandis que la main-d'oeuvre (**le travail**) et les matières premières sont des facteurs variables.

3. La dernière distinction concerne la manière dont on peut combiner les différents facteurs pendant le processus de production, c-à-d des facteurs qui sont ***substituables*** et des facteurs qui sont ***complémentaires***.

Fonction de production : la firme en tant que boîte noire

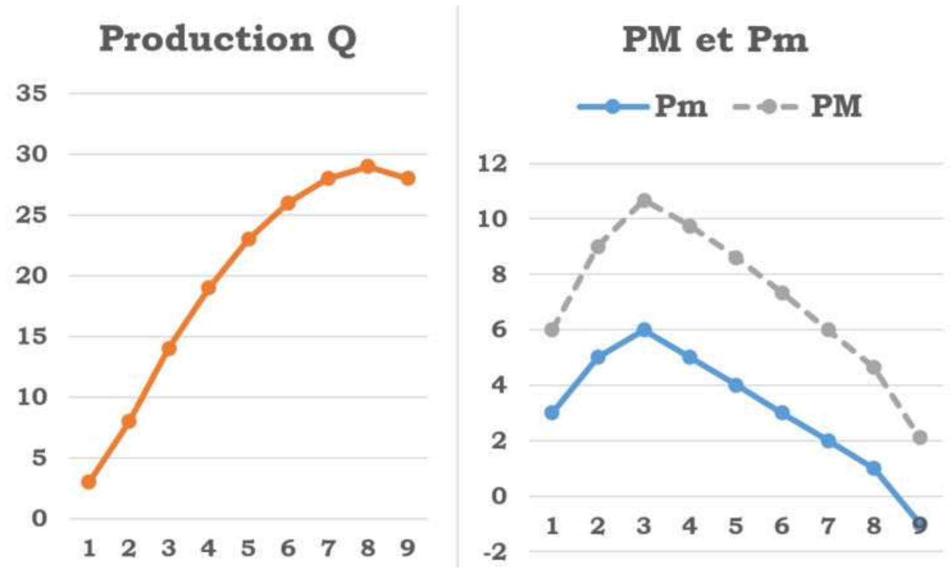
Si l'on étudie l'utilisation par une firme des différentes quantités de facteurs de production (**inputs**) et les niveaux correspondant de sa production, on obtient une relation qui représente les possibilités de production de cette firme. On a la fonction de production :

$$q = f(x_1, ..., x_l)$$

Une fonction de production résume toutes les caractéristiques technologiques et organisationnelles de la firme. Elle peut correspondre par conséquent à une multitude de firmes avec des caractéristiques internes très diverses.

Exemple:

Travail L	Production Q	Pm	PM
0	0	...	...
1	3	3	3
2	8	5	4
3	14	6	4.67
4	19	5	4.75
5	23	4	4.6
6	26	3	4.33
7	28	2	4
8	29	1	3.63
9	28	-1	3.11



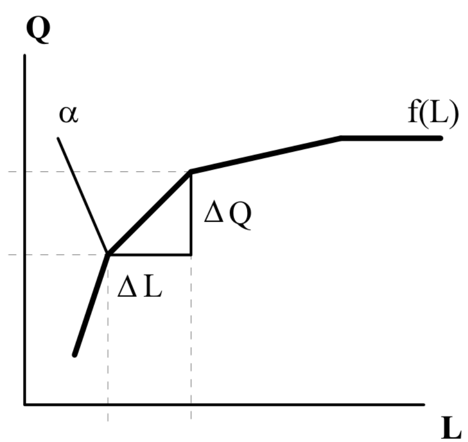
Exemple de production agricole

On observe que sans facteur variable il n'y a pas de production et que la production totale est croissante avec la quantité de travail utilisée.

- Il est aussi possible de caractériser quelle quantité d'output on produit en moyenne pour chaque unité d'input. Pour ce faire on utilise le concept de productivité moyenne:

$$PM\,(L) = \frac{f\,(L)}{L}$$

On observe que la productivité moyenne **augmente** d'abord et **baisse** légèrement ensuite.



$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\Delta Q}{\Delta L} = \text{Pm}$$

Pente de la fonction de production et Pm

La **décroissance** de la productivité marginale correspond donc à la **décroissance de la pente** de la fonction de production.

Une formulation plus générale

Prenons une entreprise qui produit un bien en quantité $\boldsymbol{q}$. Elle utilise $\boldsymbol{m}$ types de facteurs variables et $\boldsymbol{n}$ types de facteurs fixes ($\boldsymbol{m+n=l}$, le nombre de bien dans l'économie).

$$q = f\left(\underbrace{x_1, x_2, \ldots.., x_m}_{\textbf{Facteurs variables}}, \underbrace{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots.., x_{m+n}}_{\textbf{Facteurs fixes}}\right)$$

C'est une fonction à $\boldsymbol{l}$ variables qui résume toutes les caractéristiques techniques et organisationnelles de la firme.

$$f : \begin{cases} R_+^l \longrightarrow R_+ \\ (x_1, x_2, \ldots, x_l) \longrightarrow q \end{cases}$$

- **à court terme** alors la firme peut ne pas modifier les quantités de facteurs fixes qu'elle utilise $\Rightarrow \boldsymbol{x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots.., x_{m+n}}$ sont fixes dans la fonction de production;
- **à long terme**, la firme peut aussi modifier les facteurs fixes (*Exemple*: acquérir de nouveaux bâtiments, acheter de nouveaux équipements.

En générale: Nous allons noter le vecteur d'inputs de la firme sous la forme $x = (x_1, x_2, \ldots.., x_l)$ avec $\boldsymbol{l{=}m}$ à court terme et $\boldsymbol{l{=}m{+}n}$ à long terme.

Exemple: Deux facteurs de production (x_1, x_2).

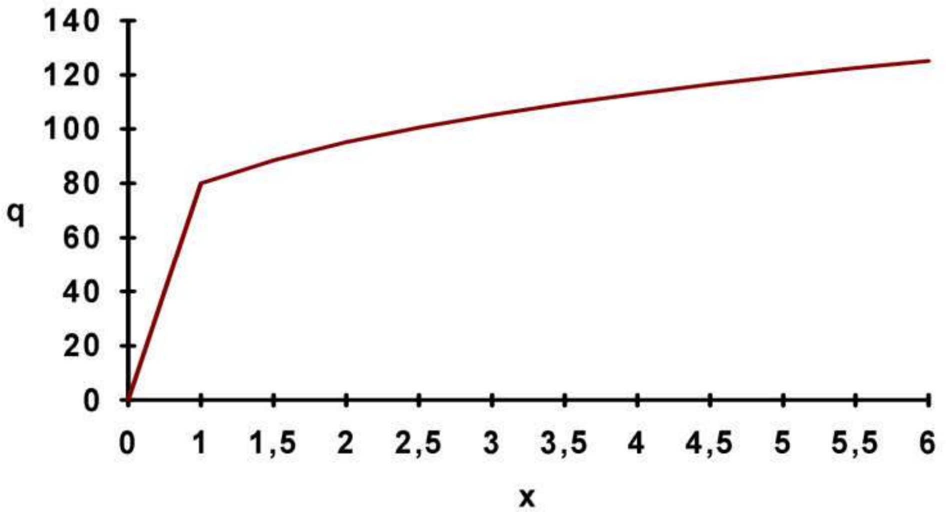
On a $f(x_1, x_2) = 10x_1^{1/4}x_2^{3/4}$

Si à court terme x_2 est un facteur fixe avec $x_2 = 16$, la fonction du production devient:

$$q = f(x_1, \bar{x}_2 = 16) = 10x_1^{1/4}(8) = 80x_1^{1/4}$$

Evolution de la productivité totale du facteur 1 pour $x_2 = 16$

x_1	0	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
q	0	80	88,53	95,14	100,6	105,3	109,4	113,1	116,52	119,63	122,5	125,2



Evolution de la productivité totale du facteur 1

Productivité moyenne d'un facteur de production

la productivité moyenne mesure la quantité d'output que l'on peut attribuer en moyenne à chaque unité d'un facteur de production : Productivité moyenne du facteur $\boldsymbol{h}$

$$PM_h(x) = \frac{f(x)}{x_h} = \frac{Q}{x_h}$$

Exemple: Avec la fonction de production précédente nous obtenons :

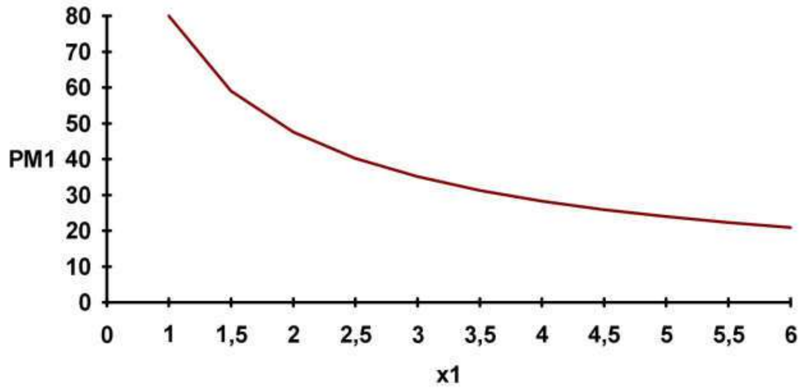
$Q = f(x_1, x_2) = 10x_1^{1/4}x_2^{3/4}$

$$PM_1(x) = \frac{f(x)}{x_1} = 10x_1^{-3/4}x_2^{3/4} = 10\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{3/4}$$

$$PM_2(x) = \frac{f(x)}{x_2} = 10x_1^{1/4}x_2^{-1/4} = 10\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{1/4}$$

Pour $x_2 = 16$ nous obtenons $PM_1 = \dfrac{80}{x_1^{3/4}}$:

x_1	0	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
PM_1		80	59	47,6	40,2	35,1	31,3	28,3	25,9	24	22,3	20,9



Evolution de la productivité moyenne du facteur 1

Productivité marginale d'un facteur de production

Dans notre cadre où les biens sont divisibles, nous pouvons considérer les variations aussi petites que nous désirons. La variation de la production qui en résulte peut être mesurée par :

$$\Delta f = f\left(x_1 + \Delta x_1, \bar{x}_2\right) - f\left(x_1, \bar{x}_2\right)$$

La productivité marginale d'un input $\boldsymbol{h}$ correspond donc à la dérivée partielle de la fonction de production par rapport à cette variable.

$$Pm_h\left(x\right) = \lim_{\Delta x_h \longrightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_h} = \frac{\partial f}{\partial x_h}$$

Rappel de la dérivée: $\left(x^k\right)' = kx^{k-1}$

Exemple: Pour notre fonction de production nous avons:

$Q = f\left(x_1, x_2\right) = 10x_1^{1/4}x_2^{3/4}$

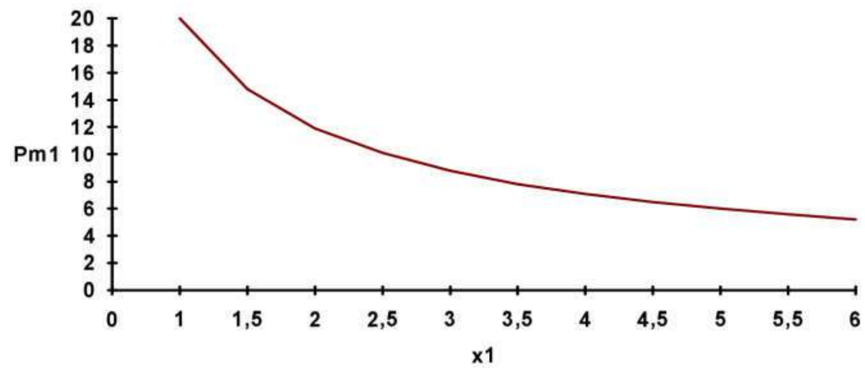
$$Pm_1\left(x\right) = \frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_1} = 10\frac{1}{4}x_1^{-3/4}x_2^{3/4} = 2.5x_1^{-3/4}x_2^{3/4}$$

$$Pm_2\left(x\right) = \frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_2} = 10\frac{3}{4}x_1^{1/4}x_2^{-1/4} = 7.5x_1^{1/4}x_2^{-1/4}$$

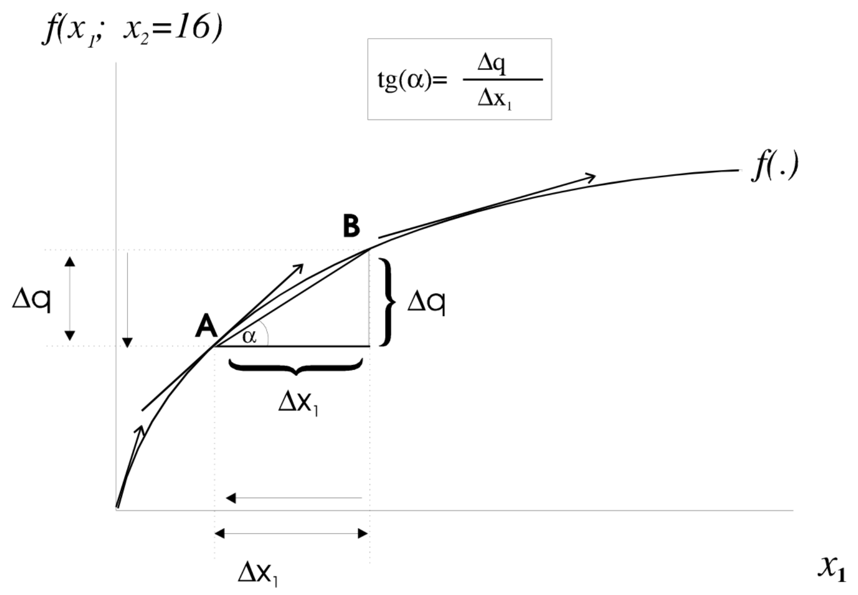
Pour $x_2 = 16$ nous obtenons $Pm_1 = 2.5 \times 8 \times x_1^{-3/4} = 20x_1^{-3/4}$

x_1	0	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
Pm_1		20	14,8	11,9	10,1	8,8	7,8	7,1	6,5	6	5,6	5,2

