Contenu du cours

5. Biens publics et externalités

5.1. Biens publics

5.1.1. Détermination de la quantité optimale des biens publics
5.1.2. Fourniture efficace des biens publics
5.1.3. Fourniture des biens publics par le vote

5.2. Les externalités

5.2.1. Exemple d'une externalité négative de production
5.2.2. Correction des externalités négatives
5.2.3. Exemple d'une externalité positive

Introduction

Qu’est-ce que la science économique ?

D’aucuns définissent la science économique comme l’étude de l’allocation des ressources rares de l’homme pour la réalisation d’objectifs alternatifs. Cette définition est certes correcte mais demande quelques précisions pour que le champ d’application de l’économie soit bien circonscrit. Et si tel n’est pas le cas, on risquerait bien de la confondre à d’autres disciplines telles que la science politique ou la médecine, car le problème d’allocation des ressources revêt un caractère général et se rapporte à l’existence même de l’homme.

L’économie peut être définie comme une discipline des sciences sociales dont l’objet d’étude est l’allocation des ressources rares (ou limitées) de l’homme à la satisfaction de ses besoins multiples et concurrents. Elle s’intéresse essentiellement aux activités de production, de distribution et de consommation des biens ainsi qu’aux institutions, aux cadres réglementaires et à l’environnement facilitant ces activités.

En tant que discipline scientifique, l’économie se propose d’expliquer les déterminants des comportements des agents économiques et de clarifier les relations qui existent entre les variables économiques. Pour cette fin, elle utilise à la fois des analyses théoriques et empiriques. Les analyses théoriques ont un caractère déductif puisque se construisant sur un corps d’hypothèses à caractère général ; les analyses empiriques par contre se fondent sur des données statistiques réelles. Toutefois, ces deux types d’analyse ne s’excluent pas en ce que les analyses théoriques servent de fil conducteur aux analyses empiriques et ces dernières permettent de valider les théories existantes.

L’analyse économique procède de deux approches : positive et normative. L’approche positive consiste à dire *ce qui est* alors que l’approche normative parle de *ce qui devrait être*. Autrement dit, une analyse qui se fonde sur l’approche positive procède de la description d’une situation particulière ou d’un phénomène donné alors qu’une étude qui se fonde sur l’approche normative propose une explication de *ce qui devrait être fait* pour que l’optimum ou l’équilibre économique soit réalisé.

Il importe de noter que les mathématiques sont devenues le langage privilégié des analyses économiques. Elles permettent non seulement de réduire la subjectivité dans les analyses et prises de position mais aussi de rendre rigoureuses les analyses. En effet, avec la clarté et la logique qu’elles apportent, les mathématiques permettent de rendre cohérent et rigoureux le raisonnement développé.

Pour se rapprocher de plus en plus de la réalité, les économistes font usage de la modélisation ou des modèles. Ces derniers sont des schémas simplifiés ou des maquettes que construisent les économistes – à l’aide des équations – afin de se faire une idée plus ou moins précise sur un phénomène économique donné. Ils facilitent ainsi la mise en évidence des aspects les plus saillants d’un phénomène économique ou des principales relations qui existent entre les variables économiques.

Qu’est-ce que la microéconomie ?

La microéconomie étudie comment les agents économiques – pris individuellement – prennent leurs décisions de production ou de consommation, et elle s’intéresse aux relations qui existent entre celles-ci. Ces décisions individuelles ainsi que leurs interrelations se répercutent au niveau macroéconomique dans ce sens que les agrégats macroéconomiques ne sont rien d’autre que des sommes de grandeurs microéconomiques. On peut à juste titre, considérer *la microéconomie comme l’étude des arbres et la macroéconomie comme l’étude de la forêt*.

Du point de vue de la problématique, il y a lieu de noter que la microéconomie s'intéresse essentiellement aux problèmes d'allocation des ressources par les individus alors que la macroéconomie s'intéresse aux problèmes de régulation du cours de l'activité économique. La théorie du consommateur propose une explication des choix que devrait opérer un individu compte tenu de toutes les contraintes qui restreignent sa liberté d'action alors que la théorie keynésienne du multiplicateur se propose d'expliquer comment est-ce qu'une politique budgétaire expansionniste peut relancer l'économie par une action sur la demande globale. La problématique de base de la microéconomie est la recherche de l'optimum et celle de la macroéconomie est la réalisation d'un équilibre global jugé satisfaisants aux yeux de tous les acteurs de l'économie.

La modélisation en économie

Les phénomènes étudiés par la science économique ne sont pas si transparents qu'ils ne peuvent le paraître aux yeux des observateurs peu avertis ; ils sont inextricablement entremêlés entre eux que l'on ne peut prétendre les saisir de manière parfaite. Ce faisant, l'analyste – économiste se doit de les appréhender à travers des grilles de lecture ou d'interprétation qui se fondent sur les signaux les plus distinctifs que le monde réel émet. Compte tenu de l'objectif poursuivi par l'étude ou par la recherche, l'analyste doit se faire une représentation simplifiée et adéquate de la réalité pour bien la comprendre, bien l'expliquer, et au besoin, prévoir les évènements.

Pour étudier les phénomènes qui retiennent leur attention, les économistes se servent de plus en plus des modèles élaborés à partir des corps d'hypothèses décrivant – de manière idéalisée – les comportements des agents économiques et les mécanismes selon lesquels fonctionne le système économique. Ainsi, un modèle peut se définir comme un schéma simplifié ou une maquette de la réalité, et à ce titre, il n'est pas sensé être une copie conforme de la réalité. Sa valeur ne provient pas essentiellement du nombre de possibilités de vérification empirique qu'on peut lui coller mais plutôt de sa capacité à résister aux critiques et à toutes les tentatives envisagées pour la remettre en cause.

Il convient de distinguer les modèles à formulation littéraire des modèles formulés à l'aide d'équations. Alors que certains modèles se construisent sur une suite logique de propositions qui ne sont pas exprimées en termes mathématiques, il y en a d'autres qui se construisent essentiellement sur des équations qui mettent en relation différentes variables et différents agents économiques. Le côté fort de ces modèles mathématiques est de focaliser l'attention sur un ensemble bien défini de variables, et de les mettre en musique afin de tirer les conclusions qui découlent des hypothèses formulées au départ de la réflexion.

1

Analyse du comportement du consommateur

La théorie néoclassique du comportement du consommateur se propose d'expliquer comment se forme la demande individuelle des biens. A cet égard, elle postule que tout individu est rationnel dans son processus de prise de décisions. Ceci suppose donc qu'il est soumis à un ensemble d'axiomes établissant ou caractérisant son comportement : - axiome de comparaison ; - axiome réflexivité ; - axiome de transitivité. Il faut noter que ces axiomes garantissent l'existence de la fonction d'utilité du consommateur.

Les préférences variant d'une personne à une autre, les biens étant onéreux et les individus n'ayant pas le même niveau de revenu, la théorie suggère qu'un consommateur rationnel est celui qui, dans son ensemble budgétaire ou ensemble de consommation, arrive à identifier et à consommer le panier de biens lui procurant le maximum de satisfaction.

1.1. Analyse des possibilités d'action du consommateur

Dans l'analyse du comportement du consommateur, il s'avère important de définir en premier lieu ses possibilités d'action compte tenu de son revenu et des prix en vigueur sur le marché. Une personne qui dispose d'un revenu monétaire de 100 ne peut pas se permettre d'acheter un bien qui 101 UM ou plus. Par contre, il peut se permettre d'acheter – au même moment – deux unités d'un bien qui coûte 30 UM et une unité d'un autre qui coûte 40 UM.

Pour bien étudier les choix ou décisions du consommateur, il faut dès le départ, savoir ce qu'il peut faire sur le marché avec le pouvoir d'achat que lui confère son revenu monétaire. Ce revient à étudier l'ensemble des éléments qui restreignent la liberté d'action du consommateur. La première contrainte qui s'impose à lui est une contrainte financière car les biens économiques sont, par définition, des biens onéreux. La nature peut également imposer des contraintes au consommateur selon que le bien qu'il souhaite consommer est disponible à des moments de temps précis (c'est le cas des fruits saisonniers) ou à des endroits précis (c'est le cas du sable à utiliser pour la construction).

D'autres contraintes aux possibilités d'action du consommateur peuvent résulter des mesures prises par l'Etat ou les collectivités publiques. En effet, la levée d'une taxe sur la vente d'un bien, la fixation des quotas dans la consommation de certains biens et l'interdiction de consommer certains biens sont autant de mesures qui ne vont pas sans conséquence sur l'aptitude d'un individu à assouvir ses besoins. Il s'avère donc important de définir l'ensemble de faisabilité ou des possibilités d'action du consommateur, c'est-à-dire l'ensemble des paniers de biens qui lui sont accessibles, car c'est à l'intérieur de cet ensemble qu'il faudra rechercher le meilleur des paniers (de biens) à ses yeux.

Qu'entend-on par ensemble budgétaire ?

Par ensemble budgétaire *EB*, on entend l'ensemble des paniers de biens que le consommateur peut se procurer compte tenu de son revenu et des prix des biens sur le marché. Autrement dit, c'est l'ensemble des paniers de biens financièrement réalisables ou accessibles au consommateur. Considérons le tableau ci-après.

Bien 1	Prix du bien 1	Bien 2	Prix du bien 2	Dépense totale	Revenu	Observation
x_1	p_1	x_2	p_2	$D = p_1x_1 + p_2x_2$	M	
12	10	21	5	225	200	Inaccessible
11	10	20	5	210	200	Inaccessible
10	10	20	5	200	200	Accessible
9	10	18	5	180	200	Accessible
8	10	18	5	170	200	Accessible
8	10	17	5	165	200	Accessible
7	10	16	5	150	200	Accessible
6	10	15	5	135	200	Accessible

Il ressort de ce tableau que les paniers accessibles aux consommateurs sont ceux qui suscitent une dépense inférieure ou égale au revenu et les paniers inaccessibles sont ceux qui entraînent une dépense totale supérieure au revenu alloué à la consommation de l'individu. De manière formelle, on peut définir l'ensemble budgétaire *EB* comme suit. Soit un individu qui est supposé acheter *n* biens et dont le revenu est *m*. Si les prix des biens sur le marché sont $p_1, p_2, \ldots, p_n$, son ensemble budgétaire se définit en compréhension de la sorte :

$$EB = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n_+ \text{ telle que } m \geq p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n\}.$$

Le panier de biens $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ peut être représenté par un vecteur colonne *X* [ce qui veut dire que $X' = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$] et les prix peuvent être représentés par le vecteur ligne *P*. Avec cette notation, l'ensemble budgétaire peut être défini de la sorte :

$$EB = \{X \in R^n_+ \text{ telle que } m \geq PX\}.$$

L'appartenance des paniers ou vecteurs de biens à l'ensemble R^n_+ laisse entendre que les quantités de biens ne peuvent être que supérieures ou égales à zéro (contrainte de non négativité). Au regard de cette définition, on peut dire que c'est l'ensemble des paniers qui ne coûtent pas plus que le revenu de l'individu, c'est-à-dire qui coûtent moins ou exactement *m*. Si le nombre de biens est de deux, la contrainte budgétaire s'écrirait :

$$m \geq p_1x_1 + p_2x_2.$$

Pour représenter graphiquement l'ensemble budgétaire, il faudra chercher à tracer sa frontière supérieure. A cet effet, l'inégalité large de la contrainte sera remplacée par le signe d'égalité ($m = p_1x_1 + p_2x_2$) et ensuite, il sera question d'identifier l'ordonnée à l'origine et l'abscisse à l'origine. L'ordonnée à l'origine x_2^o est obtenue en renvoyant dans $m = p_1x_1 + p_2x_2$ la valeur $x_1 = 0$. Celle-ci est égale au rapport du revenu sur le prix du bien 2, soit m/p_2 et s'interprète comme étant la quantité maximale du bien 2 que l'individu peut acheter sur le marché compte tenu de son revenu. L'abscisse à l'origine x_1^o est obtenue en supposant que $x_2 = 0$. Elle donne la quantité maximale du bien 1 que l'individu peut acquérir sur le marché compte tenu de son revenu, c'est-à-dire m/p_1. En reliant l'ordonnée à l'abscisse à l'origine par un segment de droite, on obtient la frontière supérieure de l'ensemble budgétaire qu'on appelle droite de budget.

En résolvant la contrainte budgétaire par rapport à x_2, on obtient l'équation de la droite de budget.

$$x_2 = (m/p_2) - (p_1/p_2)x_1.$$

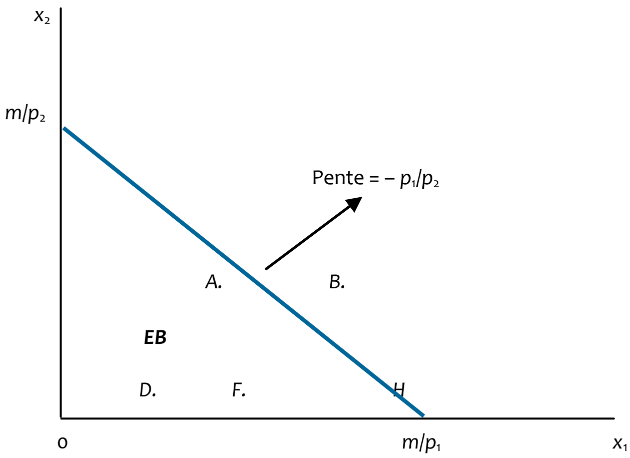
La pente de la droite du budget est négative parce que l'accroissement de la quantité achetée de x_1 (Δx_1) doit se faire accompagné d'une baisse de x_2 ($-\Delta x_2$) pour que la dépense de l'individu soit maintenue constante. Tout en admettant que les prix des biens sont constants, prenons la variation totale (ou la différentielle totale) de *m* :

$$\Delta m = p_1\Delta x_1 + p_2\Delta x_2 = 0 \qquad (\text{ou } dm = p_1dx_1 + p_2dx_2 = 0).$$

La variation totale (ou la différentielle totale) est égale à zéro car le revenu est constant. En arrangeant les éléments de cette dernière relation, on arrive à établir que :

$$\Delta x_2/\Delta x_1 = -p_1/p_2 \qquad (\text{ou } dx_2/dx_1 = -p_1/p_2).$$

La pente est bel et bien négative et elle est égale au rapport des prix des biens 1 et 2. Ce rapport de prix qu'on appelle aussi prix relatif s'interprète comme le taux de substitution du marché en ce qu'il renseigne sur le nombre d'unité de bien 2 qu'il faut sacrifier pour accroître la quantité du bien tout en respectant le revenu m. L'ensemble budgétaire d'un individu qui est appelé à acheter les biens x_1 et x_2 sur le marché respectivement aux prix p_1 et p_2 se présente de la manière ci-après.



Les paniers de biens *A*, *D*, *F* et *H* sont financières accessibles puisqu'ils appartiennent à l'ensemble budgétaire *EB* alors que le panier *B* ne l'est pas. Les paniers *A*, *D* et *F* donnent lieu à des dépenses inférieures au revenu *m*, le panier *H* donne lieu à une dépense égale à *m* et le panier *B* entraîne une dépense supérieure à *m* (il est d'ailleurs en-dehors de l'ensemble *EB*). Si le revenu de l'individu est égal à 200 et que les biens 1 et 2 coûtent respectivement 10 UM et 5 UM, l'ordonnée et l'abscisse à l'origine de sa droite de budget seront :

$$x_2^{o} = m/p_2 = 40 \quad \text{et} \quad x_1^{o} = m/p_1 = 20.$$

La pente de sa droite de budget est égale –2 (le taux de substitution du marché est égal à 2). Ainsi, pour disposer d'une unité en plus de x_1, l'individu devra sacrifier 2 unités de x_2.

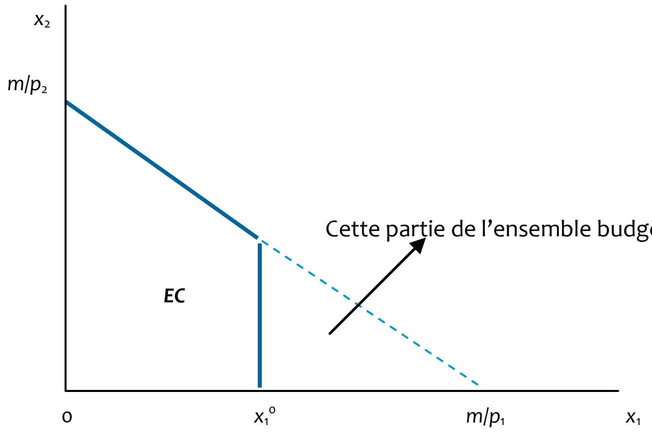
Qu'entend-on par ensemble de consommation ?

Puisque les biens recherchés ne sont pas toujours disponibles sur le marché et que l'Etat peut réglementer la consommation d'un bien ou d'une gamme de biens, à la contrainte financière du consommateur, il peut se greffer d'autres contraintes. Le contingentement de la consommation d'un bien ou la levée d'une taxe par l'Etat, modifie les possibilités de consommation et donne lieu à un ensemble de faisabilité différent de *EB*.

Ainsi, l'ensemble de consommation contient les paniers de biens accessibles à l'individu compte de son pouvoir d'achat et de toutes les contraintes auxquelles il est censé faire face : contraintes imposées par l'Etat, contrainte de disponibilité des biens, contraintes naturelles. L'ensemble de consommation est dans ces conditions, un sous-ensemble de l'ensemble budgétaire. Ils se confondent lorsque seule la contrainte financière détermine les possibilités de consommation de l'individu. Soit le tableau ci-après.

Bien 1	Prix du bien 1	Bien 2	Prix du bien 2	Dépense théorique	Revenu	Décision de l'Etat	Observation
X_1	p_1	x_2	p_2	$D = p_1x_1 + p_2x_2$	m		
8	10	18	5	170	200	Personne ne peut consommer plus de 7 unités de x_1.	Inaccessible
8	10	17	5	165	200		Inaccessible
7	10	16	5	150	200		Accessible
6	10	15	5	135	200		Accessible

On constate que pour tous les paniers, la dépense théorique est inférieure au revenu, mais les deux premiers paniers ne sont pas accessibles parce que contenant plus de 7 unités du bien 1 (non respect de la norme fixée par l'Etat). Lorsque l'Etat décide que la consommation du bien 1 ne peut pas dépasser x_1^o, quantité inférieure à la quantité maximale que l'individu peut acheter (m/p_1), son ensemble de consommation se présentera comme suit.



L'ensemble de consommation *EC* représenté ci-dessus est un sous-ensemble de l'ensemble budgétaire *EB*. La partie complémentaire de *EC* dans *EB* correspond à la partie qui n'est plus accessible à l'individu à la suite du contingentement imposé par l'Etat.

On peut également s'imaginer ce qui se passerait si l'Etat décide de lever une taxe t sur le bien 1 lorsque la quantité demandée de celui-ci dépasse la quantité x_1^o. La taxe étant une charge, les entreprises vendant le bien 1 devront revoir à la hausse le prix du bien pour les quantités supérieures à la norme fixée par l'Etat. Ainsi, pour une consommation du bien 1 inférieure ou égale à la norme, la dépense totale de l'individu D sera donnée par :

$$D = p_1x_1 + p_2x_2$$

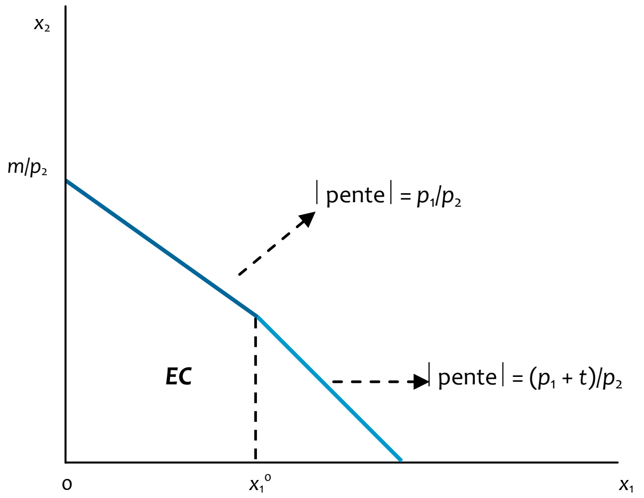
En revanche, pour une consommation du bien 1 supérieure à la norme, elle sera donnée par la somme :

$$D = p_1x_1^o + (p_1 + t)(x_1 - x_1^o) + p_2x_2$$

Dans ces conditions, la pente de la droite du budget sera – en valeur absolue – égale à p_1/p_2 pour les quantités du bien 1 inférieure à x_1^o et elle sera de $(p_1 + t)/p_2$. Cette situation s'illustre bien à travers le tableau ci-après.

Bien 1	Prix du bien 1	Bien 2	Prix du Bien 2	Décision de l'Etat	Dépense avant taxe	Dépense après taxe	Observation
x_1	p_1	x_2	p_2	Si la consommation de x_1 dépasse 7 unités, il faudra supporter une taxe de 2 UM.			
10	10	19	5		195	201	Inaccessible
8	10	17	5		165	167	Accessible
7	10	16	5		150	150	Accessible
6	10	15	5		135	135	Accessible

Il ressort de ce tableau que pour les paniers contenant une quantité du bien 1 supérieure à la norme, la dépense après l'intervention de l'Etat sera supérieure à la dépense avant l'intervention. Le panier de biens (x_1 ; x_2) = (10 ; 19) qui, initialement était accessible, ne l'est plus. Graphiquement, la situation se présentera de la sorte.



L'ensemble de consommation *EC* est un sous-ensemble de l'ensemble budgétaire *EB* car tous les points de *EC* appartiennent à *EB* mais l'inverse n'est pas vrai. Ainsi, l'effet de l'intervention de l'Etat est de réduire l'ensemble de faisabilité du consommateur.

1.2. Préférences du consommateur et fonction d'utilité

1.2.1. Les préférences du consommateur

Le consommateur est supposé avoir des préférences à l'égard des paniers de biens appartenant à son ensemble budgétaire *EB* ou ensemble de consommation *EC*. Ainsi, il doit être capable de dire si le panier *X* est préféré ou faiblement préféré (ou est au moins aussi désirable que) au panier *Y*, ou inversement. Autrement dit, il doit être en mesure d'établir un certain *préordre* dans ses préférences pour qu'il soit cohérent. Cette cohérence est le fait des trois axiomes évoqués plus haut.

Axiome de comparaison. ∀ *X* et *Y* appartenant à *EC*, soit *X* est préféré à *Y*, soit *Y* est préféré à *X*, soit les deux simultanément. Cet axiome suggère que le consommateur doit se prononcer sur sa consommation, c'est-à-dire comparer deux paniers de manière à déterminer lequel il préfère.

Axiome de réflexivité. ∀ *X* appartenant à *EC*, *X* est au moins aussi désirable que *X*. Ce deuxième axiome est évident et suggère qu'un panier de biens présente des particularités qui déterminent sa valeur relative aux yeux du consommateur.

Axiome de transitivité. ∀ *X*, *Y* et *Z* appartenant à *EC*, si *X* est préféré à *Y* et *Y* préféré à *Z*, alors *X* est préféré à *Z*. Ce troisième axiome assure la cohérence des choix du consommateur. Il lui interdit de se contredire dans son processus de prise de décisions.

La courbe d'indifférence

Si le consommateur se trouve en face de deux biens substituables : x_1 et x_2, on peut identifier ou constituer – selon une certaine règle – un ensemble de paniers (x_1 ; x_2) permettant au consommateur de réaliser un même niveau de satisfaction. Admettons que la situation de départ de l'individu corresponde au panier *A* du tableau ci-dessous.

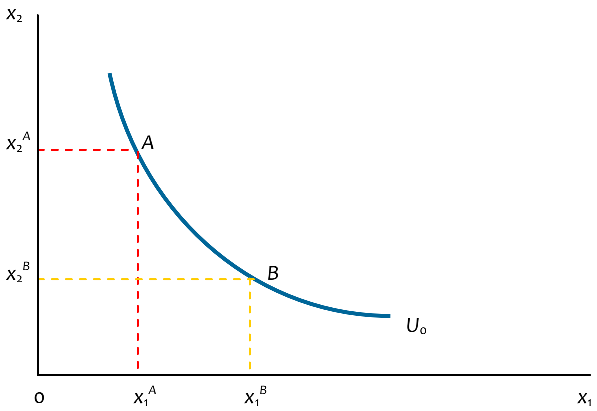
Panier	Bien 1	Bien 2	Observation
	x_1	x_2	
A	15	10	Niveau de départ
B	17	09	Même satisfaction que *A*
C	20	10	Satisfaction supérieure à *A*
D	10	09	Satisfaction inférieure à *A*

Le panier *B* procure au consommateur la même satisfaction que le panier *A* parce que le panier *B* contient un peu plus d'unités de bien 1 et un peu moins d'unités du bien 2 que le panier *A*. Le passage de *A* à *B* qui ne modifie en rien le niveau de satisfaction traduit un mécanisme de substitution entre bien. Pour avoir un même niveau de satisfaction, l'individu décide de baisser la quantité consommée du bien 2 ($\Delta x_2 = -1$) et d'accroître celle du bien 1 ($\Delta x_1 = 2$). On peut donc dire qu'aux yeux de l'individu, une unité de bien 2 équivaut à deux unités du bien 1.

Le panier *C* procure au consommateur une plus grande satisfaction que le panier *A* car ils contiennent la même quantité du bien 2 et le panier *C* contient plus d'unités du bien 1. Autrement dit, le passage du panier *A* au panier *C* suppose un accroissement de niveau de vie ou de satisfaction car la quantité consommée du bien 2 n'a pas changé ($\Delta x_2 = 0$) et celle du bien 1 a augmenté ($\Delta x_1 = 5$). Le panier *D* procure une satisfaction moindre que le panier *A* car il contient moins d'unités des deux biens.

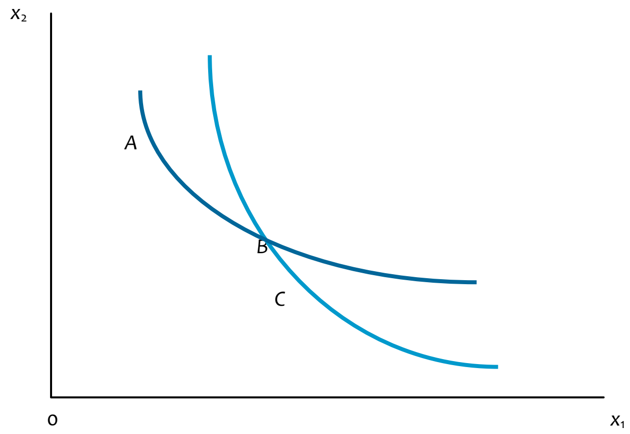
En partant de cet ensemble d'observations, il est possible de représenter graphiquement le lieu géométrique des différents paniers de biens qui procurent au consommateur un même niveau de satisfaction. Ce lieu géométrique est appelé courbe d'indifférence en ce que l'individu – du point de vue de la satisfaction – est indifférent entre les paniers de biens qui forme la courbe.

Pour des biens imparfaitement substituables (le cas envisagé ci-dessus), la courbe d'indifférence est convexe par rapport à l'origine des axes. Cette allure est justifiée par le mécanisme de substitution qui s'opère lorsque l'on passe d'un panier de biens à un autre sans modifier le niveau de satisfaction de l'individu.



Les paniers *A* et *B* qui sont sur une même courbe d'indifférence, procure à l'individu un même niveau de satisfaction (U_0). Le passage de *A* à *B* correspond à une diminution de la quantité du bien 2 ($-\Delta x_2$) et une augmentation de la quantité du bien 1 (Δx_1).

Il faut noter que deux courbes d'indifférence ne correspondant pas à un même niveau d'utilité, ne peuvent jamais se couper. En effet, comme nous l'avons fait remarquer avec l'axiome de transitivité, les choix d'un consommateur rationnel doivent être cohérents. Il ne peut pas dire que le panier *A* est préféré au panier *B* et dire au même moment que le panier *C* est préféré au panier *A* alors qu'à ses yeux, le panier *B* équivaut au panier *C*. De même, il ne peut pas soutenir que le panier *A* est préféré au panier *B* alors que le panier *A* équivaut au panier *C* et ce dernier équivaut au panier *B*. Cette contradiction apparaît clairement dans le graphique suivant.



Au regard de leurs compositions respectives ($x_1^A > x_1^B$ et $x_2^A > x_2^B$), on dit que le panier *A* est préféré au panier *B*. Cependant, le panier *C* qui se trouve au point de croisement des deux courbes d'indifférence équivaut à la fois aux paniers *A* et *B*, ce qui est une contradiction.

L'utilité marginale et le taux marginal de substitution

Le niveau de satisfaction de l'individu dépendant des quantités de biens consommées, on peut établir la relation suivante :

$$U = U(x_1, x_2).$$

Etant donné que ce sont les quantités de biens qui déterminent le niveau de satisfaction, une variation de la quantité de bien consommée entraîne une variation de la satisfaction. L'effet de l'accroissement d'une unité (ou d'un accroissement infinitésimal) du bien 1 ou bien 2 sur l'utilité ou la satisfaction totale de l'individu est appelé utilité marginale du bien.

Bien 1	Utilité totale	Utilité marginale
x_1	U	Umx_1
11	27	–
12	31	4
13	33	2

L'utilité marginale du bien 1 est donnée par le rapport des variations de l'utilité totale et de la quantité consommée du bien 1, soit :

$$Umx_1 = \Delta U/\Delta x_1 \quad (\text{ou } Umx_1 = dU/dx_1).$$

Il ressort de l'observation que dans un processus de consommation, la valeur relative ou l'utilité marginale d'un bien évolue de manière décroissante (loi de Gossen). L'anecdote utilisée pour rendre compte de cet état de choses est celui d'une personne en provenance dans lieu désertique et qui désir étancher sa soif en prenant de l'eau. L'intérêt qu'il va accorder au premier verre sera plus grand que celui qu'il va accorder au second verre, et ainsi de suite.

Tout le long d'une courbe d'indifférence, le niveau de satisfaction est constant, c'est-à-dire égal à U_0. Prenons la variation totale ou la différentielle totale de U_0 :

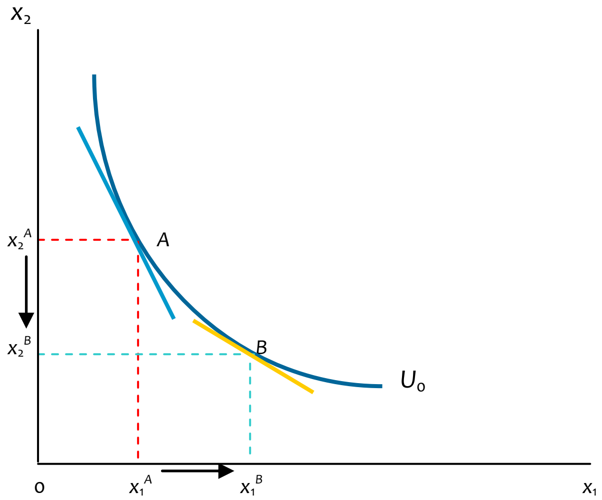
$$\Delta U_0 = Umx_1\Delta x_1 + Umx_2\Delta x_2 = 0 \quad (\text{ou } dU_0 = Umx_1dx_1 + Umx_2dx_2 = 0).$$

En aménageant les termes de cette relation, on arrive à l'expression suivante :

$$-\Delta x_2/\Delta x_1 = Umx_1/Umx_2 \qquad (\text{ou } -dx_2/dx_1 = Umx_1/Umx_2).$$

Cette expression qui mesure la pente de la tangente menée en un point de la courbe d'indifférence est appelée taux marginal de substitution. Etant donné qu'il correspond au rapport des variations des quantités de biens consommées, on le considère comme étant l'expression des préférences relatives des biens aux yeux du consommateur.

Lorsqu'il ajuste les quantités de biens consommées pour maintenir inchangé son niveau de satisfaction, le consommateur se rapporte à l'utilité marginale des biens qu'il ajuste. La perte d'utilité enregistrée lorsqu'il diminue la quantité consommée du bien 2 doit être exactement compensée par le gain d'utilité résultant de l'accroissement de la quantité consommée du bien 1 pour rester sur la même courbe d'indifférence.



Le passage du panier A au panier B qui suppose une modification des quantités consommés des deux biens, se traduit aussi par une baisse de la pente de la tangente menée à la courbe d'indifférence (baisse du taux marginal de substitution). Pour comprendre cet état de choses, il y a lieu de se rapporter à la loi de Gossen (loi de la décroissance de l'utilité marginale). Par construction, le taux marginal de substitution *TmS* est donné par le rapport des utilités marginales des biens, soit :

$$TmS = Umx_1/Umx_2.$$

Lorsque l'on passe du panier *A* au panier *B*, le bien 2 devient relativement rare (ce qui accroît son utilité marginale) et le bien 1 devient relativement abondant (ce qui diminue son utilité marginale). Il ne peut donc s'en suivre qu'une baisse du taux marginal de substitution.

1.2.2. La fonction d'utilité

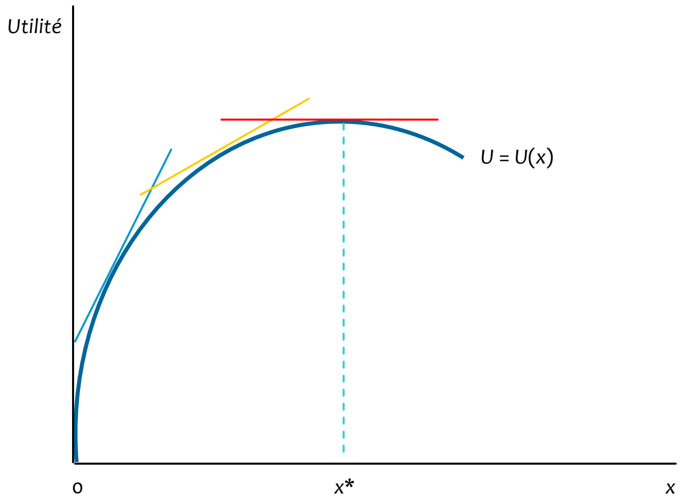
Il est souvent commode d'utiliser une fonction d'utilité pour caractériser le comportement du consommateur. Celle-ci est définie dans l'ensemble de consommation *EB* et est à valeur dans l'ensemble R^n_+ telle que *X* est préféré à *Y* si et seulement si $U(X) > U(Y)$. C'est un outil permettant de synthétiser le comportement d'un consommateur rationnel mais il ne faut pas lui donner une interprétation psychologique quelconque. Sa force réside dans le fait qu'elle soit ordinale[1].

---

[1] Les premiers économistes à avoir étudié le concept d'utilité le considéraient comme une grandeur cardinale. Or, à dire le vrai, on ne peut attacher une valeur particulière à un index d'utilité et lui faire subir des opérations arithmétiques.

Si la fonction d'utilité $U(.)$ est monotone[2] et qu'elle respecte les trois axiomes de comportement, il est possible de caractériser un même comportement de consommation par une transformation monotone de la fonction $U(.)$. Si $U(X) > U(Y)$ pour le consommateur, on devra nécessairement vérifier que $f(U(X)) > f(U(Y))$ si la fonction $f(.)$ est une transformation monotone de la fonction $U(.)$, car la fonction d'utilité établit une relation d'ordre entre paniers de biens.

La fonction d'utilité est concave en ce que l'utilité totale augmente jusqu'à un certain seuil (point de saturation) avec la quantité de biens consommés mais à un rythme décroissant. Ceci parce que lorsqu'un bien devient relativement abondant, son utilité ou sa valeur relative aux yeux du consommateur diminue (loi de Gossen).



