Université Abdelmalek Essaâdi
Faculté des Sciences Juridiques,
Économiques et Sociales
Tétouan

جامعة عبد المالك السعدي
كلية العلوم القانونية و الإقتصادية و الإجتماعية
تطوان

Méthodes Économétriques (S6) - TD 3

Pr Ahmed AL FALLAH

Exercice 1:

Soit un modèle linéaire simple : $y_i = a_0 + a_1 x_i + e_i$

On donne les informations suivantes :

$$\sum x_t y_t = 184500; \sum y_t^2 = 26350; \sum x_t^2 = 1400000; \bar{x} = 60; \bar{y} = 400; n = 7;$$

Donner l'intervalle de confiance de l'estimateur $\hat{a}_0$.

Exercice 2:

Un chercheur s'intéresse à la relation liant le salaire et l'ancienneté au travail. Pour ce faire, il dispose de deux échantillons différents; 35 hommes et 32 femmes ayant le même âge, dont il relève la rémunération annuelle (y_i), exprimée en milliers de dirhams, et le nombre d'années d'ancienneté (x_i). L'estimation a conduit aux résultats suivants:

<u>*Pour les hommes:*</u>	<u>*Pour les femmes:*</u>
$y_i = 10.56 + 1.45x_i + e_i$	$y_i = 9.17 + 1.35x_i + e_i$
$R^2 = 0.48$	$R^2 = 0.40$

1. Les deux estimateurs obtenu dans les deux études sont ils significativement supérieurs à 0.6 ?, (Noter, $\hat{a}_1$ l'estimateur obtenu pour le cas des hommes, et $\hat{a}'_1$ l'estimateur obtenu pour le cas des femmes).

2. Existe-t-il une différence significative de l'impact de l'ancienneté sur le salaire des hommes et des femmes ?

Loi de Student avec k degrés de liberté
Quantiles d'ordre $1-\alpha$

n	α										
	0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.0025	0.0010	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

TD 3

Ex 1

$\hat{a}_0 = \bar{y} - \hat{a}_1 \bar{x}$

calcul de $\hat{a}_1$: $\hat{a}_1 = \dfrac{\sum x_t y_t - n\bar{x}\bar{y}}{\sum x_t^2 - n\bar{x}^2}$

$\hat{a}_1 = \dfrac{184500 - 7\times 60\times 400}{1400000 - 7\times(60)^2} = \underline{0{,}012}$

$\hat{a}_0 = 400 - 0{,}012\times 60 = \underline{399{,}28}$

$\hat{a}_0 \in \left[\hat{a}_0 \pm t_{n-2}^{\alpha/2}\, \hat{\sigma}_{\hat{a}_0}\right]$ avec $t_5^{0{,}025} = 2{,}571$ (voir table)

calcul du $\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}$:

On a $\hat{\sigma}_{\hat{a}_0}^2 = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left[\dfrac{1}{T} + \dfrac{\bar{x}^2}{\sum x_t^2 - n\bar{x}^2}\right]$

$= \hat{\sigma}_\varepsilon^2 / T + \bar{x}^2\, \hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2$

Calcul du $\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}$:

on a $F = \dfrac{r_{x,y}^2}{\dfrac{1 - r_{x,y}^2}{n-2}} = \left(t_{\hat{a}_1}\right)^2 = \left(\dfrac{\hat{a}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}}\right)^2$

et $r_{x,y}^2 = \left[\dfrac{\sum x_t y_t - n\bar{x}\bar{y}}{\sqrt{\sum x_t^2 - n\bar{x}^2}\sqrt{\sum y_t^2 - n\bar{y}^2}}\right]^2$

$= \dfrac{(184500 - 7\times 60 \times 400)^2}{(1400000 - 7\times 60^2)(26350 - 7\times 400^2)} = 0,1722$

$\Rightarrow F = \dfrac{0,1722}{\dfrac{1 - 0,1722}{5}} = \left(\dfrac{\hat{a}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}}\right)^2 = \left(\dfrac{0,012}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}}\right)^2$

$\Rightarrow 1,04 = \dfrac{0,00014}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2}$

$$\boxed{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2 = \dfrac{0,00014}{1,04} = 0,000134}$$

on déduit $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$: on a ;

$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2 = \dfrac{\hat{\sigma}_\varepsilon^2}{\sum x_t^2 - n\bar{x}^2} \Rightarrow \hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \left(\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}^2\right)\left(\sum x_t^2 - n\bar{x}^2\right)$