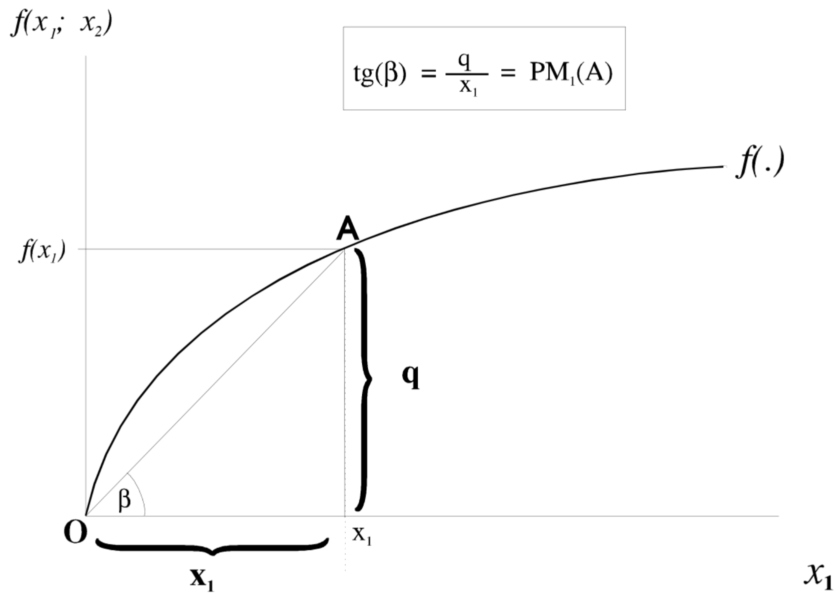
On observe que **la productivité marginale est décroissante uniformément**: chaque supplément de facteur 1 contribue de plus en plus faiblement à la production (étant donné la quantité de facteur 2). Néanmoins ces contributions restent positives:



Evolution de la productivité marginale du facteur 1



Pente de la tangente et productivité marginale



Représentation graphique de la productivité moyenne

Rendements d'échelle

Il serait intéressant de connaître comment la production est modifiée si l'on augmente **tous les inputs** dans les mêmes proportions; si l'on double ou triple les quantités d'inputs utilisées.

- Si la production augmente moins que proportionnellement alors on parle des ***rendements d'échelle décroissants***.
- Si la production augmente exactement proportionnellement à l'augmentation du panier d'inputs alors on a des ***rendements d'échelle constants***.
- Si la production augmente plus que proportionnellement, alors on a des ***rendements d'échelle croissants***.

De manière générale, on peut considérer la multiplication par un facteur $\lambda > 1$ du panier d'input et la variation correspondante de l'output.

$f(\lambda x_1, ..., \lambda x_l) > \lambda f(x_1, ..., x_l) \Rightarrow$ Rendements d'échelle **croissants**

$f(\lambda x_1, ..., \lambda x_l) = \lambda f(x_1, ..., x_l) \Rightarrow$ Rendements d'échelle **constants**

$f(\lambda x_1, ..., \lambda x_l) < \lambda f(x_1, ..., x_l) \Rightarrow$ Rendements d'échelle **décroissants**

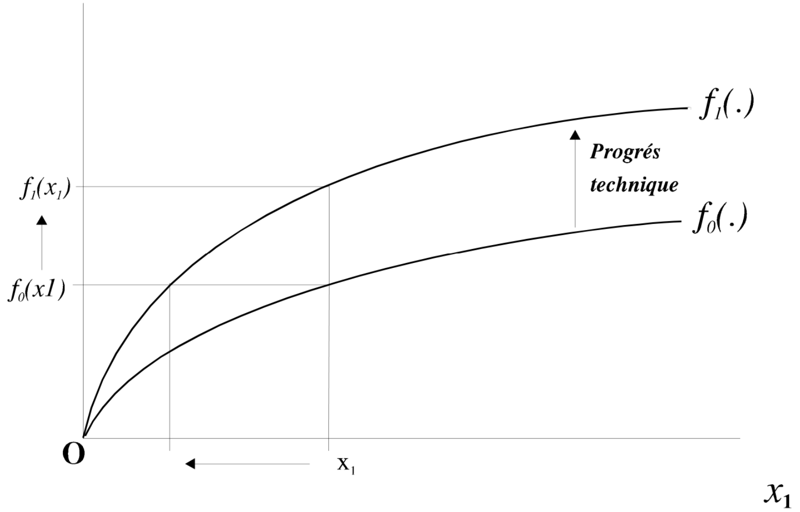
Exemple: Etudions les rendements d'échelle de notre fonction de production.

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = 10(\lambda x_1)^{1/4}(\lambda x_2)^{3/4} = 10\lambda^{(1/4+3/4)}x_1^{1/4}x_2^{3/4}$$

$$= \lambda f(x_1, x_2)$$

Il s'agit donc d'une fonction à rendements d'échelle constants.

Un phénomène de nature fondamentalement différente peut intervenir dans les rapports entre les inputs et l'output : **le progrès technique**.



Progrès technique et fonction de production

Isoquantes et Taux Marginal de Substitution Technique

Nous allons étudier plus en détail la relation entre les inputs dans un processus de production. Notre intérêt sera fixé sur la relation entre les combinaisons d'inputs qui permettent de produire le même niveau de production. Ces combinaisons seront représentées par le concept d'**isoquante** et la relation entre elles sera spécifiée par le **taux marginal de substitution technique (TMST)**.

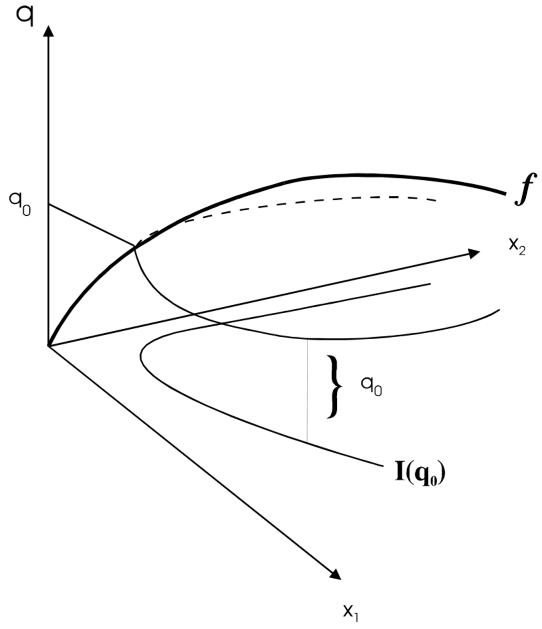
Les isoquantes

Prenons une technologie qui permet de produire un output à partir de deux inputs, 1 et 2. La fonction de production correspondante associe donc à chaque panier d'input un niveau maximal d'output :

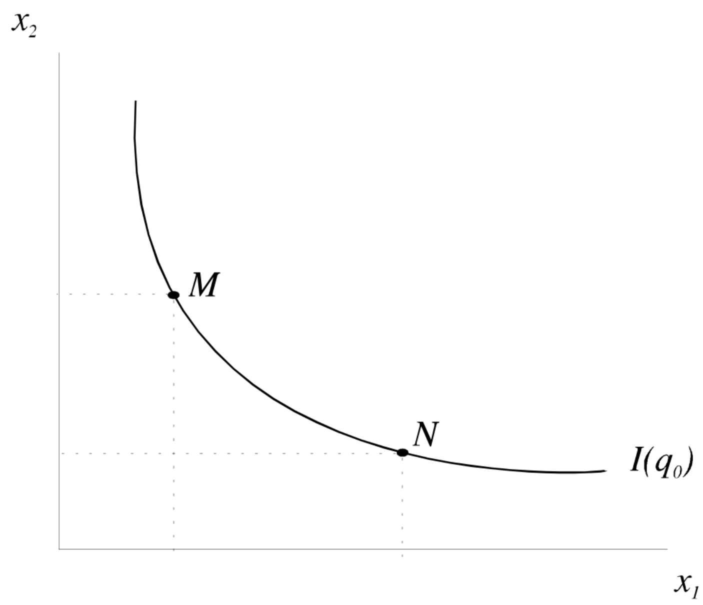
$$f : (x_1, x_2) \longmapsto q = f(x_1, x_2)$$

Nous nous intéressons maintenant à tous les paniers d'inputs qui permettent de produire un même niveau d'output q_0. **Ces paniers** forment un ensemble qui est défini par : $I(q_0) = \left\{(x_1, x_2) \in R_+^2 \mid f(x_1, x_2) = q_0\right\}$

Cet ensemble s'appelle une **isoquante** (iso=égalité, quante=quantité)

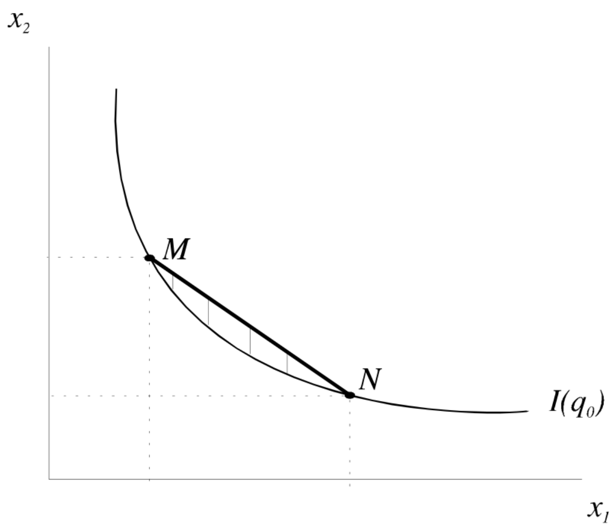


Une isoquante

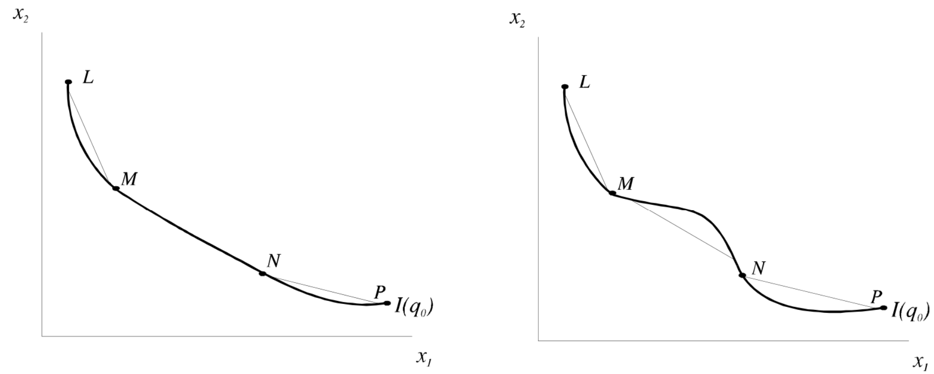


Une représentation plus commode des isoquantes

En effet on observe que si l'on dessine une corde entre **M** et **N**, tous les points appartenant à cette corde sont strictement au-dessus de l'isoquante. On dira alors que **l'isoquante est strictement convexe.**



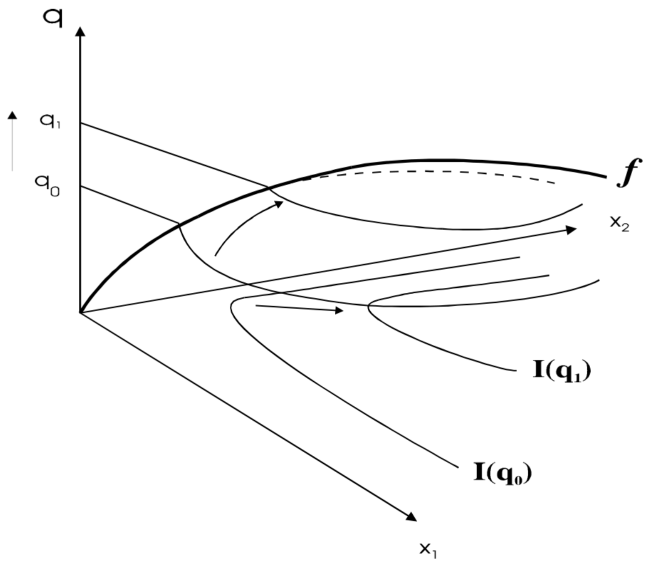
Convexité d'une isoquante



(a) **(b)**

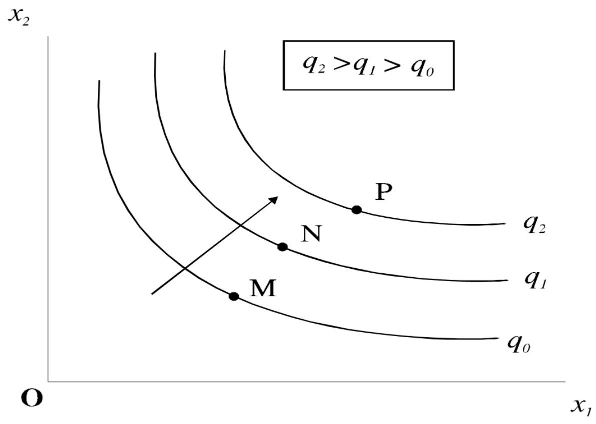
Isoquantes sans stricte convexité

L'utilisation des isoquantes nous permet aussi de représenter les différentes combinaisons qui conduisent à des niveaux différents de la production.