Le point x^* est un maximum parce qu'il procure à la fonction d'utilité une valeur qu'aucun autre point de l'ensemble de faisabilité ne peut lui procurer. Lorsque la consommation de l'individu va au-delà de x^*, son niveau de vie ou de satisfaction baisse. Le point x^* étant un maximum, son utilité marginale est égale à zéro et pour toutes les quantités venant après x^*, l'utilité marginale devient négative. Une fonction d'utilité $U(.)$ est dite « well behaved » lorsque sa dérivée première est non négative et sa dérivée seconde est négative, c'est-à-dire lorsque :

$$U'(.) \geq 0 \text{ et } U''(.) < 0.$$

1.2.3. Problème économique du consommateur

Le problème économique de base du consommateur est celui de la maximisation de l'utilité que lui procure un panier de biens compte tenu des contraintes qui restreignent sa liberté d'actions. En l'absence de toute intervention de l'Etat, le problème s'écrit formellement comme suit :

$$\begin{gathered}\text{Max } U(x_1, x_2, \ldots, x_n)\\ \text{telle que } m \geq p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n\\ \text{avec } x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0.\end{gathered}$$

Pour que ce problème ait une solution finie, il faudrait que la fonction d'utilité soit continue dans son domaine de définition et que l'ensemble de consommation (ensemble de faisabilité) soit fermé et borné (c'est-à-dire un ensemble convexe).

[2] Une fonction monotone est une fonction qui croît ou décroît toujours dans son domaine de définition.

La résolution du problème économique d'un consommateur rationnel consiste à trouver un compromis entre ce qu'il veut (l'utilité recherchée) et ce qu'il peut (possibilités d'action déterminées par l'ensemble de consommation). Nous allons considérer – dans les lignes qui suivent – que le consommateur se trouve en présence de deux biens pour illustrer les différentes méthodes de résolution de son problème d'optimisation.

$$\text{Max } U(x_1, x_2)$$
$$\text{telle que } m \geq p_1x_1 + p_2x_2$$
$$\text{avec } x_1, x_2 \geq 0.$$

Résolution graphique du problème

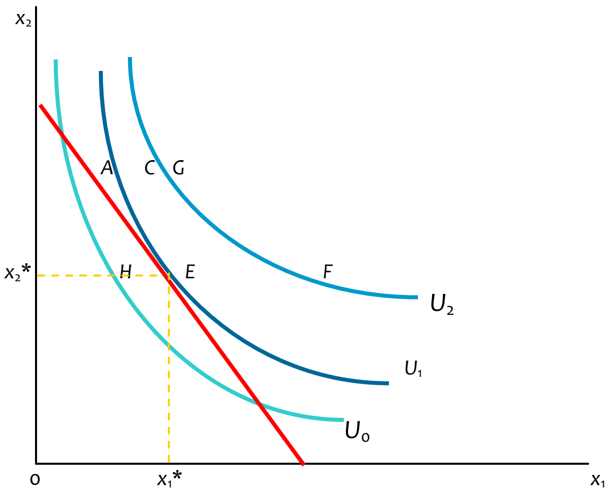
La résolution du problème du consommateur par la méthode graphique consiste à égaliser la pente de sa droite de budget à la pente de sa courbe d'indifférence. Les pentes de la courbe d'indifférence et de la droite du budget sont respectivement :

$$-dx_2/dx_1 = Umx_1/Umx_2 \quad \text{et} \quad -dx_2/dx_1 = p_1/p_2.$$

En égalisant ces deux pentes, on obtient la condition d'équilibre du consommateur, soit :

$$TmS = Umx_1/Umx_2 = p_1/p_2.$$

Traçons dans un même plan, la droite du budget du consommateur et un ensemble de courbes d'indifférence[3]pour déterminer le panier de biens qui lui permet de réaliser son équilibre.



L'objectif du consommateur est de situer sur la courbe d'indifférence la plus élevée possible. Etant donné que les paniers qui constituent la courbe d'indifférence U_2 tels que G et F n'appartiennent pas à son ensemble budgétaire, il ne pourra pas les acheter. Les paniers A et H sont financièrement accessibles mais ils procurent une satisfaction inférieure à celle procurée par le panier E qui est aussi un panier accessible. Le panier (x_1* ; x_2*) correspond à la solution optimale du problème en ce qu'il est le seul panier de l'ensemble budgétaire qui permet au consommateur de réaliser la plus grande satisfaction possible, c'est-à-dire d'atteindre la courbe d'indifférence U_1. Au point E, la pente de la droite du budget est égale à la pente de la courbe d'indifférence.

[3] On appelle carte d'indifférence, un ensemble de courbes d'indifférence.

Résolution algébrique du problème

Le problème du consommateur peut être résolu selon une approche algébrique, à l'aide de deux méthodes, à savoir la méthode de substitution et la méthode du multiplicateur de Lagrange.

Méthode de substitution

Cette méthode consiste à ramener un problème d'optimisation sous contrainte à un problème d'optimisation libre en résolvant la contrainte par rapport à une des variables et en renvoyant le résultat obtenu dans la fonction-objectif. En résolvant la contrainte budgétaire par rapport à x_2, on obtient :

$$x_2 = (m - p_1x_1)/p_2.$$

Si on rentre dans la fonction-objectif avec cette relation, le problème devient :

$$\text{Max } U = f[x_1, (m - p_1x_1)/p_2]$$

Prenons la condition du premier ordre de la maximisation.

$$dU/dx_1 = Umx_1 + Umx_2(dx_2/dx_1) = 0 \text{ ou } Umx_1 + Umx_2(-p_1/p_2) = 0.$$

En aménageant les éléments de cette dernière relation, on obtient la condition d'équilibre d'un consommateur, soit :

$$TmS = Umx_1/Umx_2 = p_1/p_2.$$

Méthode de Lagrange

La méthode de Lagrange consiste à transformer un problème d'optimisation sous contrainte en un problème d'optimisation libre en se servant d'une fonction auxiliaire appelée Lagrangien. Cette fonction associe la fonction-objectif et la contrainte afin que, dans le processus d'optimisation, soit prise en considération la sensibilité du comportement par rapport au desserrement de n'importe quel élément de la contrainte. Le Lagrangien du problème de maximisation de l'utilité du consommateur s'écrit de la sorte :

$$L = U(x_1, x_2) - \lambda(p_1x_1 + p_2x_2 - m),$$

où λ représente le multiplicateur de Lagrange. En différentiant le Lagrangien par rapport aux x_i, on obtient les conditions du premier ordre :

$$\partial L/\partial x_1 = Umx_1 - \lambda p_1 = 0 \longrightarrow Umx_1 = \lambda p_1$$
$$\partial L/\partial x_2 = Umx_2 - \lambda p_2 = 0 \longrightarrow Umx_2 = \lambda p_2$$

En divisant la première condition du premier ordre par la deuxième condition, ce qui élimine le multiplicateur de Lagrange, on obtient :

$$Umx_1/Umx_2 = p_1/p_2.$$

La fraction de gauche représente le taux marginal de substitution entre les biens 1 et 2 et celle de droite le taux de substitution économique aussi appelé prix relatif des biens. La maximisation implique l'égalité de ces deux taux. Il faut toutefois noter que ceci ne se vérifie que si les préférences sont convexes, c'est-à-dire si les courbes d'indifférence qui rendent compte du comportement du consommateur sont convexes par rapport à l'origine des axes.

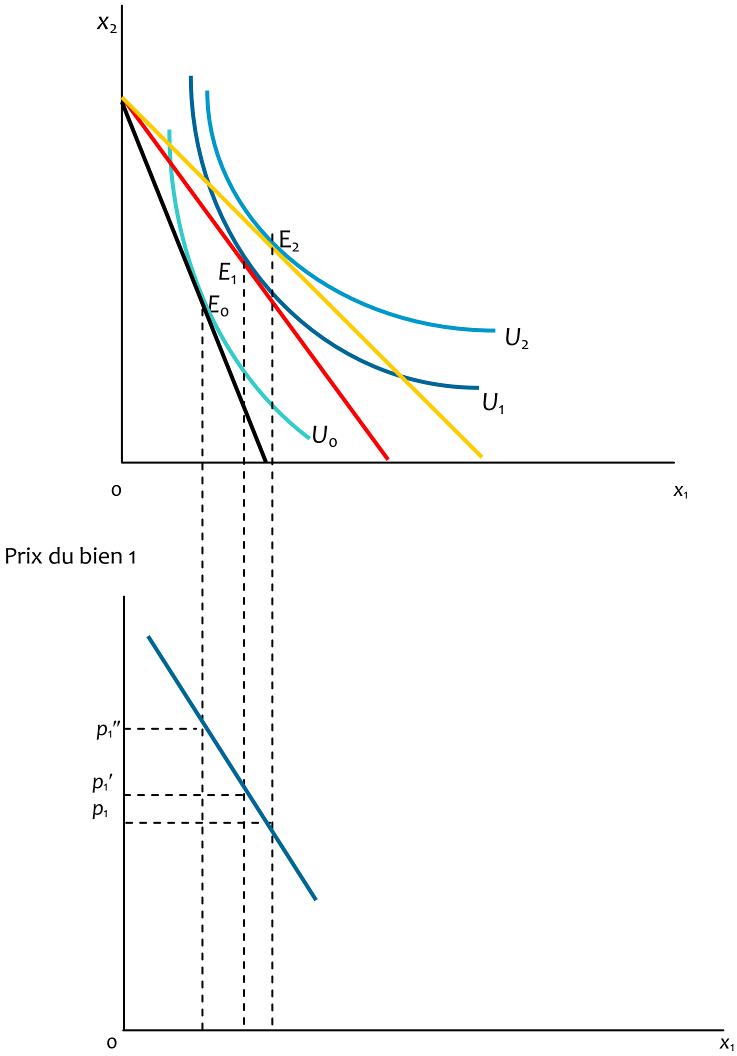
Il est possible d'avoir des solutions frontières ou solutions au coin, c'est-à-dire des solutions telles qu'à l'équilibre, la quantité demandée d'un bien est égale à zéro. C'est le type de résultats que l'on obtient généralement lorsque les préférences du consommateur sont concaves ou lorsque les biens qu'il demande sont parfaitement substituables.

1.3. Fonction de demande et élasticités

La fonction de demande renseigne sur la relation entre la demande d'un bien et les prix des biens et le revenu du consommateur. En règle générale, la demande d'un bien diminue lorsque son prix augmente et vice-versa. Nous allons montrer d'où proviennent ces conclusions.

1.3.1. Variation du prix, équilibre du consommateur et demande

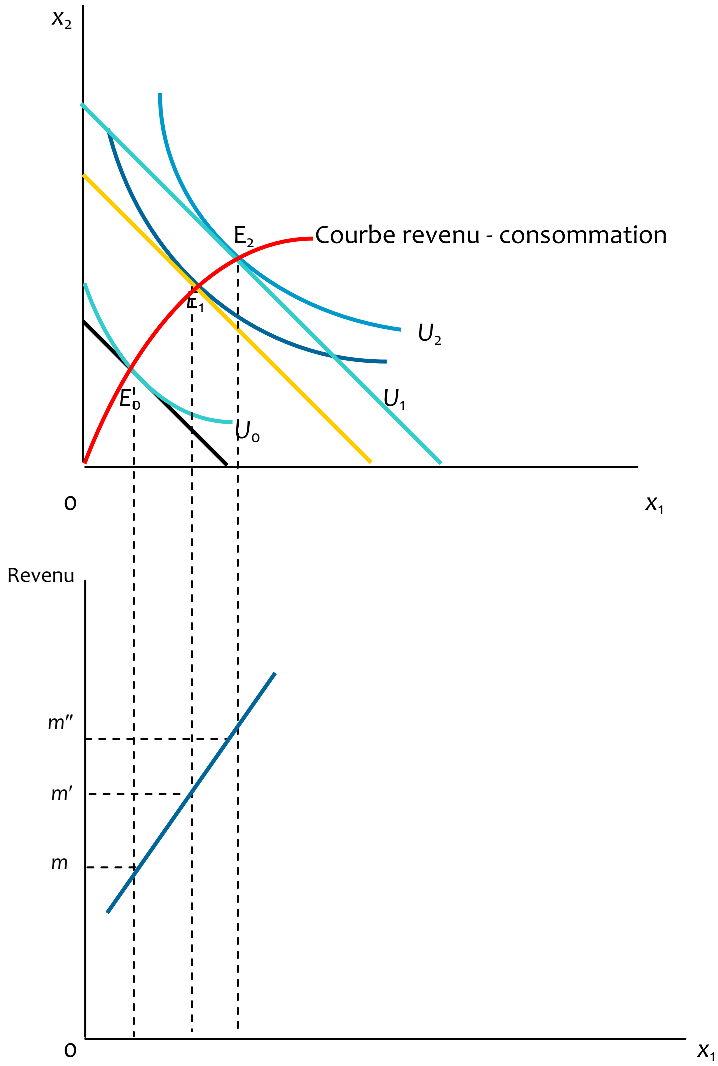
Lorsque le prix du bien 1 baisse alors que celui du bien 2 est maintenu inchangé et que le revenu du consommateur demeure le même, on assiste à un pivotement vers l'extérieur de la droite de budget. Ce déplacement suppose un élargissement des possibilités d'action du consommateur (accroissement du pouvoir d'achat). Le consommateur devrait à cet effet améliorer son niveau de vie en passant sur une courbe d'indifférence supérieure (passage de U_0 à U_1 et passage de U_1 à U_2).



A partir de l'évolution des prix et des quantités consommées par l'individu, on arrive à établir une relation de sens inverse entre la demande du bien 1 et son prix.

1.3.2. Variation du revenu, équilibre du consommateur et demande

Les effets d'un accroissement du revenu du consommateur sont l'élargissement de son ensemble budgétaire (la droite de budget se déplace parallèlement vers l'extérieur) et le déplacement de sa position d'équilibre (accroissement des quantités consommées des deux biens). Le déplacement parallèle vers l'extérieur de la droite de budget tient au fait que le revenu a augmenté et que les prix des biens n'ont pas changé.

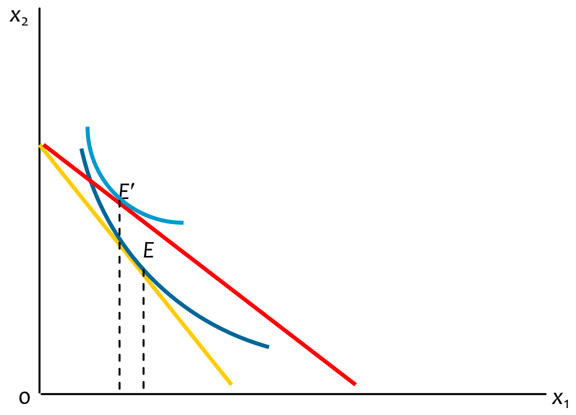


A l'aide du graphique ci-dessus, on arrive à montrer qu'un accroissement du revenu du consommateur entraîne un accroissement de la quantité demandée du bien 1.

1.3.3. Exception aux lois énoncées : Bien de Giffen et bien inférieur

Bien de Giffen

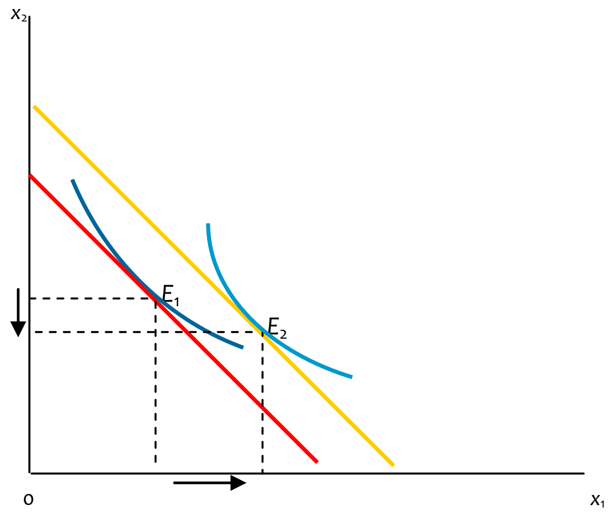
En règle générale, lorsque le prix d'un bien diminue, on s'attend à ce que sa demande augmente. Il est pourtant possible d'observer un comportement opposé. En effet, il est possible qu'après diminution du prix d'un bien que le consommateur décide d'utiliser le surplus de pouvoir d'achat dans le financement de la consommation d'un autre bien. Dans ces conditions, le bien dont le prix a diminué est considéré comme un bien de Giffen.



Il faut quand même noter que des situations de ce genre quoique théoriquement envisageables, sont peu probables dans la réalité. Il n'y a pas de raison valable pour que la demande diminue lorsque le prix diminue.

Bien inférieur

Considérons une personne qui consomme deux biens, à savoir la viande de bœuf et le poisson chinchard. Si, à la suite d'un accroissement de son revenu, on assiste à une diminution de la quantité consommée de chinchard et à l'accroissement de la quantité de viande consommée, on conclue que le chinchard est un bien inférieur et la viande de bœuf, un bien supérieur. Graphiquement, les choses se présentent comme suit.



Cette situation montre que la relation de sens positif entre la quantité consommée d'un bien et le revenu du consommateur n'est pas toujours vérifiée. Pour certains biens, les accroissements du revenu du consommateur se traduisent par une baisse des quantités consommées. On les qualifie ainsi de biens inférieurs par rapport aux biens qui les remplacent dans le panier de consommation.

Fonctions de demande classique (ou marshalienne[4]) et élasticité

La solution au problème de maximisation de l'utilité du consommateur donne lieu à des fonctions de demande classique dont les arguments sont le revenu du consommateur et les prix des biens sur les marchés, soit :

$$x_i = x_i(m, p_i, \ldots, p_n).$$

Si le bien est normal, tout accroissement du revenu devrait se traduire par une hausse de la quantité consommée du bien, tout accroissement de son prix p_i devrait se traduire par une baisse de la quantité consommé et les effets des variations des autres prix sur la demande dépendent du type de relation qui relie le bien *i* autres biens : relation de substitualité ou relation de complémentarité. S'il y a une relation de complémentarité, la demande diminuera si le prix du bien *j* augmente et elle augmentera en cas de substitualité.

Etant donné que l'on connaît les facteurs explicatifs de la demande, il y a lieu de chercher à mesurer l'impact d'une variation d'un des déterminants de la demande sur la quantité de bien demandée. On serait tenté de faire le rapport de la variation de la quantité demandée sur la variation du facteur explicatif, la variation du prix par exemple. Mais la chose devient compliquée en ce que les unités de mesure des quantités et des prix ne sont pas concordantes. Pour contourner cette faiblesse, les économistes se servent du coefficient d'élasticité qui n'est rien d'autre que le rapport des variations relatives de la demande et du prix (ou du revenu).

Le coefficient d'élasticité mesure la sensibilité de la demande à la variation d'un de ses arguments. Ainsi, l'élasticité-revenu mesure l'effet d'une variation de m sur x_i, l'élasticité-prix l'effet d'une variation de p_i sur x_i et l'élasticité croisée l'effet d'une variation de p_j sur x_i.

$$\begin{aligned}
&\text{Elasticité-revenu} : \in_{xi,\, m} = (dx_i/dm)(m/x_i)\\
&\text{Elasticité-prix} : \in_{xi,\, pi} = (dx_i/dp_i)(p_i/x_i)\\
&\text{Elasticité croisée} : \in_{xi,\, pj} = (dx_i/dp_j)(p_j/x_i).
\end{aligned}$$

Si l'on est en présence de données discrètes, les trois coefficients d'élasticité seront donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\text{Elasticité-revenu} : \in_{xi,\, m} = (\Delta x_i/\Delta m)(m/x_i)\\
&\text{Elasticité-prix} : \in_{xi,\, pi} = (\Delta x_i/\Delta p_i)(p_i/x_i)\\
&\text{Elasticité croisée} : \in_{xi,\, pj} = (\Delta x_i/\Delta p_j)(p_j/x_i).
\end{aligned}$$

Pour éviter les complications dans le calcul de l'élasticité à partir des données discrètes, Samuelson a suggéré les formules suivantes :

$$\text{Elasticité-revenu} : \in_{xi,\, m} = \frac{\Delta x}{\Delta m}\frac{m_1 + m_2}{x_1 + x_2}.$$

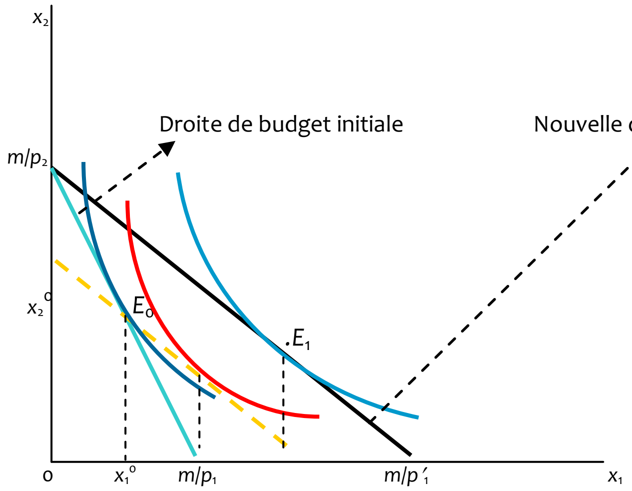
$$\text{Elasticité–prix} : \in_{xi,\, pi} = \frac{\Delta x}{\Delta p_i}\frac{p_{i1} + p_{i2}}{x_1 + x_2}$$

$$\text{Elasticité croisée} : \in_{xi,\, pj} = \frac{\Delta x}{\Delta p_j}\frac{p_{j1} + p_{j2}}{x_1 + x_2}.$$

[4] Ces fonctions sont dites marshaliennes car elles ont été proposées par l'économiste A. Marshall.

1.4. Effet prix, effet de substitution et effet revenu : Analyse de Slutsky

La variation du prix d'un bien entraîne deux effets : (1) modification du taux d'échange ou prix relatif des biens et (2) modification du pouvoir d'achat du consommateur. Pour ce faire, il faut toujours décomposer la variation du prix en deux effets. L'effet de la première modification est appelé effet de substitution et celui de la deuxième est appelé effet de revenu, effet de substitution en ce que le changement du prix relatif doit amener l'individu à revoir la composition de son panier de biens et effet de revenu en ce que l'ensemble budgétaire de l'individu change. Lorsque le prix du bien 1 diminue en passant de p_1 à p_1', la droite de budget pivote autour de l'ordonnée à l'origine. Ce mouvement se traduit par un changement de la pente de la droite de budget et se décompose en deux étapes : la rotation de la droite autour du choix initial (E_0) et ensuite le déplacement parallèle vers le haut de la droite en direction du nouvel équilibre E_1.



Soit m' le revenu associé à la droite de budget après rotation. La contrainte budgétaire après rotation et la contrainte initiale s'écrivent respectivement de la sorte :

$$m' = p_1'x_1 + p_2x_2 \text{ et } m = p_1x_1 + p_2x_2.$$

Retranchons la deuxième de la première pour avoir la relation suivante :

$$m' - m = x_1[p_1' - p_1] \quad \text{ou} \quad \Delta m = x_1\Delta p_1.$$

Cette équation indique la variation du revenu nominal nécessaire pour que le panier initial soit accessible au nouveau prix relatif. Ainsi, l'effet de substitution $\Delta x^S{}_1$ est la variation de la demande du bien 1 quand le prix et le revenu deviennent p_1' et m', soit :

$$\Delta x^S{}_1 = x_1(p_1', m') - x_1(p_1, m).$$

L'effet de revenu est la variation de la demande du bien 1 lorsque le revenu passe de m' à m et que le prix du bien est maintenu au niveau p'_1 :

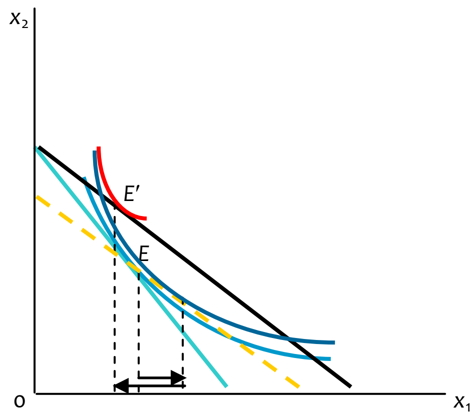
$$\Delta x^m{}_1 = x_1(p_1', m) - x_1(p_1', m').$$

La somme des deux effets donne la variation totale de la demande.

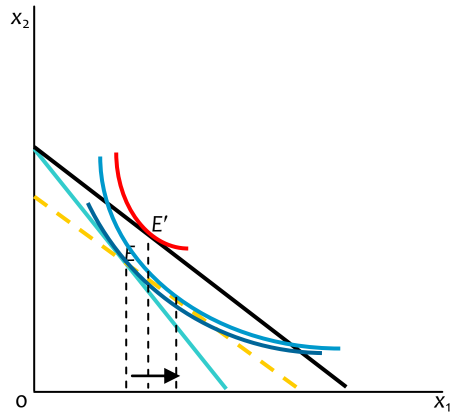
$$\Delta x_1 = x_1(p_1', m) - x_1(p_1, m).$$

Effets prix, de substitution et revenu : Cas des biens de Giffen et des biens inférieurs

Eu égard à la nature des biens de Giffen et des biens inférieurs, il faut noter que l'analyse des effets pour ces deux types de biens est assez particulière. En cas de diminution du prix du bien 1, pour les biens de Giffen et les biens inférieurs, l'effet de substitution est positif et l'effet revenu est négatif. Il faut toutefois noter que pour les biens de Giffen, l'effet revenu l'emporte sur l'effet de substitution si bien que l'effet prix est lui-même négatif alors que pour les biens inférieurs, l'effet revenu est inférieur à l'effet de substitution.



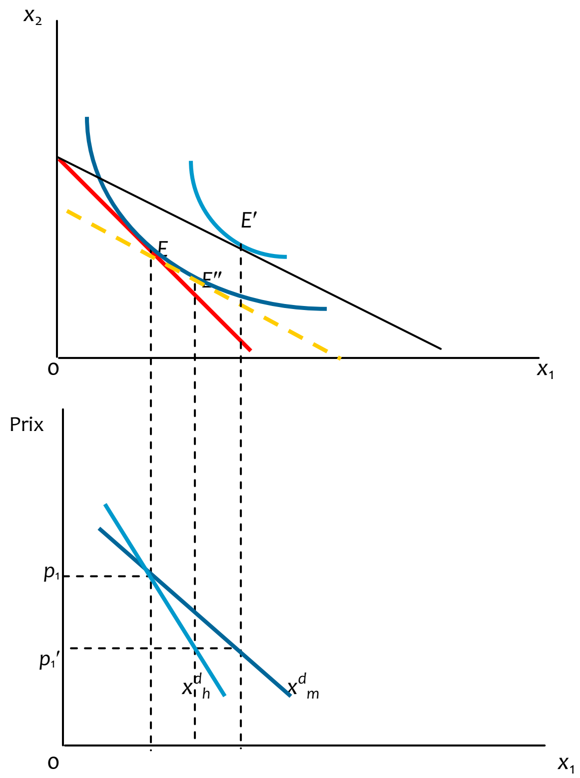
Bien de Giffen



Bien inférieur

1.5. Effet prix, effet de substitution et effet revenu : Analyse de Hicks

Lorsque le prix d'un bien diminue, on s'attend à ce que l'ensemble budgétaire du consommateur s'élargisse et qu'il passe sur une courbe d'indifférence supérieure. Il est cependant possible de voir l'individu garder le même niveau de satisfaction après diminution du prix d'un des biens.



Comme l'indique le graphique ci-contre, selon Hicks, l'effet de substitution correspond au passage du point *E* au point *E''* et l'effet revenu correspond au passage de *E''* à *E'*. Du fait de la variation d'un des prix, le taux de substitution du marché change. Ainsi, l'individu s'ajustera premièrement de sorte à rester sur sa courbe d'indifférence initiale. Ensuite, il s'ajustera en fonction de son pouvoir d'achat additionnel.

A partir de cette analyse, Hicks propose la fonction de demande compensée (ou hicksienne). Dans cette fonction, le revenu est remplacé par le niveau d'utilité recherché ou réalisé *U**. Comme le montre le graphique à gauche, la demande compensée est moins sensible que la demande classique (ou marshalienne) aux variations du prix. Ceci s'explique par le fait que malgré la baisse du prix du bien 1, le consommateur reste sur sa courbe d'indifférence de départ (ou initiale).

Considérons un individu qui dispose d'un revenu de 500 UM et qui chaque matin consomme une bouteille de Coca-cola car celle-ci coûte 500 UM. Si le prix de la bouteille passe à 50 UM, selon l'analyse classique, la demande de Coca-cola devrait passer à 10 bouteilles, or il est impossible sinon absurde qu'une telle consommation soit réalisée. En toute rigueur, on peut voir le nombre de bouteilles passer de 1 à 2 ou à 3 (tout au plus à 4). Un tel comportement peut être caractérisé par une fonction de demande compensée.

Dérivation algébrique des fonctions de demande compensée

Par une approche duale, le problème du consommateur peut être présenté en termes d'une minimisation de la dépense pour réaliser un niveau donné de satisfaction.

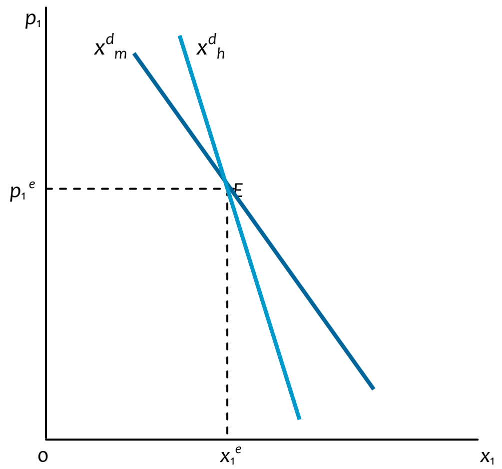
$$\text{Min } m = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n$$
$$\text{telle que } U(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq U^*$$
$$\text{avec } (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in EC.$$

La solution de ce programme donnera lui aux mêmes valeurs d'équilibre que celles obtenues après résolution du programme de maximisation car les deux sont en dualité. Cependant, les fonctions de demande que l'on obtient ici diffèrent des fonctions de demande marshalienne en ce qu'elles ont pour arguments les prix des biens et le niveau d'utilité U^*.

$$x^h_i = x^h_i(U^*, p_i, \ldots, p_n).$$

Pour cette fonction de demande que l'on appelle fonction de demande compensée, il n'est pas possible de calculer l'élasticité-revenu car le revenu m n'est plus un argument de la fonction de demande. Il convient également de remarquer les effets-prix ne sont pas de même ampleur.

Comme signalé ci-dessus, en règle générale, la courbe de demande hicksienne (ou compensée) a une pente plus raide que la courbe de demande marshalienne (ou classique). Ceci parce que dans le premier programme, l'ensemble budgétaire était fixé alors que dans le second, il est changeant et le problème est celui de réaliser un niveau donné de satisfaction.



Le point E correspond à la fois à la solution du problème de maximisation de l'utilité et à la solution du problème de minimisation de la dépense. Pour un prix supérieur à p_1^e, la demande compensée sera supérieure à la demande classique car il faut maintenir inchangé le niveau de satisfaction. En revanche, si le prix tombe à un niveau inférieur à p_1^e, la demande compensée sera inférieure à la demande classique.

1.5. Quelques cas particuliers de préférences

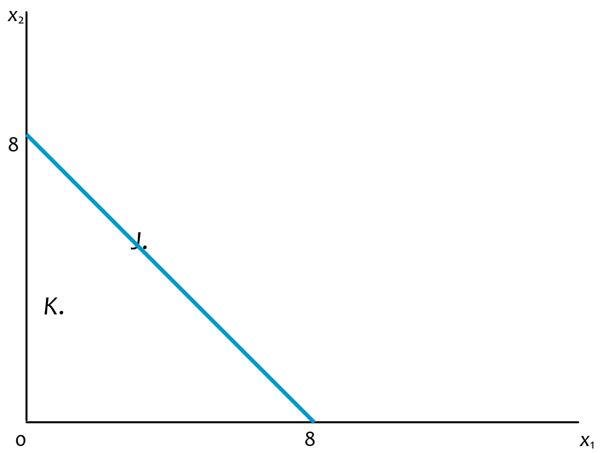
1.5.1. Les substituts parfaits

Deux biens x_1 et x_2 sont qualifiés de parfaitement substituables si le consommateur est disposé à les substituer à un taux constant. Admettons qu'un étudiant, pour présenter son interrogation de microéconomie, a besoin d'un stylo, peu importe la couleur de celui-ci. Puisqu'il n'aura pas à utiliser au même moment deux stylos, on pourra lui donner un stylo de couleur bleue ou un stylo de couleur noire. Dans ces conditions, le stylo de couleur noire est un substitut parfait du stylo de couleur bleue et le taux d'échange est de un contre un.

Représentons par x_1 le nombre de stylos de couleur bleue et par x_2, le nombre de stylos de couleur noire. Si la couleur n'importe pas, on peut considérer les paniers suivants comme procurant au consommateur un même niveau de satisfaction ou d'utilité.

Panier	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*
x_1	4	3	5	6	2	7	1	0	8
x_2	4	5	3	2	6	1	7	8	0
$x_1 + x_2$	8	8	8	8	8	8	8	8	8

La courbe d'indifférence représentant les préférences du consommateur dans ce cas précis est une droite de pente –1. Ceci parce que les déplacements le long de la courbe d'indifférence exigent des sacrifices ou pertes en x_2 égales aux accroissements de x_1.



Il se dégage du tableau et du graphique que pour l'individu, ce qui importe c'est d'avoir au total 8 stylos. Le panier *K* qui contient moins de 8 stylos procure une satisfaction inférieure aux paniers *A*, *B*, … , *I* et le panier *J* qui contient plus de 8 stylos, procure une satisfaction plus grande que les paniers *A* *B*, … , *I*. Dans ces conditions, on peut écrire la fonction d'utilité de l'individu de la sorte :

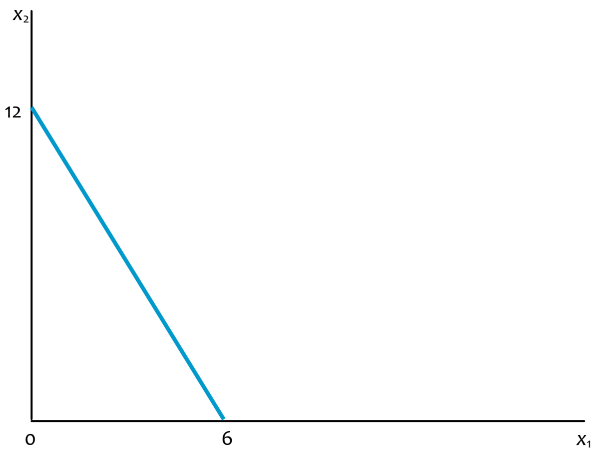
$$U(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

A partir de ce cas particulier, on déduit que lorsque deux biens sont parfaitement substituables, la courbe d'indifférence associée aux préférences du consommateur est une droite. C'est la constance de la pente de la courbe qui constitue la caractéristique principale des substituts parfaits.

Admettons qu'aux yeux d'un autre consommateur, un stylo de couleur bleue équivaut exactement à deux stylos de couleur noire. Comme le montre bien le tableau ci-dessous, dans ce deuxième cas, ce qui importe, ce n'est plus le total de stylos mais plutôt le total de stylos selon les exigences en termes de couleur car le taux d'échange est de –2.

Panier	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
x_1	4	5	6	0	1	2	3
x_2	4	2	0	12	10	8	6
$x_1 + x_2$	8	7	6	12	11	10	9
$2x_1 + x_2$	12	12	12	12	12	12	12

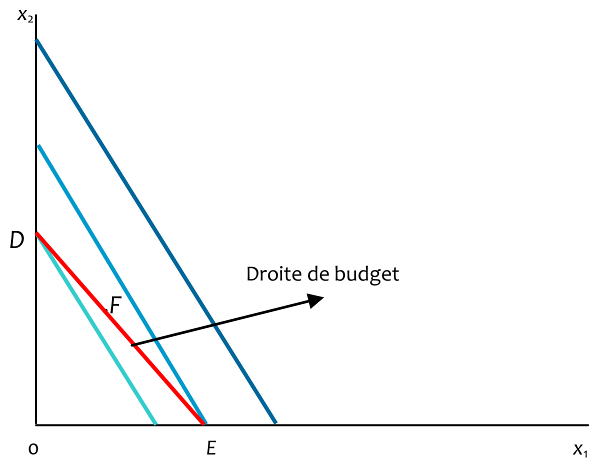
La courbe d'indifférence représentant les préférences de ce deuxième consommateur est une droite de pente –2. Ceci parce qu'il faut sacrifier 2 unités de x_2 pour avoir une unité additionnelle de x_1 pour un même niveau de satisfaction.