$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 0{,}000134 \times (143800 - 7 \times 60^2)$

$$\boxed{\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = 184{,}22}$$

<u>donc</u> : $\hat{\sigma}^2_{\hat{a}_0} = \hat{\sigma}_\varepsilon^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\bar{x}^2}{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2} \right]$

$$= \hat{\sigma}_\varepsilon^2 / n + \bar{x}^2 \, \hat{\sigma}^2_{\hat{a}_1}$$

$$= 184{,}22/7 + 60^2 \times (0{,}000134)$$

$$= \underline{\underline{26{,}8}}$$

<u>Intervalle</u> :
de confiance

$$\hat{a}_0 \in \left[399{,}28 \pm 2{,}571 \times \sqrt{26{,}8} \right]$$

$$\boxed{\hat{a}_0 \in [\, 385{,}97 \,;\, 412{,}59 \,]}$$

Ex 2 :

test unilatéral :

hommes : $H_0 : a_1 = 0,6$

$H_1 : a_1 > 0,6$

$$t^*_{a_1} = \frac{|1,45 - 0,6|}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}} = ?$$

unilatéral.

calcul de $\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}$:

on a $$F = \frac{R^2}{\frac{1-R^2}{n-2}} = \left(\frac{\hat{a}_1}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{0,48}{\frac{1-0,48}{35-2}} = \left(\frac{1,45}{\hat{\sigma}_{\hat{a}_1}}\right)^2$$

$\hat{\sigma}_{\hat{a}_1} = 0{,}2627$

$t^*_{\hat{a}_1} = \dfrac{|1{,}45 - 0{,}6|}{0{,}2627} = 3{,}2356 > t_{33}^{0{,}05} = 1{,}697$

$\hat{a}_1$ est significativement supérieur à 0,6

pour les femmes :

$H_0 : \hat{a}'_1 = 0{,}6$

$H_1 : \hat{a}'_1 > 0{,}6$

$t^*_{\hat{a}'_1} = \dfrac{|1{,}35 - 0{,}6|}{\hat{\sigma}'_{\hat{a}_1}}$

de même : $F = \dfrac{0{,}40}{\dfrac{1 - 0{,}40}{32 - 2}} = \left(\dfrac{1{,}35}{\hat{\sigma}_{\hat{a}'_1}}\right)^2$

$\hat{\sigma}_{\hat{a}'_1} = 0{,}3018$

$t^*_{\hat{a}'_1} = \dfrac{|1{,}35 - 0{,}6|}{0{,}3018} = 2{,}485 > t_{32}^{0{,}05} = 1{,}697$

$\hat{a}'_1$ est significativement supérieur à 0,6

(2) Il est demandé de tester la significativité de la différence existante entre les t^* empiriques des hommes et des femmes car ce sont deux échantillons différents et 2 expériences (estimations) indépendantes.

On suppose : (d) la différence entre les 2 échantillons.

$$\begin{cases} H_0 : a'_1 = a_1 \\ H_1 : a'_1 \neq a_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} H_0 : d = a_1 - a'_1 = 0 \\ H_1 : d = a_1 - a'_1 \neq 0 \end{cases}$$

$$t^*_d = \frac{|\hat{d} - d|}{\hat{\sigma}_{\hat{d}}} = \frac{|(\hat{a}_1 - \hat{a}'_1) - (a_1 - a'_1)|}{\hat{\sigma}_{(\hat{a}_1 - \hat{a}'_1)}} = \frac{|\hat{a}_1 - \hat{a}'_1|}{\hat{\sigma}_{(\hat{a}_1 - \hat{a}'_1)}}$$

Calcul de $\hat{\sigma}_{(\hat{a}_1 - \hat{a}'_1)}$:

$$\hat{\sigma}^2_{(\hat{a}_1 - \hat{a}'_1)} = \hat{\sigma}^2_{\hat{a}_1} + \hat{\sigma}^2_{\hat{a}'_1} - 2\,\hat{\sigma}_{\hat{a}_1, \hat{a}'_1}$$

$\mathrm{cov}(\hat{a}_1, \hat{a}'_1)$

rappel : $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2\,\mathrm{cov}(X, Y)$

donc $\hat{\sigma}_{(\hat{a}_1 - \hat{a}'_1)} = \sqrt{(0,2627)^2 + (0,3018)^2} = 0,400$

$cov(\hat{a}_1, \hat{a}'_1) = 0$ car les 2 estimations sont indépendants expertients

$$\Rightarrow t^*_d = \frac{|\hat{a}_1 - \hat{a}'_1|}{\hat{\sigma}_d} = \frac{|\hat{a}_1 - \hat{a}'_1|}{\hat{\sigma}_{(\hat{a}_1 - \hat{a}'_1)}} = \frac{|1,45 - 1,35|}{0,4}$$

$$t^*_d = 0,25 < t^{0,025}_{\substack{63 \\ (n_1+n_2-4)}} = 2$$

avec : $(n_1 - 2) + (n_2 - 2) =$

$(35-2) + (32-2) = 63$

on accepte H_0 ; donc il n'y a pas une différence significative de l'impact de l'ancienté sur le salaire des hommes et des femmes ;

100% COURS
MCours.com
Cours et mémoires gratuits
mcourscom@gmail.com