Niveaux de production et isoquantes

On observe donc que passer d'un niveau de production q_0 à un niveau de production q_1, plus élevé, conduit à se placer sur une isoquante plus éloignée de l'origine. Par conséquent pour les niveaux de production $q_0 < q_1 < q_2$, nous devons avoir la configuration suivante entre les isoquantes;



Isoquantes et niveaux de production dans l'espace des facteurs

Par conséquent, plus on s'éloigne de l'origine, plus le niveau de production correspondant est élevé. Nous avons alors:

$$f(M) < f(N) < f(P)$$

Exemple: Avec notre fonction de production, une isoquante correspondant à un niveau de production q est définie par la relation suivante:

$$I(q) = \left\{ (x_1, x_2) \in R_+^2 \mid f(x_1, x_2) = 10 x_1^{1/4} x_2^{3/4} = q \right\}$$
$$= \left\{ (x_1, x_2) \in R_+^2 \mid x_2 = q^{4/3} \frac{1}{x_1^{1/3}} \right\}$$

Il s'agit des courbes de type hyperbolique $(1/x)$ et donc **décroissantes et convexes**.

Taux Marginal de Substitution Technique (TMST)

Pour étudier les possibilités de **substitution** entre les facteurs de production partons du panier **N**. Si la firme veut passer de ce panier au panier **M**, elle doit donc remplacer une variation Δx_1 par une Δx_2, tout en gardant le même niveau de production, donc tout en restant sur la même isoquante.

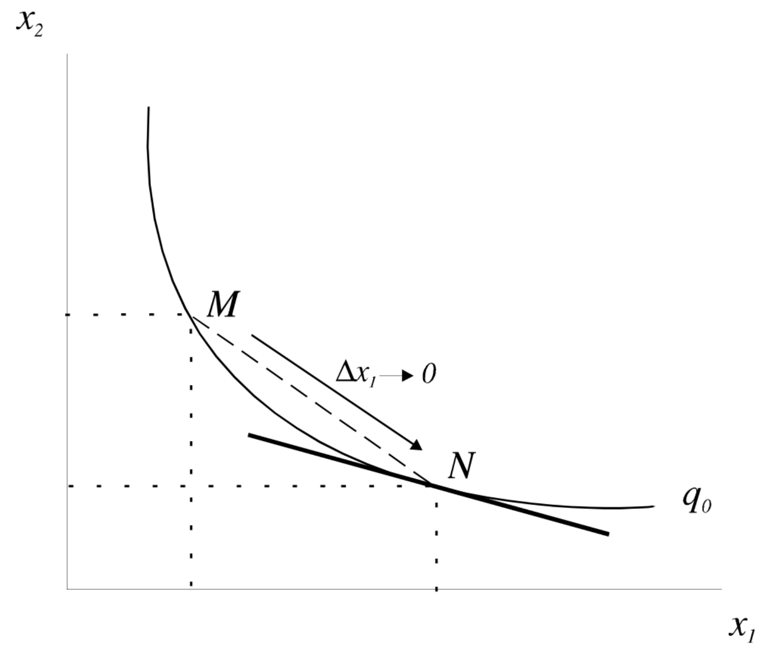
Nous pouvons alors définir un **taux de substitution technique (TST)** qui nous donne la quantité de facteur 2 qu'il faut substituer à chaque unité de facteur 1 dans le passage de **N** vers **M** :

$$TST_{2,1} = -\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

Lorsqu'on considère une variation **infinitésimale** du facteur 1, on pourra définir un **taux marginal de substitution technique (TMST)**

$$TMST_{2,1} = \lim_{\Delta x_1 \longrightarrow 0} - \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$$

Il correspond à la **valeur absolue de la pente de la tangente** à l'isoquante au point considéré.



La pente de la tangente et le TMST

Si les variations considérées correspondent à une substitution, la production ne doit pas varier:

$$df = 0 \Longleftrightarrow \frac{Pm_1}{Pm_2} = -\frac{dx_2}{dx_1} = TMST_{2,1}$$

Exemple: Dans notre cas de figure on a :

$$TMST_{2,1} = \frac{Pm_1}{Pm_2} = \frac{2.5x_1^{-3/4}x_2^{3/4}}{7.5x_1^{1/4}x_2^{-1/4}} = \frac{x_2}{3x_1}$$

Fonction de production Cobb-Douglas

La fonction de production de Cobb-Douglas s'écrit:

$$q = f(K, L) = AK^{\alpha}L^{\beta} \quad A > 0,\ \alpha > 0,\ \beta > 0$$

Les productivités marginales sont données:

$$Pm_k = \frac{\partial f}{\partial K} = \alpha AK^{\alpha-1}L^{\beta}$$

$$Pm_L = \frac{\partial f}{\partial L} = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}$$

Nous pouvons aussi étudier les rendements d'échelle pour cette technologie (on l'a déjà fait avec notre exemple) :

$$f(\lambda K, \lambda L) = A(\lambda K)^{\alpha}(\lambda L)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} A K^{\alpha} L^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} f(K, L)$$

$\alpha + \beta > 1$: Rendements d'échelle croissants,

$\alpha + \beta = 1$: Rendements d'échelle constants,

$\alpha + \beta < 1$: Rendements d'échelle décroissants.

Elasticité de la substitution

En économie, **l'élasticité** mesure la variation d'une grandeur provoquée par la variation d'une autre grandeur. Ainsi, pour un produit donné, lorsque les volumes demandés augmentent de 20% quand le prix de vente baisse de 10%, l'élasticité de la demande par rapport au prix de vente est le quotient de la variation de la demande rapporté à la variation de prix de vente, soit -2 = (20 % / -10 %).

Le TMST mesure **la pente** d'une isoquante. L'élasticité de substitution mesure **la courbure** d'une isoquante. Plus précisément, **l'élasticité de substitution** représente *la variation en pourcentage du ratio de deux consommations de deux facteurs de production* due à la variation du taux marginal de substitution entre ces deux facteurs de production.

$$e = \frac{\Delta\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}{\Delta\left|TMST_{x_2,x_1}\right|} = \frac{d\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{d\ln\left|TMST_{x_2,x_1}\right|}$$

L'élasticité de substitution indique comment le rapport des facteurs se modifie quand la pente de l'isoquante varie. Si une petite variation de la pente entraîne une modification importante du rapport entre les facteurs, l'isoquante est relativement plate, ce qui signifie que l'élasticité de substitution est grande.

Résumé (1/3)

- Les contraintes techniques de l'entreprise sont représentées par l'ensemble de production qui donne les différentes combinaisons d'inputs et d'outputs techniquement réalisables et par la fonction de production qui donne la quantité maximum d'output associée à des quantités données d'inputs.
- Les isoquantes constituent une autre façon de représenter les contraintes techniques auxquelles est confrontée une entreprise. Les isoquantes sont des courbes qui indiquent l'ensemble des combinaisons d'inputs permettant de produire un niveau donné d'output.

Résumé (2/3)

- Nous supposons en général que les isoquantes sont convexes et monotones, exactement comme les préférences d'allure normale.
- Le produit marginal mesure l'output supplémentaire par unité additionnelle d'un input, tous les autres inpu.s étant maintenus constants. Nous supposons en général que le produit marginal d'un input diminue quand la quantité utilisée de cet input augmente.
- Le taux de substitution technique mesure la pente d'une isoquante. Nous supposons généralement que le **TST** diminue quand nous nous déplaçons vers la droite le long d'une isoquante. Il s'agit d'une autre manière d'exprimer le fait que **les isoquantes ont une forme convexe**.

Résumé (3/3)

- À court terme, certains inputs sont fixes tandis qu'à long terme, tous les inputs sont variables.
- Les rendements d'échelle concernent la façon dont l'output varie quand on modifie **l'échelle de production**. Si les quantités de tous les inputs sont multipliées par un certain facteur tet que l'output est multiplié par ce même facteur, nous avons des rendements d'échelle constants. (Si l'output est multiplié par un facteur supérieur à **t**, nous avons des rendements d'échelle croissants et s'il est multiplié par un facteur inférieur à **t**, nous avons des rendements d'échelle décroissants).

Microéconomie II

Chapitre 2: Firme concurrentielle et combinaison optimale des facteurs

Pr. Moad El kharrim

Université AbdelMalek Essaâdi, FSJES - Tétouan

Année Universitaire 2017-2018

Sommaire du chapitre

Introduction

Nous avons introduit jusqu'à ce point un certain nombre de concepts qui permettent de caractériser les propriétés de la technologie et de l'organisation de la firme. Nous allons maintenant nous intéresser au comportement de la firme et plus précisément aux choix que la firme doit effectuer de manière optimale.

Nous supposerons dans ce chapitre que l'objectif de la firme est la **maximisation de son profit**.

Le profit est défini comme la différence entre les recettes de la firme (ou chiffre d'affaires) et ses coûts de production.

$$\underbrace{\prod}_{\textbf{Proft}} = \underbrace{p \times q}_{\textbf{Recettes}} - \underbrace{(p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_mx_m)}_{\textbf{Coût facteurs variables}} - \underbrace{(p_{m+1}x_{m+1} + ... + p_lx_l)}_{\textbf{Coût facteurs fixes}}$$

avec

$\boldsymbol{p}$**:** Prix unitaire de vente

$\boldsymbol{l = m + n}$

Les coûts de la firme correspondent à ses dépenses en vue d'acheter les facteurs variables et fixes nécessaires à sa production. Pour chaque input h, si la firme l'achète en quantité x_h et si le prix unitaire est de p_h, la dépense correspondant est de p_hx_h.

Dans ce chapitre nous allons considérer le cas d'une firme qui est sur un **marché concurrentiel (concurrence parfaite)**. Un tel marché se caractérise par l'existence d'une **multitude (en fait une infinité) d'acheteurs** et d'une **multitude de vendeurs** de sorte que les conséquences au niveau du marché des décisions de chaque individu soient négligeables.

Par conséquent, la firme va considérer que quelles que soient les quantités qu'elle vend ou qu'elle achète elle aura toujours affaire aux **mêmes prix sur les marchés.**

Le programme de la firme concurrentielle peut alors s'écrire sous la forme suivante:

$$\boldsymbol{Max}\; p \times q - p_1 x_1 - p_2 x_2 - ... - p_l x_l$$

$$\boldsymbol{Sujet\ à}\; q = f(x_1, ..., x_l)$$

Nous allons surtout nous intéresser au choix optimal du panier d'inputs étant donné un niveau de production.

Moins le panier d'input est coûteux, plus son profit sera élevé.

Choix de la combinaison optimale des facteurs

Le problème que nous allons étudier correspond à la recherche de la combinaison la moins chère qui permet de produire un niveau de production donné

$$\boldsymbol{Min}\; p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_l x_l$$

$$\boldsymbol{Sujet\ à}\; q = f(x_1, ..., x_l)$$

où la première ligne correspond à la minimisation des coûts et la deuxième ligne correspond à la contrainte technologique de la firme

La solution géométrique

Pour cette étude nous allons nous placer de nouveau dans un cadre à deux facteurs de production. Dans ce cas notre problème devient :

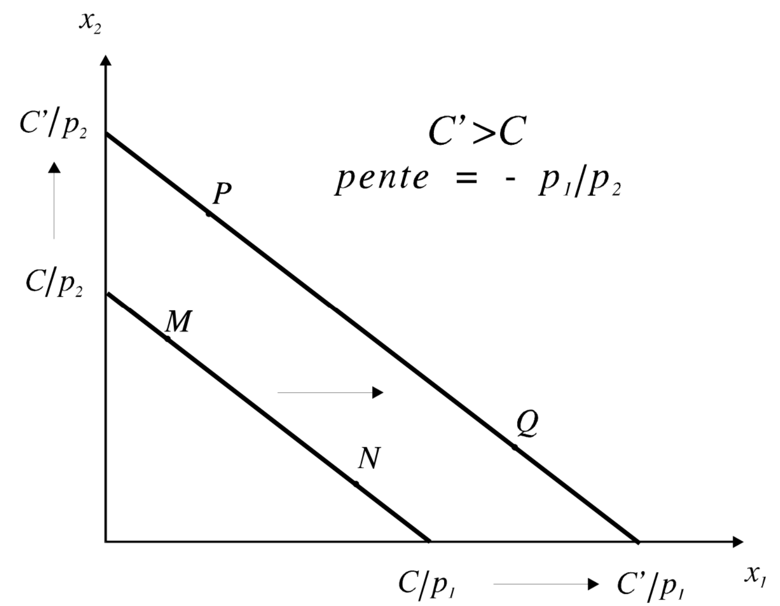
$$\boldsymbol{Min}\; p_1 x_1 + p_2 x_2$$

$$\boldsymbol{Sujet\ à}\quad q = f(x_1, x_2)$$

Regardons les combinaisons de production qui correspondent un coût **C** pour la firme.

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = C \iff x_2 = \frac{1}{p_2} C - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

Dans l'espace (x_1, x_2), ces équations définissent une droite qui est décroissante avec x_1 et dont les intersections avec les axes sont croissantes avec **C.**



Droites d'isocoûts

Une augmentation du niveau des coûts de **C** à **C′** correspond à un déplacement vers la gauche de la droite d'isocoût.