Dans ce deuxième cas, la courbe d'indifférence est aussi une droite. On peut donc dire que la forme générale de la fonction d'utilité lorsque les biens des substituts parfaits est la suivante :

$$U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2.$$

Les utilités marginales des deux biens sont constantes : $Umx_1 = a$ et $Umx_2 = b$. Par conséquent, le taux marginal de substitution est aussi constant : $TmS = a/b$. La position d'équilibre du consommateur ne sera pas déterminée par la condition de tangence qu'on a mise en évidence plus haut. On va se servir à cet effet de l'approche graphique.



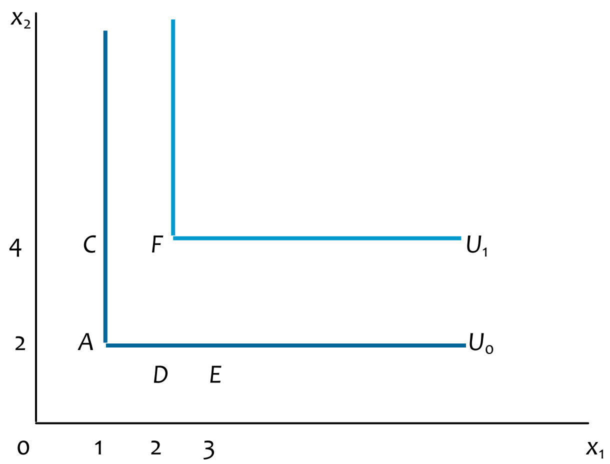
Les points *D*, *E* et *F* sont des points financièrement réalisables puisque appartenant à l'ensemble budgétaire. Le consommateur réalise son équilibre au point *E* car – de tous les points qui lui sont accessibles – c'est le point qui lui procure le plus de satisfaction. On est donc en présence d'une solution frontière : $x_1^* = m/p_1$ et $x_2 = 0$. Le consommateur n'achètera que le bien 1 parce qu'il coûte moins cher.

1.5.2. Les biens complémentaires

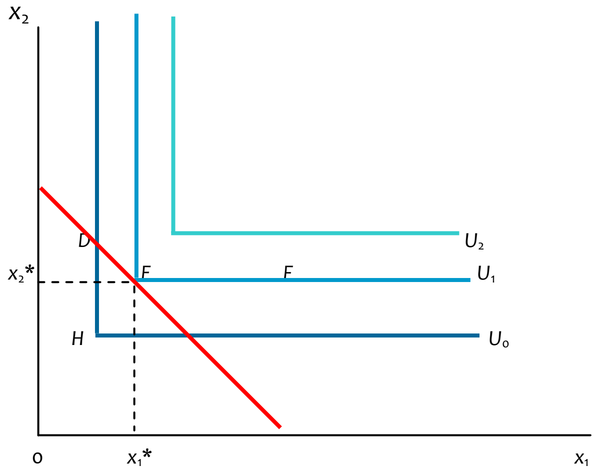
Deux biens x_1 et x_2 sont complémentaires dans un processus de consommation si l'on ne peut pas consommer l'un sans l'autre et cela, dans des proportions fixes. C'est le cas d'une personne qui consomme nécessairement une tasse de thé avec deux morceaux de sucres ou une paire de chaussure avec une paire de chaussette. Si on lui donne 2 tasses de thé, il faudra nécessairement lui adjoindre 4 morceaux de sucre pour qu'il puisse assurer convenablement sa consommation. De même, il faut accompagner 2 paires de chaussures de 2 paires de chaussettes pour qu'il accroisse sa satisfaction.

Panier	Tasses de thé	Morceaux De sucre	Utilité	Observation
	x_1	x_2		
A	1	2	Même niveau	Le nombre de tasse correspond aux morceaux de sucre
B	1	3	Même niveau	Il y a un morceau de sucre en trop
C	1	4	Même niveau	Il y a deux morceaux de sucre en trop
D	2	2	Même niveau	Il y a une tasse de thé en trop
E	3	2	Même niveau	Il y a deux tasses de thé en trop
F	2	4	Supérieur	Le nombre de tasse correspond aux morceaux de sucre

Il ressort de ce tableau que le niveau de satisfaction dépend de la correspondance entre le nombre de tasses et de morceaux. Pour accroître le niveau de satisfaction, il faut accroître simultanément et dans les mêmes proportions les quantités consommées des deux biens (c'est le cas du panier *F*). Les paniers *B*, *C*, *D* et *E* procurent à l'individu un même niveau de satisfaction que le panier *A* parce que contenant un peu trop de sucre ou un peu trop de tasses de thé. Par un raisonnement analogue, on peut identifier les paniers de biens qui procurent à l'individu la même satisfaction que le panier *F*.



Pour ce type de biens, la courbe d'indifférence prend la forme d'un « L » majuscule et la fonction d'utilité s'écrit comme suit : $U = \min \{ax_1, bx_2\}$. Les coefficients *a* et *b* renseignent sur la manière de combiner les deux biens et l'expression « min » laisse entendre que c'est le bien qui est relativement rare (par rapport aux exigences du consommateur) qui détermine le niveau de satisfaction.

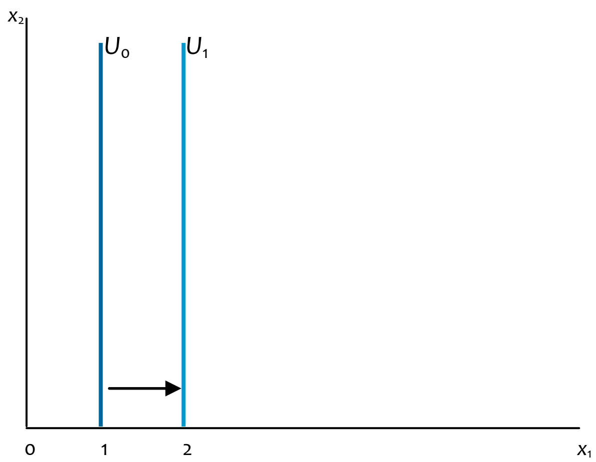


Les paniers de biens *D* et *H* sont financièrement accessibles tout comme le panier *E*. Mais pour le consommateur, le meilleur des choix se trouve réalisé en *E*, car ce panier procure une plus grande satisfaction. Le panier *F* qui équivaut au panier *E* n'est pas financièrement réalisable parce que contenant trop d'unités du bien 1.

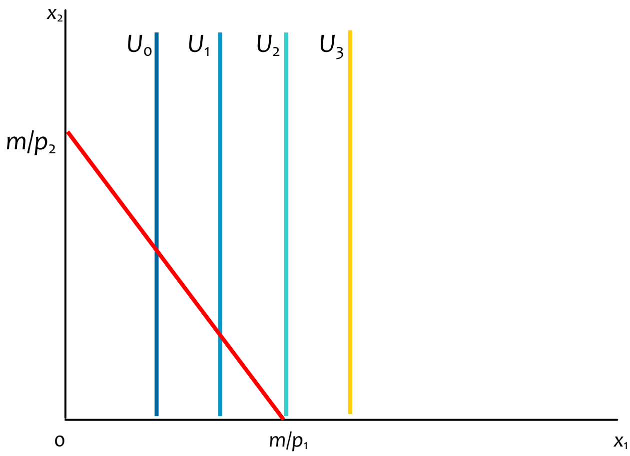
1.5.3. Les biens neutres

Un bien est neutre aux yeux d'un consommateur si la quantité disponible de ce bien n'influence aucunement son niveau de satisfaction. Admettons qu'à une réception, le protocole présente à un diabétique – lors d'un premier service – un panier de 19 bouteilles de boisson sucrée. Le diabétique ne consommera aucune bouteille compte tenu de son état de santé. Si – lors d'un deuxième service – le protocole lui présente un autre panier contenant cette fois, 30 bouteilles de boisson sucrée, son niveau de satisfaction n'aura pas changé. Ainsi, la boisson sucrée est un bien neutre à ses yeux. Sa situation ne pourra s'améliorer que si on lui présente un panier contenant du soda. Plus important sera le nombre de bouteilles de soda, plus élevée sera sa satisfaction.

Si l'on représente le nombre d'unité du bien neutre par x_2 et le nombre de bien désirable par x_1, la courbe d'indifférence de l'individu sera une droite parallèle à l'axe des ordonnées. La satisfaction augmentera que si l'on augmente la quantité de x_1.



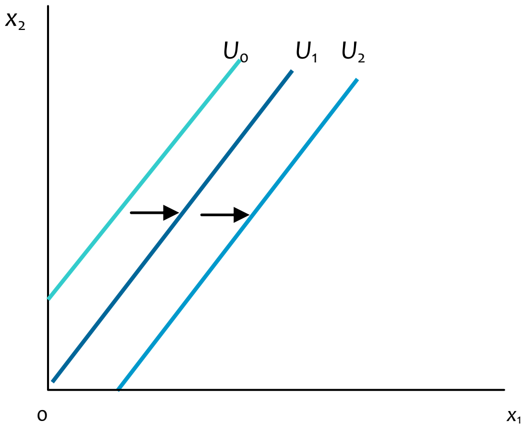
Dans ce cas, le consommateur réalise son équilibre en consacrant tout son revenu à l'acquisition du bien désirable (solution frontière). Ceci parce que le niveau de satisfaction est déterminé par x_1 et que celui-ci est maximisé au point $x_1^* = m/p_1$.



1.5.4. Les biens indésirables

Un bien indésirable est un bien que le consommateur n'aime ou ne souhaiterait pas consommer. Admettons que pour des raisons de santé, un parent soit obligé de faire boire régulièrement à son enfant du jus de carotte alors que celui-ci ne l'aime pas. Pour l'enfant, ce jus est un bien indésirable et il ferait tout ce qu'il peut pour éviter de le consommer.

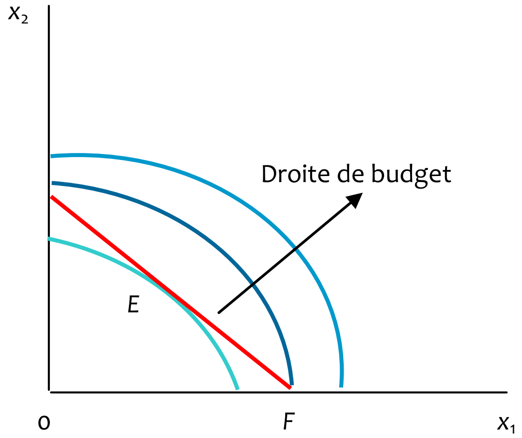
Conscient des goûts de son enfant, le parent peut – pour séduire son enfant – lui proposer en accompagnement du chocolat (bien qu'il aime). On peut donc dire que l'enfant sera prêt à prendre facilement un verre de jus si on lui donne par la suite un petit pot de chocolat. S'il faut lui donner deux verres de jus, comment devrait-on ajuster la quantité de chocolat pour que sa satisfaction soit la même que celle réalisée avec un verre de jus et un petit pot de chocolat ? Il faudra simplement lui donner un deuxième pot de chocolat. Dans ces conditions, les courbes d'indifférences du consommateur auront une pente positive.



La satisfaction de l'enfant s'accroîtrait si l'on maintient inchangé le nombre de verres de jus et augmente le nombre de pots de chocolat, si l'on diminue le nombre de verres de jus et maintient inchangé le nombre de pots de chocolat ou si l'on diminue le nombre de verres de jus et augmente le nombre de pots de chocolat.

1.5.6. Les préférences concaves

Il existe de ces biens que l'individu ne peut pas consommer au même moment compte tenu de leur nature ou de ses goûts. C'est le cas de la combinaison poisson salé – gâteau aux fraises. Dans de telle situation, la courbe d'indifférence du consommateur est concave par rapport à l'origine des axes.



Le point E qui est un point de tangence entre une courbe d'indifférence et la droite de budget ne correspond pas à un choix optimal pour le consommateur car il est possible pour lui d'acheter le panier F qui se situe sur une courbe d'indifférence supérieure. L'équilibre qui est donc réalisé au point F est une solution au coin en ce que $x_1^* = m/p_1$ et $x_2^* = 0$.

1.6. Vendre et acheter

Jusque-là, nous avons supposé que le revenu monétaire du consommateur m était donné alors qu'en économie, selon Harrod, rien n'y est obtenu pour rien. Dans cette section du chapitre, nous aurons à discuter du comportement du consommateur en supposant que son revenu est le fait d'une dotation initiale en bien 1 et bien 2 (w_1, w_2) qu'il vend sur le marché aux prix en vigueur (p_1, p_2). Sa contrainte budgétaire reste la même, à savoir :

$$m = p_1x_1 + p_2x_2.$$

Il faut cependant noter que m est égal à la valeur sur le marché, de la dotation initiale de l'individu, soit :

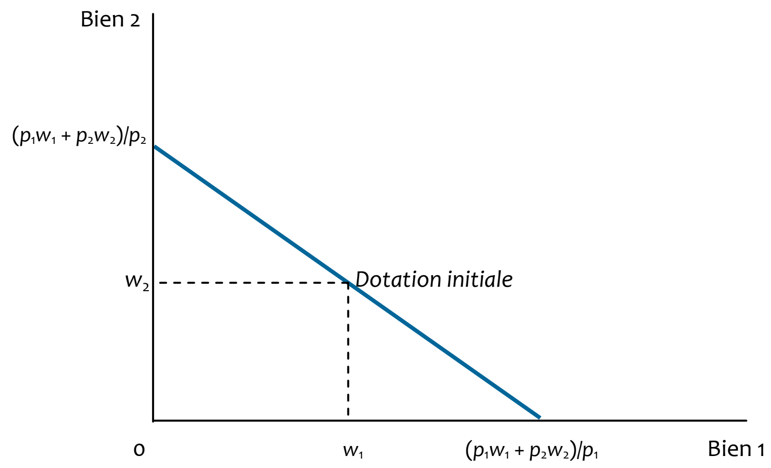
$$m = p_1w_1 + p_2w_2.$$

Ceci nous permet d'établir que :

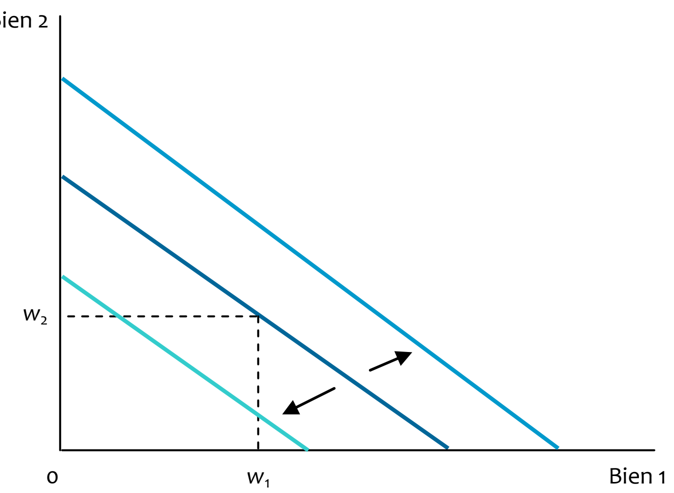
$$p_1x_1 + p_2x_2 = p_1w_1 + p_2w_2 \text{ ou } p_1(x_1 - w_1) + p_2(x_2 - w_2) = 0$$

Compte tenu de cette dernière égalité, si $(x_1 - w_1) > 0$, il faudrait nécessairement que $(x_2 - w_2) < 0$, et vice-versa. L'égalité peut également se vérifier si au même moment, $(x_1 - w_1) = (x_2 - w_2) = 0$. On dira que le consommateur est vendeur net du bien i si $(x_i - w_i) < 0$ et acheteur net si $(x_i - w_i) > 0$. Il y a lieu de comprendre que l'individu devra sacrifier une quantité donné d'un des biens pour financer l'acquisition de l'autre.

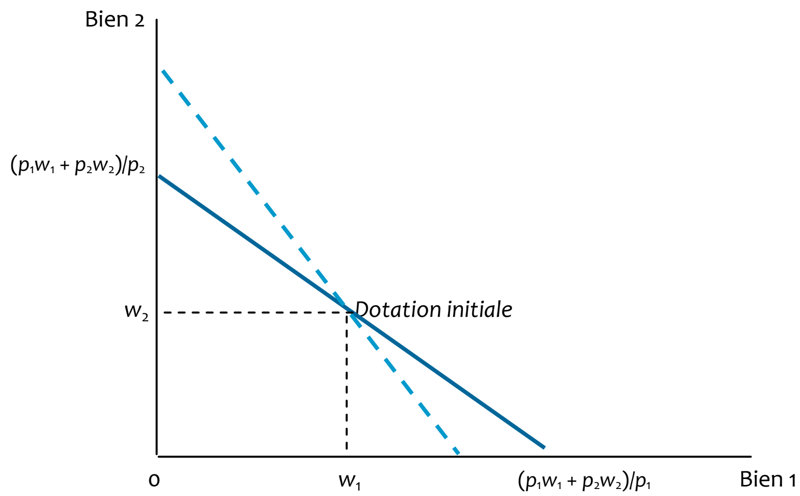
Représentons graphiquement la contrainte budgétaire de l'individu. La pente de la droite du budget est négative et elle est égale au rapport des prix des deux biens (p_1/p_2). L'ordonnée à l'origine est égale à $(p_1w_1 + p_2w_2)/\ p_2$ et l'abscisse à l'origine est égale à $(p_1w_1 + p_2w_2)/\ p_1$.



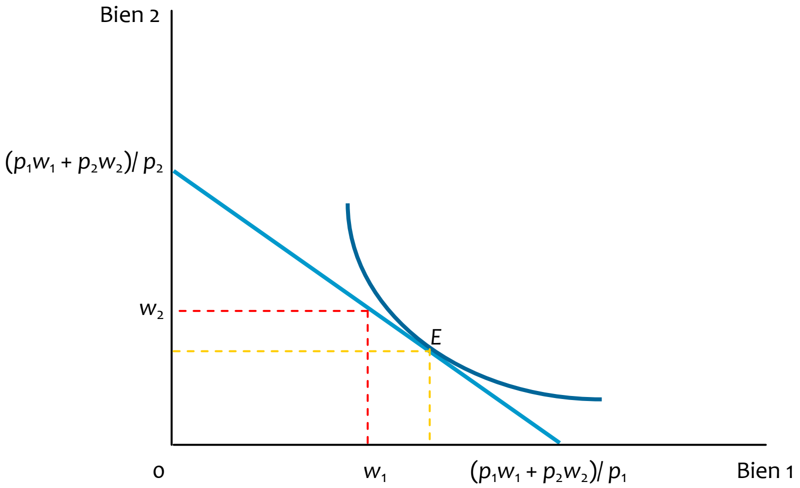
La dotation initiale (w_1, w_2) est un point de la droite de budget car c'est à partir d'elle que l'on détermine le revenu individuel. Si les prix des deux biens ne changent pas et que la dotation initiale de l'individu diminue, la droite du budget se déplacera parallèlement vers l'intérieur. Par contre, elle se déplacera vers l'extérieur si la dotation augmente alors que les deux prix demeurent les mêmes.



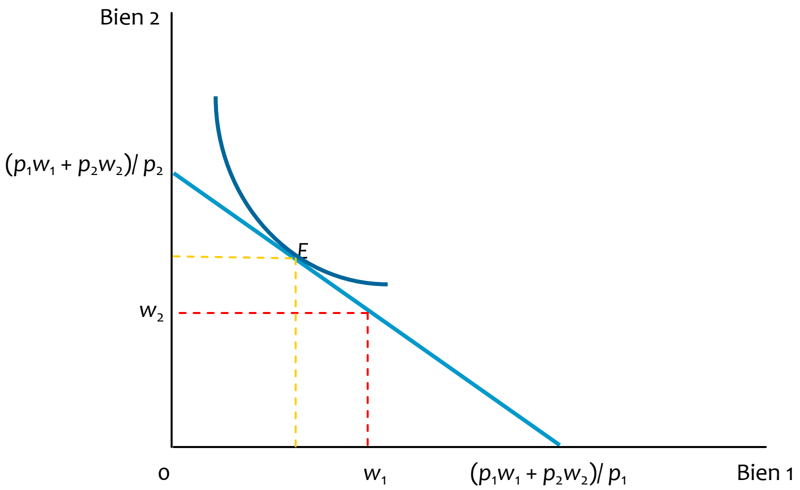
Si le prix du bien 1 alors que la dotation initiale et le prix du bien 2 n'ont pas changé, la droite du budget aura à roter autour du point de la dotation initiale. La nouvelle droite aura une pente qui sera plus prononcée que l'ancienne droite de budget.



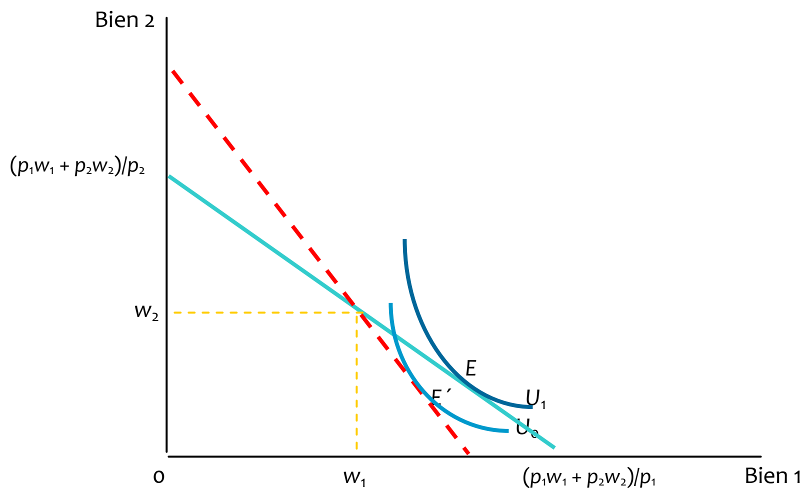
Admettons que les préférences de l'individu soient convexes. On va ajouter au graphique une courbe d'indifférence pour caractériser l'équilibre individuel. Comme on peut s'en convaincre, dans cette première situation, l'individu est vendeur net du bien 2 et acheteur net du bien 1.



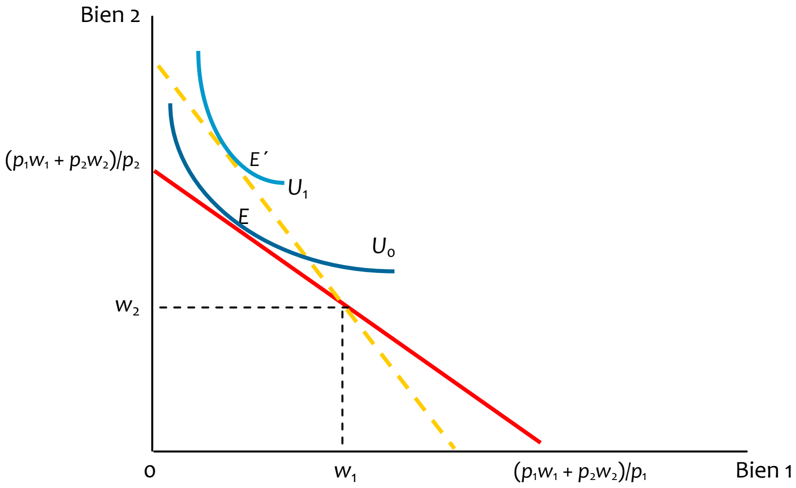
Le graphique suivant caractérise la situation d'un vendeur net du bien 1 et acheteur net du bien 2.



Que se passerait-il si le prix du bien 1 augmente? La situation devrait se détériorer pour l'individu qui est acheteur net du bien 1.



Par contre, la situation du vendeur net du bien 1 (acheteur net du bien 2) devra s'améliorer en ce qu'il disposera de plus d'argent pour financer l'acquisition du bien 2.



Offre de travail

Le niveau de vie d'un individu dépend certes de sa consommation C mais aussi du temps de relaxation ou de loisir dont il dispose l. Dans ces conditions, on peut dire que son problème économique consistera à maximiser l'utilité que lui procurent la consommation et le loisir sous sa contrainte budgétaire. Cette dernière est donnée par l'égalité entre le revenu salarial de l'individu et sa dépense pour disposer de C.

$$\begin{gathered}\text{Max } U(C, l) \\ \text{telle que } wL = pC \\ \text{avec } C, l \geq 0.\end{gathered}$$

L représente le temps de travail, w le taux de salaire horaire et p le prix du bien C. Compte tenu du fait que $L = L_0 - l$ (L_0 étant le temps disponible), le problème d'optimisation de l'individu peut s'écrire comme suit :

$$\begin{gathered}\text{Max } U(C, l) \\ \text{telle que } w(L_0 - l) = pC \\ \text{avec } C, l \geq 0.\end{gathered}$$

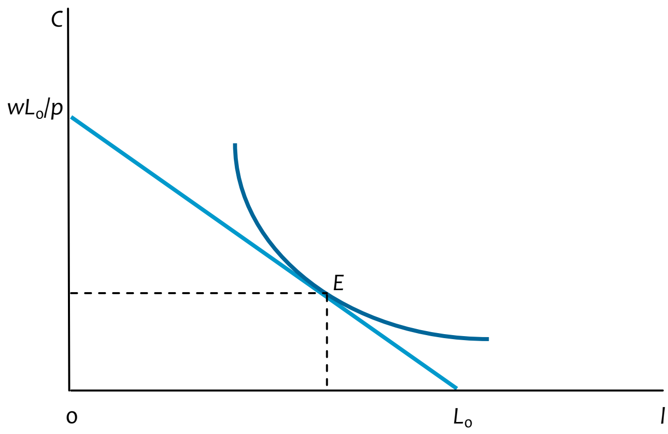
Résolvons ce problème en utilisant la méthode de Lagrange.

$$Z = U(C, l) + \lambda[w(L_0 - l) - pC]$$

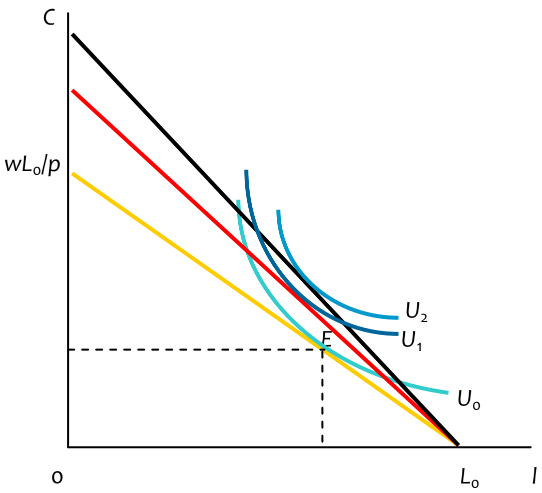
Prenons les conditions du première ordre, on arrive à établir que :

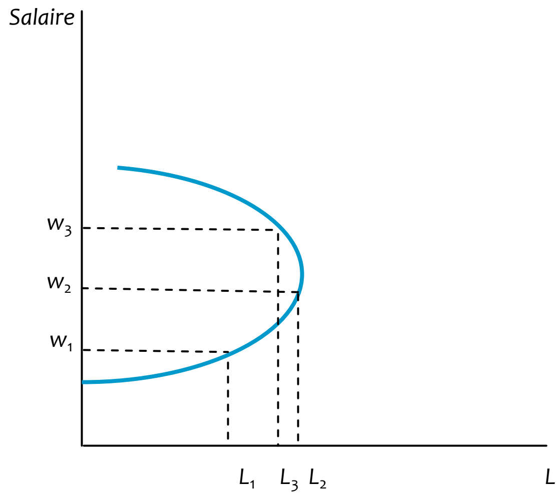
$$\begin{gathered}U'_l = \lambda w \\ U'_C = \lambda p\end{gathered}$$

Il vient donc qu'à l'équilibre, l'individu devra égaliser son taux marginal de substitution du loisir par la consommation à son salaire réel : $U'_l/U'_C = w/p$. En d'autres termes, il égalise son taux marginal de substitution à la pente de sa droite de budget.



Il est possible de dériver graphiquement la courbe d'offre du travail en analysant les effets d'une variation successive du taux de salaire sur l'équilibre de l'individu. Chaque fois que *w* aura à augmenter, la droite du budget de l'individu va pivoter autour du point L_0. Dans un premier temps, l'accroissement du taux de salaire amènera l'individu à revoir à la baisse son temps de loisir pour tirer parti de cette majoration du salaire horaire. Après la deuxième majoration, il se dira que l'augmentation du salaire horaire est si substantielle qu'il préfèrera accroître son temps de loisir pour tirer profit du surplus de revenu en sa disposition.





1.7. Choix intertemporels

Dans cette analyse, nous supposons que l'individu vit sur deux périodes : 1 et 2 et qu'il a la possibilité de s'endetter tout comme de prêter. A la date 1, l'individu dispose d'une dotation ou d'un revenu m_1 et sa consommation est notée par c_1. Si cette dernière est égale à m_1, son épargne sera nulle. Par contre si c_1 est inférieur à m_1, son épargne sera positive ; et si c_1 est supérieur à m_1, son épargne sera négative.

$c_1 = m_1$	$m_1 - c_1 = 0$	L'agent n'épargne pas
$c_1 < m_1$	$m_1 - c_1 > 0$	L'agent dégage une capacité de financement/Prêteur
$c_1 > m_1$	$m_1 - c_1 < 0$	L'agent ressent un besoin de financement/Emprunteur

Si $c_1 = m_1$, à la date 2, la dotation ou revenu m_2 financera intégralement la consommation de la deuxième période c_2. Par contre si $c_1 < m_1$, l'individu gagnera à la date 2, un montant égal à :

$$(m_1 - c_1)(1 + i)$$

où i représente le taux d'intérêt nominal. Ce qui fait que sa consommation à la deuxième période sera égale à la somme de la dotation et du produit du placement effectué à la date 1.

$$c_2 = m_2 + (m_1 - c_1)(1 + i).$$

A partir de cette relation, on peut définir la contrainte budgétaire intertemporelle de la manière suivante :

$$c_2 + c_1(1 + i) = m_2 + m_1(1 + i) \qquad \text{ou} \qquad c_2/(1 + i) + c_1 = m_2/(1 + i) + m_1.$$

Admettons que $c_1 > m_1$. Dans ce cas, l'individu devra s'endetter d'un montant égal à Si $c_1 - m_1$ pour financer son besoin en argent. Il vient donc qu'à la date 2, il devra rembourser le principal et payer les intérêts attachés à l'emprunt qu'il a contracté. Il ne pourra plus allouer tout son revenu en 2 au financement de c_2. Cette dernière sera donnée par :

$$c_2 = m_2 - (c_1 - m_1)(1 + i).$$

A partir de cette relation, on établit également que :

$$c_2 + c_1(1 + i) = m_2 + m_1(1 + i) \qquad \text{ou} \qquad c_2/(1 + i) + c_1 = m_2/(1 + i) + m_1.$$

La première relation exprime la contrainte budgétaire en termes de valeurs futures et la deuxième en termes de valeurs présentes ou actuelles. Représentons graphiquement la contrainte budgétaire intertemporelle de l'individu. Si $c_2 = 0$, il vient que :

$$c_1 = m_1 + m_2/(1 + i) \qquad \text{(abscisse à l'origine)}$$

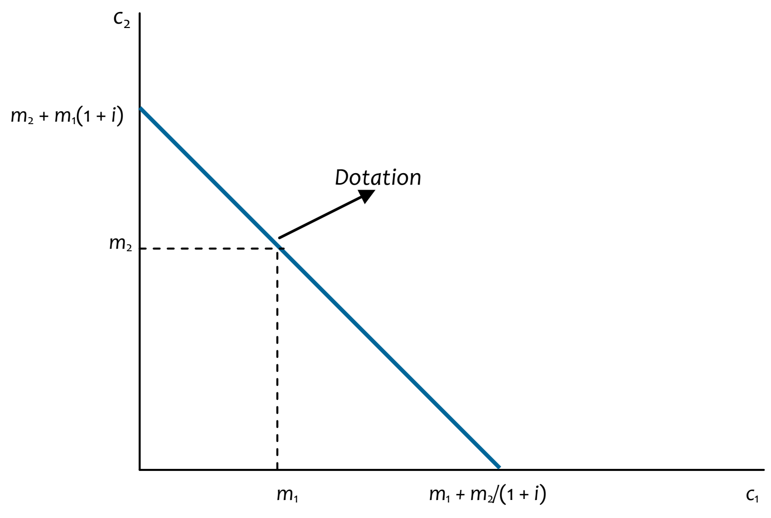
Si $c_1 = 0$, il vient que :

$$c_2 = m_2 + m_1(1 + i) \qquad \text{(ordonnée à l'origine)}$$

Pour avoir la pente de la droite, on va dériver c_2 par rapport à c_1. On va avant tout, réécrire la contrainte budgétaire:

$$c_2 = m_2 + m_1(1 + i) - c_1(1 + i).$$

La dérivée est : $dc_2/dc_1 = -(1 + i)$. La droite a une pente négative et constante.

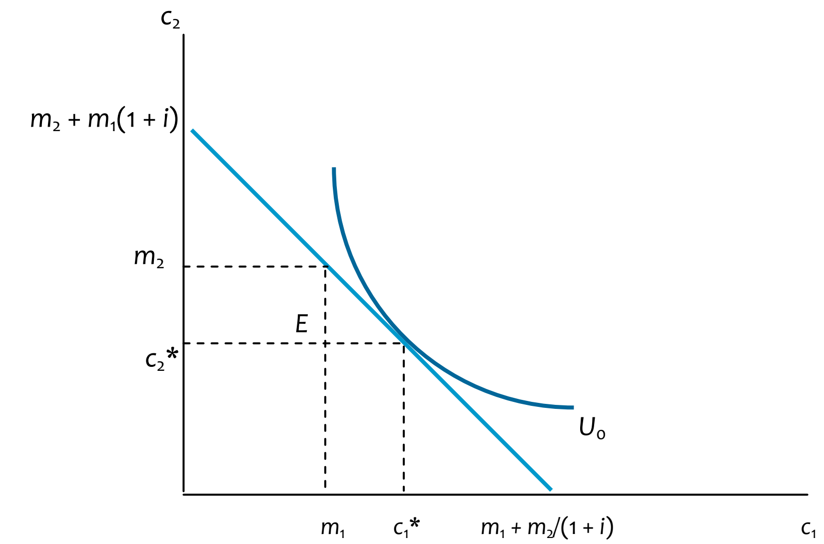


Equilibre individuel : emprunteur et prêteur

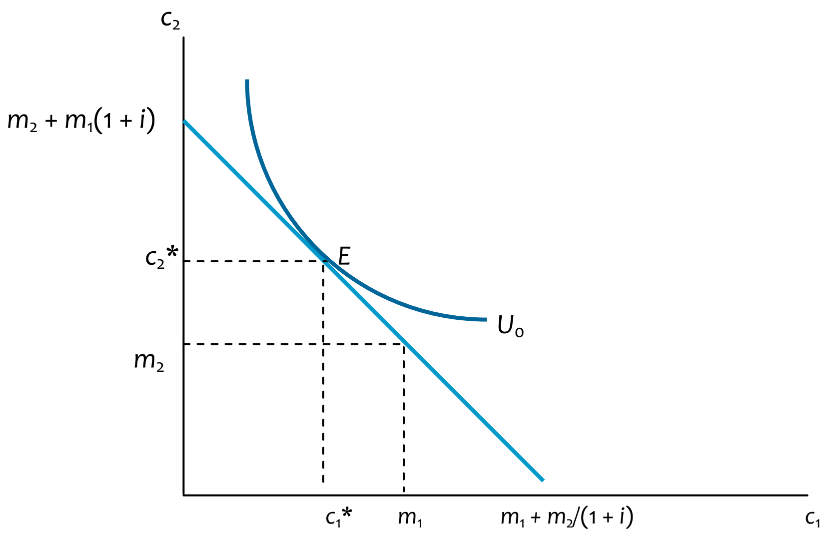
Admettons que les préférences en termes de consommation de l'individu soient normales. Sa fonction d'utilité s'écrira :

$$U = U(c_1, c_2).$$

Les préférences sont convexes car si l'individu décide d'accroître c_1, il devra nécessairement réduire c_2, et vice-versa. Dans ces conditions, l'équilibre sera défini au point de tangence de la courbe d'indifférence et de la droite de budget.