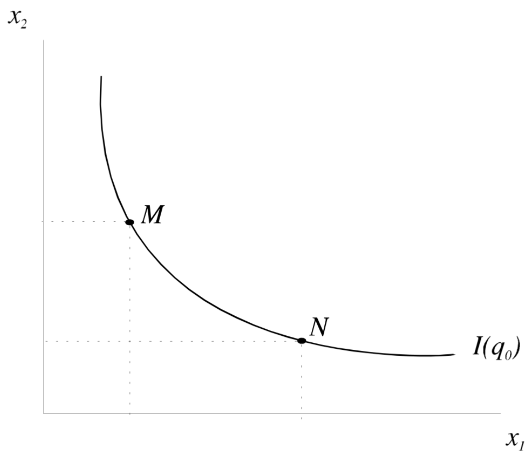
Nous pouvons observer ce résultat en étudiant toutes les substitutions entre les deux facteurs qui gardent constant le niveau de la dépense :

$$C = p_1x_1 + p_2x_2 \qquad dC = p_1dx_1 + p_2dx_2 \Longleftrightarrow x_2 = \frac{1}{p_2}C - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

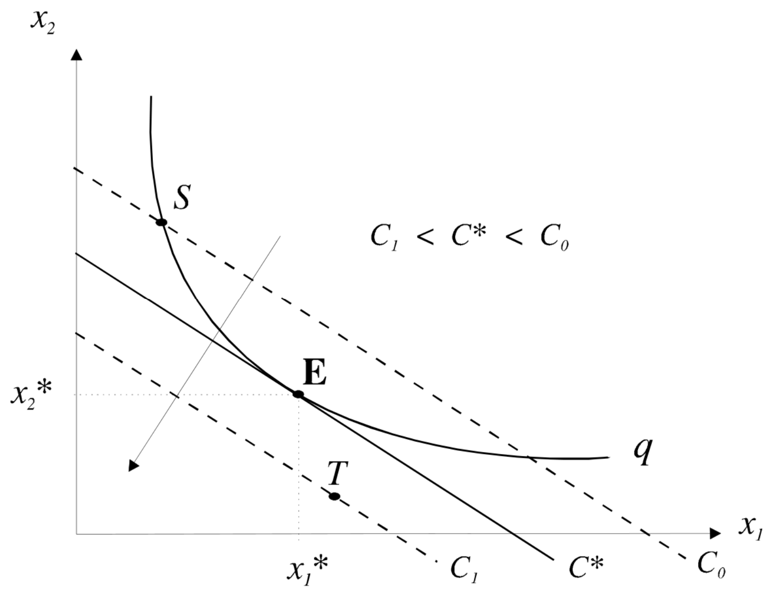
$$\Rightarrow -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{p_1}{p_2} \Longleftrightarrow |\text{pente d'isocoût}| = \frac{p_1}{p_2}$$

La pente de la droite d'isocoût nous donne donc le rapport dans lequel on peut substituer le facteur 2 au facteur 1 tout en gardant constant le niveau de la dépense.

La contrainte $q = f(x_1, x_2)$ nous dit que la firme doit choisir parmi les paniers qui permettent de produire exactement le niveau d'output **q**. Or l'ensemble qui contient ces paniers n'est rien d'autre que **l'isoquante** qui correspond à ce niveau de production.



Contraintes technologiques et isoquantes



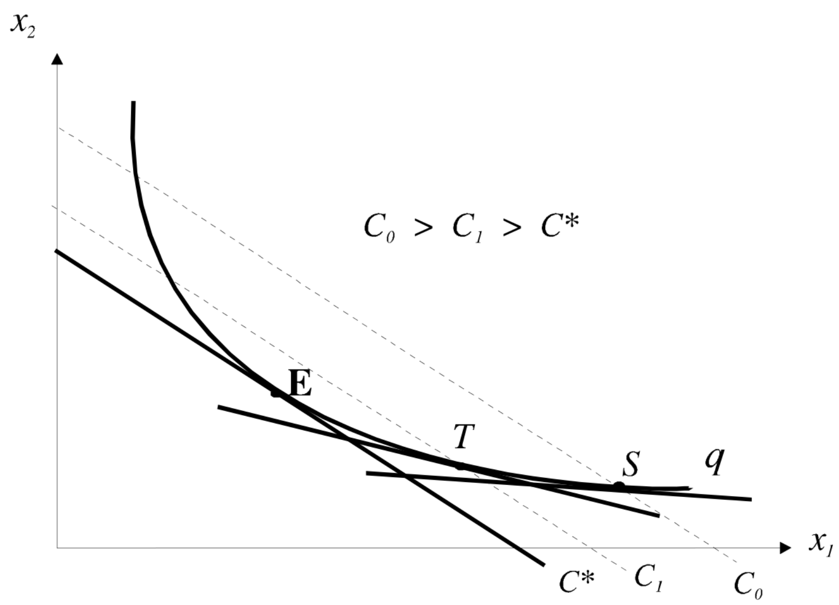
L'optimum de la firme

Le panier $\boldsymbol{E}$ est donc le panier le moins cher possible qui permet d'atteindre le niveau de production $\boldsymbol{q}$: c'est l'**optimum de la firme**. Il correspond au choix des quantités (x_1^*, x_2^*) pour les deux facteurs: c'est la **combinaison optimale** des deux facteurs de production.
Le point $\boldsymbol{E}$ est donc caractérisé par les conditions suivantes:

$$\boldsymbol{E}: \ (x_1^*, x_2^*) \text{ tel que } \begin{cases} |\text{pente d'isocoût}| = \dfrac{p_1}{p_2} \\ = TMST\,(x_1^*, x_2^*) = \dfrac{Pm_1}{Pm_2}\,(x_1^*, x_2^*) \\ = \dfrac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}\,(x_1^*, x_2^*) \\ f\,(x_1^*, x_2^*) = q \end{cases} \tag{1}$$

La firme atteint son optimum quand sa valorisation privée correspond exactement à **la valorisation sociale**, autrement dit, quand le rapport des **contributions des deux facteurs** à sa production correspond exactement à **leur valeur relative au niveau du système de marché**.

Le **TMST** nous indique dans quelle mesure on peut diminuer l'utilisation d'un facteur et augmenter celle de l'autre et garder la production constante.



TMST et rapports des prix

Le panier **S** permet de produire l'output **q** mais pour ce panier le TMST (la pente de la tangente) est <u>inférieur</u> au rapport des prix $\Longrightarrow$ La valorisation dans la firme du facteur 1 est inférieure à la valorisation sociale de ce bien.
La firme peut donc substituer du facteur 2 au facteur 1 de manière à garder le même niveau de production et réduire ses dépenses, puisque le facteur 2 contribue mieux à la production et il coûte relativement moins cher.

Les conditions **(1)** nous donnent un système de **deux équations à deux inconnus** (x_1^*, x_2^*). En résolvant ce système on peut déterminer la combinaison optimale d'inputs nécessaire à la production de l'output **q**:

$$TMST(x_1^*, x_2^*) = \frac{Pm_1}{Pm_2}(x_1^*, x_2^*) = \frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}(x_1^*, x_2^*) = \frac{p_1}{p_2}$$

Exemple: Pour notre exemple de fonction Cobb-Douglas, nous avions, $f(x_1, x_2) = 10x_1^{1/4}x_2^{3/4}$

$$TMST_{2,1} = \frac{Pm_1}{Pm_2} = \frac{2.5x_1^{-3/4}x_2^{3/4}}{7.5x_1^{1/4}x_2^{-1/4}} = \frac{x_2}{3x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\Rightarrow x_2^* = \frac{3x_1p_1}{p_2} = g(x_1^*)$$

$$f(x_1^*, g(x_1^*)) = 10(x_1^*)^{1/4} g(x_1^*)^{3/4} = q$$

$$= 10(x_1^*)^{1/4}\left(\frac{3x_1^*p_1}{p_2}\right)^{3/4} = 10 \times 3^{3/4}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{3/4} x_1^* = q$$

$$= 22.8\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{3/4} x_1^* = q \Rightarrow x_1^* = \frac{q}{22.8}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{3/4}$$

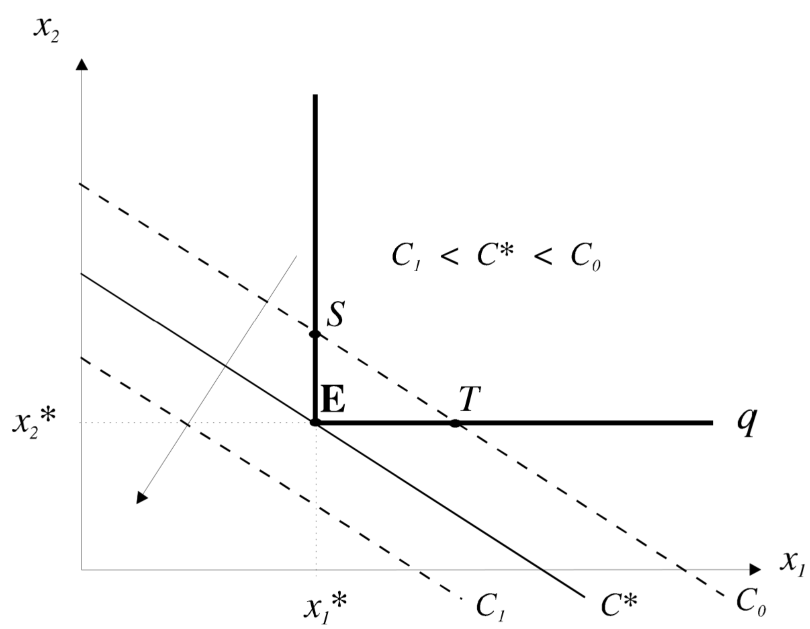
$$\Rightarrow x_2^* = g(x_1^*) = \frac{3q}{22.8}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/4}$$

Application numérique: Si $p_1 = p_2 = 1$ et $q = 100$

$$x_1^* = \frac{100}{22.8} = 4.39$$

$$x_2^* = \frac{300}{22.8} = 13.17$$

Cette méthode de calcul basée sur la tangence n'est valable que pour les technologies à facteurs substituables. Pour les technologies à facteurs complémentaires, on ne peut l'utiliser directement. Néanmoins le principe reste le même : la firme essaye de se placer sur la courbe d'isocoût la plus basse possible. La figure suivante permet d'illustrer cela.



Combinaison optimale des facteurs complémentaires

La forme des isoquantes influence donc fondamentalement la détermination de l'optimum de la firme.

Pour le premier cas nous allons prendre une isoquante entièrement linéaire (*notre exemple était linéaire sur une portion seulement*). Ce type d'isoquante appartient à une fonction de production de type **linéaire**:

$$f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 = q_0$$

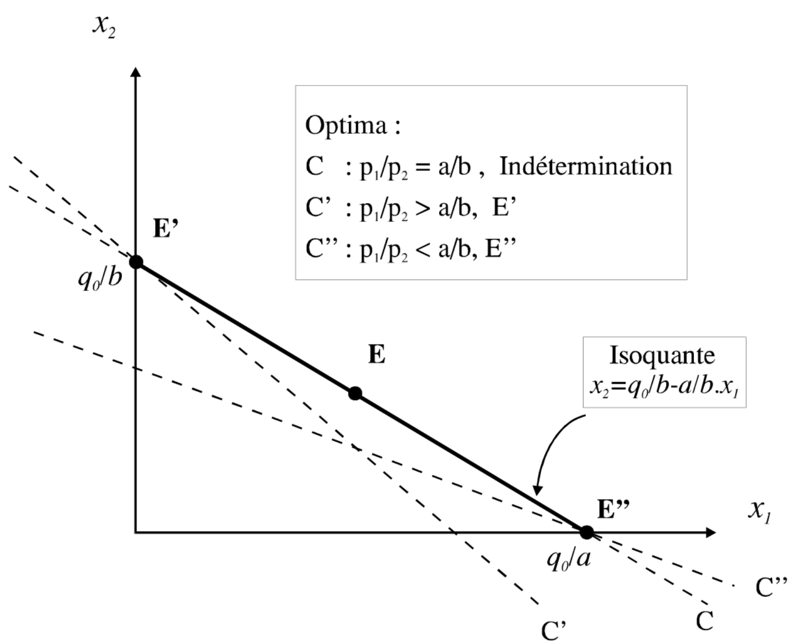
$$x_2 = \frac{q_0}{b} - \frac{a}{b}x_1 \Longrightarrow TMST = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a}{b} = Cste$$

On observe que le **TMST** reste constant le long de chaque isoquante, quel que soit le panier de facteurs considéré.

La règle de la tangence implique l'égalité entre le **TMST** et le rapport des prix or a priori il n'y a aucune raison que l'on ait cette égalité.

Le rapport **a/b** est donné par la technologie et le rapport des prix par les marchés, il n'y a aucune raison que ces deux mécanismes donnent le même résultat.

En effet même si l'on a l'égalité, la détermination de l'optimum de la firme reste problématique (voir figure suivante).



Problèmes d'optimisation liés à la linéarité de l'isoquante

La droite $\mathbf{C'}$ correspond à une pente plus élevée (en valeur absolue). Dans ce cas nous avons:

$$\frac{p_1}{P_2} > \frac{a}{b} = TMST$$

La firme a toujours intérêt à <u>substituer le facteur 2 au facteur 1</u> (*le facteur 1 est relativement trop cher par rapport à sa contribution à la production*).