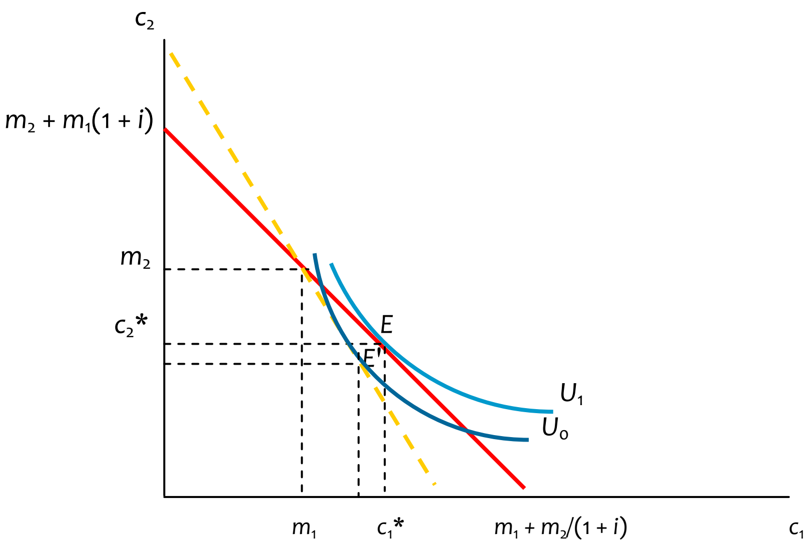


Ce graphique représente la situation d'un individu qui s'endette au temps 1 pour assurer sa consommation. Il vient ainsi qu'au temps 2, sa consommation sera inférieure à son revenu ou sa dotation m_2. Par contre dans le graphique ci-après, il s'agit d'un individu qui prête au temps 1 et arrive à consommer pour un montant supérieur à son revenu ou sa dotation en 2.

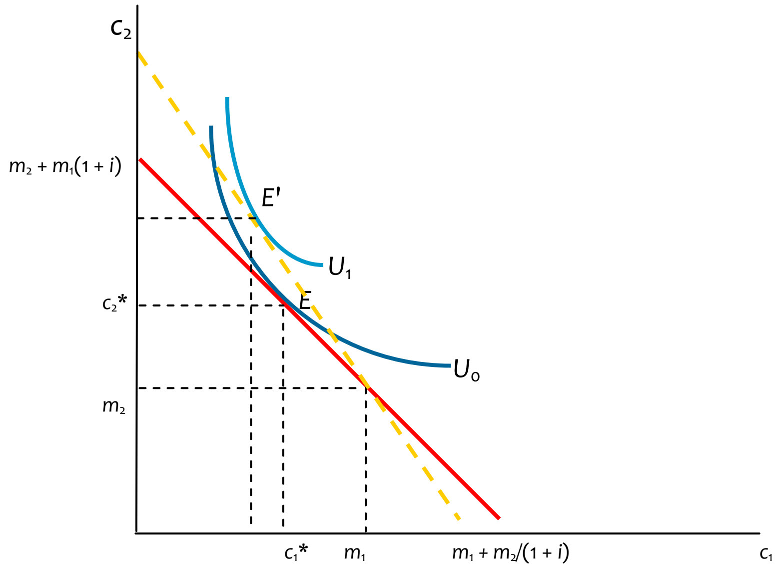


Effet d'une hausse du taux d'intérêt

Si le taux d'intérêt augmente, la pente de la droite de budget sera plus prononcée. Mais il faut noter que la droite aura à pivoter autour du point de dotation. Pour un emprunteur, cette hausse n'est pas chose intéressante. Il se verra dans l'obligation de revoir à la baisse sa consommation.



Pour un individu qui prête de l'argent au temps 1, cette hausse du taux d'intérêt sera bénéfique dans ce sens qu'il pourra accroître davantage sa consommation au temps 2. Il convient même de signaler qu'il aura tendance à accroître ses placements au temps 1 à la suite de cette hausse du taux d'intérêt.



Inflation et taux d'intérêt réel

Jusque-là, les prix n'ont pas été pris en considération alors que nous savons qu'en règle générale, les prix tendent à croître au fil du temps. Supposons que le prix de la consommation à la date 1 est égal à l'unité et le prix de la consommation à la date 2 est p_2. Avec ce changement, la contrainte budgétaire intertemporelle devient :

$$p_2c_2 + c_1(1 + i) = p_2m_2 + m_1(1 + i)$$

La valeur de c_2 devient :

$$c_2 = m_2 + (m_1 - c_1)(1 + i)/p_2.$$

Dans ces conditions, la pente de la droite de budget s'écrit :

$$dc_2/dc_1 = -(1 + i)/p_2.$$

Puisque le taux d'inflation est le taux de croissance des prix d'une période à une autre, on peut écrire :

$$p_2 = p_1 + \pi p_1.$$

p_1 étant égal à l'unité, il vient que $p_2 = 1 + \pi$. Ce qui nous donne :

$$c_2 = m_2 + (m_1 - c_1)(1 + i)/(1 + \pi).$$

Définissons le taux d'intérêt réel r de la sorte.

$$1 + r = (1 + i)/(1 + \pi)$$

En résolvant cette dernière relation par rapport à r, on obtient :

$$r = (i - \pi)/(1 + \pi).$$

Si π est faible, le dénominateur de l'expression ci-dessus sera proche de l'unité. Par conséquent, on établit que :

$$r = i - \pi.$$ [5]

En se servant du taux d'intérêt réel, on peut exprimer la consommation de la deuxième période comme suit :

$$c_2 = m_2 + (m_1 - c_1)(1 + r).$$

Cette relation suggère que l'individu prend ses décisions en tenant compte non pas du taux d'intérêt nominal i mais plutôt du taux d'intérêt réel r. Si l'inflation est supérieure au taux d'intérêt nominal, le taux d'intérêt réel sera négatif et les individus présentant une capacité de financement auront du mal à effectuer des placements car d'une période à une autre, ils auront à perdre de leur pouvoir d'achat s'ils effectuaient des placements.

Tout compte fait, cette analyse nous montre que derrière l'équilibre qui se forme sur le marché des fonds prêtables ou marché financier, il y a plusieurs facteurs explicatifs des comportements des intervenants tant du côté de l'offre que de la demande de capitaux. Les décisions sont prises en fonction des dotations ou revenus disponibles à chaque période, du taux d'intérêt et de l'évolution des prix dans le temps. L'analyse peut encore être enrichie si l'on tient compte du risque associé à un placement.

[5] Cette relation est connue sous le nom de relation de Fischer.

2

Analyse du comportement du producteur

La théorie néoclassique du comportement du producteur se propose d'expliquer comment une firme ou producteur devrait organiser sa production afin de maximiser le profit qui découlerait de son activité. Le profit étant donné par la différence entre la recette et le coût de production, le problème économique du producteur ou de la firme pourrait être posé comme un problème de maximisation de la production sous une contrainte de coût ou un problème de minimisation du coût sous une contrainte de production.

Si la firme se trouve en face de trois technologies qui lui coûtent un même montant, elle devra choisir celle qui donnerait lieu à une plus grande production. Si elle est en présence de trois technologies qui donnent lieu à un même niveau de production, elle devrait choisir celle qui coûte le moins. La théorie postule à cet égard qu'une firme rationnelle est celle qui utilise les facteurs de production (inputs) jusqu'au point où leur productivité marginale en valeur sera égale à ce que le facteur lui coûte. Aussi, elle avance qu'une firme rationnelle exploite toutes les possibilités d'affaires que l'économie ou le marché lui offre afin de maximiser son profit.

2.1. Analyse de la production

La production est l'activité de l'homme qui consiste à combiner certains biens appelés inputs selon une technologie donnée afin de générer un bien ou un ensemble de biens (appelés outputs). Produire est une activité qui relève des ingénieurs, les économistes s'intéressent aux aspects économico-financiers du processus de production. Qu'est-ce que les facteurs rapportent à la firme et qu'est-ce qu'ils lui coûtent ? Est-ce que l'activité de production telle que organisée, eu égard à l'état du marché, pourrait rapporter suffisamment d'argent à la firme ?

L'analyse de la production se construit essentiellement autour de la fonction de production qui, par définition, est l'expression algébrique de la relation technologique entre l'output de la firme et les inputs qu'elle utilise pour venir à bout de sa production. Si l'output est représenté par y et les n inputs par x_i (avec $i = 1, 2, \dots, n$), la fonction de production peut, sous une forme générale, s'écrire :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

La fonction $f(.)$ décrit la technologie utilisée par la firme pour générer son output. Etant donné que les inputs sont des déterminants du niveau de production, la variation de la quantité utilisée d'un input devrait entraîner une variation de la production. Cet effet qu'on appelle rendement factoriel ou productivité marginale est donné par le rapport des variations de la production et de l'input dont la variation a été à la base de la variation de la production.

$$Pmx_i = \Delta y / \Delta x_i.$$

Considérons une firme qui, en utilisant 10 unités du facteur x_1, produit 20 unités d'output. Si en augmentant d'une unité la quantité utilisée du facteur x_1 et que cet accroissement entraîne un accroissement de la production de 5 unités, on conclut que la $11^{\text{ième}}$ unité du facteur x_1 a une productivité marginale égale à 5. Si l'intervention d'une $12^{\text{ième}}$ unité du facteur n'entraîne pas de modification de l'échelle de production, on conclut que cette dernière unité du facteur a une productivité marginale nulle. Et si après intervention d'une $13^{\text{ième}}$ unité, on constate que la production diminue de 2 unités, on conclut que cette dernière unité a eu une productivité marginale négative.

Lorsqu'on est en présence d'une fonction continue et dérivable, le produit marginal est donné par la dérivée de y par rapport à l'input concerné, soit :

$$Pmx_i = dy/dx_i = f_i\,'(.).$$

Pour une fonction Cobb-Douglas notée $y = x_1^a x_2^b$, le produit marginal de x_1 est $Pmx_1 = ax_1^{a-1}x_2^b$ et celui de x_2 par $Pmx_2 = bx_1^a x_2^{b-1}$.

Lorsque la productivité marginale d'un facteur devient négative, cela suppose que la firme en fait un mauvais usage ou un usage excessif et qu'il faudrait en réduire l'usage. Un autre concept important dans l'analyse de la production est le produit moyen de l'input *i* noté PMx_i. Ce dernier est donné par le rapport de l'output sur la quantité utilisée du facteur et renseigne sur la contribution moyenne de chaque unité de x_i dans la production, soit :

$$PMx_i = y/x_i.$$

Pour la fonction de production Cobb-Douglas retenu ci-dessus, les produits moyens des deux facteurs sont donnés respectivement par $PMx_1 = x_1^{a-1}x_2^b$ et $PMx_2 = x_1^a x_2^{b-1}$.

Il est possible que les unités de mesure de l'output et de l'input *i* soient discordantes. Pour bien analyser la sensibilité de la production par rapport à l'input x_i, il est préférable de calculer l'élasticité de la production par rapport au facteur. L'élasticité de y par rapport à x_i est donnée par :

$$\varepsilon_{y,x_i} = \frac{Pmx_i}{PMx_i} = \frac{dy}{dx_i}\frac{x_i}{y}.$$

Compte tenu des résultats obtenus ci-dessus, on établit que pour une technologie Cobb-Douglas, l'élasticité de la production par rapport au facteur x_1 est égale à *a* et pour x_2, elle est égale à *b*.

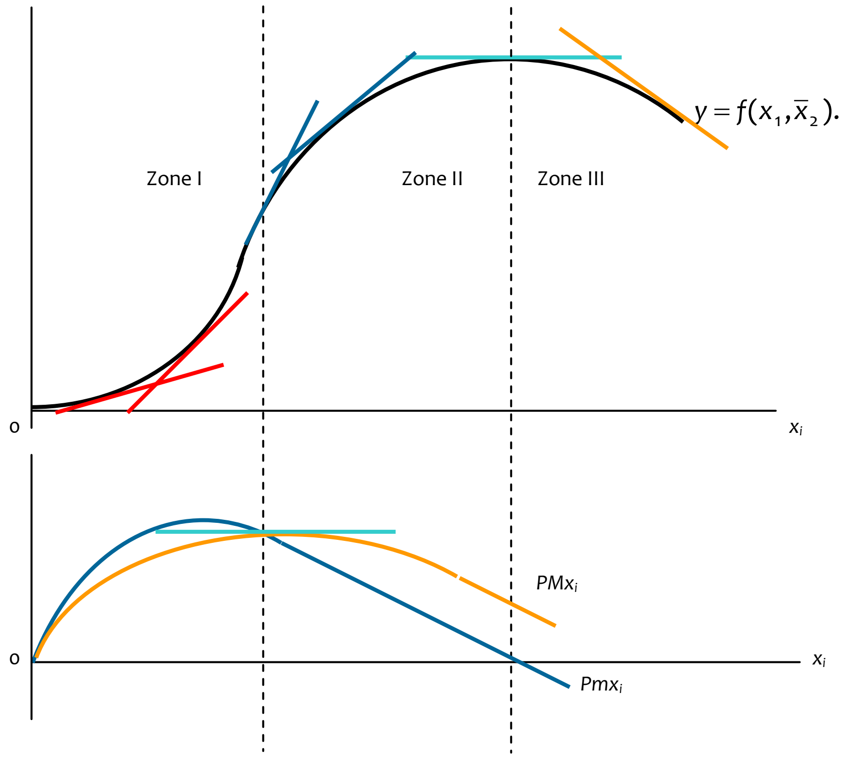
Il est important de mener l'analyse de la production en fonction de l'horizon temporel car dans le court terme, il existe certains facteurs de production qui demeurent constants alors que dans le long terme, tous les facteurs deviennent variables. Cet état de choses ne va pas sans conséquences sur l'analyse et les principales conclusions sur lesquelles on devrait déboucher. Ainsi, nous procéderons à l'analyse de la production en fonction des deux horizons temporels. Dans la suite de l'exposé, nous allons supposer que la firme pour produire, utilise deux facteurs : x_1 et x_2. Le premier représente le facteur travail et le deuxième représente le facteur capital.

2.1.1. Analyse de la production dans le court terme

Dans le court terme, on note que le facteur capital est fixe car ce n'est pas du jour au lendemain qu'une firme peut revoir ses équipements ou sa capacité installée. Seul le facteur travail peut varier dans le court terme. Ainsi, les variations de la production sont dues aux variations de x_1 mais cela ne veut pas dire que x_2 cesse d'être un déterminant de y. L'utilisation du facteur variable devrait se faire en tenant compte de la capacité installée, c'est-à-dire du facteur fixe. Il ne faudrait pas le sous-utiliser ni l'utiliser de manière abusive. On écrit la fonction de production comme suit :

$$y = f(x_1, \bar{x}_2).$$

En partant de l'observation et suivant l'analyse effectuée par David Ricardo, on établit que la production dans le court terme, évolue selon l'allure d'une lettre S allongée. En effet, l'observation montre que dans un premier temps, le produit marginal du facteur variable est positif et évolue à un rythme croissant. Après un certain moment, il demeure positif mais il évolue à un rythme décroissant. Après un certain seuil, il devient négatif et rejaillit négativement sur l'échelle de production.



Il ressort de ces deux graphiques superposés qu'une firme rationnelle ne peut pas organiser sa production dans la zone III car dans cette zone, le produit marginal du travail est négatif. Il en est de même pour la zone I car dans cette zone le produit marginal est supérieur au produit moyen du travail. Ceci suppose que dans la zone I, le facteur fixe est sous-exploité or la rareté des ressources nous impose de ne pas gaspiller. L'utilisation du facteur fixe devient optimale lorsque le produit marginal du travail atteint son maximum et devient égal au produit marginal.

- Preuve de l'égalité $Pmx_1 = PMx_1$ lorsque PMx_1 atteint son maximum.

Par définition $PMx_1 = y/x_1$. Ce dernier atteint son maximum lorsque sa dérivée par rapport à x_1 est égale à zéro. En dérivant et en annulant, on obtient :

$$\frac{dPMx_1}{dx_1} = \frac{x_1 Pmx_1 - y}{x_1^2} = 0.$$

En arrangeant les éléments de ce dernier rapport, on arrive à établir que : $Pmx_1 = y / x_1$.

La zone II est qualifiée de zone de validité d'une fonction de production en ce qu'elle n'est pas caractérisée par une sous-utilisation du facteur fixe ni par une sur-utilisation anti-économique de ce dernier. Dans cette zone, on vérifie que le produit marginal de x_1 est positif et évolue à un rythme décroissant, soit :

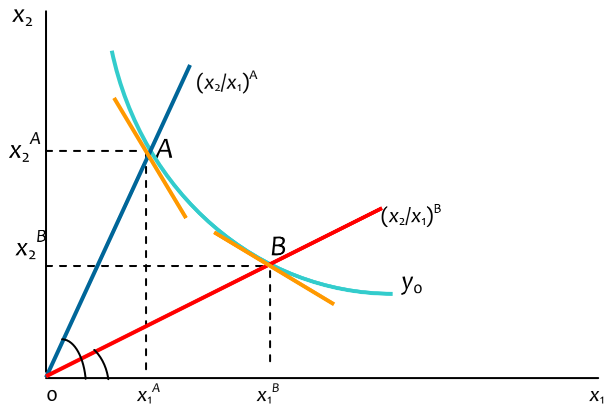
$$f_i'(.) > 0 \text{ et } f_i''(.) \leq 0.$$

Selon la théorie néoclassique, ces deux conditions sont l'expression même de la régularité d'une fonction de production. Si ces conditions sont vérifiées, on dit que la fonction est « well behaved ».

Compte tenu de la définition donnée ci-dessus de l'élasticité ainsi que des graphiques ci-dessus, on dit que le facteur fixe est sous-utilisé lorsque l'élasticité de l'output par au facteur variable est supérieure à un (zone I) et on dit qu'il connaît une sur-utilisation économiquement tolérable lorsque l'élasticité est comprise entre zéro et un (zone II appelée zone de validité). Lorsque l'élasticité devient négative, on parle d'une sur-utilisation anti-économique (zone III).

2.1.2. Analyse de la production dans le long terme

Dans le long terme, tous les inputs deviennent variables. Ainsi, la firme à une plus grande marge de manœuvre en termes de possibilité de combinaison des facteurs. Si les deux sont substituables, la firme peut réaliser un même niveau de production en se servant de plusieurs combinaisons d'inputs. Le lieu géométrique de ces différentes combinaisons d'inputs est appelé isoquant.



Les combinaisons A et B ne sont pas identiques mais puisque étant sur le même isoquant, elles donnent lieu à une même production, soit y_0. Le passage de A à B se traduit par une diminution de la quantité utilisée de x_2 et un accroissement de la quantité utilisée de x_1. Ces variations n'ont pas altéré ou accru l'échelle de production car l'ajustement des quantités des deux facteurs s'est fait en fonction de la productivité marginale de chaque input. Etant donné que sur l'isoquant, le niveau de production est constant, on peut écrire :

$$y_0 = f(x_1, x_2).$$

La différentielle de cette relation donne :

$$dy_0 = Pmx_1dx_1 + Pmx_2dx_2 = 0.$$

Après arrangement, on arrive à définir le taux marginal de substitution technique (*TmSt*) comme étant le rapport des productivités marginales des deux inputs, soit :

$$\frac{-dx_2}{dx_1} = \frac{Pmx_1}{Pmx_2} = TmSt$$

Pour une technologie Cobb-Douglas d'expression $y = x_1^a x_2^b$, le taux marginal de substitution technique est donné par :

$$TmSt = \frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1}.$$

Géométriquement, le taux marginal de substitution technique peut s'interprété comme la pente menée à un point précis de l'isoquant. Lorsqu'on passe de A à B, on constate que la pente de l'isoquant décroît. Ceci tient au fait que le facteur x_2 en devenant relativement rare, voit son produit marginal augmenter et le facteur x_1 en devenant relativement abondant, voit son produit marginal diminuer, d'où une baisse du *TmSt*.

Elasticité de substitution

Lorsque l'on passe de A à B, on observe également un changement du rapport des facteurs (x_2/x_1) ou de la combinaison des inputs. Ceci tient au fait que le passage de A à B se traduit par un changement du *TmSt*, c'est-à-dire un changement du rapport des productivités marginales des facteurs. Pour calculer la sensibilité du rapport des facteurs par rapport au *TmSt*, Hicks a proposé le concept d'élasticité de substitution. Ce dernier s'écrit comme suit :

$$\sigma = \frac{d(x_2/x_1)}{dTmSt}\frac{TmSt}{(x_2/x_1)} = \frac{\partial \ln(x_2/x_1)}{\partial \ln TmSt}.$$

Prenons le logarithme népérien du *TmSt* de la Cobb-Douglas : $\ln TmSt = \ln\frac{a}{b} + \ln\frac{x_2}{x_1}$. En calculant l'élasticité de substitution, on obtient 1. C'est justement la principale faiblesse que présente la fonction Cobb-Douglas. En 1961, Solow – Minhas – Arrow – Chenery ont proposé une autre fonction de production appelé SMAC ou CES (Constant Elasticity of Substitution) pouvant donner lieu à des élasticités de substitution différentes de 1. Cette forme fonctionnelle qui se fonde sur deux opérateurs mathématiques (barycentre et moyenne harmonique généralisée), s'écrit :

$$y = \left[ax_1^{-\rho} + (1-a)x_2^{-\rho}\right]^{\frac{-1}{\rho}},$$

où représente ρ le paramètre de substitution. Pour la CES, l'élasticité de substitution est donnée par :

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}.$$

En fonction de la valeur prise par le paramètre ρ, la valeur de l'élasticité peut changer. Si $\rho = 0$, l'élasticité de substitution sera égale à 1, ce qui renvoie à une technologie de type Cobb-Douglas.

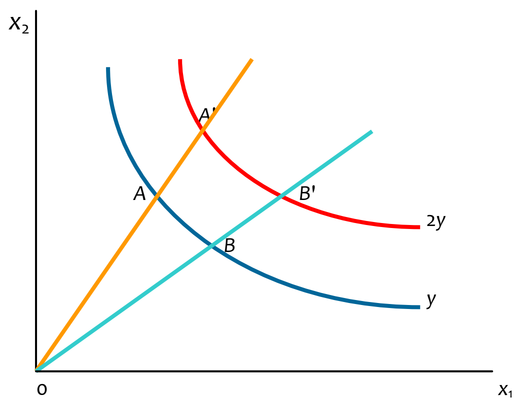
Rendements d'échelle

Lorsque l'on s'intéresse à l'effet d'une variation équi-proportionnelle de tous les facteurs de production sur l'output, on procède à l'analyse des rendements d'échelle. Ces derniers peuvent être croissants, constants ou décroissants. Soit *m*, un scalaire par lequel on augmente les quantités utilisées de tous les facteurs. On dira qu'une technologie est caractérisée par :

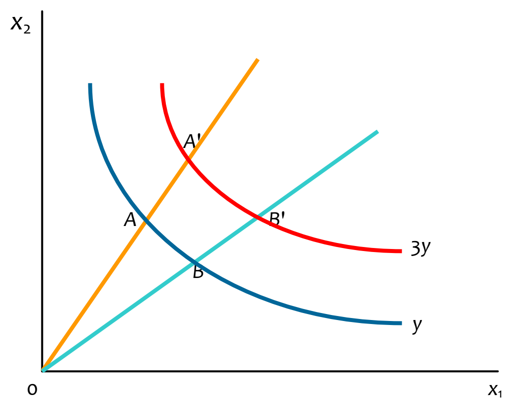
(1) des rendements constants à l'échelle si $f(mx_1, mx_2) = my$;
(2) des rendements croissants à l'échelle si $f(mx_1, mx_2) < my$;
(3) des rendements décroissants à l'échelle si $f(mx_1, mx_2) > my$.

Dans la situation (1), on observe un accroissement de la production dans les mêmes proportions que les inputs alors que dans la situation (2), il y a accroissement plus que proportionnel et dans la situation (3), il y a accroissement moins que proportionnel.

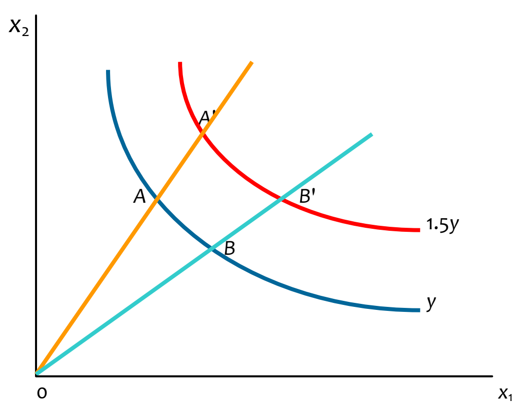
Rendements constants



Rendements croissants



Rendements décroissants



Ces trois graphiques illustrent les concepts de rendements d'échelle constants, croissants et décroissants. *A* correspond à la combinaison (x_1^A, x_2^A), *B* à (x_1^B, x_2^B), *A'* à ($2x_1^A$, $2x_2^A$) et *B'* à ($2x_1^B$, $2x_2^B$). Si en multipliant par 2 la quantité utilisée de tous les inputs, on constate que l'output est lui-même multiplié par 2, on parle de rendements d'échelle constants. Si l'output est multiplié par 3 (qui est supérieur à 2), on est en présence de d'échelle rendements croissants. Par contre, si l'output est multiplié par 1.2 (qui est inférieur à 2), la production est ponctuée par des rendements d'échelle décroissants.

Il convient de remarquer qu'une fonction de production est dite homogène de degré *k*, lorsqu'en multipliant tous les facteurs de production par un scalaire *m*, on obtient une expression de la forme :

$$f(mx_1, mx_2) = m^k f(x_1, x_2).$$

Dans ces conditions, une technologie à rendements d'échelle constants doit être homogène de degré 1, une technologie à rendements d'échelle croissants doit être homogène d'un degré supérieur et une technologie à rendements d'échelle décroissants doit être homogène d'un degré inférieur de l'unité.

Théorème d'Euler. Le théorème établit que pour une fonction de production homogène de degré *m*, on vérifie l'égalité ci-après :

$$my = \sum x_i f_i'(.) \qquad \text{(avec } i = 1, 2).$$

On peut donc démontrer que le degré d'homogénéité d'une fonction de production est à la somme des élasticités de l'output par rapport à tous les inputs ou facteurs qu'elle utilise. Il suffit de diviser cette dernière relation d'Euler par *y* pour s'en convaincre.

$$m = \sum_i^n x_i \frac{f_i'}{y} = \sum \varepsilon_{y,x_i} .$$

Pour la fonction de production Cobb-Douglas notée $y = x_1^a x_2^b$, *m* = *a* + *b*. La nature des rendements d'échelle dépendra de la valeur prise par les différents paramètres. On aura des rendements d'échelle constants si $a + b = 1$, des rendements d'échelle croissants si $a + b > 1$ et des rendements d'échelle décroissants si $a + b < 1$.

2.2. Analyse des coûts

Pour produire son output y, la firme doit acheter les inputs x_1 et x_2 sur le marché des facteurs respectivement aux prix w_1 et w_2. Ainsi, on peut définir le coût de production comme étant la somme des dépenses engagées par la firme pour générer l'output y. On écrit :

$$C = w_1x_1 + w_2x_2.$$

Puisque les inputs x1 et x2 concourent à la réalisation de l'output y, on peut également exprimer le coût de production comme une fonction de y. On écrit alors :

$$C = C(y).$$

L'impact d'une variation de y sur le coût est appelé coût marginal. En présence de données discrètes le coût marginal est donné par le rapport suivant :

$$Cm = \Delta C/\Delta y.$$

Lorsqu'on se trouve devant une fonction de coût continue et dérivable, on peut calculer le coût marginal en calculant la dérivé de C par rapport à y, soit :

$$Cm = dC/dy.$$

Si l'on s'intéresse au coût de production d'une unité d'output, il faut déterminer le coût moyen CM. Ce dernier n'est rien d'autre que le rapport entre le coût total de production et la quantité d'output généré, soit :

$$CM = C/y.$$

Etant donné que l'analyse de la production a été envisagée en fonction de l'horizon temporel, nous envisagerons aussi l'analyse des coûts en deux temps. La fixité d'un facteur dans le court terme a des conséquences sur la structure des coûts et même sur les décisions à prendre par la firme en termes de production.

2.2. Analyse des coûts à court terme

A court terme, le facteur x_2 est maintenu constant alors que le facteur x_1 est variable. Ainsi, la fonction de coût s'écrira :

$$C = w_1x_1 + w_2\overline{x}_2.$$

Les prix des inputs étant fixés par le marché, on distinguera deux composantes du coût total, à savoir le coût variable et le coût fixe. Le coût variable Cv correspond au produit w_1x_1 et le coût fixe Cf au produit $w_2\overline{x}_2$. Ainsi, la fonction de coût total peut aussi s'écrire :

$$C = Cv + Cf = g(y) + Cf.$$

Le coût fixe ne dépend pas de l'échelle de production alors que le coût variable dépend du volume de la production y.

Le coût marginal que nous avons défini ci-dessus comme le coût supporté par la firme pour générer une unité additionnelle d'output, est donné par :

$$Cm = dC/dy = g'(y).$$

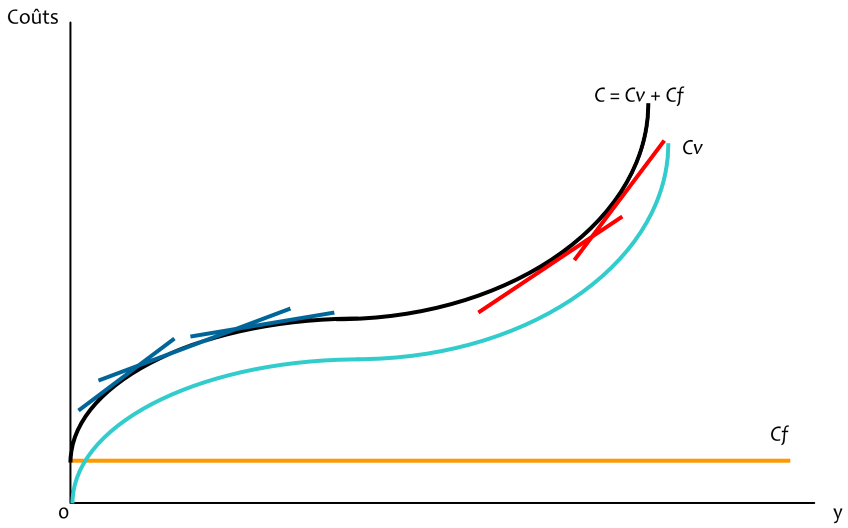
La dérivée du coût total est égale à celle du coût variable car la dérivée du coût fixe est nulle. Ceci montre que la courbe représentative du coût variable aura la même allure que celle de la courbe de coût total. Le coût moyen étant le rapport du coût total avec le volume de production y, on arrive à établir que le coût moyen est égal à la somme du coût variable moyen et du coût fixe moyen, soit :

$$CM = C/y = CvM + CfM.$$

Comment tracer les courbes de coût variable et de coût total ? Il faudrait connaître l'allure des courbes selon que *y* varie. Prenons la dérivée de *C* par rapport à *y*, ce qui donne :

$$\frac{dC}{dy} = \frac{w_1}{Pmx_1}.$$

Compte tenu de l'évolution de la production dans le court terme (rendements croissants, constants et puis décroissants), les courbes de coût total et de coût variable auront dans un premier une pente positive mais décroissante et ensuite une pente positive et croissante. Ainsi, les courbes de coût total et coût variable auront l'allure de la lettre S renversée.



Compte tenu de l'évolution du coût total, on comprend que la courbe de coût marginal sera dans un premier temps, décroissante ensuite croissante. Il en est de même pour la courbe de coût moyen car :

$$CM = \frac{C}{y} = \frac{w_1}{PMx_1} + CfM.$$

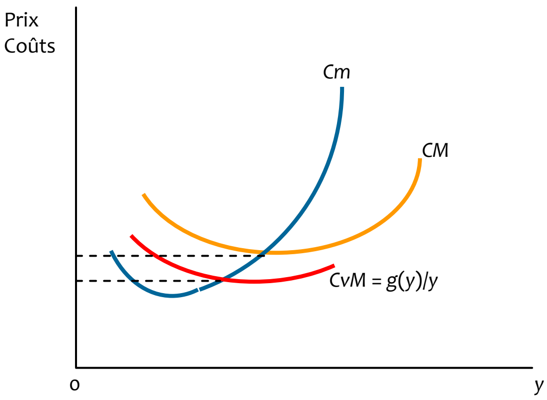
Eu égard à l'évolution du PMx_1, on établit que dans un premier temps le coût moyen décroit tout en étant supérieur au coût marginal et dans un deuxième temps, il croît tout en étant inférieur au coût marginal. Ceci suppose que les deux courbes se croisent en un point précis, au point où le coût moyen atteint son minimum.

- Preuve de l'égalité *Cm* = *CM* lorsque *CM* atteint son minimum.

Par définition *CM* = *C*/*y*. Ce dernier atteint son minimum lorsque sa dérivée par rapport à *y* est égale à zéro. En dérivant et en annulant, on obtient :

$$\frac{dCM}{dy} = \frac{yCm - C}{y^2} = 0.$$

En arrangeant les éléments de ce dernier rapport, on arrive à établir que : $Cm = C/y$. Le graphique ci-après présente les courbes représentatives du coût marginal, du coût moyen et du coût variable moyen.

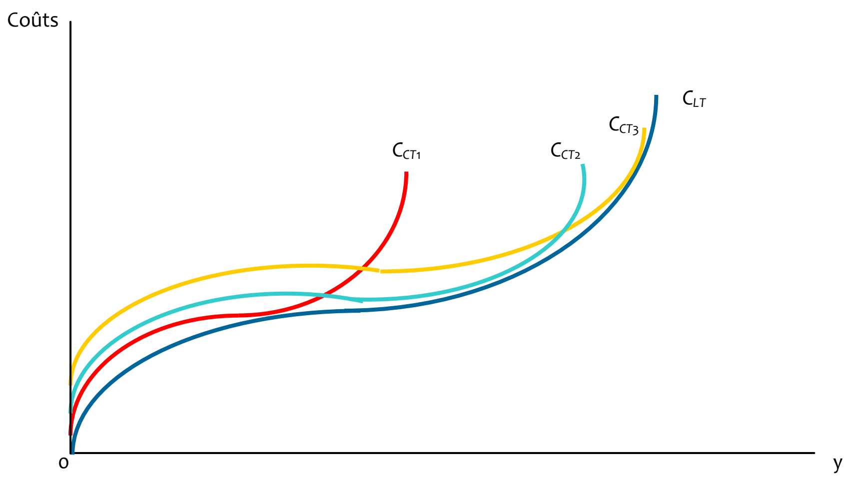


Fonction de coût à long terme

Puisque dans le long terme tous les facteurs sont variables, le coût fixe est absorbé par le coût variable et la fonction de coût devient :

$$C = C(y).$$

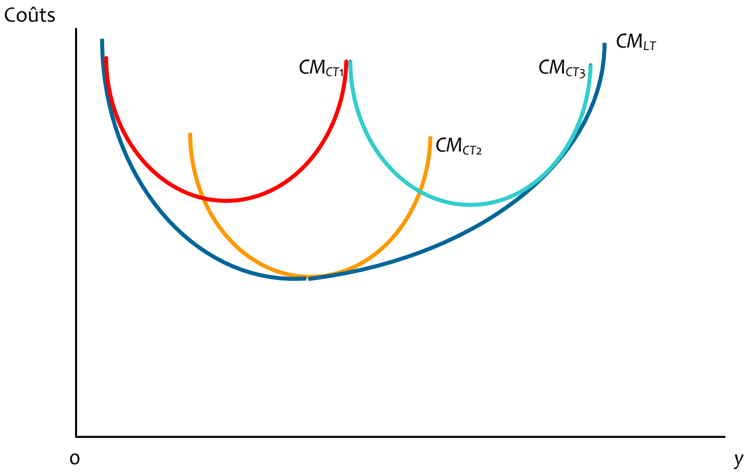
En courte période, la dimension ou taille de la firme est déterminée par le coût fixe. Ainsi, dans le court terme, la production est contrainte par le facteur fixe en ce que l'utilisation du facteur variable dépend du facteur fixe. La courbe de coût de long terme est une courbe enveloppe des courbes de coût de différentes sous-périodes qui forment la longue période.



Dans le long terme, le coût moyen sera donné :

$$CM = \frac{C}{y} = \frac{w_1}{PMx_1} + \frac{w_2}{PMx_2}$$

et sa courbe représentative aura une concavité tournée vers le haut. Il faut noter que cette courbe de coût moyen de long terme est une courbe enveloppe qui ramasse plusieurs courbes de coût moyen de courtes périodes.



La courbe de coût marginal aura la même allure que celle qu'elle avait dans le court terme étant donné que la courbe de coût total a l'allure de la lettre S renversée. Elle coupera la courbe de coût moyen lorsque cette dernière atteint son minimum.

2.3. Gestion optimale

Le problème économique de base de la firme est celui de maximiser son profit.

$$\text{Max } \pi \equiv R - C(y) = py - C(y)$$

En dérivant le profit par rapport à y et en annulant la dérivée, on obtient le critère à observer par la firme pour être efficace sur le marché :

$$p = Cm.$$

Ceci suggère que la firme devrait bien organiser sa production pour tirer meilleur parti du prix pratiqué sur le marché (scale efficient).

Puisque $y = f(x_1, x_2)$, on peut aussi écrire le problème comme suit :

$$\text{Max } \pi \equiv R - C(y) = pf(x_1, x_2) - [w_1x_1 + w_2x_2]$$

Ce problème peut également être appréhendé en termes de maximisation de la production sous une contrainte de coût, soit :

$$\text{Max } f(x_1, x_2)$$
$$\text{telle que } C \geq p_1x_1 + p_2x_2$$
$$\text{avec } (x_1, x_2) \in R^2_+.$$

Ce programme peut, par une approche duale, prendre la forme d'un problème de minimisation :

$$\begin{gathered}\text{Min } C = p_1x_1 + p_2x_2 \\ \text{telle que } f(x_1, x_2) \geq y^{\circ} \\ \text{avec } (x_1, x_2) \in R^2_{+}.\end{gathered}$$

Dans les lignes qui suivent, nous aurons à définir les règles à observer par une firme qui se veut techniquement efficace et qui voudrait faire une entrée réussie sur le marché dans lequel elle aura à vendre son output.

2.3.1. Gestion optimale dans le court terme

Puisque x_2 est fixe dans le court terme, le problème de maximisation du profit peut s'écrire :

$$Max\pi = pf(x_1, \overline{x}_2) - [w_1x_1 + w_2\overline{x}_2].$$

En dérivant la fonction de profit par rapport à x_1 et en annulant la dérivée, on obtient :

$$pPmx_1 - w_1 = 0.$$

Le produit $pPmx_1$ donne le produit marginal en valeur du facteur x_1, c'est-à-dire le produit marginal du facteur x_1 valorisé au prix auquel l'output est vendu p. On peut établir que :

$$pPmx_1 = w_1.$$

Cette relation suggère que la firme arrêtera d'engager des unités additionnelles du facteur x_1 lorsque le produit marginal en valeur du facteur sera égal à ce que le facteur coûte à la firme. On peut encore établir qu'à l'équilibre, on doit observer l'égalité :

$$Pmx_1 = w_1/p.$$

Ceci laisse entendre que la firme rémunère le facteur en fonction de sa productivité marginale. Cette dernière correspond donc au salaire réel, c'est-à-dire au rapport salaire sur prix.

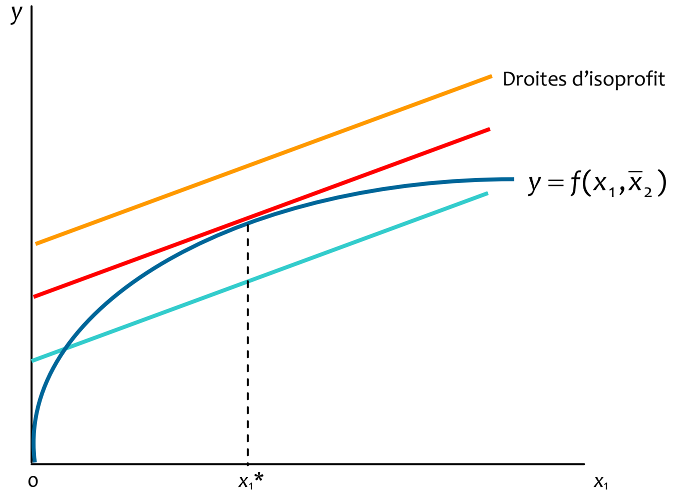
La même conclusion peut être obtenue en se servant d'une approche graphique. La fonction de profit peut être écrite comme suit :

$$\pi = py - [w_1x_1 + w_2\overline{x}_2].$$

En résolvant cette relation par rapport à y, on obtient l'isoprofit qui est une équation qui met en relation y et x_1 afin de réaliser un même niveau de profit.

$$y = \frac{\pi + w_2\overline{x}_2}{p} + \frac{w_1}{p}x_1.$$

En dérivant y par rapport à x_1, on obtient la pente de la droite d'isoprofit qui est positive et égale à w_1/p. On peut ainsi dans un plan (x_1, y), représenter des droites parallèles représentant différents niveaux de profit. Si on ajoute au graphique la courbe de production, juste pour la partie correspond à la zone de validité, on peut tirer la même conclusion que celle tirée ci-dessus.



La quantité à utiliser du facteur x_1 est celle qui égalise la pente de la fonction de production (Pmx_1) à la pente de la droite d'isoprofit (w_1/p).

2.3.2. Gestion optimale dans le long terme

Dans le long terme, le problème de maximisation du profit s'écrit comme suit :

$$Max\pi = pf(x_1, x_2) - [w_1x_1 + w_2x_2].$$

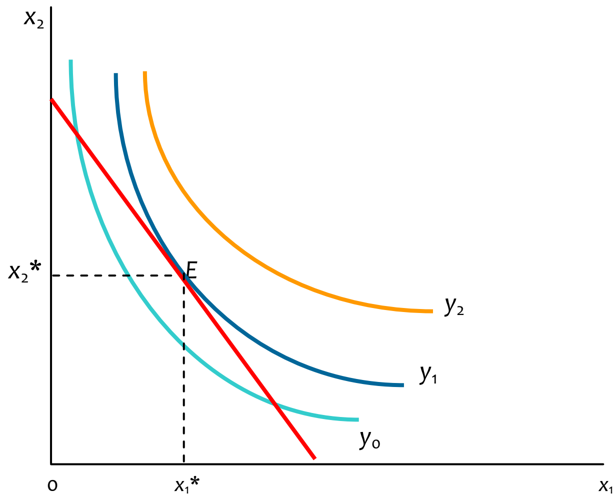
En dérivant la fonction de profit par rapport à x_1 et x_2 et en annulant les deux dérivées, on obtient :

$$pPmx_1 - w_1 = 0 \quad \text{ou} \quad pPmx_1 = w_1,$$
$$pPmx_2 - w_2 = 0 \quad \text{ou} \quad pPmx_2 = w_2.$$

Ces résultats montrent que la firme devrait engager les deux facteurs en fonction de leurs productivités marginales. En faisant le rapport des productivités marginales en valeur des deux facteurs, on arrive à établir que pour être techniquement efficace (technical efficient), la firme doit égaliser son taux marginal de substitution technique au prix relatif des facteurs, soit :

$$TmSt = \frac{Pmx_1}{Pmx_2} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Graphiquement, cette condition d'équilibre est établie en faisant un rapprochement de la pente de l'isoquant avec la pente de l'isocoût. Ce dernier est l'ensemble de combinaisons d'inputs qui coûtent exactement C à la firme.



En se servant de cette condition d'équilibre, on peut dériver les fonctions de demande des inputs. Celles-ci prendront respectivement les formes générales ci-après compte tenu des deux programmes repris ci-dessus :

$$x_i = x_i\,(C, w_1, w_2) \;\text{ et }\; x_i = x_i\,(y°, w_1, w_2).$$

La première fonction établit que la demande est fonction de l'enveloppe budgétaire allouée à la production et des prix des facteurs alors que la deuxième a pour arguments le niveau de production attendu et les prix des facteurs. On peut aussi compter *p* le prix de l'output parmi les déterminants de la demande d'input.

Considérons la fonction de production Cobb-Douglas $y = x_1^a x_2^b$. Les productivités marginales des deux facteurs étant $Pmx_1 = ax_1^{a-1}x_2^b$ et $Pmx_2 = bx_1^a x_2^{b-1}$, à l'équilibre, on devrait vérifier que :

$$pax_1^{a-1}x_2^b = w_1$$
$$pbx_1^a x_2^{b-1} = w_2.$$

En multipliant la première relation par x_1 et la deuxième par x_2, on arrive à établir que :

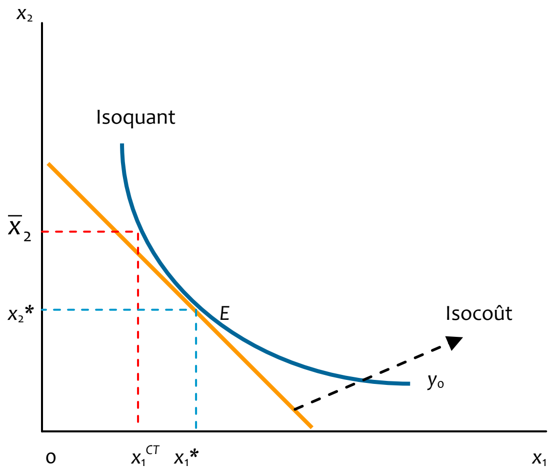
$$pay = w_1 x_1,$$
$$pby = w_2 x_2.$$

Par conséquent, les fonctions de demande des deux inputs seront données par :

$$x_1 = \frac{pay}{w_1},$$
$$x_2 = \frac{pby}{w_2}.$$

Taille optimale de la firme

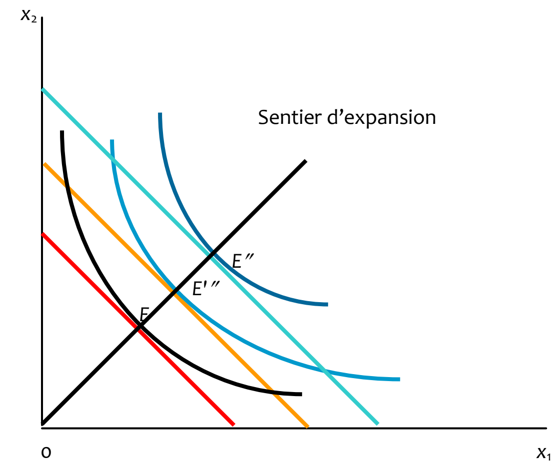
Admettons que l'on soit en présence d'une firme utilisant deux facteurs de production : x_1 et x_2. Dans le court terme, le facteur x_2 est fixe alors que x_1 est variable. Pour réaliser la production y_0 dans le court terme, la firme doit utiliser la quantité du facteur x_1^{CT} compatible à la norme fixée par $\overline{x}_2$.



Il se dégage de ce graphique que la réalisation de y_0 dans le court terme coûte plus cher que si l'on se trouvait au point *E*, point qui peut être envisagé dans le long terme. Si la firme avait la possibilité de faire varier le facteur x_2, elle l'aurait fait mais sa fixité le lui interdit. Ceci montre que dans le long terme, la firme a la possibilité de s'ajuster de manière à maximiser son profit alors que dans le court terme, c'est le facteur fixe qui détermine les possibilités de production. Ainsi, dans le court terme, la firme est dite rationnelle lorsque le choix de sa taille correspond à la quantité x_2*. Nous avons qualifié le coût de long terme d'enveloppe de celui de court terme, car on vérifie toujours que : $C_{CT} \geq C_{LT}$.

Sentier d'expansion de la firme

Autant que l'homme est appelé à croître, la firme est appelé à croître et à prendre des dimensions plus importantes pour offrir davantage des unités de son output sur le marché. Dans le graphique ci-dessous, on considère que le budget dont dispose la firme pour réaliser sa production croît, ce qui lui permet aussi d'accroître sa production. Durant ce processus d'excroissance de la firme, elle est appelée à observer les règles d'une bonne gestion. Ainsi, elle est tenue de respecter le critère d'efficacité technique : $TmSt = w_1/w_2$.



On définit le sentier d'expansion de la firme comme étant la courbe ou droite faite des différentes combinaisons d'inputs permettant à la firme de réaliser son équilibre pour différents niveaux de budget alloué à sa production. Elle peut être représentée par une fonction appelée eutope et qui met en relation x_2 et x_1 à partir de la condition d'efficacité technique.

Pour une technologie Cobb-Douglas $y = x_1^a x_2^b$, à l'équilibre on doit vérifier l'égalité suivante :

$$TmSt = \frac{a}{b}\frac{x_2}{x_1} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Ainsi, on peut écrire l'eutope comme suit :

$$x_2 = \frac{b}{a}\frac{w_1}{w_2}x_1.$$

Si l'on veut passer de la fonction de coût donnée par la somme des dépenses engagées pour disposer des deux inputs à une fonction de coût qui dépend du niveau de l'output y, on se sert de l'eutope. Grâce à ce dernier, il est possible d'exprimer la fonction de coût et la fonction de production comme des fonctions univariées et ensuite, par substitution, exprimer C comme une fonction de y.

En considérant la fonction de production de type Cobb-Douglas ci-dessus, on arrive à établir que le coût total est donné par :

$$C = \left(\frac{a+b}{a}\right)w_1 x_1.$$

En renvoyant, l'eutope dans la fonction de production, on obtient :

$$y = \left(\frac{b}{a}\frac{w_1}{w_2}\right)^b x_1^{a+b}.$$

A partir de cette dernière relation, on tire x_1, soit :

$$x_1 = y^{\frac{1}{a+b}}\left(\frac{a}{b}\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{b}{a+b}}.$$

Enfin, en renvoyant cette dernière expression dans la fonction de coût univariée, on arrive au résultat recherché, soit :

$$C(y) = \left(\frac{a+b}{a}\right)\left(\frac{a}{b}\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{b}{a+b}} w_1 y^{\frac{1}{a+b}}.$$

Si $a = b = 1$, on aura l'expression suivante :

$$C(y) = 2(w_1 w_2 y)^{\frac{1}{2}}.$$

Comment exprimer le coût en fonction de y lorsqu'on est en présence d'une fonction de production de type Leontief notée $y = \min[x_1, x_2]$? Puisque pour cette fonction, on vérifie que $y = x_1 = x_2$, on établit alors que $C = (w_1 + w_2)y$. Qu'en est-il pour une fonction de production à facteurs parfaitement substituables notée $y = x_1 + x_2$? Le taux de substitution étant de 1 contre 1, la firme devrait utiliser le facteur qui coûte le moins cher. Si $w_1 > w_2$, la firme utilisera exclusivement x_2. x_1 étant égal à zéro, on aura $y = x_2$ et $C = w_2x_2$ ou $C = w_2y$. En revanche, si $w_1 < w_2$, la firme utilisera exclusivement x_1 et la fonction de coût s'écrira $C = w_1x_1$ ou $C = w_1y$. En agrégeant, on écrira $C = \min[w_1y, w_2y]$.

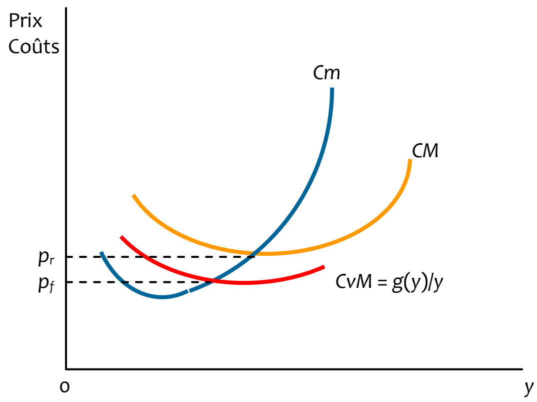
Offre de la firme

Alors que la fonction de production met en relation l'output *y* et les quantités d'inputs utilisées pour le générer, la fonction d'offre met en relation l'output et le prix auquel il est vendu sur le marché. Dans certaines circonstances, elle peut mettre l'output en relation avec son prix ainsi que les prix des inputs qui ont concouru à la production. Mais bien sûr, les deux fonctions (production et offre) expriment une même réalité car ce qui est offert sur le marché, c'est ce qui a été préalablement produit.

- ### Seuil de fermeture, seuil de rentabilité et offre dans le court terme

La décision d'offrir un bien sur le marché dépend du niveau du prix auquel il est vendu ainsi que de la structure des coûts. La firme devra observer le critère $p = Cm$.

Si le prix du marché est p_f, soit un niveau de prix qui permet à la firme de ne couvrir que son coût variable, la firme pourrait arrêter de produire car la perte qu'elle va enregistrer sera identique à celle qu'elle connaîtrait si elle ne produisait pas. Si le prix se situe au niveau de p_r, un niveau de prix qui permet de couvrir toutes les charges productives, on dira que la firme est au niveau du seuil de rentabilité car elle ne réalise ni bénéfice ni perte. C'est pour des niveaux de prix supérieurs à p_r que la firme pourra offrir son bien sur le marché. On conclut ainsi que la courbe d'offre de la firme correspond à la partie ascendante de la courbe de coût marginal en partant du seuil de rentabilité.



Considérons une firme dont la fonction de coût est donnée par $C(y) = y^2 + y + 1$. Son coût fixe est $Cf = 1$, son coût variable est $Cv = y^2 + y$, son coût variable moyen est $CvM = y + 1$ et son coût marginal est $Cm = 2y + 1$. Quel est son seuil de fermeture et quel est son seuil de fermeture ? Pour déterminer le seuil de fermeture, il faut partir de la double égalité $p = Cm = CvM$ et pour déterminer le seuil de rentabilité, il faut partir de la double égalité $p = Cm = CM$.

A la lumière des informations disponibles, pour déterminer le seuil de fermeture, on égalise le coût marginal au coût variable moyen, soit : $2y + 1 = y + 1$. Il vient ainsi que $y = 0$. En renvoyant cette valeur dans le coût marginal, on obtient le seuil de fermeture, soit $pf = 1$. Pour avoir le seuil de rentabilité, on égalise le coût marginal au coût moyen, soit : $2y + 1 = y + 1 + 1/y$. En résolvant par rapport à *y*, on obtient : $y = 1$. Ainsi, le seuil de rentabilité de la firme est $p_r = 3$. Pour avoir la fonction d'offre, il faut égaliser le coût marginal au prix, soit $2y + 1 = p$. En résolvant par rapport à *y*, on obtient la fonction :

$$y^s = -0.5 + 0.5p.$$

Si $p = 1$, l'offre sera égale à 0. Par conséquent, la recette sera $R = 0$, le coût total sera $C = 1$ et le profit sera $\pi = -1$.Si $p = 3$, l'offre sera égale à 1. Il vient alors que la recette sera $R = 3$, le coût total sera $C = 3$ et le profit sera $\pi = 0$. Par contre, si $p = 5$, l'offre sera égale à 2. Ainsi, la recette sera $R = 10$, le coût total sera $C = 7$ et le profit sera $\pi = 3$. C'est pour des niveaux de prix supérieurs au seuil de rentabilité que l'activité rapporte à la firme.

- **Offre dans le long terme**

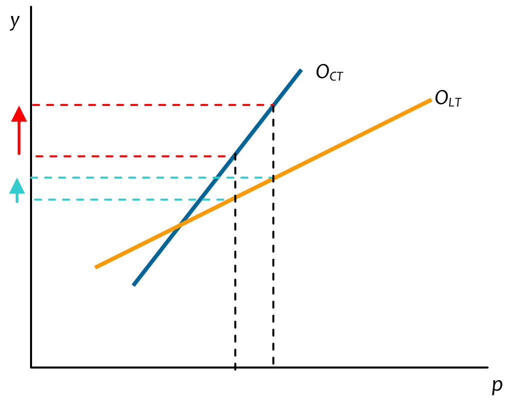
La fonction d'offre de long terme est obtenue en renvoyant dans la fonction de production, les fonctions de demande des inputs $x_i = x_i(y^o, p, w_1, w_2)$ avec $i = 1$ et 2. On obtient ainsi une fonction ayant la forme générale suivante :

$$y = f(p, w_1, w_2).$$

Pour la fonction de production Cobb-Douglas $y = x_1^a x_2^b$, les fonctions de demande des deux inputs sont données par $x_1 = \frac{pay}{w_1}$ et $x_2 = \frac{pby}{w_2}$. En renvoyant ces deux fonctions dans la fonction de production et en résolvant par rapport à y, on obtient la fonction d'offre de long terme :

$$y^s = \left[\frac{pa}{w_1}\right]^{\frac{a}{1-a-b}}\left[\frac{pb}{w_2}\right]^{\frac{b}{1-a-b}}.$$

Il y a lieu de noter que les courbes d'offre de court et de terme sont toutes des fonctions croissantes du prix auquel l'output est vendu mais la pente de la courbe d'offre de court terme est plus prononcée que celle de la courbe d'offre de long terme. Ceci s'explique par le fait que dans le long terme, le nombre d'intervenants sur le marché du côté de l'offre est si important que les perspectives de profitabilité sans trouvent affaiblies. Conséquence, l'offre devient moins sensible aux variations du prix de l'output.



2.4. Changement de l'environnement et ajustement de la firme

Sous ce point, nous allons, à l'aide du lemme de Shephard et du lemme de Hotelling, discuter du comportement que devrait adopter une firme rationnelle selon que certains éléments de son environnement changent. Comment devrait-elle se comporter si le prix d'un de ses inputs augmente ? Comment devrait-elle se comporter si le prix d'un des outputs qu'elle vend voit son prix augmenter ?

2.4.1. Lemme de Shephard

Pour produire le bien y, la firme combine deux inputs selon une technologie donnée. Ainsi, sa fonction de production s'écrit :

$$y = f(x_1, x_2).$$

Les inputs sont substituables. Le coût de production de la firme qui est une fonction de l'échelle de la production qu'elle entend réaliser $y°$, est égale à la somme des dépenses qu'elle a engagées pour disposer des différents inputs intervenants dans son activité de production. Les inputs étant achetés sur le marché des facteurs, on peut écrire la fonction de coût comme suit :

$$C = C(y°, w_1, w_2)$$

On peut également écrire la fonction de coût de la sorte :

$$C = \min w_1 x_1 + w_2 x_2$$

Propriétés de la fonction de coût

(i) La fonction de coût est non décroissante par rapport aux prix des inputs. Si $w' \geq w$, il vient alors que $C(w', y°) \geq C(w, y°)$.

(ii) La fonction de coût est homogène de degré un par rapport aux prix des inputs. En multipliant tous les prix par un scalaire m, on multiplie le coût par le même scalaire : $C(mw, y°) = mC(w, y°)$ pour tous $m > 0$.

(iii) La fonction de coût est concave par rapport aux prix des facteurs, c'est-à-dire que chaque fois que le prix d'un input s'accroît, le coût de production s'accroît moins que proportionnellement. Autrement dit, on doit vérifier que $C'(.) \geq 0$ et $C''(.) \leq 0$.

La concavité est une propriété qui peut paraître surprenante, et pourtant l'intuition sous-jacente est très claire. Lorsque le prix d'un facteur s'accroît, le coût de production s'accroît, mais une firme qui affiche un comportement d'optimisation réduira l'usage fait de ce facteur au profit des facteurs qui lui sont substituables et qui ont vu leurs prix ne pas changer sur le marché des facteurs.

Situation initiale			Comportement passif			Comportement rationnel		
		Inputs			Inputs			Inputs
w_1	5	10	w_1'	8	10	w_1'	8	7
w_2	2	5	w_2	2	5	w_2	2	7
Coût		50			90			70

Comme le montre le tableau ci-dessus, lorsque le prix d'un input augmente, le coût de production augmente. Cependant, on constate qu'il serait rationnel pour la firme de modifier son plan d'utilisation des inputs que de ne pas le faire. En diminuant la quantité utilisée du facteur pour lequel le prix a connu une hausse et en le substituant par le facteur dont le prix n'a pas changé, la firme supporte un coût de 70 alors que si elle affichait un comportement passif, elle supporterait un coût de 90.

Présentation du lemme de Shephard

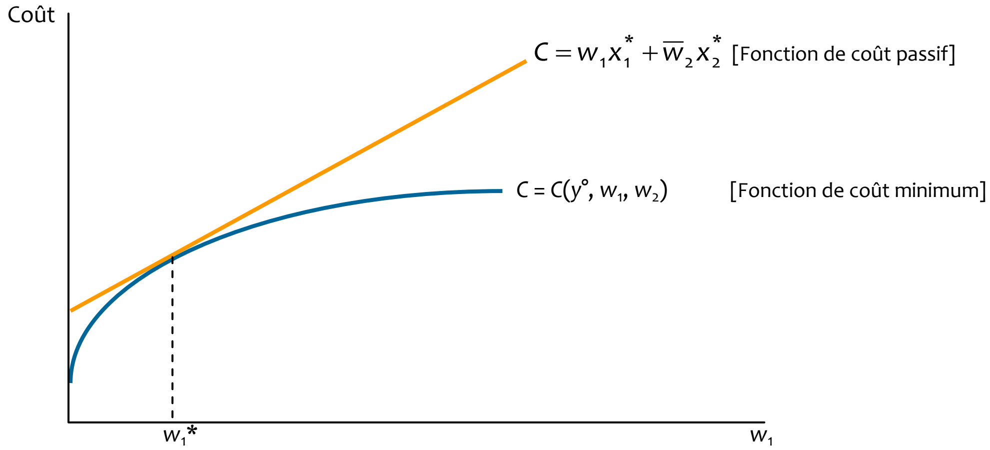
Soit $x_i(y°, w_1, w_2)$, la demande du facteur i par la firme. Si la fonction de coût est continue et différentiable par rapport à w_i alors :

$$x_i(y°, w_1, w_2) = \frac{\partial C(.)}{\partial w_i} \geq 0.$$

Cette dérivée est positive, car on ne peut pas avoir une demande négative. Puisque la demande du facteur i est une fonction décroissante de w_i, la dérivée seconde de la fonction de coût par rapport à w_i sera négative, soit :

$$\frac{\partial^2 C(.)}{\partial w_i^2} \equiv \frac{\partial x_i(.)}{\partial w_i} \leq 0.$$

Les signes de ces deux dérivées montrent que la fonction de coût minimum est bel et bien concave.



Ce graphique montre que la fonction de coût minimum est concave et se situe en dessous de la courbe représentative de la fonction de coût passif, c'est-à-dire la fonction de coût qui traduit un comportement passif de la firme alors que le prix de l'input 1 change.

Preuve du lemme de Shephard.

Soit $X^* = (w_1\ w_2)'$, le vecteur des inputs qui minimise le coût de production de $y°$ aux prix $W^* = (w_1\ w_2)$. On peut définir la fonction de coût superflu ou de surcoût :

$$g(W) = C(W, y°) - WX^*.$$

Puisque $C(W, y°)$ est le coût le plus faible à supporter par la firme pour produire $y°$, la fonction $g(.)$ sera toujours non positive. Lorsque $W = W^*$, $g(W^*) = 0$. Etant donné que cette dernière valeur est un maximum pour la fonction $g(.)$, sa dérivée doit s'annuler :

$$\frac{\partial g(W^*)}{\partial w_i} = \frac{\partial C(W^*, y°)}{\partial w_i} - x_i^* = 0 \qquad (i = 1,2).$$

Ainsi, le vecteur des inputs qui minimise le coût de production est donné par le vecteur des dérivées de la fonction de coût par rapport aux prix des inputs.

2.4.2. Lemme de Hotelling

Considérons une firme « multiproduct », c'est-à-dire qui produit et vend sur le marché deux biens aux prix p_1 et p_2. Son problème de base consiste à maximiser son profit. En supposant que les coûts de production des deux biens soient nuls, sa fonction de profit s'écrit :

$$\pi(P) = \max p_1 y_1 + p_2 y_2$$

Propriétés de la fonction de profit

(i) La fonction de profit est non décroissante par rapport aux prix des outputs. Si $p_j' \geq p_j$ pour tous les outputs alors $\pi(P') \geq \pi(P)$.

(ii) La fonction de profit est homogène de degré un par rapport aux prix : $\pi(mP) = m\pi(P)$ pour tout $m > 0$.

(iii) La fonction de profit est convexe par rapport au vecteur des prix, c'est-à-dire que chaque fois que le prix d'un output s'accroît, le profit s'accroît plus que proportionnellement. Autrement dit, on doit vérifier que $\pi'(.) \geq 0$ et $\pi''(.) \geq 0$.

Situation initiale			Comportement passif			Comportement rationnel		
		Outputs			Outputs			Outputs
p_1	8	10	p_1'	10	10	p_1'	10	13
p_2	4	5	p_2	4	5	p_2	4	2
Profit		100			120			138

Il ressort du tableau ci-dessus que lorsque le prix d'un output augmente, le profit de la firme augmente. Cependant, on constate qu'il serait rationnel pour la firme de modifier son plan de production des outputs pour tirer meilleur parti de l'accroissement du prix observé sur le marché. En augmentant la quantité produite du bien pour lequel le prix a connu une hausse et en réduisant la quantité offerte du bien dont le prix n'a pas changé, la firme gagne 138 alors que si elle affichait un comportement passif, elle ne gagnerait que 120.

Présentation du lemme de Hotelling

Soit $y_j(p)$, l'offre de l'output j par la firme. Si la fonction de profit est différentiable par rapport à p_j avec j = 1, 2, alors :

$$y_j(p) = \frac{\partial \pi(.)}{\partial p_j} \geq 0 \qquad j = 1,2.$$

Cette dérivée est positive, car on ne peut pas avoir une offre négative. Puisque l'offre est une fonction croissante du prix, la dérivée seconde de la fonction de profit par rapport p_j sera positive, soit :

$$\frac{\partial^2 \pi(.)}{\partial p_j^2} \equiv \frac{\partial y_j(.)}{\partial p_j} \geq 0.$$

Les signes de ces deux dérivées montrent que la fonction de profit est bel et bien convexe par rapport aux prix des outputs.

Preuve du lemme de Hotelling

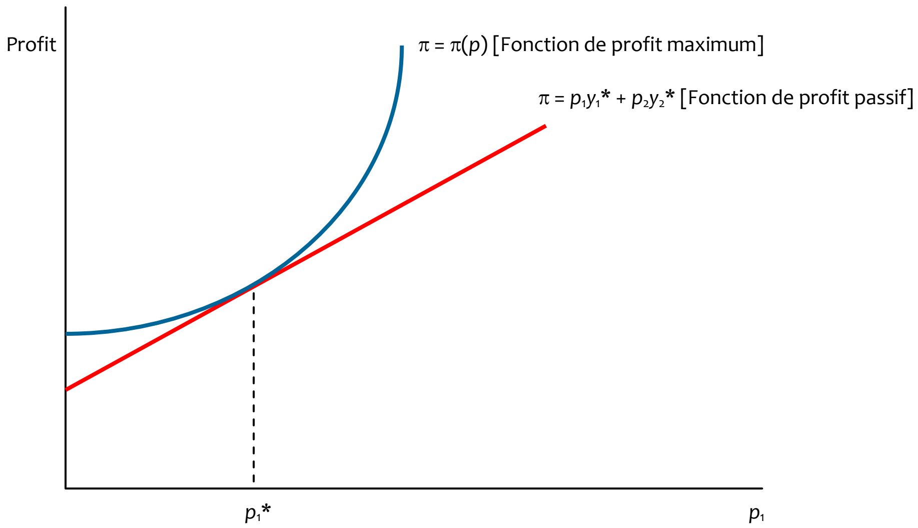
Soit Y^*, le vecteur des outputs qui maximise le profit de la firme aux prix $P^* = (p_1, p_2)$. Définissons la fonction de perte :

$$g(W) = \pi(P) - PY^*.$$

Etant donné que $\pi(P)$ est le profit le plus élevé que la firme peut réaliser, la fonction $g(.)$ sera toujours non négative. Lorsque $P = P^*$, $g(W^*) = 0$. Puisque cette dernière valeur est un minimum pour la fonction $g(.)$, sa dérivée doit s'annuler :

$$\frac{\partial g(P^*)}{\partial p_j} = \frac{\partial \pi(P^*)}{\partial p_j} - y_j^* = 0 \qquad j = 1,2.$$

Par conséquent, le vecteur des outputs qui maximise le coût de production est donné par le vecteur des dérivées de la fonction de profit par rapport aux prix des outputs.



La fonction de profit maximum est convexe et se situe au-dessus de la courbe représentative de la fonction de profit passive, c'est-à-dire la fonction de profit qui traduit un comportement passif de la firme alors que le prix de l'output 1 change sur le marché.

Annexe : Différentes fonctions de production

La fonction Leontief

La fonction Leontief[6] est une fonction à facteurs ou inputs complémentaires. Elle s'écrit comme suit :

$$y = \text{Min}\ \{\ x_1/a,\ x_2/b\}.$$

Les paramètres *a* et *b* sont des coefficients techniques qui déterminent la manière dont les facteurs de production doivent être combinés pour que l'activité productive de l'entreprise ou de l'économie se réalise de la meilleure façon qui soit. Cette fonction de production est homogène de degré un car un accroissement équi-proportionnel des deux facteurs entraîne une variation dans les mêmes proportions de l'output.

Il faut noter qu'en raison du caractère discontinu de la fonction de production, il est impossible de définir les productivités marginales des facteurs capital et travail pour une technologie Leontief.

La Cobb-Douglas

La fonction Cobb-Douglas a été introduite en 1928 par deux américains, à savoir Charles William Cobb et Paul Douglas. Pour écrire cette fonction de production, ils sont partis du constat selon lequel la part relative du capital et la part relative de la main-d'œuvre dans le PIB américain étaient plus ou moins stables à travers le temps. Soit la fonction de production ci-après :

$$y = f(x_1, x_2)$$

où x_1 et x_2 représentent respectivement le capital et le travail que la firme utilise pour produire le bien *y*. La différentielle totale de *y* s'écrit :

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2.$$

En divisant la relation par *y* et en faisant quelques manipulations, on obtient la relation suivante :

$$\frac{dy}{y} = Pmx_1 \frac{x_1}{y}\frac{dx_1}{x_1} + Pmx_2 \frac{x_2}{y}\frac{dx_2}{x_2}.$$

Cette relation peut également s'écrire comme suit :

$$\frac{dy}{y} = e_{y,x_1}\frac{dx_1}{x_1} + e_{y,x_2}\frac{dx_2}{x_2} = a\frac{dx_1}{x_1} + b\frac{dx_2}{x_2}.$$

car $f_i x_i / y$ représente l'élasticité de *y* par rapport à x_i. En intégrant les membres de droite et de gauche de cette égalité, on obtient l'expression suivante que l'on appelle fonction Cobb-Douglas.

$$y = Ax_1^{a}x_2^{b}.$$

Cette fonction est beaucoup utilisée pour cause de la simplicité qui caractérise sa manipulation. Mais fort malheureusement, elle présente un inconvénient majeur ; elle a une élasticité de substitution qui est toujours égale à l'unité et pourtant il est possible d'avoir des valeurs de l'élasticité de substitution différentes de l'unité.

[6] Cette fonction a été proposée par Wassily Leontief, Lauréat du Prix Nobel d'Economie de 1973.