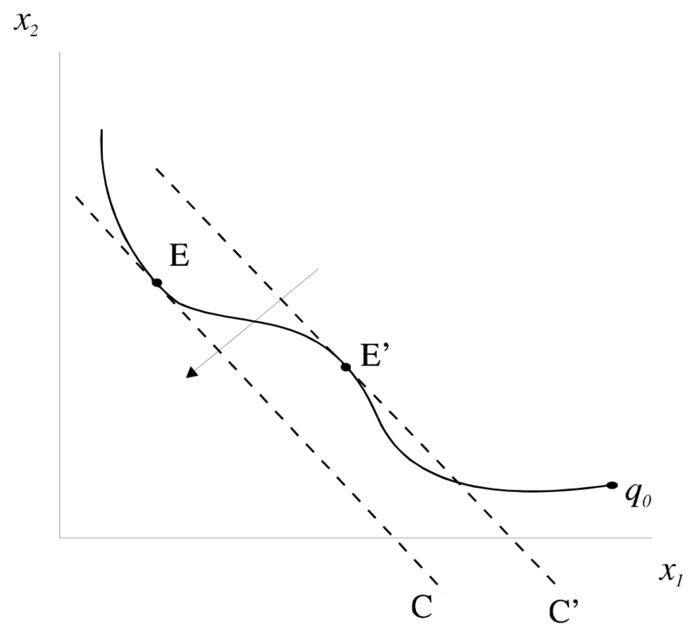
Cette substitution doit continuer jusqu'à ce que la firme ne puisse plus diminuer la quantité de 1 et augmenter celle de 2. On a donc une **solution en coin** : le point $\mathbf{E'}$.

Nous avons la situation symétrique pour la droite $\mathbf{C}''$:

$$\frac{p_1}{P_2} < \frac{a}{b} = TMST$$

la firme a donc intérêt à substituer le facteur 1 au facteur 2. On a la **solution en coin** : **E′′.**

L'autre cas de figure nous montre que la règle de la tangence peut même conduire à des solutions sous-optimales. Nous pouvons voir les implications de cette configuration dans la figure suivante;



Concavité partielle de l'isoquante et sous-optimalité

La solution analytique : le Lagrangien

Nous allons introduire maintenant une méthode de calcul qui va nous permettre de calculer directement la (ou les) combinaison(s) de facteurs qui minimise(nt) les dépenses de la firme.

$$\boldsymbol{Min}\ p_1 x_1 + p_2 x_2$$

$$\boldsymbol{Sujet\ \grave{a}}\ q = f(x_1, x_2)$$

Il s'agit d'un problème de minimisation d'une fonction sous une contrainte d'égalité.

En fait, en utilisant le Lagrangien, on aura un nouveau problème de maximisation sans contraintes où les conditions d'optimalité vont automatiquement tenir compte de la contrainte du problème initial.

On va donc associer une variable supplémentaire, λ, à la contrainte du problème. Le programme de la firme va alors devenir :

$$\boldsymbol{Min}_{(\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{\lambda})}\ L(x_1, x_2; \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda (f(x_1, x_2) - q)$$

$\frac{\partial L}{\partial x} > 0$: on peut diminuer la valeur du Lagrangien en diminuant x;

$\frac{\partial L}{\partial x} < 0$: on peut diminuer la valeur du Lagrangien en augmentant x;

$\frac{\partial L}{\partial x} = 0$: on ne peut diminuer la valeur du Lagrangien en modifiant x;

Par conséquent, si l'on est à l'optimum au point $(x_1^*, x_2^*; \lambda^*)$, on doit nécessairement avoir :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*; \lambda^*) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*; \lambda^*) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1^*, x_2^*; \lambda^*) = 0 \end{cases}$$

Si les isoquantes sont strictement convexes alors ces conditions sont suffisantes pour déterminer le minimum global. En utilisant l'expression détaillée du Lagrangien ces conditions deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = q - f(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

On observe que la dernière condition est exactement la contrainte de notre problème initial. Par conséquent la minimisation sans contraintes du Lagrangien tient nécessairement compte de cette contrainte.

A partir du rapport des deux premières conditions nous obtenons:

$$p_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} \qquad \text{et} \qquad p_2 = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2} = TMST(x_1^*, x_1^*)$$

$$q = f(x_1^*, x_2^*)$$

Exemple : Pour notre fonction de production nous avons de nouveau

$$\boldsymbol{Min}\; p_1x_1 + p_2x_2$$

$$\boldsymbol{Sujet\ à}\;\; f(x_1, x_2) = 10x_1^{1/4}x_2^{3/4} = q$$

$$\boldsymbol{Min}_{(x_1,x_2,\lambda)}\; L(x_1, x_2; \lambda) = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda\left(10x_1^{1/4}x_2^{3/4} - q\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow p_1 = \lambda\left(2.5x_1^{-3/4}x_2^{3/4}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow p_2 = \lambda\left(7.5x_1^{1/4}x_2^{-1/4}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 10x_1^{1/4}x_2^{3/4} = q \end{cases}$$

A partir des deux premières conditions on obtient : $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{x_2}{3x_1} = TMST$

Maximisation de profit et les décisions de la firme

La firme va acheter les facteurs de production sur des marchés concurrentiels mais nous allons aussi supposer qu'elle peut vendre sa production sur un marché de même type, sur lequel le prix (p) est donné pour elle: elle est preneuse de prix sur ce marché aussi. Elle va alors choisir le niveau de production qui va maximiser son profit et réaliser cette production en utilisant un panier optimal d'input (sinon, elle aurait pu augmenter son profit en choisissant un panier d'input qui coûte moins cher).

Profit de la firme

Nous avons défini le profit comme :

$$\prod = \textbf{Recettes-Coûts}$$

Si le prix du produit est p, ses recettes seront données par

$$\textbf{Recettes totales} = \boldsymbol{pq}$$

Ses coûts vont résulter de l'achat des différents facteurs de production

$$\textbf{Coûts totaux} = \sum_l p_l x_l$$

Horizon temporel de la firme

Dans le **court terme (CT)**, certains facteurs de production seront considérés comme fixes.

Dans le **long terme (LT)** tous les facteurs de production sont variables.

Le problème de maximisation de profit de la firme n'est pas tout-à-fait de même nature dans ces deux horizons temporels.

Maximisation de profit à court terme

Considérons que la firme utilise deux facteurs de production de tel sorte que le **second facteur soit un facteur fixe**.

Notons par $\bar{x}_2$ le niveau fixe de ce facteur. La firme doit donc réaliser sa production en utilisant des paniers du type $(x_1, \bar{x}_2)$ où seul x_1 peut être ajusté. Son problème de maximisation de profit devient alors

$$\boldsymbol{Max_{x_1}} \; p \times q - p_1 x_1 - p_2 \bar{x}_2$$

$$q = f(x_1; \bar{x}_2)$$

En substituant la seconde condition dans la première, nous obtenons un problème assez simple:

$$\boldsymbol{Max}_{\boldsymbol{x_1}}\ p \times f(x_1; \bar{x}_2) - p_1 x_1 - p_2 \bar{x}_2$$

car le profit ne dépend plus que d'une seule variable maintenant, étant donné que $\bar{x}_2$ et tous les prix sont des constantes pour la firme

$$\boldsymbol{\pi(x_1; \bar{x}_2)} = p \times f(x_1; \bar{x}_2) - p_1 x_1 - p_2 \bar{x}_2$$

La solution de ce problème peut être établi simplement avec une approche graphique.

Dans l'espace (x_1, q) nous pouvons représenter à la fois la fonction de production de la firme $q = f(x_1; \bar{x}_2)$ et les droites d'isoprofit qui, de manière similaire aux isoquantes, nous donnent toutes le combinaison de q et de x_1 qui permettent à la firme d'atteindre un même niveau de profit π_0.

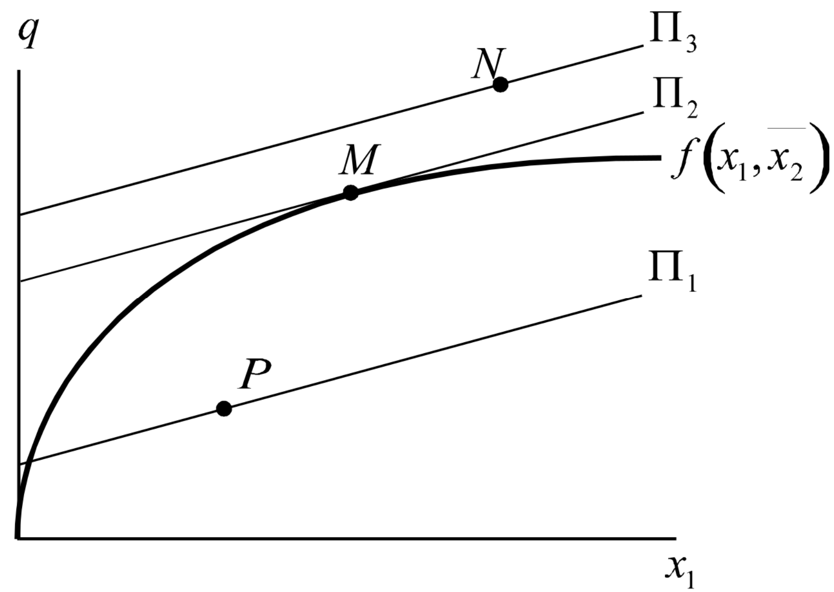
$$p \times q - p_1 x_1 - p_2 \bar{x}_2 = \pi_0$$

$$\Rightarrow q = \gamma(x_1; \pi_0, \bar{x}_2) = \frac{\pi_0 + p_2 \bar{x}_2}{p} + \frac{p_1}{p} x_1$$

La pente de la droite d'isoprofit est donnée par $\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} = \frac{p_1}{p} \geq 0$ et que la droite se déplace vers le haut quand on considère un niveau de profit plus élevé : $\frac{\partial \gamma}{\partial \pi} = \frac{1}{p} > 0$

$\Longrightarrow$Par conséquent la droite d'isprofit correspondant à $\pi_1 > \pi_0$ est au dessus de celle correspondant à π_0.

Les deux éléments de ce problème (la fonction de production et l'isoprofit) sont bien sûr conditionné par le niveau du facteur 2.



Maximisation de profit à Court Terme (CT)

Le profit $\prod_3$ est plus intéressant pour la firme mais sa technologie et le niveau donné du facteur 2 ne lui permettent pas d'atteindre ce niveau de profit.

Cette solution graphique montre que deux conditions doivent être remplies à l'optimum de la firme (x_1^*, q^*):

1) La pente de la tangente à la fonction de production (dq/dx_1) en x_1^* et celle de la droite d'isoprofit doivent être égales:

$$Pm_1 = \frac{p_1}{p} \Longleftrightarrow pPm_1 = p_1$$

2) La production q^* doit être réalisable avec $x_1^* \Rightarrow q^* = f(x_1^*; \bar{x}_2)$

Exemple :

Si la fonction de production de la firme est $q = f(x_1, x_2) = \sqrt{10}x_1^{1/4}x_2^{1/2}$ et le second facteur est fixe à court terme, avec $x_2 = \bar{x}_2 = 160$, la fonction de production de **court terme** de la firme est donnée par $q = f(x_1, 160) = 40x_1^{1/4}$.

L'équation $Pm_1 = \frac{p_1}{p}$ nous permet de déterminer la quantité optimale de facteur 1 que la firme doit utiliser:

$$Pm_1 = \frac{10}{x_1^{3/4}} = \frac{p_1}{p} \Longleftrightarrow x_1^* = \left(10\frac{p}{p_1}\right)^{4/3}$$

Application Numérique:

$p = 27,\ p_1 = 1,\ p_2 = 1 \Longrightarrow x_1^* = (10 \times 27)^{4/3} = 1745.1$

$\Longrightarrow q^* = 40\left(x_1^*\right)^{1/4} = 40\left(10 \times 27\right)^{1/3} = 258.53$

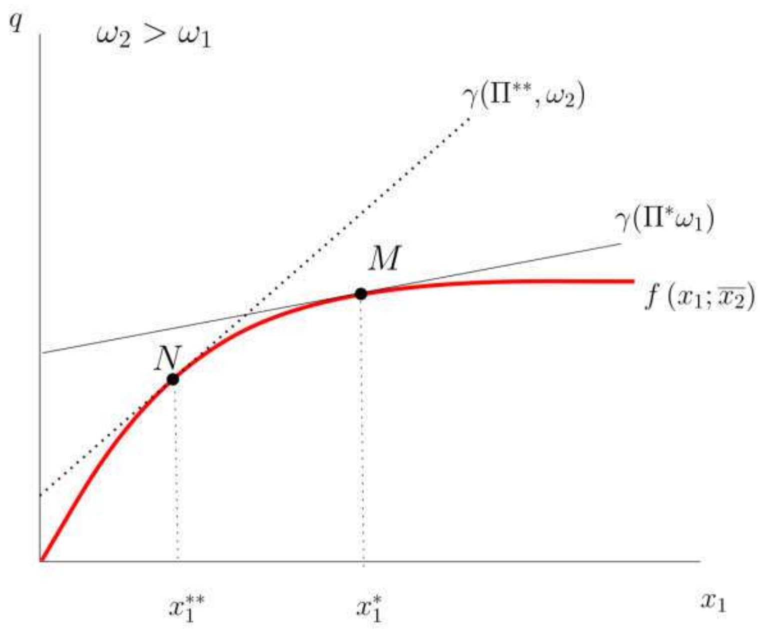
Le profit optimale de la firme en découle :

$\Pi^* = p \times q^* - p_1 \times x_1^* - p_2 \times \bar{x}_2 = 27 \times 258.53 - 1 \times 1745.1 - 1 \times 160 = 5075.2$

Statique comparative à court terme

Nous pouvons étudier graphiquement comment l'optimum de la firme réagit face aux variations des deux (en fait un seul) principaux paramètres de ce problème : les prix p_1 et p.

En effet ce qui compte pour l'établissement du point de tangence entre la droite d'isoprofit la plus élevée et la fonction de production à **CT** est le prix relatif $\omega = p_1/p$.