La Constant Elasticity of Substitution (CES)

La fonction CES que l'on appelle aussi SMAC (des noms de Solow[7], Minhas, Arrow et Chenery) a été proposé en 1961 dans le but de faire face à la faiblesse que présente la Cobb-Douglas. Deux opérateurs mathématiques ont été utilisés pour l'écrire, à savoir le barycentre et la moyenne harmonique.

$$y = \{ a_1 x_1^{-\rho} + a_2 x_2^{-\rho} \}^{-1/\rho}.$$

ρ représente le paramètre de substitution. Selon la valeur prise par ce dernier, la fonction CES correspond à plusieurs autres fonctions de production. L'élasticité de substitution est donnée par :

$$\sigma = \frac{1}{1+\rho}.$$

(i) Si $\rho = -1$, la fonction CES devient une fonction de production à facteurs parfaitement substituables.

(ii) Si $\rho = 0$, la fonction CES devient une fonction de production de type Cobb-Douglas.

(iii) Si $\rho = \infty$, la fonction CES devient une fonction de production de type Leontief.

Sous la forme présenté ci-dessus, la fonction de production CES est nécessairement homogène de degré un. Pour faire face à cette faiblesse, A. Walters a proposé une généralisation de la CES en 1963 que l'on appelle la VES (Variable Elasticity of Substitution). Cette forme fonctionnelle s'écrit :

$$y = \{ a_1 x_1^{-\rho} + a_2 x_2^{-\rho} \}^{-h/\rho}.$$

h est un paramètre positif qui représente le degré d'homogénéité de la fonction.

[7] Robert M. Solow et Lauréat du Prix Nobel d'Economie de 1987.

3

Marchés et formation des prix

Par définition, le marché est une rencontre méthodique de l'offre et de la demande. Il est caractérisé par la rencontre de deux forces, à savoir l'offre et de la demande et par leur interaction de manière à définir un prix permettant à la transaction ou aux transactions d'avoir lieu. Ainsi, le prix d'équilibre est un accord ou un compromis entre offreur(s) et demandeur(s).

Selon la nature, on distingue trois types de marchés, à savoir le marché des biens et services, le marché du travail et le marché des capitaux (marché financier et marché de change). Le fonctionnement d'un marché dépend du nombre d'intervenants sur celui-ci aussi bien du côté de l'offre que de la demande. Lorsqu'il n'y a qu'un seul offreur (monopole) ou qu'un seul acheteur (monopsone) sur le marché, celui-ci a la possibilité de fixer le prix (price maker) alors que s'il y a plusieurs offreurs (polypole) et acheteurs (polypsone), un agent économique aura du mal à fixer seul le prix auquel les transactions auront à se solder. Dans ces conditions, c'est l'interaction entre offre et demande globales qui fixe le prix d'équilibre, et les intervenants se rangent derrière ce prix (price taker). Le tableau ci-après présente les différents types de marché que l'on peut rencontrer eu égard au nombre d'intervenants[8].

Nombre d'acheteurs		Nombre d'offreurs		
		Un seul	Quelque	Plusieurs
	Un seul	Monopole bilatéral	Monopsone contrarié	Monopsone
	Quelque	Monopole contrarié	Oligopole bilatéral	Oligopsone
	Plusieurs	Monopole	Oligopole	Concurrence

Avant d'envisager l'analyse de différents types de marchés, il faudrait noter que les objectifs des consommateurs et des firmes ainsi que leurs comportements d'optimisation ne changent pas quel que soit le type de marché dans lequel ils se retrouvent. En concurrence parfaite ou imparfaite, une firme rationnelle recherche un profit maximum et un consommateur rationnel cherche à maximiser l'utilité que lui procurent les biens achetés.

3.1. Marché de concurrence pure et parfaite

Un marché de concurrence pure et parfaite est un marché présentant les caractéristiques fondamentales ci-après :

- **Atomicité du marché.** Les intervenants sont si nombreux sur le marché (polypole et polypsone) que chacun se voit comme une goûte d'eau dans la mer. Autrement dit, ils sont si petits que personne ne peut se prévaloir d'un quelconque pouvoir en ce qui concerne la fixation du prix du bien sur le marché.

- **Parfaite mobilité des intervenants (fluidité du marché).** Les différents intervenants aussi bien du côté de l'offre que de la demande ont la liberté d'entrer tout comme de sortir du marché. Ceci n'influe guère sur le fonctionnement du marché, car retirer ou verser un tonneau d'eau dans la mer ne modifiera aucunement le nivellement de l'eau.

- **Homogénéité du produit.** Sont considérées comme concurrentes les firmes qui offrent un produit ou un bien de même nature (identiques ou fortement substituables).

[8] Cette catégorisation a été proposée par Stackelberg.

- **Circulation parfaite de l'information.** L'information circule parfaitement, c'est-à-dire qu'elle est à la portée de tous les intervenants. Ainsi, lorsqu'une firme pratique un prix supérieur à celui qui a été fixé par le marché, elle perd automatiquement sa clientèle.

En situation de concurrence pure et parfaite, tous les intervenants sont des *price taker* en ce qu'aucun d'entre eux ne peut de lui-même fixer le prix auquel se solderont les transactions. Par un mécanisme de tâtonnement piloté par le commissaire priseur (un agent fictif ou une main invisible), les forces du marché vont interagir de manière à conduire à une position d'équilibre.

Il y a lieu de noter qu'en réalité, il n'existe pas de marché de concurrence pure et parfaite, c'est un marché idéal vers lequel il faudrait tendre. Il devrait être régi par un ensemble de principes et règles qui organisent les relations entre firmes (le droit de la concurrence) et un ensemble de règles qui organisent les relations entre firmes et consommateurs (le droit du commerce). Le droit de la concurrence vise à lutter sinon limiter les monopoles et la concentration des firmes.

Il y a concurrence imparfaite lorsqu'au moins une des caractéristiques de concurrence pure et parfaite sus-évoquées n'est pas observée. Les atteintes à la concurrence pure et parfaite peuvent être les suivantes :

- **Atomicité du marché.** Cette caractéristique peut disparaître lorsqu'il n'y a qu'une seule firme sur le marché ou lorsque les firmes se concentrent au sein d'un cartel ou d'une autre forme d'entente. Aussi, la concurrence pure et parfaite cesse d'être de mise lorsque les consommateurs se regroupent dans des associations ou ligues afin d'influencer les mécanismes de fixation du prix sur le marché.

- **Fluidité du marché.** L'existence des barrières (techniques, juridiques ou économiques) à l'entrée tout comme à la sortie fait que le marché ne soit plus concurrentiel.

- **Homogénéité du produit.** Lorsque les firmes arrivent à différencier leurs produits, la concurrence cesse d'être pure et parfaite.

- **Circulation parfaite de l'information.** La concurrence pure et parfaite disparaît lorsqu'il y a asymétrie de l'information, ou lorsqu'elle est partielle ou encore lorsqu'il y a des publicités mensongères.

3.1.1. La firme concurrentielle

Dans un régime de concurrence pure et parfaite, chaque firme considère le prix comme une donnée (*price taker*), c'est-à-dire indépendant de ses propres actions, si bien que les actions de tous les intervenants déterminent le prix du marché. Soit p_e le prix du marché. La demande s'adressant à une firme concurrentielle idéale se définit comme suit :

$$y^d(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p > p_e \\ \text{quelconque} & \text{si } p = p_e \\ \infty & \text{si } p < p_e \end{cases}$$

Une firme concurrentielle est libre de fixer son prix de vente et de produire la quantité qu'elle désire. Cependant, si son prix est supérieur à celui du marché p_e, personne n'achètera son produit. En revanche, si elle pratique un prix inférieur à p_e, elle aura autant de client qu'elle veut. C'est pourquoi on dit qu'une firme concurrentielle est confrontée à une demande infiniment élastique (c'est-à-dire très sensible aux variations du prix).

3.1.2. La maximisation du profit et l'offre du marché

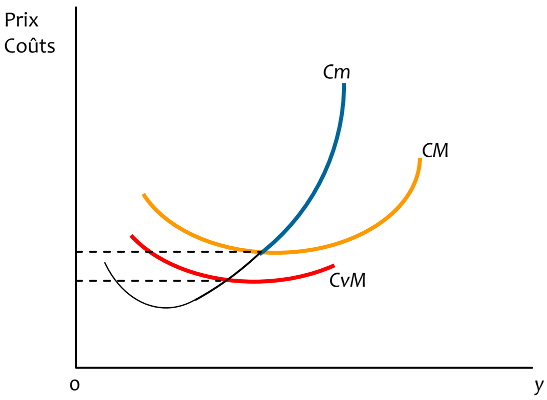
La firme concurrentielle doit déterminer sa production y de manière à maximiser son profit, c'est-à-dire en résolvant le programme d'optimisation ci-après :

$$\text{Max } \pi = py - C(y)$$

où $C(y)$ est sa fonction de coût. Les conditions du premier et du second ordre de l'optimisation du profit sont :

$$p - Cm = 0.$$
$$- C''(y) < 0.$$

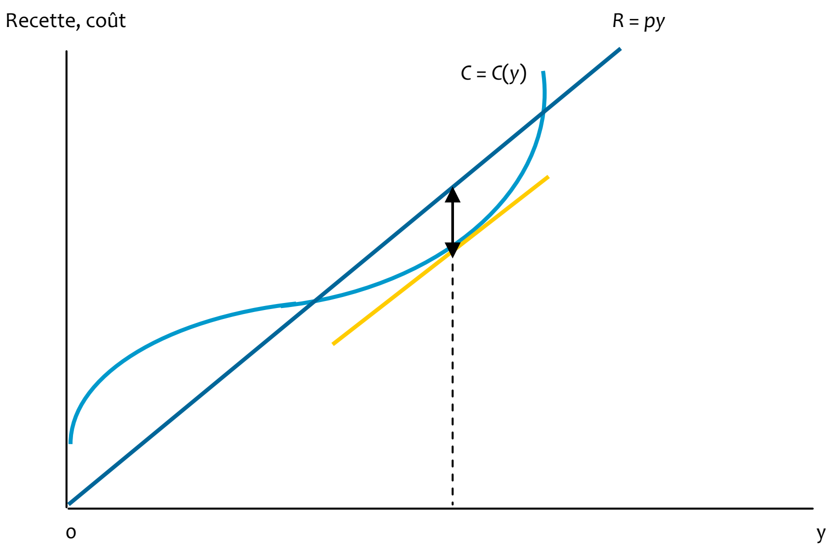
Ceci implique que le prix sera égal au coût marginal ($p = Cm$) et la fonction d'offre sera une fonction croissante du prix parce que $C''(y) > 0$. La courbe d'offre de la firme correspond à la partie croissante de la courbe de coût marginal située au-dessus de la courbe de coût moyen.



La fonction d'offre donne, pour différents niveaux de prix, la production qui maximise le profit de la firme. Par conséquent, la fonction d'offre $y^s(p)$ doit satisfaire la condition suivante :

$$Rm = p = Cm.$$

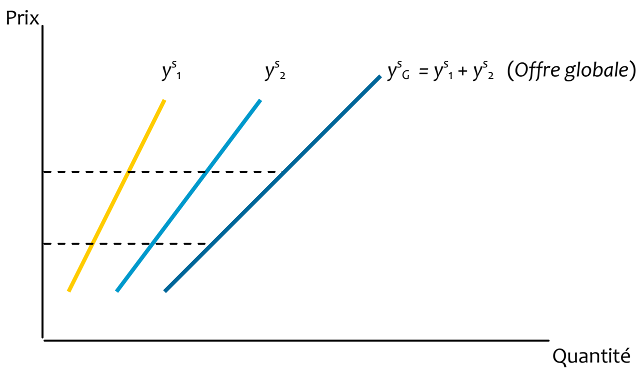
Graphiquement, les choses se présenteraient comme suit.



La fonction d'offre de la branche ou du marché est simplement la somme des fonctions d'offre des firmes individuelles. Si $y^s_i(p)$ est la fonction d'offre de la ième firme et si la branche compte n firmes, la fonction d'offre globale sera donnée par :

$$y^S_G = y^s_1(p) + y^s_2(p) + \dots + y^s_n(p) = \sum y^s_i(p) \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Graphiquement, on fait une addition horizontale des courbes individuelles d'offre pour avoir la courbe d'offre du marché. Pour différents niveaux de prix, on identifie la quantité totale de biens que les firmes souhaiteraient offrir sur le marché.



Si les n firmes ont la même structure de coûts, c'est-à-dire des fonctions de coût identiques, elles auront des fonctions d'offre identique car elles doivent toutes respecter le critère de l'égalité entre le coût marginal et le prix en vigueur sur le marché. Dans ces conditions, l'offre globale est donnée par le produit :

$$y^S_G = ny^s_i(p).$$

Admettons que sur le marché, on compte 20 firmes ayant la même structure de coût : $C = y^2 + 2y + 1$. Le coût marginal étant $Cm = 2y + 2$, on peut dériver la fonction d'offre individuelle en égalisant le coût marginal au prix et en résolvant par rapport à y, soit :

$$y^s_i = -1 + 0.5p.$$

L'offre agrégée est obtenue en multipliant cette fonction par le nombre de firmes, soit :

$$y^s_G = -20 + 10p.$$

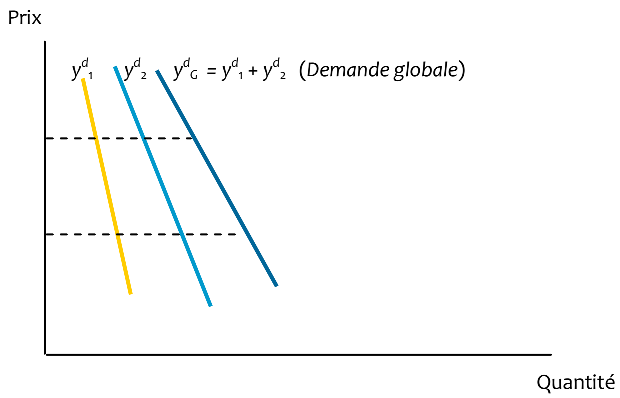
Autant que l'offre individuelle est fonction croissante du prix du bien, l'offre globale ou agrégée est aussi une fonction croissante du prix.

3.1.3. La demande globale ou du marché

La demande individuelle du bien y est déterminée en résolvant un programme de maximisation de l'utilité sous une contrainte budgétaire. Si on compte sur le marché m consommateurs ou demandeurs du bien, il faudra déterminer la demande de chacun $y^d_j(p)$ et puis faire la somme de ces demandes individuelles pour obtenir la demande globale ou du marché $y^d_G(p)$.

$$y^d_G = y^d_1(p) + y^d_2(p) + \dots + y^d_m(p) = \sum y^d_j(p) \qquad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Pour obtenir la courbe de demande du marché, on fait la somme horizontale des courbes individuelles de demande. Pour différents niveaux de prix, on identifie la quantité totale de biens que les individus souhaiteraient acheter sur le marché.



Si les *m* consommateurs ont la même structure de préférences, c'est-à-dire des fonctions de demande identiques, la demande globale est donnée par le produit :

$$y^d_G = my^d_j(p).$$

Supposons que sur le marché, il y ait 40 consommateurs ayant des fonctions de demande identiques : $y^d_j = 2 - 0.25p$. La demande globale ou agrégée sera donnée par :

$$y^d_G = 80 - 10p.$$

3.1.4. L'équilibre du marché de concurrence parfaite

L'équilibre est un état ou une situation dans laquelle différentes forces interagissant sur un même lieu arrivent à se contrebalancer. Pour ce qui est d'un marché, on dira qu'il est en équilibre lorsque les intentions des offreurs correspondent à celles des demandeurs. Autrement dit, un marché se solde en équilibre lorsque le prix en vigueur permet aux deux parties en présence de réaliser leurs plans de consommation ou d'offre sans être rationnées. Dans ces conditions, un prix d'équilibre est un prix tel que la quantité demandée est égale à la quantité offerte.

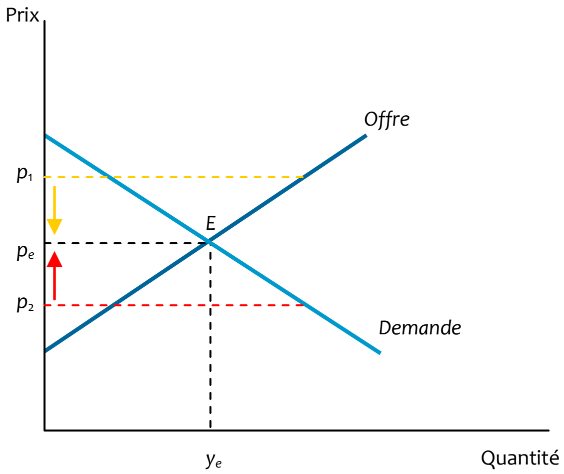
Soit $y^s_i(p)$ la fonction d'offre d'une firme ($i = 1, 2, \dots, n$) et $y^d_j(p)$ la fonction de demande d'un individu ($j = 1, 2, \dots, m$). Un prix d'équilibre est alors une solution de l'équation :

$$\sum y^d_j(p) = \sum y^s_i(p).$$

On peut également définir le prix d'équilibre comme étant le prix qui annule la demande excédentaire *E* sur le marché, soit :

$$E \equiv [y^d_G(p) - y^S_G(p)] = 0.$$

Ce prix est unique du fait de la transparence qui caractérise le marché ainsi que de l'atomicité et de l'homogénéité du produit. Il convient de signaler que les mécanismes qui caractérisent un marché concurrentiel sont efficaces, car en présence d'un déséquilibre (offre supérieure à la demande, vice versa), ils entrent en interaction de manière à ramener le marché à l'équilibre (équilibre stable). Si le prix est trop élevé, l'excès d'offre devrait conduire à sa diminution et s'il est trop bas, la rareté du bien sur le marché entraînera son accroissement.



Pour le prix p_1, la quantité offerte est supérieure à la quantité demandée. Ceci suppose un rationnement de l'offre en ce que les firmes n'arrivent pas à écouler leurs produits sur le marché comme elles l'auraient souhaité. On a ainsi :

$$E \equiv [y^d{}_G(p) - y^S{}_G(p)] < 0.$$

Dans ces conditions, pour écouler les invendus, les firmes seraient appelées à revoir à la baisse le prix auquel elles souhaiteraient vendre le bien. En revanche, si le prix du marché est p_2, la quantité demandée est supérieure à celle offerte. On parle ainsi d'un rationnement de la demande en ce que les consommateurs achètent moins que ce qu'ils auraient voulu.

$$E \equiv [y^d{}_G(p) - y^S{}_G(p)] > 0.$$

La rareté qui va en résulté devrait déboucher sur un ajustement à la hausse du prix auquel le bien sera vendu sur le marché. Si en cas de déséquilibre entre offre et demande globales, les forces du marché arrivent à interagir de sorte à restaurer l'équilibre, on conclut qu'elles sont efficaces.

3.1.5. Le modèle simple du marché

Le modèle du marché, sous sa version statique, se propose de déterminer la position d'équilibre du marché d'un bien, c'est-à-dire le prix p_e auquel les transactions devraient se solder pour que les demandeurs et offreurs soient tous satisfaits. Il se présente comme suit :

$$\begin{aligned} &y^d{}_G = D(p) && \text{avec } D'(p) < 0 \\ &y^s{}_G = S(p) && \text{avec } S'(p) > 0 \\ &E \equiv (y^d{}_G - y^s{}_G) = 0 && \text{(condition d'équilibre).} \end{aligned}$$

La première équation établit que la demande est une fonction décroissante du prix, la deuxième que l'offre est une fonction croissante du prix et la troisième que l'équilibre est réalisée sur le marché lorsque la demande excédentaire E (différence entre demande et offre globales) est nulle. De manière spécifique, le modèle du marché s'écrit:

$$\begin{aligned} &y^d{}_G = a - bp \\ &y^s{}_G = -c + jp \\ &E \equiv (y^d{}_G - y^s{}_G) = 0. \end{aligned}$$

Les paramètres b et j mesurent l'impact d'une variation du prix sur la demande et l'offre globales. Si le prix est nul, la demande globale sera égale à a et l'offre globale égale à $-c$. Le paramètre a peut ainsi s'interprété comme la quantité maximale que peuvent consommer les demandeurs. Le signe négatif de l'offre établit que pour offrir le bien, les offreurs s'attendent à ce que le prix franchisse un certain seuil (seuil de rentabilité).

En se servant de la condition d'équilibre, on arrive à établir que le prix d'équilibre du marché est:

$$p_e = \frac{a+c}{b+j}.$$

La quantité de bien échangée sur le marché sera déterminée en renvoyant dans la fonction de demande ou d'offre agrégée, le prix d'équilibre p_e. On aura ainsi :

$$y_e = \frac{aj-bc}{b+j}.$$

Si le marché est caractérisé par les fonctions de demande et d'offre globales ci-après :

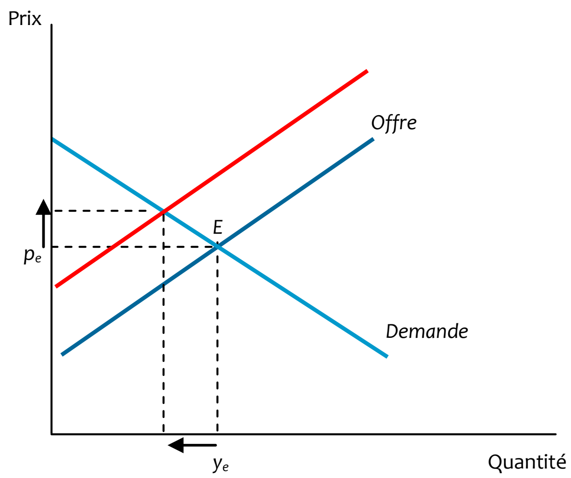
$$y^d_G = 80 - 10p$$
$$y^s_G = -20 + 10p$$

le prix réalisant l'équilibre sur le marché est $p_e = 5$ et la quantité échangée est $y_e = 30$. Chaque firme offre 1.5 unité du bien et réalise un profit égal à 1.25.

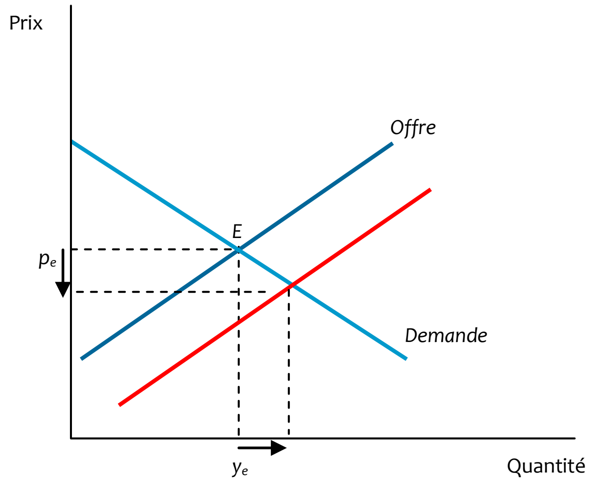
3.1.6. Changement de l'environnement et équilibre

Le changement d'un paramètre caractérisant le comportement d'une des catégories d'intervenants (offre ou demande) sur le marché devrait entraîner une modification de la position d'équilibre. Un accroissement de la valeur du paramètre a ou du paramètre c devrait entraîner un accroissement du prix d'équilibre alors qu'un accroissement de la valeur du paramètre b ou du paramètre j devrait déboucher sur une diminution du prix d'équilibre.

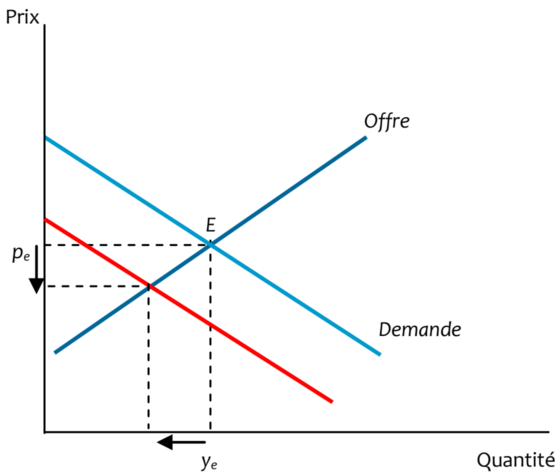
Le graphique ci-dessous montre qu'un accroissement du paramètre c entraîne un déplacement vers la gauche de la courbe de d'offre. La demande n'ayant pas changé, le prix d'équilibre devrait s'accroître pendant que la quantité échangée sur le marché diminue.



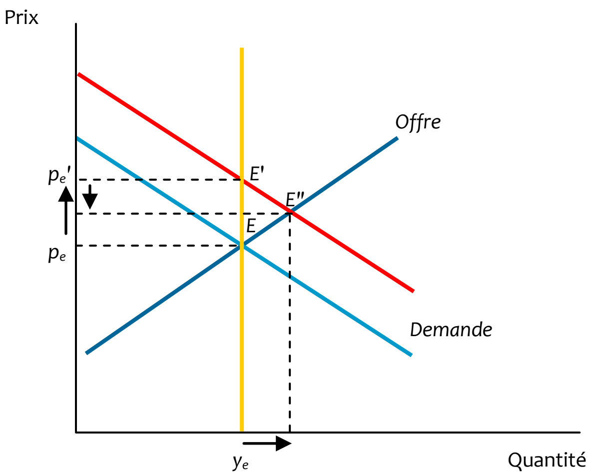
La mesure de l'impact de cette variation de c sur le prix d'équilibre est égale à $1/(b + j)$ et la mesure de l'impact sur la quantité d'équilibre est égale à $-b/(b + j)$. Ainsi, si le paramètre c croît, le prix d'équilibre augmentera et la quantité diminuera. En revanche, si c diminue, le prix diminuera et la quantité d'équilibre va augmenter. C'est du reste ce qui ressort du graphique suivant.



Une diminution de la valeur de a devrait déboucher sur un déplacement vers le bas de la droite de demande avec comme conséquence, une baisse du prix et de la quantité d'équilibre. L'impact d'une variation de a sur le prix est égal à $1/(b + j)$ et l'impact sur la quantité est égal à $j/(b + j)$.



Il faut toutefois noter que l'impact d'un accroissement de la valeur du paramètre a devrait être analysé en tenant compte de l'horizon temporel. L'impact serait différent selon qu'il s'agit de l'infra-courte période ou du court terme. Lorsque la valeur de a augmente, la droite de demande se déplace parallèle vers l'extérieur, ce qui traduit un accroissement de la demande. Puisqu'en infra-courte période, les firmes ne peuvent pas ajuster à la hausse leurs plans de production, la quantité offerte du bien ne va pas changer. La rareté relative du bien qui va en résulter devrait entraîner une hausse sensible du prix d'équilibre (passage de p_e à p_e').



C'est après un certain temps que l'ajustement des plans de production pourra être envisagé, conséquence la quantité de bien échangée sur le marché va augmenter (passage de *E'* à *E''*). Toutefois, le prix d'équilibre final sur supérieur au prix d'équilibre initial quoique inférieur au prix qui a prévalu en infra-courte période.

Revenons à la structure du marché retenue ci-dessus, soit :

$$y^d_G = 80 - 10p$$
$$y^s_G = -20 + 10p.$$

Le prix et la quantité d'équilibre sont respectivement $p_e = 5$ et $y_e = 30$. Si à la suite d'une vague d'optimisme, la demande globale devient $y^d_G = 100 - 10p$, en infra-courte période la quantité échangée sur le marché ne va pas changer alors que le prix va croître de manière assez considérable. En renvoyant la quantité $y_e = y_e' = 30$ dans la nouvelle équation de demande globale, on arrive à trouver le nouveau prix, soit $p_e' = 7$. Pour avoir le prix et la quantité d'équilibre dans le court terme, il faut résoudre le système d'équations suivant :

$$y^d_G = 100 - 10p$$
$$y^s_G = -20 + 10p.$$

Le prix et la quantité d'équilibre sont respectivement $p_e'' = 6$ et $y_e'' = 40$.

3.1.7. Le modèle du marché avec ajustement du prix

Etant donné que l'équilibre n'est pas toujours réalisé sur le marché ($y^d_G - y^s_G \neq 0$), sous sa version dynamique, le modèle du marché détermine la trajectoire suivie par le prix et permet de dire s'il diverge ou converge vers sa position d'équilibre. Le modèle du marché avec ajustement du prix s'écrit de la sorte :

$$y^d_G(t) = D(p(t)) \qquad \text{avec } D'(p) < 0$$
$$y^s_G(t) = S(p(t)) \qquad \text{avec } S'(p) > 0$$
$$dp/dt \equiv g(y^d_G - y^s_G) \qquad \text{(équation d'ajustement du prix).}$$

Le paramètre *g* est un coefficient d'ajustement qui renseigne sur les négociations envisagées par les offreurs et demandeurs pour déboucher sur un compromis en termes de prix.

De manière spécifique, le modèle dynamique du marché s'écrit :

$$y^d_G = a - bp$$
$$y^s_G = -c + jp$$
$$dp/dt \equiv g(y^d_G - y^s_G).$$

En renvoyant les fonctions d'offre et de demande dans l'équation d'ajustement, on arrive à une équation différentielle du premier ordre d'expression:

$$\frac{dp}{dt} + g(b+j)p = g(a+c).$$

C'est en résolvant cette équation différentielle du 1er ordre qu'on obtient le sentier temporel du prix.

Solution particulière

La solution particulière est obtenue en posant que le prix p est égal à une constante k. Dans ces conditions, la dérivée de p par rapport au temps sera nulle et l'équation d'ajustement du prix deviendra :

$$g(b + j)k = g(a + c).$$

Il vient ainsi que $k = (a + c)/(b + j)$ et la solution particulière s'écrira :

$$p_p = (a + c)/(b + j).$$

Cette solution correspond à la valeur d'équilibre du prix sur le marché p_e.

Solution complémentaire

Pour avoir la solution complémentaire, il faut premièrement rendre l'équation homogène. Dans ces conditions, l'équation d'ajustement devient :

$$\frac{dp}{dt} + g(b+j)p = 0.$$

En aménageant les termes de cette dernière relation, on arrive à la relation suivante :

$$\frac{dp}{p} = -g(b+j)dt.$$

Puisque le membre de gauche est égal à celui de droite, il y a lieu de les intégrer tous les deux.

$$\int \frac{dp}{p} = -g(b+j)\int dt.$$

On obtient ainsi :

$$\ln p = -g(b + j)t + Cste$$

avec *Cste* qui représente la constante d'intégration. La solution complémentaire p_c sera :

$$p_c = Ae^{-g(b + j)t}$$

où $A = e^{Cste}$. La solution complémentaire est fonction de la variable temps t.

Solution générale et solution finie

La solution générale de l'équation est donnée par la somme des deux intégrales ou solutions obtenues ci-dessus, soit :

$$p(t) = p_c + p_p = Ae^{-g(b+j)t} + [(a + c)/(b + j)].$$

Pour avoir la solution finale ou finie, il faut disposer d'une information sur la valeur de y au temps t = 0 pour pouvoir définir le paramètre A. Si t = 0, on aura :

$$p(0) = A + [(a + c)/(b + j)].$$

Par conséquent, $A = p(0) - [(a + c)/(b + j)] = p_e$ et la solution finale sera d'expression :

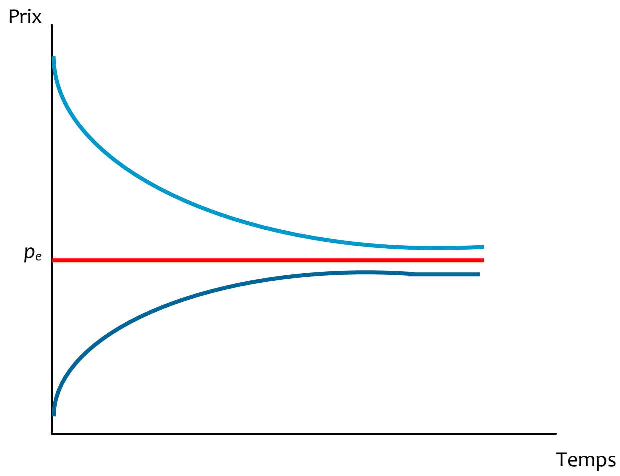
$$p(t) = [p(0) - p_e]e^{-g(b+j)t} + p_e.$$

Convergence de la trajectoire du prix

La trajectoire du prix sera convergente ou dynamiquement stable si, au passage du temps, le prix converge vers sa position d'équilibre p_e. Il faudra ainsi vérifier que :

$$\lim_{t \to +\infty} [p(0) - p_e]e^{-g(b+j)t} + p_e = p_e.$$

La convergence suppose une réduction, au passage du temps, de l'écart entre le prix initial et le prix d'équilibre $[p(0) - p_e]$.



Considérons le modèle du marché ci-après :

$$y^d_G = 80 - 10p$$
$$y^s_G = -20 + 10p$$
$$dp/dt \equiv 2(y^d_G - y^s_G).$$

On arrive à établir que :

$$dp/dt + 40p \equiv 200.$$

La solution particulière est p_P = 5 et la solution complémentaire $p_C = Ae^{-40t}$. La solution générale est donnée par $p(t) = 5 + Ae^{-40t}$. Si $p(0)$ = 7, la solution finie sera $p(t) = 5 + 2e^{-40t}$. Ce sentier temporel du prix est convergent car sa limite lorsque t tend vers l'infini est égale à 5.

3.1.8. Modèle de la toile d'araignée

Dans ce modèle, il est supposé que l'offre à l'époque t est fonction du prix de la période précédente, soit p_{t-1} alors que la demande est fonction du prix courant p_t, soit :

$$y^s_{Gt} = S(p_{t-1})$$
$$y^d_{Gt} = D(p_t).$$

De manière spécifique, le modèle s'écrit :

$$y^d_{Gt} = a - bp_t$$
$$y^s_{Gt} = -c + jp_{t-1}$$
$$E \equiv (y^d_{Gt} - y^s_{Gt}) = 0.$$

En renvoyant les fonctions d'offre et de demande dans la relation d'équilibre du marché, on arrive à une équation de récurrence du premier ordre d'expression:

$$bp_t + jp_{t-1} = a + c \quad \text{ou} \quad p_{t+1} + (j/b)p_t = a + c.$$

C'est en résolvant cette équation aux différences finies qu'on obtiendra la trajectoire suivie par la variable prix dans le temps.

Solution particulière

La solution particulière est obtenue en posant que le prix p aux dates t et $t + 1$ est égal à une constante k. Ainsi, l'équation deviendra :

$$k + (j/b)k = a + c.$$

Il vient ainsi que $k = (a + c)/(b + j)$ et la solution particulière s'écrira :

$$p_p = (a + c)/(b + j).$$

Comme pour le modèle du marché avec ajustement du prix, cette solution correspond à la valeur d'équilibre du prix sur le marché p_e.

Solution complémentaire

Pour avoir la solution complémentaire, il faut premièrement prendre la forme réduite de l'équation, soit :

$$p_{t+1} + (j/b)p_t = 0.$$

On va poser que $p_t = Ag^t$. Ainsi, on aura $p_{t+1} = Ag^{t+1}$ et l'équation réduite devient :

$$Ag^{t+1} + (j/b)Ag^t = 0.$$

En résolvant par rapport à g, on obtient $g = -(j/b)$. La solution complémentaire sera dès lors :

$$p_c = A[-(j/b)]^t$$

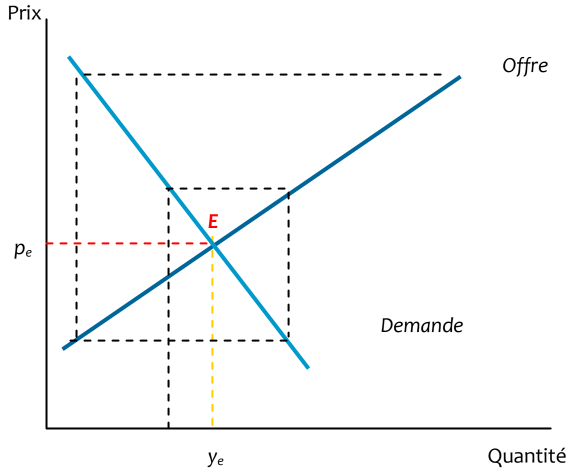
et le sentier temporel du prix sera :

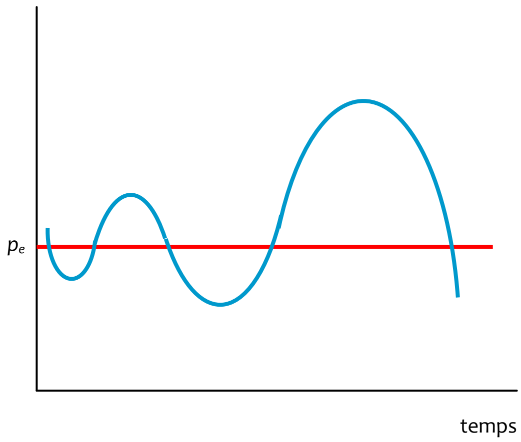
$$p_t = A[-(j/b)]^t + p_e.$$

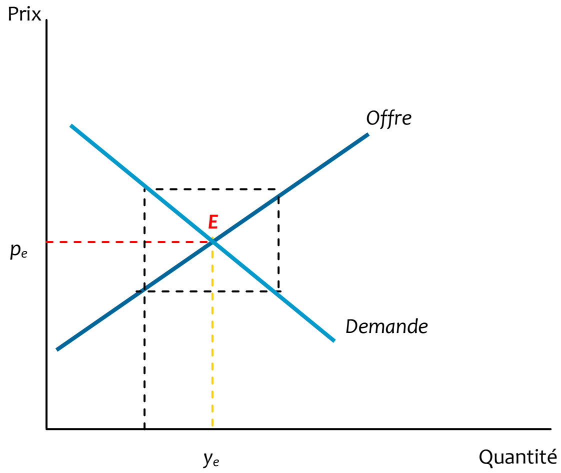
Si t = 0, le sentier temporel devient : $p_0 = A + p_e$. Par conséquent, on établit que $A = p_0 - p_e$ et la solution finale s'écrit :

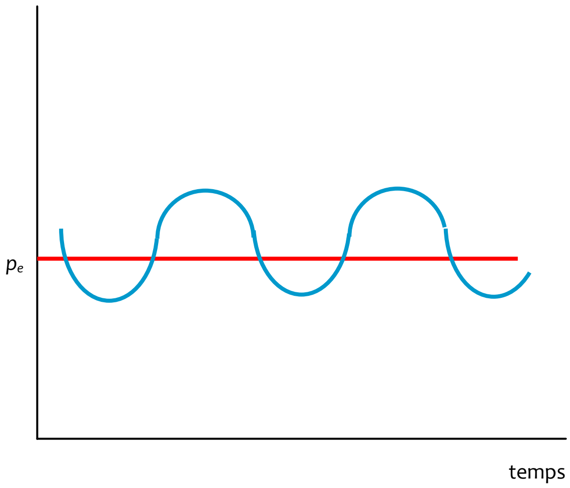
$$p_t = (p_0 - p_e)[-(j/b)]^t + p_e.$$

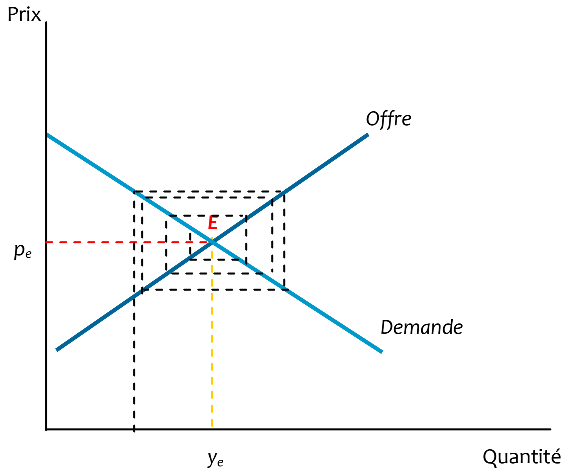
Le terme $[-(j/b)]^t$ donne lieu au phénomène de la toile d'araignée avec les différentes possibilités d'oscillation de la trajectoire du prix. Les oscillations seront explosives, uniformes et amorties si respectivement $j > b$, $j = b$ et $j < b$. C'est du reste ce qui ressort respectivement des graphiques ci-après.

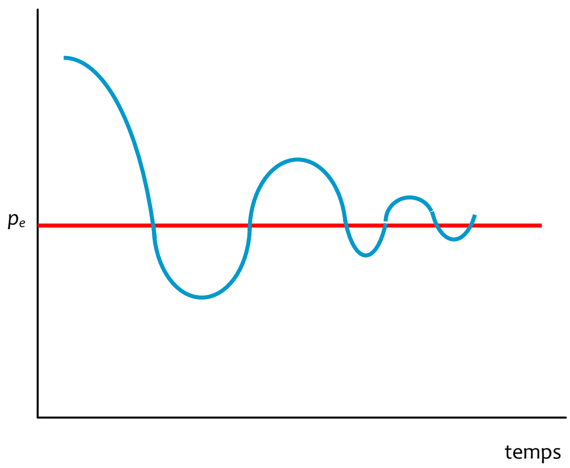












Admettons que l'on soit en présence d'un marché présentant les caractéristiques ci-après :

$$y^d_{Gt} = 80 - 10p_t$$
$$y^s_{Gt} = -20 + 10p_{t-1}$$
$$E \equiv (y^d_{Gt} - y^s_{Gt}) = 0.$$

En partant de la condition d'équilibre, on établit que :

$$10p_t + 10p_{t-1} = 100 \quad \text{ou} \quad p_t + p_{t-1} = 10.$$

La solution particulière est $p_P = 5$ et la solution complémentaire $p_C = A(-1)^t$. La solution générale est donnée par $p_t = 5 + A(-1)^t$. si $p_0 = 7$, le sentier temporel du prix sera $p_t = 5 + 2(-1)^t$. Dans ces conditions, le sentier temporel du prix n'est pas convergent. Il y a des oscillations uniformes car au passage du temps, le prix ne prend que deux valeurs, soit $p = 3$ et $p = 7$.

3.1.9. Modèle du marché avec inventaire

Ce modèle repose sur les trois hypothèses suivantes.

- La demande et l'offre sont des fonctions du prix courant ;
- Les ajustements du prix se font par un processus de prix simulé par les vendeurs. Au début de chaque période, les vendeurs fixent un prix en tenant compte de leurs inventaires de stocks.
- L'ajustement du prix est inversement proportionnel au changement observé dans l'inventaire des stocks.

Spécifiquement, le modèle s'écrit :

$$y^d_{Gt} = a - bp_t$$
$$y^s_{Gt} = -c + jp_t$$
$$p_{t+1} = p_t - g(y^s_{Gt} - y^d_{Gt}) \qquad (g > 0).$$

g est le coefficient d'ajustement du prix induit par l'inventaire de stock. De manière condensée, le modèle peut s'écrire sous la forme :

$$p_{t+1} - [1 - g(b + j)]p_t = g(a + c).$$

La résolution de cette équation de récurrence de premier ordre donne lieu au sentier temporal ci-après du prix :

$$p_t = (p_0 - p_e)[1 - g(b + j)]^t + p_e.$$

L'expression $[1 - g(b + j)]^t$ donne des indications sur la stabilité dynamique du sentier temporel.

Soit, le modèle du marché suivant :

$$y^d_{Gt} = 80 - 10p_t$$
$$y^s_{Gt} = -20 + 10p_t$$
$$p_{t+1} = p_t - 1.5(y^s_{Gt} - y^d_{Gt}).$$

De manière condensée, le modèle peut s'écrire sous la forme :

$$p_{t+1} + 29p_t = 150.$$

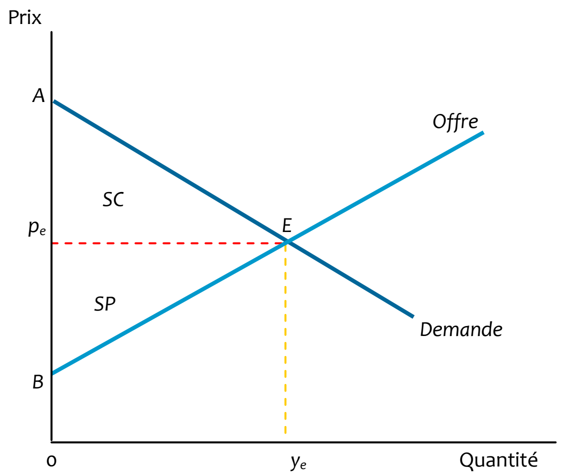
La solution particulière est $p_P = 5$ et la solution complémentaire $p_C = A(-29)^t$. Ainsi, la solution générale est $p_t = 5 + A(-29)^t$. Si $p_0 = 7$, la solution finie est $p_t = 5 + 2(-29)^t$. Le sentier temporel est divergent en ce qu'il est ponctué par des oscillations explosives.

3.1.10. Concurrence et bien-être

Admettons que la demande du marché $y^d{}_G(p)$ est générée par la maximisation de l'utilité du consommateur représentatif, sa fonction d'utilité étant d'expression $U(y) + x$. Le bien y est celui qu'on étudie et le bien x représente « tout le reste ». On peut interpréter x comme l'argent qu'il reste à dépenser pour acheter d'autres biens, une fois réalisé l'achat optimal du bien y.

Pour un niveau de prix p_e, l'offre $y^s{}_G(p)$ est égale à la demande $y^d{}_G(p)$ et la quantité échangée du bien est y_e associé au couple (p_e, y_e). Pour tous les consommateurs qui pensaient pouvoir acquérir le bien à un prix supérieur à p_e, la réalisation de p_e entraîne une certaine satisfaction en ce qu'ils dépensent moins que prévu. La différence entre le prix qu'ils étaient disposés à payer et le prix d'équilibre correspond à un surplus. Suivant Pareto, ce surplus est un indicateur de bien-être en ce que l'argent qui n'a pas été dépensé peut être utilisé pour financer l'achat d'autres biens.

De même, pour toutes firmes qui pensaient vendre le bien sur le marché à un prix inférieur à p_e, la réalisation de p_e constitue un gain en ce qu'elles gagnent plus que prévu. Le surplus d'une firme correspond ainsi à l'écart entre le prix d'équilibre et le prix auquel elle était prête à céder son bien sur le marché. Ce surplus est aussi un indicateur de bien-être.



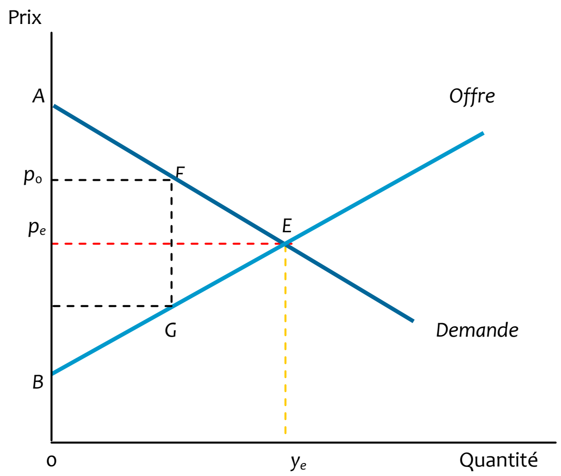
Le surplus des consommateurs SC est donné par le triangle AEp_e et celui des producteurs SP est donné par le triangle EBp_e. Au regard du graphique ci-dessus, on constate que le surplus des consommateurs est donné par la différence entre l'intégrale aux bornes $[0 - y_e]$ de la fonction de demande inverse et le produit prix – quantité d'équilibre, soit :

$$SC = \int_0^{y_e} p(y_G^d)dy - p_e y_e$$

Le surplus des producteurs est quant à lui, donné par la différence entre le produit prix – quantité d'équilibre et l'intégrale aux bornes $[0 - y_e]$ de la fonction d'offre inverse :

$$SP = p_e y_e - \int_0^{y_e} p(y_G^s)dy.$$

Analytiquement, on écrit $SC = U(y) - py$ et $SP = py - C(y)$. Le problème de la réalisation du bien-être peut être posé en termes de maximisation du surplus total : $SC + SP$. En conséquence, le prix d'équilibre concurrentiel est le seul à pouvoir maximiser le surplus total. Si le prix p_o prévalait sur le marché, le surplus total serait donné par la surface *AFGB* qui est inférieur à la surface *AEB*. Ceci prouve que p_e est un prix idéal.



Pour le marché caractérisé par les équations ci-après :

$$y^d_G = 80 - 10p$$
$$y^s_G = -20 + 10p.$$

Le prix et la quantité d'équilibre sont respectivement $p_e = 5$ et $y_e = 30$. Le surplus des consommateurs est donné par :

$$SC = \int_0^{30} (8 - 0.1y)dy - 150 = 45.$$

Le surplus des producteurs est donné par :

$$SP = 150 - \int_0^{30} (2 + 0.1y)dy = 45.$$

Le surplus total est ainsi égal à 90. Si le prix du marché était égal à 6, la quantité échangée serait égale à 20. Il y aurait rationnement de l'offre en ce que pour ce niveau de prix, les offreurs sont disposés à vendre 40 unités du bien. Le surplus des consommateurs serait :

$$SC = \int_0^{20} (8 - 0.1y)dy - 120 = 20.$$

Le surplus des producteurs sera :

$$SP = 120 - \int_0^{20} (2 + 0.1y)dy = 60.$$

Ainsi, le surplus total devient égal à 80. Ceci montre bel et bien que seul le prix d'équilibre $p_e = 5$ permet de maximiser le surplus total.

3.1.11. L'équilibre de long terme sur un marché concurrentiel

L'existence d'un profit au sein d'une branche ou d'une industrie va attirer de nouvelles unités de production étant donné qu'en concurrence parfaite, la liberté d'entrée est garantie à tous les potentiels intervenants du marché.

L'arrivée de nouvelles firmes va accroître la quantité globale offerte sur le marché. Il en résultera un abaissement du prix d'équilibre et par conséquent un amenuisement du profit de chaque firme. D'autre part, l'entrée dans la branche de nouvelles unités peut ou pas provoquer un effet sur le prix des facteurs variables. S'il n'y a aucun effet, la baisse de prix sera exclusivement responsable de la disparition du profit. L'équilibre final sera réalisé lorsque le coût moyen sera égal à la recette moyenne et que le profit sera nul, c'est-à-dire lorsque :

$$RM = Rm = CM = Cm = p.$$

Revenons au marché caractérisé par les relations :

$$y^d_G = 80 - 10p$$
$$y^s_G = -20 + 10p.$$

La fonction de coût – type des firmes étant $C = y^2 + 2y + 1$, on peut égaliser le coût marginal au coût moyen afin de déterminer l'offre individuelle et le prix qui sera en vigueur sur le marché. Une fois celui-ci déterminé, on le renvoie dans la fonction de demande du marché pour avoir la quantité échangée. Si l'on veut déterminer le nombre d'offreurs dans le long terme, il suffira de faire le rapport quantité d'équilibre sur quantité offerte par firme.

Puisque $Cm = 2y + 2$ et $CM = y + 2 + 1/y$, l'offre individuelle sera égale à 1. Si on renvoie cette quantité dans la fonction de coût marginal ou dans la fonction de coût moyen, on trouve un prix égal à 4. Ainsi, en rentrant dans la fonction de demande globale, on trouve la quantité de bien échangée sur le marché, soit $y_e = 40$. L'offre individuelle étant $y^s_i = 1$, on conclut que dans le long terme, le nombre d'offreurs est passé de 20 à 40.

3.2. Le monopole (pur)

Une firme est en situation de monopole lorsque sur le marché, elle n'a pas de concurrents. A cet égard, elle est *price maker* puisque le prix dépend de son bon vouloir. Elle peut soit fixer, par voie d'autorité, le prix auquel se solderont les transactions ou offrir une quantité relativement faible du bien de manière à ce que la spéculation qui va s'en suivre fasse grimper le prix. Ainsi, le prix est fonction de la quantité y du bien :

$$p = p(y), \qquad \text{avec } p'(y) < 0.$$

Les monopoles trouvent leurs origines dans trois types de situations. Un monopole peut être décrété par les décideurs politiques pour des raisons de stratégie de développement ou de politique économique (monopole légal) tout comme il peut résulter d'une situation économique particulière ou des exigences techniques sévères, notamment l'importance du coût de démarrage des activités ou d'entrée dans la branche (monopole naturel). Aussi, un monopole peut résulter d'une avancée technologique (monopole d'innovation).

Une différence majeure entre monopole et concurrence parfaite est que le prix diminue à mesure que les ventes augmentent. Considérons la fonction de demande inverse $p(y) = a - by$. Dans ces conditions, la recette du monopoleur sera donnée par :

$$R \equiv p(y)y = ay - by^2$$

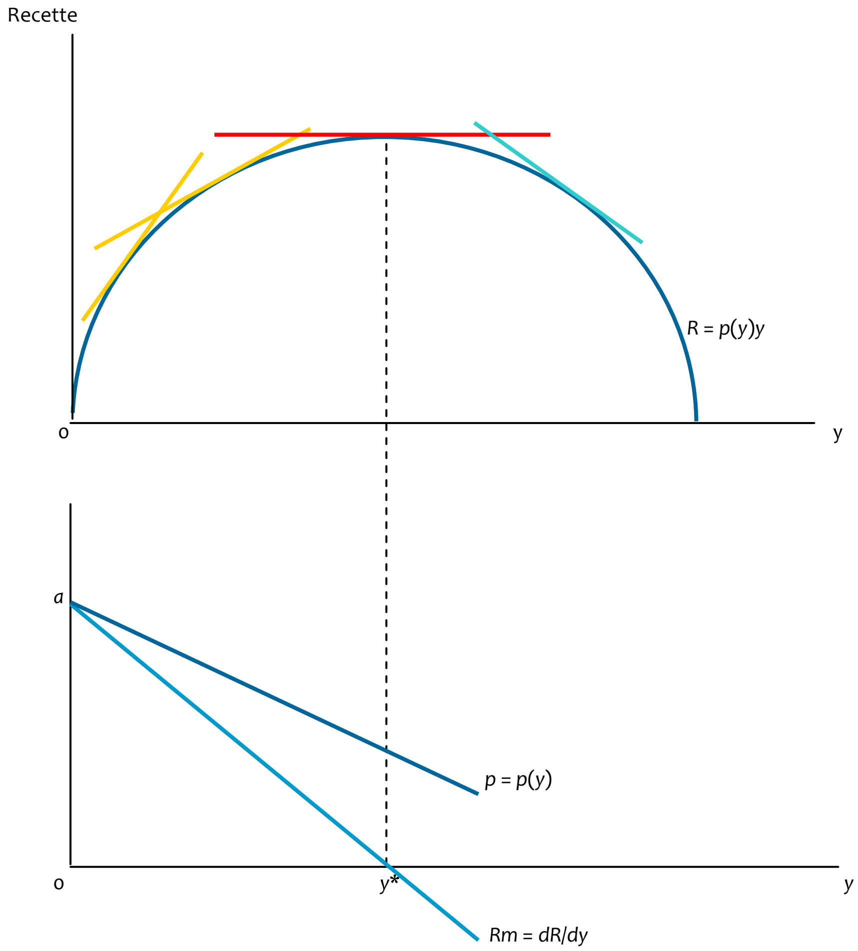
et sa courbe représentative sera concave. Elle atteint un maximum pour $y^* = a/2b$. La pente de la recette qui correspond à la recette marginale sera donnée par :

$$Rm = a - 2by.$$

Alors qu'en concurrence pure et parfaite, le prix est égal à la recette marginale, en situation de monopole, le prix est supérieur à la recette marginale :

$$P > Rm.$$

Pour des valeurs de y inférieures à y^*, la recette marginale sera positive et elle sera négative pour des valeurs supérieures à y^*.



3.2.1. L'équilibre du monopoleur

La fonction de profit du monopoleur s'écrit de la sorte :

$$\pi = py - C(y) = yp(y) - C(y).$$

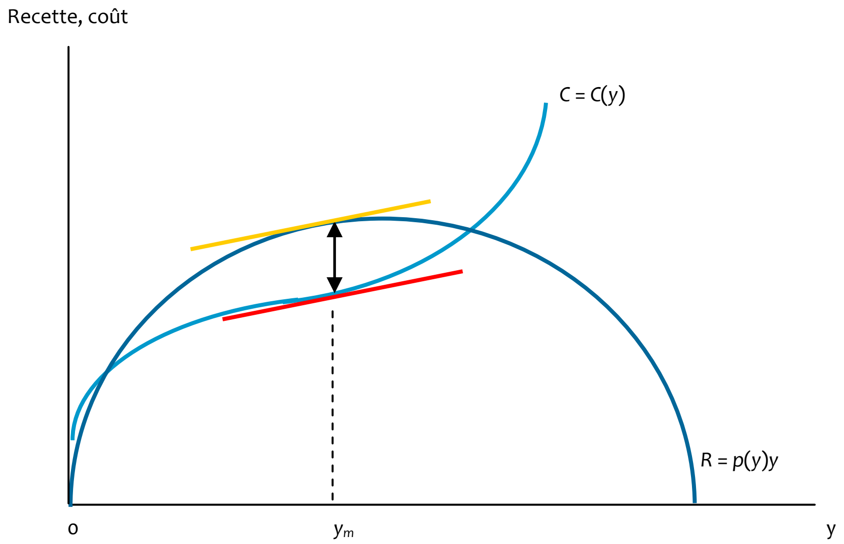
La condition du premier ordre de la maximisation permet de déterminer l'équilibre du monopoleur, c'est-à-dire le critère à respecter pour qu'il ait un profit maximum.

$$d\pi/dy = p(y) + yp'(y) - Cm = 0.$$

Il vient ainsi qu'à l'équilibre le monopoleur doit vérifier que

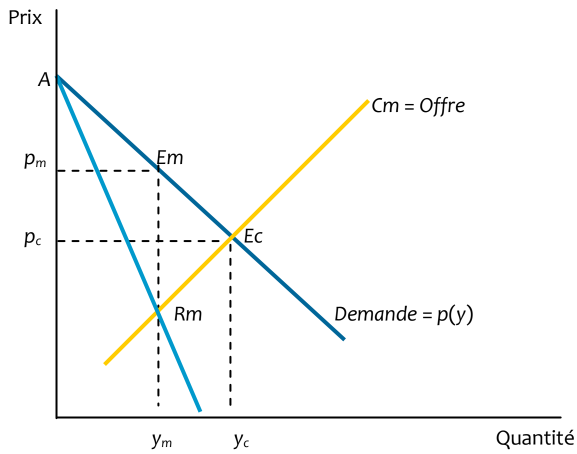
$$Rm = p(y) + y\,p'(y) = Cm.$$

Ce résultat peut être obtenu en superposant dans un même graphique, les courbes de recette et de coût du monopoleur. Pour la quantité de bien qui maximise le profit, soit l'écart en la recette et le coût de production, on vérifie une égalité de pente pour les deux courbes.

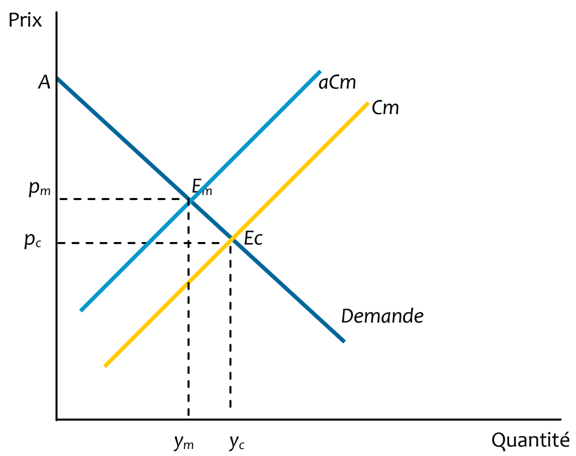


Le monopoleur pratique un prix supérieur à celui qui aurait été pratiqué sur un marché concurrentiel. La caractéristique fondamentale d'un monopole, du point de vue de l'analyse, est qu'un monopoleur dispose d'un pouvoir de marché dans le sens où la quantité de bien qu'il est en mesure de vendre varie de façon continue en fonction du prix qu'il fixe. Ceci est à opposer au cas de la firme concurrentielle dont les ventes tombent à zéro si elle pratique un prix supérieur à celui du marché. Ceci est du reste évident puisque la firme concurrentielle est *price taker* alors que le monopoleur est *price maker*.

Pour déterminer à la fois, le prix pratiqué par le monopoleur et la quantité de bien qu'il offre, on va superposer dans un même graphique, les courbes de demande inverse, de recette marginale et de coût marginale. Il faut noter que la courbe de coût marginal dans sa phase ascendante, correspond à la fonction d'offre de la firme.



Le monopoleur produit la quantité y_m qui correspond à l'égalité de la recette marginale et du coût marginal et il vend le bien sur le marché au prix p_m. Si l'on était en concurrence parfaite, le prix pratiqué serait p_c et la quantité produite du bien serait y_c. Puisque $p_m > p_c$ et que $y_c > y_m$, il vient que le surplus des consommateurs et le surplus collectif en concurrence parfaite sont supérieurs à ceux réalisés en situation de monopole.



Nous avons vu que le niveau de production pour lequel le prix est égal au coût marginal correspond à un optimum de Pareto. Comme la courbe de recette marginale du monopoleur se situe toujours en dessous de la courbe de demande, il est tout à fait évident qu'un monopoleur produise une quantité inférieure à la quantité efficace selon Pareto. En conséquence, une situation de monopole est inefficace au sens de Pareto.

Admettons qu'une firme en situation de monopole ait une fonction de coût notée $C = y^2 + 2y + 1$ et se trouve confrontée à une fonction de demande notée $p(y) = 8 - 0.1y$. Sa fonction de profit s'écrira :

$$\pi \equiv Rm - Cm = (8 - 0.1y)y - (y^2 + 2y + 1)$$

La condition du premier ordre nous permet d'établir qu'à l'équilibre :

$$(8 - 0.2y) - (2y + 2) = 0.$$

Il vient alors qu'elle va offrir la quantité $y_m = 2.72$ et pratiquera le prix $p_m = 7.728$. Pour une même structure de coût et une même structure de la demande sur le marché, une firme concurrentielle pratiquerait un prix $p_C = 5$ et la quantité échangée sur le marché serait $y_C = 30$. Dans ces conditions, le monopoleur réalise un profit égal à 7.18176 alors qu'une firme concurrentielle réalise un profit égal à 1.25 comme on l'a établit précédemment.

3.2.2. La marge ajoutée du monopoleur

Eu égard à sa position sur le marché (price maker), le monopoleur utilise son prix de vente comme une arme stratégique. Il pratique généralement un prix supérieur à celui qui aurait prévalu en concurrence pure et parfaite, c'est-à-dire un prix supérieur à son coût marginal. La différence entre le prix qu'il pratique et le coût marginal est qualifié de marge ajoutée (mark–up). On peut dès lors écrire :

$$p = aCm$$

où $a > 1$ représente la marge ajoutée. Chaque fois que le coût marginal s'accroît, le prix pratiqué par le monopoleur aura à augmenter.

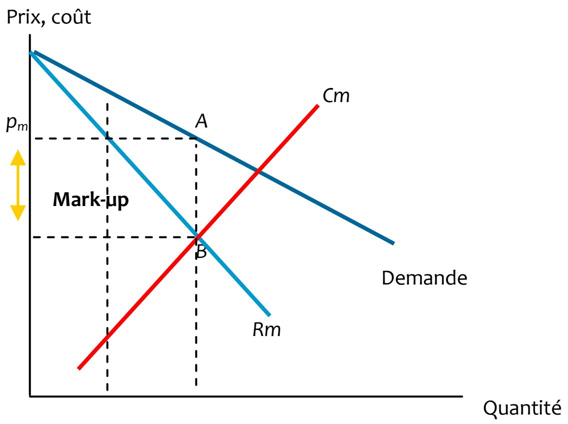
Etant donné que $Rm = p(y) + y\, p'(y) = Cm$, on établit facilement que

$$Rm = p[1 + (e_{yp})^{-1}] = Cm.$$

où e_{yp} représente l'élasticité de la demande par rapport au prix. Ainsi, la marge ajoutée par la firme est donnée par :

$$a = [1 + (e_{yp})^{-1}]^{-1}.$$

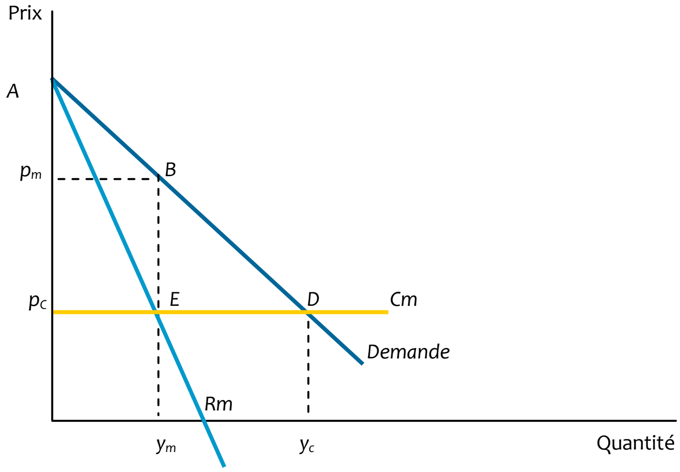
Dans le graphique ci-après, la marge ajoutée correspond à la distance AB, soit l'écart entre le prix pratiqué par le monopoleur et son coût marginal.



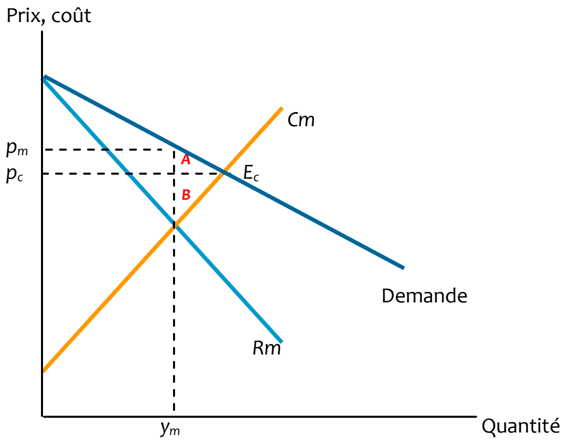
Dans l'exemple considérée ci-dessus, pour une quantité de bien y_m = 2.72, le monopoleur pratique le prix p_m = 7.73 et son coût marginal est Cm = 7.44. Ainsi, la marge ajoutée est a = 1.0389. A partir de ce résultat, on peut déterminer l'élasticité de la demande compte tenu du fait que $a = [1 + (e_{yp})^{-1}]^{-1}$. Il vient ainsi que l'élasticité e_{yp} sera égale à environ –27. Pour s'en convaincre, on peut partir de la fonction de demande inverse et calculer l'élasticité en tenant compte du prix et de la quantité d'équilibre.

3.2.3. Le bien-être en situation de monopole

Du fait que le monopoleur pratique un prix supérieur à celui qui aurait prévalu en concurrence parfaite et qu'il offre une quantité moins importante de bien, en règle générale, les situations de monopole rapportées à des situations de concurrence parfaite se traduisent par des pertes en bien-être. La différence en termes de surplus correspond à la perte sèche ou charge morte du monopole. Le graphique ci-dessous illustre le concept en considérant que le coût marginal est constant.



En situation de concurrence, le surplus des consommateurs est égal à la surface ADp_c alors qu'en situation de monopole, il est donné par la surface ABp_m. Ainsi, la surface *EBD* représente la perte sèche ou la charge morte du monopole, soit la perte en termes de surplus collectif qu'enregistre la société si l'on se rapporte à une situation de concurrence parfaite. Si l'on relâche l'hypothèse d'un coût marginal constant, la courbe de courbe marginal sera croissante. Et comme l'indique le graphique ci-dessous, la perte sèche ou charge morte du monopole sera égale à la somme des triangles *A* et *B*.



Pour l'exemple retenu, le surplus des consommateurs est donné par :

$$SC = \int_0^{2.72} (8 - 0.1y)dy - 21.0256 = 0.3645.$$

et celui des producteurs par :

$$SP = 21.0256 - \int_0^{2.72} (2y + 2)dy = 8.1872.$$

Le surplus total étant de 8.5517 en situation de monopole, on conclut que la perte sèche ou la charge morte du monopole est égale à 81.4483.

3.2.4. Pratique de la discrimination [9]

Le monopoleur peut différencier son produit (marque, présentation) pour le vendre plus cher à certains consommateurs et récupérer ainsi une partie du surplus du consommateur. Il peut vendre le même produit à des prix différents sur des marchés ou segments de marché séparés et caractérisés par des élasticités différentes. Lorsque la discrimination des prix est possible, le prix du bien vendu par le monopoleur sera plus élevé sur le segment du marché caractérisé par une demande faiblement élastique et moins élevé sur le segment du marché où l'élasticité est grande.

- **Discrimination du premier degré**

Il est possible pour le monopoleur, puisqu'étant le seul offreur sur le marché, de vendre son bien à l'acheteur qui est disposé à payer le prix plus élevé qui soit pour l'acquérir. Cette façon de fixer le prix de vente correspond à une forme discrimination en ce que c'est le mieux offrant en termes de prix qui acquiert le bien. C'est ce que l'on observe en cas de vente aux enchères. Il y a lieu de noter qu'avec ce type de discrimination, le surplus du consommateur est annulé.

- **Discrimination du deuxième degré**

Le monopoleur peut également fixer le prix de vente de son bien en tenant compte de la quantité de bien demandée par acheteur. Pour l'acheteur qui cherche à se procurer une plus grande quantité, il peut décider de revoir à la baisse le prix par unité. S'il le fait, il procède à une sorte de discrimination. On parle dans de telles circonstances d'une tarification non-linéaire. Cette discrimination tient au fait que la firme n'a pas d'informations exactes sur le comportement des acheteurs (quantité cherchée).

- **Discrimination du troisième degré**

Selon qu'il peut segmenter son marché en compartiment, le monopoleur peut vendre le même bien à des prix différents. Bien sûr, la segmentation n'est possible que si la sensibilité de la demande par rapport au prix n'est pas la même dans les différents segments du marché. Contrairement à la discrimination de deuxième degré, ici la firme perçoit directement des signaux sur le comportement de la demande ou les préférences des consommateurs.

Admettons que le monopoleur peut segmenter son marché en deux compartiments. La demande n'étant pas la même dans les compartiments, on aura :

$$p_1 = p_1(y_1) \text{ et } p_2 = p_2(y_2).$$

Le profit du monopoleur est donné par la différence entre son profit et son coût de production, soit :

$$\pi \equiv R_1 + R_2 - C(y) = y_1p_1(y_1) + y_2p_2(y_2) - C(y).$$

Il faut noter que la quantité totale est donnée par la somme des quantités vendues sur les deux segments du marché, soit $y = y_1 + y_2$. En dérivant la fonction de profit par rapport à y_1 et y_2, on obtient :

$$Rm_1 = p_1 + y_1p_1' = Cm\ ;$$
$$Rm_2 = p_2 + y_2p_2' = Cm.$$

On peut également établir que :

$$Rm_1 = p_1[1 - (e_1)^{-1}] = Cm\ ;$$
$$Rm_2 = p_2[1 - (e_2)^{-1}] = Cm.$$

[9] Cette analyse de la discrimination a été proposée par Pigou.

Supposons que p_1 soit supérieur à p_2. Puisque le coût marginal est un, on arrive à dire que

$$p_1/p_2 = [1 - (e_2)^{-1}]/[1 - (e_1)^{-1}] > 1.$$

Il vient ainsi que la demande est moins sensible aux variations du prix dans le premier segment que dans le second segment du marché. Supposons que $e_2 = -5$ et $e_1 = -2$. On aura ainsi :

$$[1 - (e_2)^{-1}] = 0.8 \ ; \ [1 - (e_1)^{-1}] = 0.5 \ \text{ et } \ [1 - (e_2)^{-1}]/[1 - (e_1)^{-1}] > 1.$$

Somme toute, si le monopoleur peut segmenter son marché en n compartiment, il maximisera son profit en observant le critère de l'égalité entre la recette marginale par segment Rm_i et son coût marginal Cm, soit :

$$Rm_i = Cm \qquad\qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Les différences de prix seront justifiées par les différences de sensibilités de la demande par rapport au prix. Les prix les plus élevés sont pratiqués sur les segments les moins sensibles aux variations du prix et les prix les moins élevés sur les segments les plus sensibles.