Statique comparative à CT

Maximisation du profit à long terme

A long terme, tous les facteurs de production sont variables et l'objectif de l'entreprise devient:

$$\max_{x_1, x_2} pf\left(x_1, x_2\right) - p_1 x_1 - p_2 x_2$$

Nous avons de nouveau un optimum si la firme ne peut améliorer son profit en modifiant les quantités utilisées des inputs :

$$\left.\begin{array}{l} pPm_1\left(x_1^*, x_2^*\right) = p_1 \\ pPm_2\left(x_1^*, x_2^*\right) = p_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left(x_1^*, x_2^*\right) \Longrightarrow q^*$$

On a donc un système de 2 équations à deux inconnues. En le résolvant, nous obtenons :

$$\left.\begin{array}{l} x_1^*\left(p; p_1, p_2\right) \\ x_2^*\left(p; p_1, p_2\right) \end{array}\right\} \text{Les fonctions de demande de facteurs}$$

$$\Longrightarrow q^* = f\left(x_1^*, x_2^*\right) \Longrightarrow \Pi^*$$

Résumé (1/3)

- Le profit est la différence entre les recettes et les coûts. Dans cette définition, il est important de mesurer tous les coûts en utilisant les prix du marché appropriés.
- Les facteurs fixes sont les facteurs dont la quantité est indépendante du niveau de l'output; les facteurs variables sont les facteurs dont les quantités utilisées varient en fonction du niveau de l'output.
- À court terme, certains facteurs doivent être utilisés en quantités prédéterminées.

  À long terme, tous les facteurs peuvent varier.

Résumé (2/3)

- Si une entreprise maximise ses profits, la valeur du produit marginal (ou produit marginal en valeur) de chaque facteur variable doit être égale à son prix.
- Le modèle de maximisation du profit implique que la fonction d'offre d'une entreprise concurrentielle doit être une fonction croissante du prix de l'output et que la fonction de demande de chaque facteur doit être une fonction décroissante de son prix.
- Si une entreprise concurrentielle est caractérisée par des rendements d'échelle constants, ses profits maximums à long terme sont nuis.

Microéconomie II

Chapitre 3: Fonctions de coûts

Pr. Moad El kharrim

Université AbdelMalek Essaâdi, FSJES - Tétouan

Année Universitaire 2017-2018

Sommaire du chapitre

Minimisation des coûts

Chercher à minimiser les coûts correspond donc à :

$$\boldsymbol{Min}\; p_1 x_1^* + p_2 x_2^* \qquad \textbf{Coûts des facteurs}$$

$$\boldsymbol{Sujet\ à}\; f(x_1, x_2) = q \qquad \textbf{Fonction de production}$$

Le niveau optimal de cet objectif donnera la **fonction de coût:**

$$C(q;\, p_1, p_2)$$

La combinaison qui minimise les coûts, $E = (x_1^*, x_2^*)$, doit vérifier :

1) |**pente de la tangente**|=|**pente de la droite d'iso-coût**|

$$TMST = \frac{Pm_1(x_1^*, x_2^*)}{Pm_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{p_1}{p_2}$$

2) $\boldsymbol{E}$ permet de produire $\boldsymbol{q}$: $f(x_1^*, x_2^*) = q$

Les solutions de ce système (les valeurs optimales) vont bien sûr en général dépendre des paramètres de ce problème de minimisation : q , p_1 et p_2. Elles vont correspondre aux **demandes conditionnelles** d'inputs : $(x_1^*(q; p_1, p_2), x_2^*(q; p_1, p_2))$. Ces demandes sont conditionnées par le niveau de production visée (q).

Le coût de ce panier optimal est donné par:

$$p_1 \times x_1^*(q; p_1, p_2) + p_2 \times x_2^*(q; p_1, p_2) = C(q; p_1, p_2) = C(q)$$

$C(q)$ est la **fonction de coût total** de la firme.

Facteurs complémentaires

$$f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$$

Pour produire q, il faut **au moins** q unités de x_1 et q unités de x_2. La minimisation des coûts doit impliquer la suppression des gâchis et donc, l'utilisation des combinaisons **efficaces**.

$$x_1^* = x_2^* = q \quad \textbf{demandes conditionnelles}$$
$$C(q;\, p_1, p_2) = p_1 q + p_2 q = (p_1 + p_2)\, q$$

Substituts parfaits

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

Etant donnée la parfaite équivalence entre les facteurs, la firme choisira d'utiliser celui qui est **le moins cher** pour réaliser toute la production :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } p_1 \leq p_2 & x_1^* = q \ \text{ et } x_2^* = 0 \\ \text{si } p_1 \geq p_2 & x_2^* = q \ \text{ et } x_1^* = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(q;\, p_1, p_2) = \min\{p_1, p_2\} \times q$$

Ici les **demandes conditionnelles** dépendent des **prix** de manière assez brutale (tout ou rien) : *c'est-à-dire toute la production est réalisée avec un seul facteur (**le moins cher**).*

A court terme (**CT**) la firme ne peut ajuster que les facteurs variables quand elle cherche à minimiser ses coûts.

Soit le facteur 2 un facteur fixe : $x_2 = \bar{x}_2$. Le problème de minimisation devient alors :

$$\textbf{Fonction de coût } C_{CT}(q, \bar{x}_2) = \begin{cases} \min\limits_{x_1} p_1 x_1 + p_2 \bar{x}_2 \\ \textbf{Sujet à } \ f(x_1, \bar{x}_2) = q \end{cases}$$

Les demandes conditionnelles des facteurs sont:

$$x_1^* = x_1^{CT}(q;\, p_1, p_2, \bar{x}_2)$$
$$x_2^* = \bar{x}_2$$

et $C_{CT}(q, \bar{x}_2) = p_1 x_1^{CT}(q;\, p_1, p_2, \bar{x}_2) + p_2 \bar{x}_2$

A long terme (**LT**) nous avons à nouveau le problème standard avec tous les fac- teurs variables :

$$\textbf{Fonction de coût } (q) = \begin{cases} \min\limits_{x_1} p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ \text{Sujet à } f(x_1, x_2) = q \end{cases}$$

Les deux facteurs de productions peuvent être librement ajustés :

$$C(q) = p_1 x_1^*(q;\, p_1, p_2) + p_2 x_2^*(q;\, p_1, p_2)$$

Coûts fixes et coûts quasi–fixes

Les coûts correspondant aux facteurs dont la consommation par la firme ne dépendent pas du niveau de la production correspondent naturellement aux **coûts fixes**.

Exemples: le coût de construction des bâtiments, le coût d'achat des machines...etc

Les coûts qui ne dépendent pas du niveau de production mais qui peuvent être évités en arrêtant totalement la production sont des **coûts quasi–fixes**.

Exemples: contrats de location des bâtiments, consommation d'électricité ou de fioul...etc

Coût moyen

Le coût moyen nous donne une approximation du coût unitaire de production :

$$CM(q) = \frac{C(q)}{q}$$

Les coûts totaux de l'entreprise de la manière suivante :

$$C(q) = \underbrace{CV(q)}_{\textbf{Coûts variables}} + \underbrace{F}_{\textbf{Coûts fixes}}$$

$$= p_1 x_1^*(q) + p_2 \bar{x}_2$$

Donc les coûts moyens sont égaux à:

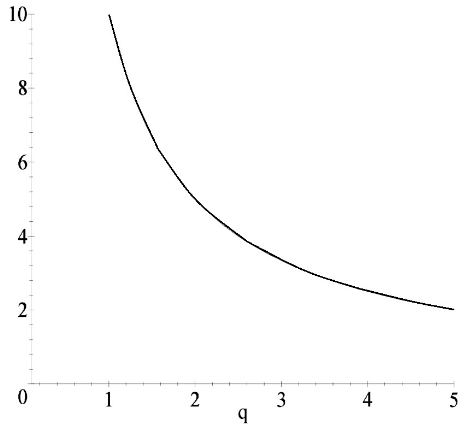
$$CM(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{CV(q)+F}{q} = \frac{CV(q)}{q} + \frac{F}{q}$$

$$= CVM(q) + CFM(q)$$

CM = Coût Variable Moyen + Coûts Fixe Moyen

$CFM(q)$ est une fonction hyperbolique de type $1/x$. Sa courbe est décroissante et convexe.

Exemple : $F = 10$, $CFM(q) = 10/q$



Exemple de CFM

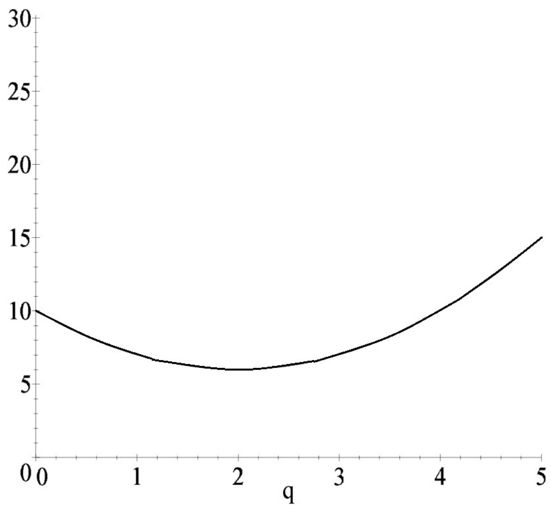
La forme de la courbe $CVM(q)$ est un peu plus difficile à établir car elle dépendra de la croissance des coûts avec le niveau de production.

$$CVM(q) = \frac{CV(q)}{q}$$

Selon la présence et l'importance **des rendements d'échelle croissants**, nous pouvons avoir une zone plus ou moins importante de **décroissance des CVM**. Mais cette décroissance sera en général suivie d'abord par une **constance** et ensuite par une **zone de croissance**. On obtient alors une courbe en $\cup$.

Exemple:

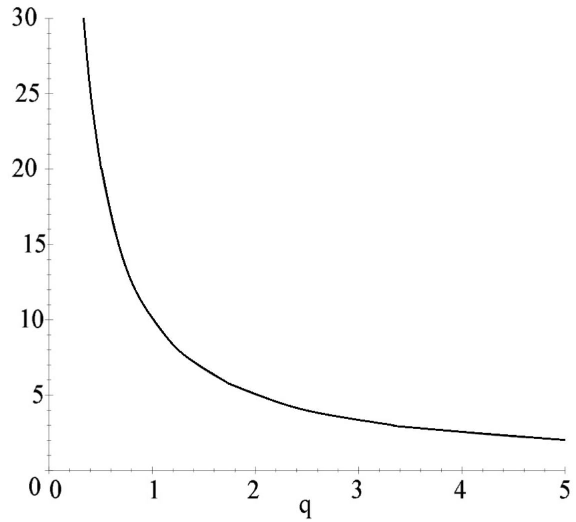
$$CV\left(q\right)=q^{3}-4q^{2}+10q\implies CVM\left(q\right)=q^{2}-4q+10$$



Exemple de CVM

Le coût moyen s'obtient en sommant ces deux courbes

$$CM\left(q\right)=\left(q^{2}-4q+10\right)+\left(10/q\right)$$



CM = CVM + CFM

Coût marginal

La variation des coûts sera mesurée en termes relatifs par la fonction de **coût marginal (Cm)** de la firme :

$$Cm\left(q\right)=\frac{\Delta C\left(q\right)}{\Delta q}=\frac{C\left(q+\Delta q\right)-C\left(q\right)}{\Delta q}$$

Naturellement:

$$\Delta C\left(q\right)=\left(CV\left(q+\Delta q\right)+F\right)-\left(CV\left(q\right)+F\right)$$
$$=\Delta CV\left(q\right)+\underbrace{\Delta F}_{=\mathbf{0}}=\Delta CV\left(q\right)$$

Ce qui nous intéresse est une évaluation de cette variation des coûts qui ne soit pas conditionnée par la variation Δq retenue.

$$Cm\left(q\right)=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{\Delta C\left(q\right)}{\Delta q}=\frac{dC\left(q\right)}{dq}=C'\left(q\right)$$

Quelle relation pouvons-nous établir entre l'évolution du **CM** et celle de **Cm** ?

$$CM\left(q\right)=\frac{C\left(q\right)}{q}$$

$$CM'\left(q\right)=\frac{d}{dq}\left(\frac{C\left(q\right)}{q}\right)$$
$$=\frac{C'\left(q\right)q-C\left(q\right)\times 1}{q^{2}}$$
$$=\frac{C'\left(q\right)-C\left(q\right)/q}{q}$$
$$=\frac{1}{q}\left(Cm\left(q\right)-CM\left(q\right)\right)$$

Donc l'évolution du **CM** dépend de la relation entre **Cm** et **CM** :

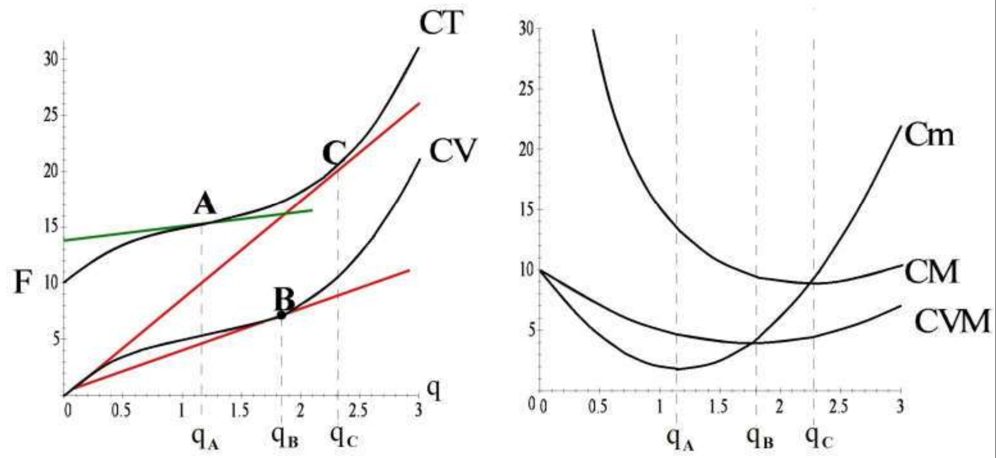
$$Cm\,(q) > CM\,(q) \Longleftrightarrow CM' > 0 \Longrightarrow CM \text{ \textbf{croissant}}$$

$$Cm\,(q) = CM\,(q) \Longleftrightarrow CM' = 0 \Longrightarrow CM \text{ \textbf{constant}}$$

$$Cm\,(q) < CM\,(q) \Longleftrightarrow CM' < 0 \Longrightarrow CM \text{ \textbf{décroissant}}$$

Nous remarquons aussi que la courbe de Cm passe nécessairement par le minimum de la courbe de CM (correspondant à $CM' = 0$). Elle doit aussi passer par le minimum de la courbe de CVM puisque

$$Cm = C' = CV' \Longrightarrow Cm\,(q) = CVM\,(q) \Longleftrightarrow CVM' = 0$$



q_A minimise le Cm (pt d'inflexion du CT)

q_B minimise le CVM (pente minimale pour la corde OB)

q_C minimise le CM (pente minimale pour la corde OC)

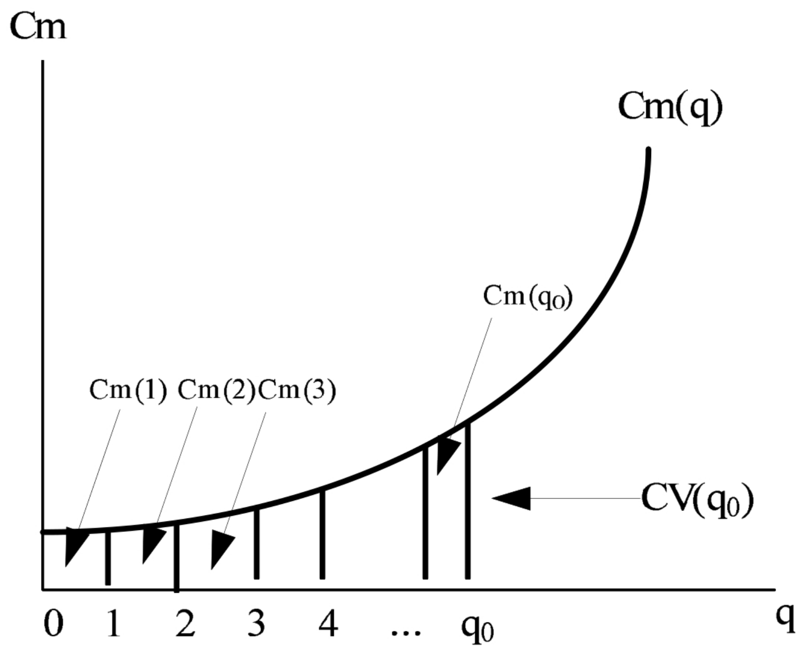
$$Cm'\,(q_A) = 0 \Longleftrightarrow CT''\,(q_A) = 0 : \quad \textbf{Point d'inflexion en A}$$

$$Cm\,(q_B) = CVM\,(q_B) \Longleftrightarrow CVM'\,(q_B) = 0 : \quad \textbf{Minimum du CVM}$$

$$Cm\,(q_C) = CM\,(q_C) \Longleftrightarrow CM'\,(q_C) = 0 : \quad \textbf{Minimum du CM}$$

Le coût marginal mesure approximativement le coût de chaque unité supplémentaire.

nous pouvons remarquer que le **coût variable** est en fait la **somme des coûts marginaux** que la firme a du payer pour atteindre le niveau de production considérée



Coût variable et coûts marginaux

$$
\begin{aligned}
CV(q) &= [CV(q) - CV(q-1)] \\
&\quad + [CV(q-1) - CV(q-2)] \\
&\quad + [CV(q-2) - CV(q-3)] \\
&\quad \vdots \\
&\quad + \underbrace{[CV(1) - CV(0)]}_{=[CV(1)-0]} \\
&= Cm(q) + Cm(q-1) + \cdots + Cm(1)
\end{aligned}
$$

La surface sous la courbe de Cm jusqu'à q_0 nous donne le coût variable total correspondant au niveau q_0. Ce que nous pouvons noter en utilisant l'opérateur d'intégration :

$$CV(q_0) = \int_0^{q_0} Cm(q)\, dq$$

Exemple:

$$CT(q) = 2q^3 - 7q^2 + 10q + 10$$

$$Cm(q) = 6q^2 - 14q + 10$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{q_0} Cm(q)\, dq &= \int_0^{q_0} \left(6q^2 - 14q + 10\right) dq \\
&= \left(2q^3 - 7q^2 + 10q\right) - 0 \\
&= CV(q_0) - CV(0) = CV(q_0)
\end{aligned}
$$

Rendements d'échelle et les fonctions de coût

Rappel : les rendements d'échelle sont

$f(tx_1, tx_2) > t \times f(x_1, x_2) \Rightarrow$ Rendements d'échelle **croissants**

$f(tx_1, tx_2) = t \times f(x_1, x_2) \Rightarrow$ Rendements d'échelle **constants**

$f(tx_1, tx_2) < t \times f(x_1, x_2) \Rightarrow$ Rendements d'échelle **décroissants**

pour tout $t > 1$

Quel est la conséquence des rendements d'échelle sur la forme de la fonction de coût?

Rendements d'échelle constants

Soit

$$\begin{aligned} C(1; p_1, p_2) &= \text{coût minimanl pour } q = 1 \\ &\equiv p_1 x_1^*(1; p_1, p_2) + p_2 x_2^*(1; p_1, p_2) \\ &\equiv c \end{aligned}$$

Si la firme désire produire $q > 1$, avec les rendements d'échelle constants, nous devons avoir :

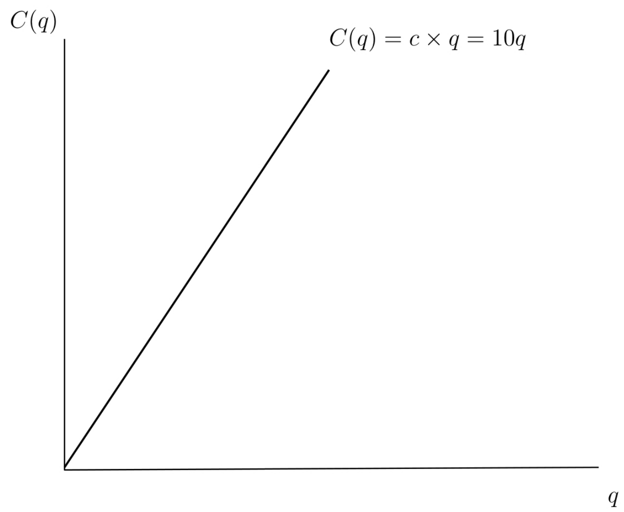
$$f(x_1^*(1), x_2^*(1)) = 1 \Longrightarrow f(qx_1^*(1), qx_2^*(1)) = q \times f(x_1^*(1), x_2^*(1)) = q$$

La fonction de coût est alors donnée par :

$$\begin{aligned} C(q) &= q \times p_1 x_1^*(1) + q \times p_2 x_2^*(1) = q \times (p_1 x_1^*(1) + p_2 x_2^*(1)) \\ &= q \times C(1; p_1, p_2) = c \times q \end{aligned}$$

Par conséquent la fonction de coût est **linéaire**

Exemple: $C(1; p_1, p_2) = c = 10 \Longrightarrow C(q) = 10q$



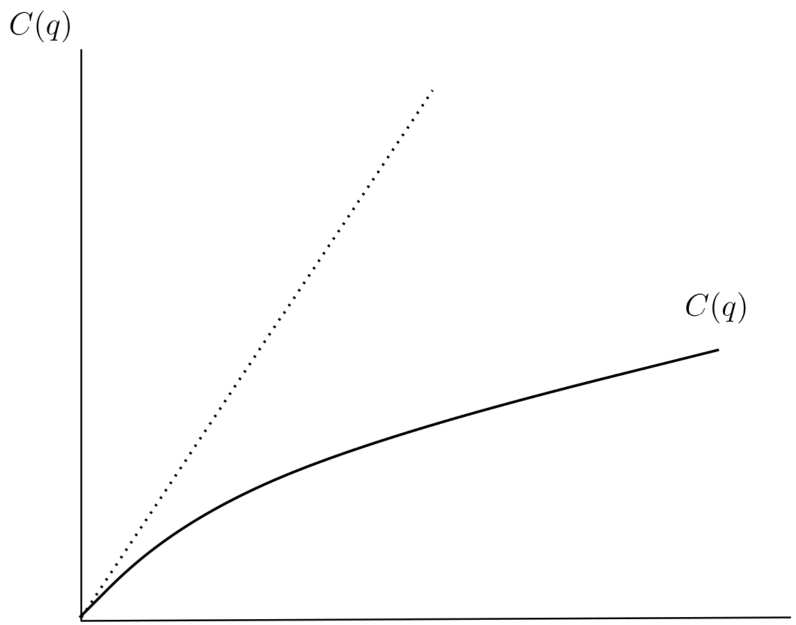
Rendements d'échelle constants

Rendements d'échelle croissants

Dans ce cas nous aurons :

$$f(qx_1^*(1), qx_2^*(1)) > q \times f(x_1^*(1), x_2^*(1)) = q$$

pour produire q, il faut multiplier la combinaison $(x_1^*(1), x_2^*(1))$ par un facteur **inférieur** à q. Les coûts augmentent donc **moins que proportionnellement** à l'augmentation de l'output.



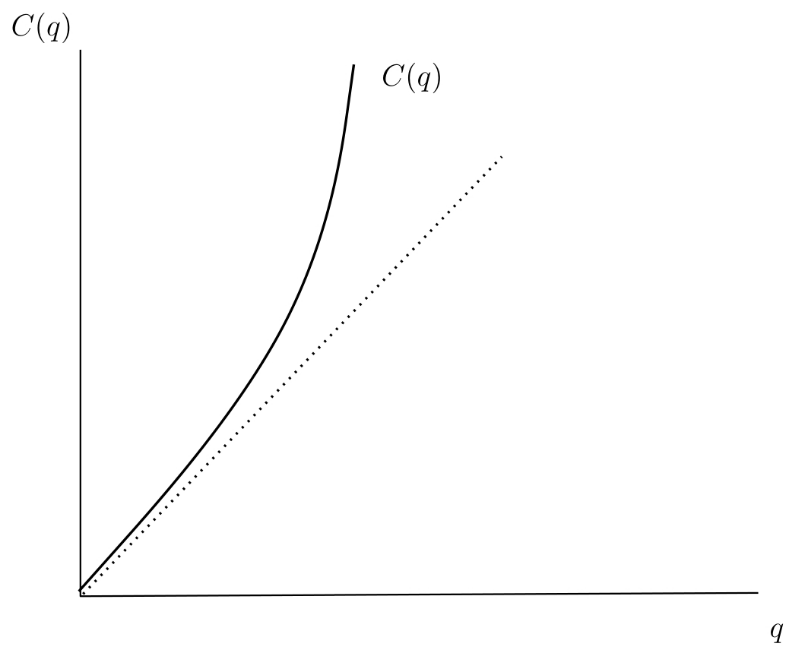
Rendements d'échelle croissants

Rendements d'échelle décroissants

C'est le cas symétrique du précédent.

$$f\left(qx_1^*(1), qx_2^*(1)\right) < q \times f\left(x_1^*(1), x_2^*(1)\right) = q$$

Donc pour produire q il faut multiplier l'échelle de production par un facteur **supérieur** à q. Les coûts augmenteront alors **plus que proportionnellement** à l'augmentation du niveau de la production.



Rendements d'échelle décroissants

Utilisation du coût moyen pour caractériser les rendements d'échelle

Rappel: Coût moyen $CM(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

1) les rendements d'échelle **constants** :

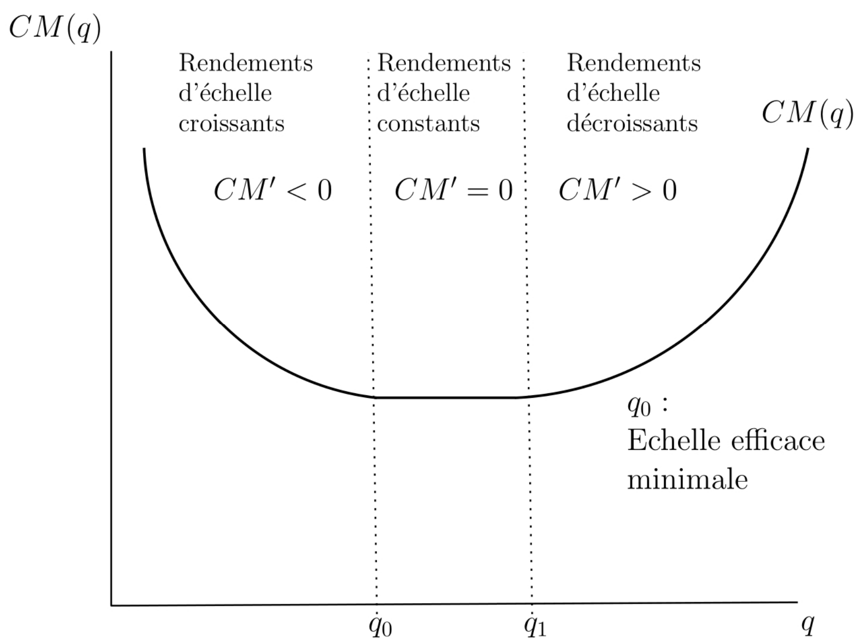
$$C(q) = cq \Rightarrow CM(q) = \frac{C(q)}{q} = c \Rightarrow \frac{\partial CM(q)}{\partial q} = 0$$

2) Les rendements d'échelle **croissants**, le numérateur augmente moins vite que le dénominateur et donc le coût moyen est décroissant :

$$\frac{\partial CM(q)}{\partial q} < 0$$

3) Les rendements d'échelle **décroissants**:

$$\frac{\partial CM(q)}{\partial q} > 0$$



Evolution des rendements d'échelle

Choix de capacité de production et fonction de coût de long terme

A long terme tous les facteurs deviennent variables : il n'existe plus de coûts fixes. Par conséquent :

$$\textbf{A long terme: } CT(0) = CV(0) = 0$$

S'il existe des facteurs **quasi-fixes** alors la courbe de coût moyen aura toujours une forme en $\cup$ du fait de la décroissance des coûts quasi-fixes moyens. Considérons que la firme ajuste ses capacités de production dans le temps.

Soit k : **la taille de l'entreprise**. A court terme, k représente de manière synthétique tous les facteurs fixes. La fonction de coût de court terme est alors donnée par :

$$C_{CT}(q; k)$$

(k correspond alors à $\bar{x}_2$, ainsi qu'aux autres facteurs fixes).

Pour un niveau donné de q_0 il existe une taille optimale de l'entreprise

$$k(q) : \textbf{ la taille optimale pour } q$$

Nous savons qu'à long terme la firme utiliser exactement cette taille optimale puis- qu'elle pourra ajuster l'utilisation de tous les facteurs de production :

$$\textbf{Coûts de long terme : } C(q) = C_{CT}(q;\ k(q))$$

Analysons un peu plus en détail cette relation **(court terme)** / **(long terme)**.

Soient un niveau de production q_0 et $k_0 = k(q_0)$, la taille optimale correspondant à q_0. Nous avons alors :

Pour q_0

$$C(q_0) = C_{CT}(q_0; k_0)$$

$$\frac{C(q_0)}{q_0} \leq \frac{C_{CT}(q_0; k_0)}{q_0}$$

$$CM_{LT}(q_0) \leq CM_{CT}(q_0; k_0)$$

Pour $q \neq q_0$

$$C(q) \leq C_{CT}(q; k_0)$$

$$\frac{C(q)}{q} \leq \frac{C_{CT}(q; k_0)}{q}$$

$$CM_{LT}(q) \leq CM_{CT}(q; k_0)$$

car pour tout niveau de production $q \neq q_0$, $k(q)$ permet de faire **au moins aussi bien que** k_0 qui n'est optimale que pour q_0. Par conséquent, la courbe de $CM_{CT}(q; k_0)$ doit être au–dessus de $CM_{LT}(q) = CM_{CT}(q; k(q))$ pour tous les niveaux de production sauf q_0.

Pour q_0 et $k \neq k_0$

$$C(q_0) \leq C_{CT}(q_0; k)$$
$$\frac{C(q_0)}{q_0} \leq \frac{C_{CT}(q_0; k)}{q_0}$$
$$CM_{LT}(q_0) \leq CM_{CT}(q_0; k)$$

De même nous pouvons calculer les tailles optimales correspondant à d'autres niveaux de production :

$$k_1 = k(q_1),\ k_2 = k(q_2),.....$$

qui sont les solutions du problème suivant pour chaque niveau de production q:

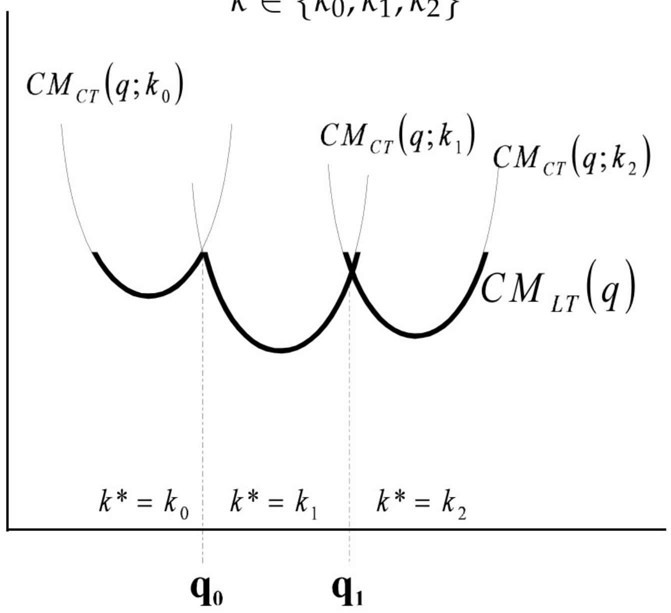
$$\min_k CT_{CT}(q, k)$$

Courbes de coûts moyens de long terme: deux cas

Petit nombre de tailles possibles

Si le choix de la taille optimale ne peut se faire totalement librement, la firme doit choisir, pour chaque niveau de production, la taille la mieux adaptée à partir d'un ensemble fini de tailles possibles;

$k \in \{k_0, k_1, k_2\}$

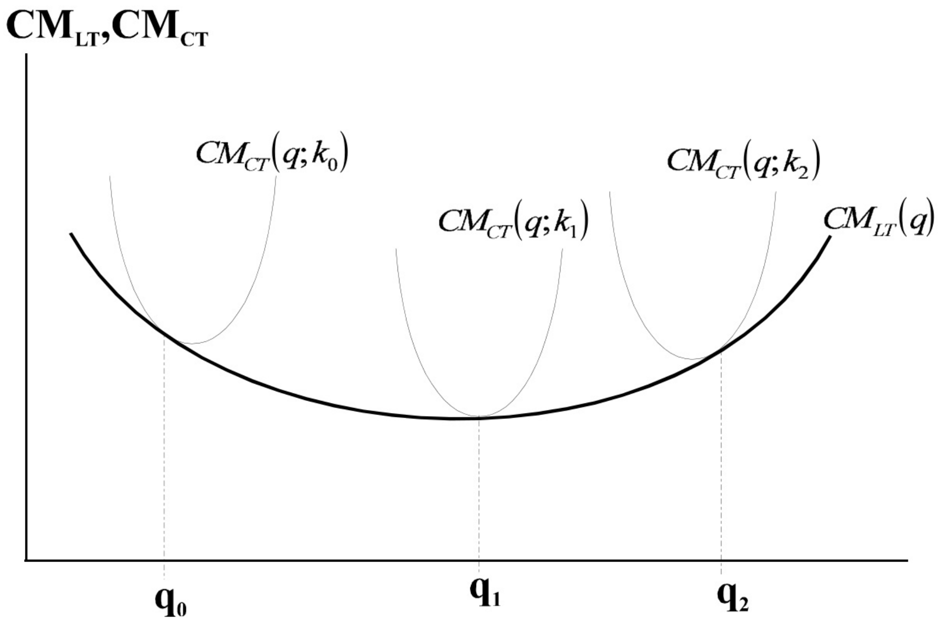


Choix parmi un ensemble fini de tailles possibles

Taille parfaitement variable

Dans ce cas la firme pourra adapter la taille de manière continue, en résolvant le problème

$$\min_k CT_{CT}(q, k)$$

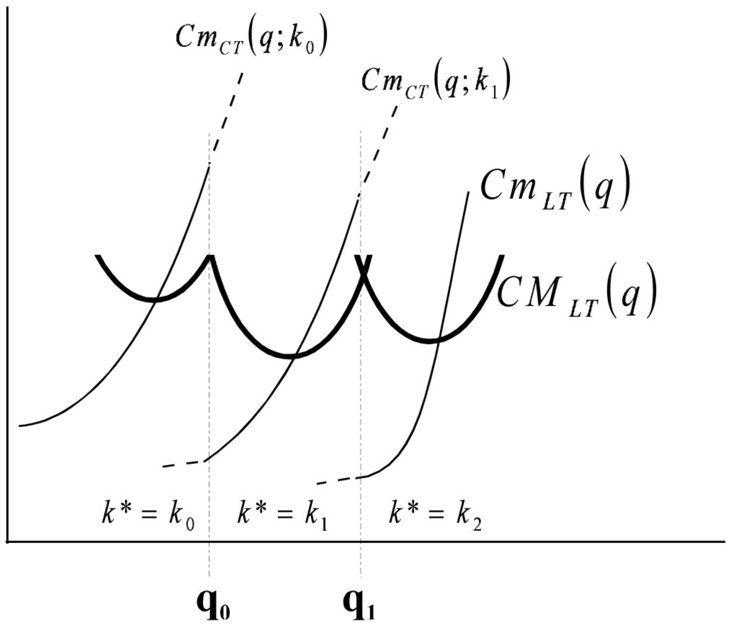


Choix parmi un ensemble continu de tailles possibles

Coûts marginaux de long terme

Le coût marginal va correspondre, pour chaque niveau de production, à la fonction de coût avec la taille optimale

$$Cm_{LT}(q) = \begin{cases} Cm_{CT}(q;k_0) & si \quad q \leq q_0 \\ Cm_{CT}(q;k_1) & si \quad q_0 < q < q_1 \\ Cm_{CT}(q;k_2) & si \quad q > q_1 \end{cases}$$



Choix parmi un ensemble continu de tailles possibles

Si l'on peut **ajuster librement** la taille optimale :

$$Cm_{CT}(q) = Cm_{CT}(q;\, k(q))$$

Microéconomie II

Complément du cours

Pr. Moad El kharrim

Université AbdelMalek Essaâdi, FSJES - Tétouan

Année Universitaire 2017-2018

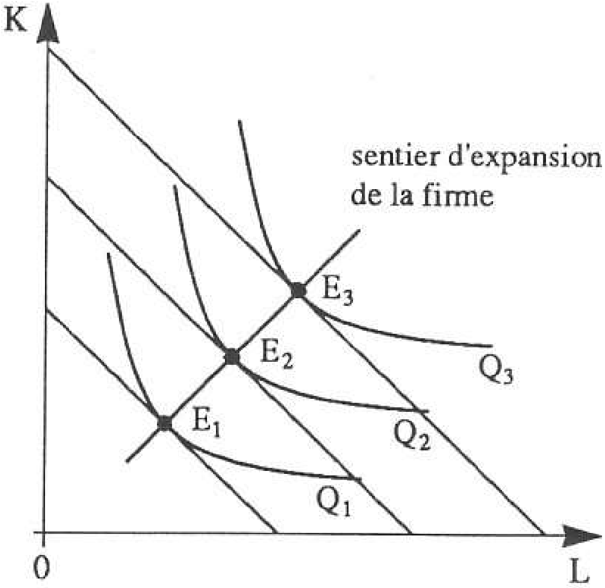
Sentier d'expansion

Le **sentier d'expansion** est le lieu géométrique des points de tangence entre la droite **d'isocoût** (isocoût : contrainte budgétaire du producteur) et **l'isoquante** (isoquant : combinaison de travail et de capital assurant un niveau donné de production).

Chaque point du sentier d'expansion constitue un optimum du producteur.

L'equation du sentier d'expansion est :

$$K = f(L)$$



Sentier d'expansion de la firme

Exercice d'application

Soit une entreprise caractérisée par la fonction de production f définie par:

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1^{3/4} x_2^{1/4}$$

1. Quelle est la nature des rendements d'échelle de cette entreprise ?

2. Déterminer l'équation du sentier d'expansion, pour $p_1 = 3$ et $p_2 = 1$.

Elasticité d'échelle

L'**élasticité d'échelle** mesure le taux relatif de croissance de l'output qu'entraîne un accroissement relatif de l'emploi de tous les inputs.

L'**élasticité d'échelle** sera inférieure, égale ou supérieure à 1 suivant que les rendements d'échelles sont, respectivement, décroissants, constants ou croissants.

Exemple

L'élasticité de production, pour un facteur donné, mesure la sensibilité de la production face à la variation de ce facteur.

Pour le facteur L:

$$e_L = \frac{\frac{\partial Q}{Q}}{\frac{\partial L}{L}} = \frac{\partial Q}{\partial L} \times \frac{L}{Q}$$

Pour le facteur K:

$$e_K = \frac{\frac{\partial Q}{Q}}{\frac{\partial K}{K}} = \frac{\partial Q}{\partial K} \times \frac{K}{Q}$$

Exercice (Partie A)

Soit la fonction du production du producteur Ahmed suivante :

$$Q\left(L, K\right) = 6L^{1/2}K^{2/3}$$

où L et K représentent les quantités de facteurs utilisées pour la production. Les facteurs L et K sont achetés au fournisseur Kamal respectivement au prix de P_L et P_K.

1. Calculer les élasticités de production. En déduire le pourcentage d'augmentation de la production induite par une hausse de **3%** des quantités de facteur K utilisé.

2. À l'aide de la question précédente, déterminer le TMST.

3. (Q) est-elle homogène ? Si oui, en déduire la nature des rendements d'échelle.

4. Représenter graphiquement les isoquantes telles que Q=20, Q=40 et Q=60.

Partie B

5. Le producteur Ahmed dispose d'un budget B_0 pour cette production. Déterminer l'équation du sentier d'expansion et les fonctions de demande de Ahmed en facteurs de production.

6. Déduire des résultats précédents la valeur du TMST aux points où Ahmed maximise sa production.

7. Calculer les coordonnées de l'optimum (noté Z) lorsque: $B_0 = 39,66$; $P_L = 9$ et $P_K = 6$.