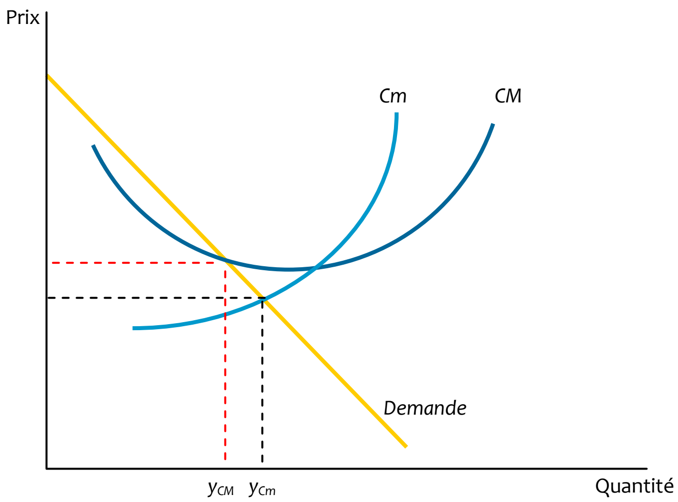
3.3. Monopole naturel

La théorie du bien-être explique les situations de monopole naturel par la présence des coûts fixes très élevés dans certains secteurs de l'économie : chemins de fer, énergie, etc. En effet, si les dimensions requises par la firme ainsi que la technologie à utiliser pour bien exploiter une activité ne sont pas à la portée de tous les exploitants voulant œuvrer dans la branche, l'efficience dans l'exploitation ne sera pas fonction du nombre d'intervenants mais plutôt du nombre d'intervenants pertinents.

Si seule une firme peut œuvrer de manière satisfaisante dans un secteur ou une branche de l'économie, autant mieux la laisser faire que de lui adjoindre d'autres firmes ne pouvant pas exploiter convenablement l'activité. Sur ce, il n'est pas toujours aisé de dire que des situations de monopole réduisent toujours le bien-être ou l'efficience, tout est fonction du type d'activité et des coûts d'installation. Si l'Etat ne dispose pas d'une telle information, il peut se proposer de mener des politiques anti-monopoles et renforcer l'inefficience alors qu'il est censé lui faire opposition. Aussi, il faudrait noter que la politique de concurrence peut comporter des effets positifs sous forme d'un regroupement ou d'une restructuration des firmes d'une branche pour rendre cette dernière plus compétitive et accroître sa contribution à la formation ou à la croissance de la production intérieure.

L'école autrichienne a sévèrement critiqué la conception selon laquelle les monopoles rapportés aux marchés de concurrence parfaite, procurent un niveau de satisfaction sociale moindre en ce que la comparaison des structures de différents marchés est une œuvre dénuée de tout sens et que la concurrence implique un changement continu des structures. Ceci est d'autant plus évident puisque certaines situations de monopole ne sont pas le fait du hasard mais plutôt le produit de l'innovation introduite par une firme ayant bien évalué et bien pénétrer le marché dans lequel elle œuvre.

Il convient de remarquer que certains secteurs à coûts fixes très importants n'offrent des bénéfices que dans le très long terme, ce qui interdit à certains exploitants de s'y engager. Dans ces conditions, si l'activité est jugée trop importante pour la collectivité, l'Etat peut se faire monopoleur dans la branche en question pour satisfaire l'intérêt général.



3.4. Concurrence monopolistique

Il est possible de rencontrer des marchés présentant à la fois des structures ou caractéristiques presque identiques à celui de concurrence parfaite et à celui de monopole sans pour autant correspondre à l'une de ces deux situations. Un tel marché est un marché de concurrence monopolistique. Un nombre important de demandeurs et un nombre important d'offreurs interviennent comme en situation de concurrence pure et parfaite, mais ici, il y a au moins un offreur (ou un groupe d'offreurs) qui – par la différenciation de son produit – arrive à se constituer une part de marché propre à lui et dispose ainsi d'un pouvoir de marché comme si on était en monopole.

En effet, lorsqu'une firme arrive à différencier son produit, elle jouit d'un droit exclusif de vendre son produit dans les conditions qu'elle fixe elle-même. Autrement dit, elle est capable d'augmenter son prix sans pour autant perdre la totalité de ses clients. La demande adressée aux concurrents de la firme dépend ainsi du degré de ressemblance entre les produits qu'ils proposent et celui de la firme.

La concurrence monopolistique est probablement le type de marché que l'on rencontre le plus. Mais fort malheureusement, c'est également le type de marché le plus difficile à analyser. Les situations de monopole pur et de concurrence parfaite sont beaucoup plus simples et sont des fois utilisées comme première approximation pour des modèles élaborés de concurrence monopolistique.

Etant donné que la différentiation du produit est l'élément qui justifie le pouvoir de marché d'une firme, cette dernière pour élargir sa part de marché ou occuper une place de choix sur le marché, peut faire de la publicité. En ventant son produit, la firme s'attend à ce que sa clientèle soit fidélisée et qu'elle augmente au fil du temps afin qu'elle accroisse à terme son profit. Il faut toutefois noter que la publicité a deux effets sur le profit, un effet positif parce qu'elle devrait entraîner un accroissement de la recette et un effet négatif parce qu'elle accroît les coûts supportés par la firme. Il faudrait ainsi que les deux effets soient bien comparés pour que la publicité ait réellement un impact positif sur le profit.

L'augmentation de la demande dépend de la quantité de publicité et de l'élasticité de la demande par rapport à la publicité (pourcentage d'augmentation de la demande suite à une augmentation de 1 % de la publicité). Par contre, l'augmentation des coûts dépend de la quantité de publicité, du coût unitaire de la publicité et de l'augmentation du coût variable induite par l'augmentation de la demande.

Nous pouvons exprimer la quantité de bien vendue sur le marché par la firme comme une fonction de la dépense publicitaire Cp, soit $y = y(Cp)$. Le coût total de la firme a deux composantes ici, d'une part le coût supporté effectivement pour produire et le coût de la publicité, soit $C^* = C(y) + Cp$. Dans ces conditions, le problème de la firme peut être présenté comme suit :

$$\text{Max } \pi \equiv R(y) - C^* = py(Cp) - C(y(Cp)) - Cp.$$

En prenant la condition du premier ordre, on arrive à établir que :

$$(p - Cm)dy/dCp = 1.$$

Le terme de gauche de cette égalité est appelé marge de contribution de la publicité et la différence entre le prix p et le Cm correspond à la marge ajoutée (mark-up) appelée aussi marge incrémentale. Le profit sera maximisé si un investissement supplémentaire en publicité d'une unité monétaire occasionne une marge de contribution d'une unité monétaire. Une augmentation de la dépense publicitaire sera envisagée si la marge de contribution est supérieure à un, et inversement. On peut également établir que :

$$(p - Cm)e_{ypub} = Cp/y.$$

e_{ypub} représente l'élasticité de la demande par rapport à la publicité. On peut aussi dire que le profit est maximisé lorsque le rapport de la dépense publicitaire sur les ventes est égal à la marge incrémentale multipliée par l'élasticité des ventes par rapport à la publicité. En concurrence pure et parfaite, il n'y a pas lieu de faire de la publicité car la marge incrémentale est égale à zéro. Du reste, en concurrence pure et parfaite, le produit est homogène et l'information circule parfaitement que faire de la publicité n'a pas de sens. Il en est de même pour les situations de monopoles car le monopoleur est le seul à offrir le bien sur le marché et toute la demande s'adresse à lui.

3.5. Marché des facteurs

L'analyse du marché des facteurs se propose d'énoncer les principes et règles à observer par une firme qui demande des inputs devant concourir à la réalisation de sa production. La situation en concurrence parfaite ne présentant aucune particularité, dans un premier temps, nous caractériserons l'équilibre du marché lorsqu'il n'y a qu'une seule firme qui achète le facteur. Ensuite, nous parlerons du marché financier sur lequel la firme peut s'endetter pour faire face à certaines de ses dépenses.

3.5.1. Marché à un seul acheteur : monopsone

Supposons que pour produire, la firme utilise une fonction de production de la forme $y = f(x)$. On admet que la fonction est monotone, $f'(x) > 0$, et que le produit marginal est décroissant, $f''(x) < 0$. Puisque étant le seul acheteur du facteur x sur le marché, le prix de celui-ci sera une fonction croissante de x, soit $w = w(x)$. Dans ces conditions, la firme est un *price maker* et son problème s'écrit comme suit :

$$\text{Max } \pi \equiv R(y) - C(y) = pf(x) - w(x)x.$$

La condition du premier ordre qui veut que la recette marginale soit égale au coût marginal conduit à la relation ci-après :

$$pPmx = w(x) + xw'(x)$$

$pPm(x)$ est la valeur de la production supplémentaire pouvant être obtenue avec une unité supplémentaire du facteur x. Il s'agit de la recette marginale du facteur x. Pour maximiser son profit, la firme choisit la quantité x qui égalise le revenu marginal et la dépense marginale du facteur. La relation ci-dessus peut également s'écrire comme suit :

$$pPmx = w(1 + 1/e)$$

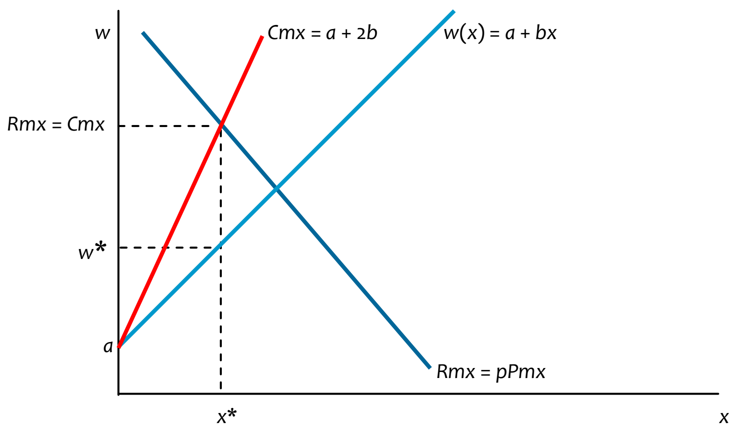
où e représente l'élasticité d'offre du facteur. Considérons une forme spécifique de la fonction d'offre inverse du facteur x.

$$w(x) = a + bx.$$

Le coût total est $C(x) = ax + bx^2$ et le coût marginal est donné par :

$$Cmx = a + 2bx.$$

Dans le graphique ci-après, on représente l'équilibre sur le monopsone.



On constate que sur le monopsone, le prix payé par la firme pour disposer du facteur x est inférieur à son coût marginal. Si la firme ne prenait pas en compte l'impact de sa demande sur le prix de x, elle choisirait x tel que :

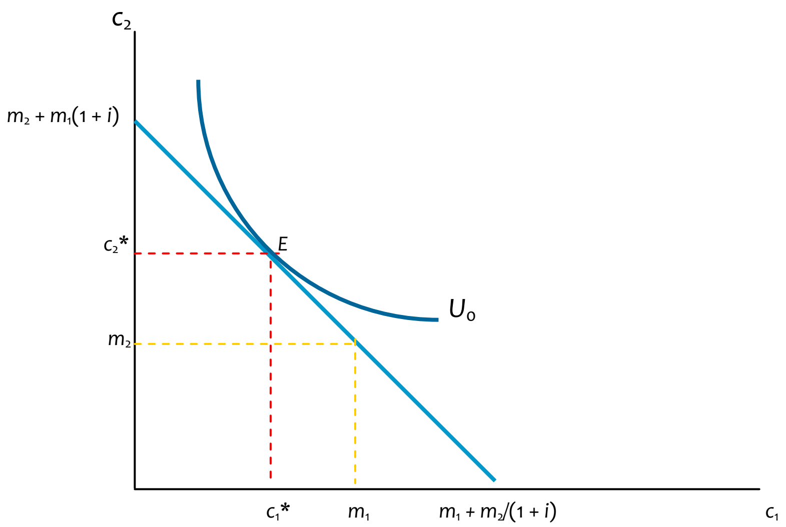
$$pPm(x) = w(x).$$

Elle choisirait une quantité de x plus importante. La prise en compte de son pouvoir de monopsone l'a incité à réduire sa demande de façon à faire baisser le prix $w(x)$. Le pouvoir de monopsone provoque une réduction de la quantité échangée sur le marché et une réduction du prix de x.

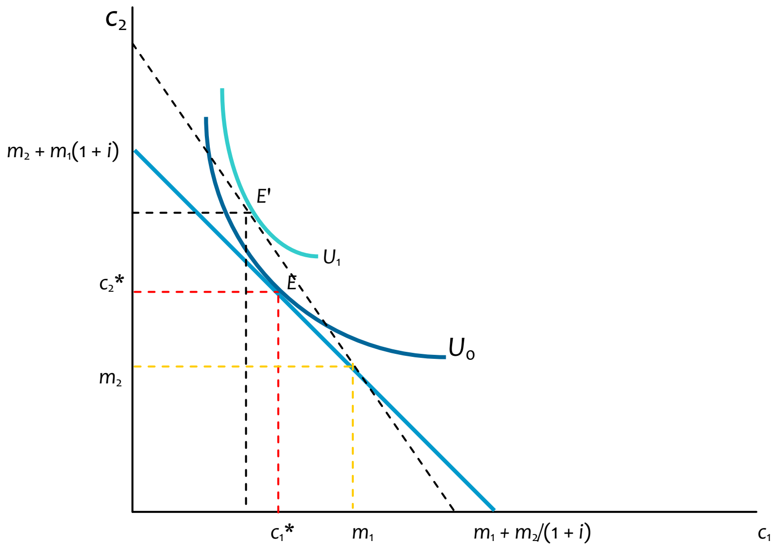
3.5.2. Marché des fonds prêtables ou marché financier

Le marché des fonds prêtables est le lieu de rencontre des agents économiques qui ressentent des besoins en argent (emprunteurs ou demandeurs de capitaux) et des agents qui dégagent des capacités de financement (prêteurs ou offreurs de capitaux). La formation de l'équilibre sur ce marché se fait par la rencontre de l'offre et de la demande.

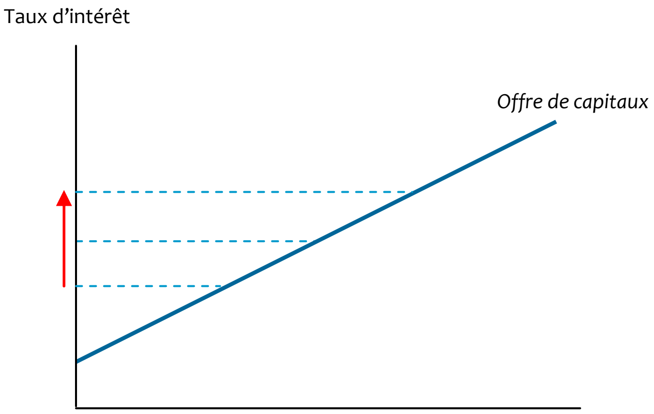
L'offre de capitaux découle de l'arbitrage que les individus font entre le présent et le futur (choix intertemporels) en fonction du taux d'intérêt en vigueur sur le marché. En admettant que les individus vivent sur deux périodes : 1 et 2, ils seront qualifiés de prêteurs nets si leurs consommations à la date 1 sont inférieures à leurs revenus de la période. La partie non-consommée de leurs revenus sera placée sur le marché des fonds prêtables afin de générer un surplus qui à la période 2, leur permettra de consommer plus. Le graphique ci-après présente la situation d'un individu qui prête au temps 1 et arrive à consommer pour un montant supérieur à son revenu ou sa dotation en 2.



Pour un prêteur d'argent au temps 1, la hausse du taux d'intérêt sera bénéfique dans ce sens qu'il pourra accroître davantage sa consommation au temps 2. Il aura tendance à accroître ses placements au temps 1 à la suite de cette hausse du taux d'intérêt.



On peut ainsi présenter la courbe d'offre d'épargne ou de capitaux comme une fonction croissante du taux d'intérêt i. Elle représente les montants qu'un individu est prêt à offrir, en fonction du taux d'intérêt qu'il peut obtenir.



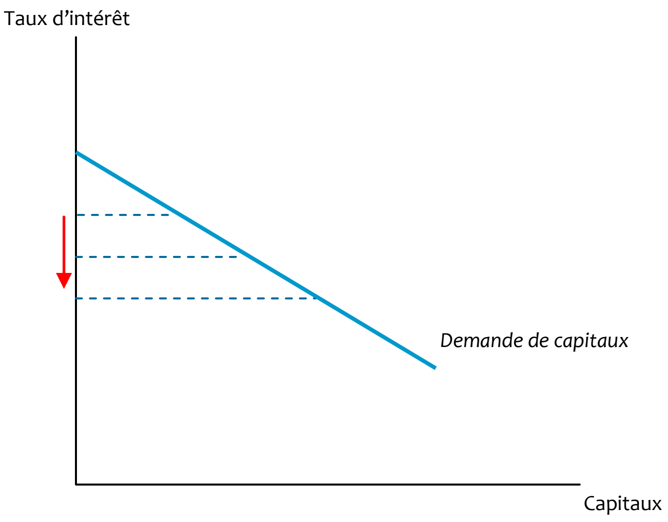
La courbe d'offre d'épargne ou de capitaux est du même type que les autres courbes d'offre rencontrées jusqu'à présent. À chaque point de la courbe d'offre d'épargne correspond un point d'équilibre de l'épargnant. On peut aussi définir l'élasticité de l'offre d'épargne ou de capitaux par rapport au taux d'intérêt.

Les emprunteurs ou demandeurs de capitaux, sont disposés à payer un taux d'intérêt aux épargnants, prêteurs de capitaux. Comment expliquer ce comportement ? Les fondements logiques de ce comportement se trouvent dans les propriétés du capital physique que le capital financier permet de constituer, et en particulier dans sa productivité.

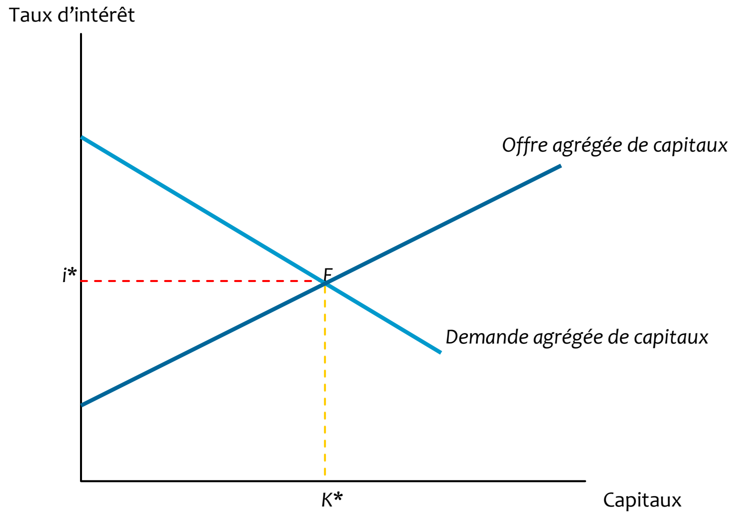
Le capital physique est constitué de biens produits dans l'immédiat afin de concourir, après un certain délai, à la production d'autres biens. On appelle investissement la décision de créer du capital aujourd'hui pour générer plus de revenus demain. Dans ces conditions, on peut établir que la demande de capitaux est justifiée par la nécessité d'investir. Ceux qui demandent des capitaux font un arbitrage entre ce que les capitaux vont leur coûter et le surplus de revenus qu'ils vont générer (analyse de la valeur nette actualisée VAN des projets d'investissement). Si le surplus généré l'emporte sur le coût du capital, la décision d'investir sera prise et les capitaux seront demandés sur le marché des fonds prêtables. En d'autres termes, la décision d'investir sera prise si la VAN est positive et elle ne sera pas prise si la VAN est négative.

$$VAN = \sum_{t=0}^{N} (1+i)^{-t} (R_t - C_t).$$

R_t représente les recettes attendues sur la période allant de $t = 0$ à $t = N$ et C_t les coûts supportés par la firme pour produire sur le même horizon temporel. Moins important sera le coût du capital, plus les agents économiques qui investissent pourront demander des capitaux.



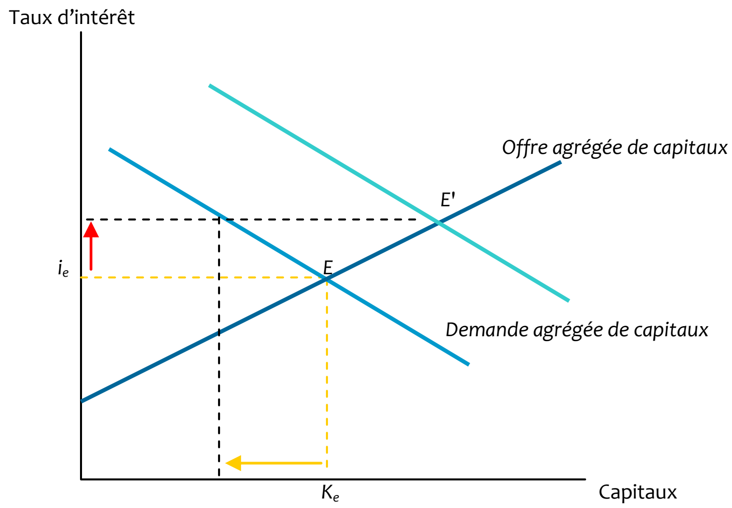
La demande de capitaux est une fonction décroissante du taux d'intérêt. L'équilibre sur le marché des fonds prêtables lorsque la demande globale ou agrégée de capitaux correspond à l'offre globale ou agrégée d'épargne.



Il bien retenir que dernière ces courbes d'offre et de demande de capitaux, il y a des choix intertemporels. En effet, ce n'est pas de manière hasardeuse qu'un agent économique décide de faire un placement sur un marché financier ou de s'endetter.

- **Effet d'éviction**

S'il s'ajoute sur le marché de nouveaux demandeurs de capitaux, la courbe de demande agrégée de capitaux devrait se déplacer ver la droite, ce qui devrait entraîner un accroissement du taux d'intérêt d'équilibre. La décision d'investir étant prise en fonction de la VAN, un accroissement du taux d'intérêt peut rendre négative une VAN qui auparavant était positive. Une partie des projets d'investissement autrefois acceptés devrait être récusée, ce qui conduit à une sorte d'effet d'éviction.



3.6. Oligopole et duopole

Un oligopole est un type particulier de marché de concurrence monopolistique où l'on rencontre un nombre restreint de firmes. L'analyse des marchés oligopolistiques porte essentiellement sur deux points, à savoir la *différenciation du produit* et l'*entrée dans la branche*. Par souci de simplicité, on n'analysera que la situation dans laquelle on ne rencontre que deux offreurs : un duopole.

3.6.1. Le modèle de Stackelberg

Dans le modèle de Stackelberg, on considère que l'une des firmes fait office de leader sur le marché et l'autre fait office de suiveur ou follower. Le follower aligne son comportement sur les décisions prises par le décideur, lesquelles décisions peuvent se rapporter à la quantité de bien ou au prix de vente du bien sur le marché. L'interaction stratégique dans ce modèle est un jeu séquentiel.

Leadership en quantité

Dans une situation de leadership de quantité, le follower cherche à maximiser son profit tout en définissant sa production en fonction de la quantité offerte par le leader. Ce dernier cherchera à maximiser son profit tout en tenant compte du fait que son choix affectera celui du follower. Le prix du marché est une fonction décroissante de la quantité de bien offerte sur le marché :

$$y = y_1 + y_2.$$

On écrira alors :

$$p = p(y) = p(y_1 + y_2)$$

où y_1 et y_2 représentent respectivement les quantités de bien offertes par la firme 1 (leader) et par la firme 2 (follower). Le problème du follower s'écrit de la sorte :

$$\text{Max } \pi_2 = p(y_1 + y_2)\, y_2 - C_2(y_2)$$

La condition du premier ordre donne lieu à la condition d'équilibre suivante :

$$Rm_2 = p(y_1 + y_2) + y_2(dp/dy_2) = Cm_2.$$

Il faut noter que le choix du follower est fonction de l'offre du leader, soit :

$$y_2 = f(y_1).$$

Cette fonction que l'on appelle fonction de réaction donne des indications sur le comportement du follower eu égard au choix opéré par le leader. Le problème du leader s'écrit comme suit :

$$\text{Max } \pi_1 = p(y_1 + y_2)\, y_1 - C_1(y_1)$$
$$\text{avec } y_2 = f(y_1).$$

En substituant la fonction de réaction dans la fonction-objectif du leader, le problème devient :

$$\text{Max } \pi_1 = p[y_1 + f(y_1)]\, y_1 - C_1(y_1)$$

La condition du premier ordre du leader sera ainsi :

$$p[.] + y_1.p'[1 + f'(y_1)] = Cm_1.$$

Illustration

Considérons que la demande du marché soit d'expression $p = a - b(y_1 + y_2)$ et que les coûts de production des deux firmes soient nuls. Ainsi, le problème du follower s'écrira de la manière suivante :

$$\text{Max } \pi_2 = p(y_1 + y_2)\, y_2 = ay_2 - by_1y_2 - by_2^2$$

La condition du premier ordre donne lieu à la fonction de réaction ci-après :

$$y_2 = \frac{a - by_1}{2b}.$$

En revanche, le problème du leader s'écrira :

$$\text{Max } \pi_1 = p(y_1 + y_2)\, y_1 = ay_1 - b\, y_1^2 - by_1\left(\frac{a - by_1}{2b}\right).$$

En prenant la condition du premier ordre de la maximisation, on arrive à établir que :

$$y_1{}^* = \frac{a}{2b}.$$

En renvoyant ce résultat dans la fonction de réaction du follower, on arrive à définir la quantité de bien qu'il offre.

$$y_2{}^* = \frac{a}{4b}.$$

Par conséquent, on aura :

$$y^* = y_1{}^* + y_2{}^* = 3a/4b \quad \text{et} \quad p^* = a/4.$$

Leadership en prix

Dans une situation de leadership de prix, le follower cherche à maximiser son profit tout en tenant compte du prix fixé par le leader. Autrement dit, le follower cherchera à égaliser son coût marginal au prix défini par le leader. Son problème s'écrira alors :

$$\text{Max } \pi_2 = py_2 - C_2(y_2)$$

La condition du premier ordre donne lieu à la condition d'équilibre ci-après :

$$p = Cm_2.$$

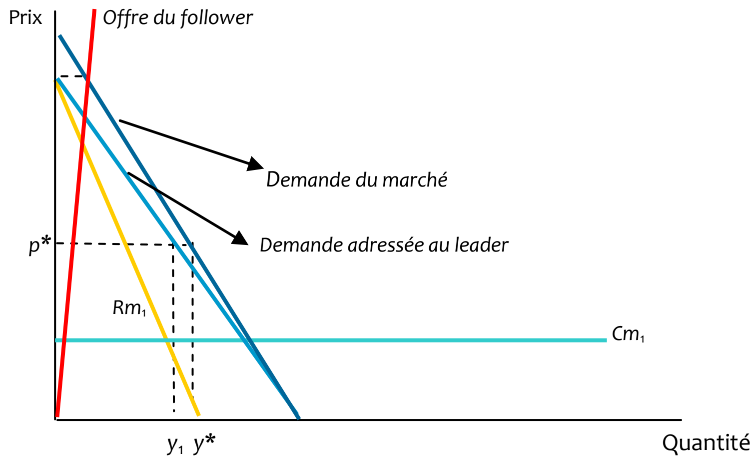
C'est à partir de cette condition qu'on trouvera la quantité de bien offerte par le follower. L'offre du leader sera :

$$y_1(p) = D(p) - y_2(p).$$

En supposant que le coût marginal du leader est constant et égal à β, sa fonction de profit s'écrira :

$$\text{Max } \pi_1 = p[D(p) - y_2(p)] - \beta[D(p) - y_2(p)] = (p - \beta)[D(p) - y_2(p)]$$

C'est en prenant la condition d'équilibre (égalité de la recette marginale avec le coût marginal) que le leader détermine sa production.



Illustration

La fonction de demande est donnée par $D(p) = a - bp$ et les fonctions de coût des deux firmes sont $C_1 = \beta y_1$ et $C_2 = y_2^2/2$. Caractérisez l'équilibre du marché tout en supposant que la firme 1 est le leader qui fixe le prix du bien sur le marché.

La fonction de coût marginal du follower est : $Cm_2 = y_2$. En l'égalisant au prix p, on obtient sa fonction d'offre, soit :

$$y_2(p) = p.$$

Dans ces conditions, on aura :

$$y_1 = D(p) - y_2(p) = a - (1 + b)p.$$

En résolvant par rapport à p, on obtient :

$$p = \frac{a - y_1}{1 + b}.$$

En prenant la condition d'équilibre du leader ($Rm_1 = Cm_1$), on arrive à déterminer son offre, soit :

$$y_1{}^* = \frac{a - (1+b)\beta}{2}.$$

3.6.2. Le modèle de Cournot

Dans le modèle de Cournot, chacune des deux firmes définit son comportement en anticipant les actions du concurrent. Il s'agit donc d'un jeu simultané. On dira alors que l'équilibre est réalisé si les anticipations faites par les deux firmes sont conforment à la réalité.

Le problème de maximisation du profit de la firme 1 se présentera comme suit :

$$\text{Max } \pi_1 = p(y_1 + y_2^a)\, y_1 - C_1(y_1)$$

où y_2^a représente l'anticipation de l'output de la firme 2 par la firme 1. Pour chaque anticipation, il existe un niveau optimal d'output de la firme 1.

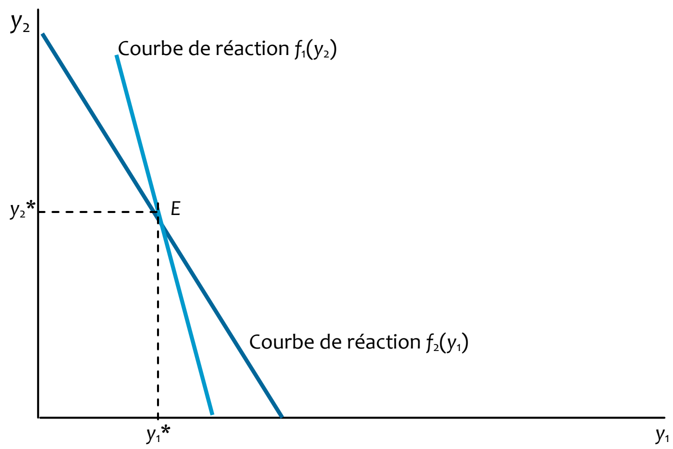
La relation entre le choix optimal de la firme 1 et son anticipation est donnée par la fonction :

$$y_1 = f_1(\,y_2^a\,).$$

Cette fonction de réaction est quelque peu similaire à ce que nous avons vu plus haut, à la seule différence qu'ici, la réaction dépend de l'anticipation. Par un raisonnement analogique, on établit que la fonction de réaction de la firme 2 sera d'expression :

$$y_2 = f_2(\,y_1^a\,).$$

La solution d'équilibre (y_1*, y_2*) est obtenue en résolvant le système à deux équations et deux inconnus que forment les fonctions de réactions des deux firmes sous l'hypothèse où les anticipations sont identiques aux réalisations.



3.6.3. La coalition

Il est possible que les firmes en présence sur le marché se rassemblent et fixent leurs prix et outputs de manière à maximiser les profits du cartel qu'elles auront ainsi mis sur pied. L'interaction stratégique ici est un jeu coopératif. Le problème du cartel s'écrira de la sorte :

$$\text{Max } \pi = p(y_1 + y_2)[y_1 + y_2] - C_1(y_1) - C_2(y_2)$$

En prenant les conditions du premier ordre de la maximisation, on arrive à établir qu'à l'équilibre, on devra vérifier que :

$$p(y_1^* + y_2^*) + p'(.)[y_1 + y_2] = Cm_1(y_1^*)$$
$$p(y_1^* + y_2^*) + p'(.)[y_1 + y_2] = Cm_2(y_2^*)$$

Ceci suppose qu'à l'équilibre, les coûts marginaux des deux firmes seront identiques. Il faut toutefois noter que dans la pratique les choses ne sont pas si faciles que ça ne semble le paraitre. Généralement, les firmes faisant partie d'une coalition ont tendance à ne pas respecter ce critère.

3.7. Théorie des jeux

Pour mieux saisir les interactions stratégiques entre entreprises sur un marché oligopolistique, il s'avère important d'utiliser la théorie des jeux pour voir une face cachée de l'iceberg, c'est-à-dire des situations qui ne ressortent pas directement des cas étudiés précédemment.

Afin de simplifier l'exposé, nous allons considérer des jeux à deux joueurs et chacun ayant la possibilité d'utiliser deux stratégies. L'individu *A* – qui apparaît en ligne – peut jouer haut ou bas et l'individu *B* – qui apparaît en colonne – peut jouer gauche ou droite. Les jeux seront représentés par des matrices de paiements (payoff matrix). Considérons la matrice de paiements ci-après.

		Joueur *B*	
		Gauche	Droite
Joueur *A*	Haut	1, 2	0, 1
	Bas	2, 1	1, 0

Du point de vue du joueur *A*, la stratégie **bas** est préférée à la stratégie **haut**. Pour le joueur *B*, la stratégie **gauche** est préférée à la stratégie à la stratégie **droite**. Ainsi, chaque joueur a une stratégie dominante. La stratégie d'équilibre consiste pour *A* à jouer la stratégie **bas** et pour *B* à jouer la stratégie **gauche** (2, 1).

3.7.1. Equilibre de Nash

Les équilibres avec stratégies dominantes n'existent pas toujours. Considérons la matrice de paiements ci-après.

		Joueur *B*	
		Gauche	Droite
Joueur *A*	Haut	2, 1	0, 0
	Bas	0, 0	1, 2

Si *B* choisit **gauche**, *A* jouera **haut** et si *B* choisit **droite**, *A* jouera **bas**. Dans ces conditions, le choix optimal de *A* dépend des choix de *B*. De même, si *A* joue **haut**, *B* jouera **gauche**, et si *A* prend **bas**, *B* jouera **droite**. Il n'apparaît pas de stratégie dominante.

Un équilibre de Nash est une paire de stratégies pour laquelle le choix de *A* est optimal compte tenu du choix de *B* et pour laquelle le choix de *B* est optimal compte tenu du choix de *A*. Ainsi, la stratégie **haut** – **gauche** est un équilibre de Nash tout comme la stratégie **bas** – **droite**.

Il est possible de rencontrer un jeu pour lequel il n'existe pas un équilibre de Nash. Considérons la matrice de paiements ci-après.

		Joueur *B*	
		Gauche	Droite
Joueur *A*	Haut	0, 0	0, -1
	Bas	1, 0	-1, 3

Si *A* joue **haut**, *B* devrait jouer **gauche** et si *A* joue **bas**, *B* devrait jouer **droite**. Par contre, si *B* joue **gauche**, *A* jouera **bas** et si *B* joue **droite**, *A* jouera **haut**. Devant de telles complications, les individus sont appelés à opter pour des stratégies mixtes en lieu et place des stratégies pures. Ils doivent associer des probabilités à leurs choix stratégiques, c'est-à-dire définir des fréquences optimales avec lesquelles ils vont utiliser les différentes stratégies possibles.

3.7.2. Dilemme du prisonnier

L'équilibre de Nash n'est pas nécessairement efficace au sens de Pareto. Considérons deux prisonniers : *A* et *B* qui ont commis un délit ensemble. Ces prisonniers sont interrogés séparément, c'est-à-dire dans deux salles différentes. Les deux ont la possibilité de nier le fait ou de le reconnaître (avouer). Si l'un nie et que l'autre avoue, celui qui avoue est libéré et celui qui nie fait 6 mois de prison. Si les deux nient, ils feront un mois de prison (pour des raisons administratives) et s'ils avouent, ils passeront trois mois de prison. La matrice de paiements de ce jeu s'écrit comme suit.

		Joueur *B*	
		Avouer	Nier
Joueur *A*	Avouer	-3, -3	0, -6
	Nier	-6, 0	-1, -1

Si *A* avoue, *B* devrait avouer. Si *A* nie, *B* aura tout intérêt à avouer. Donc, pour *B*, la stratégie dominante est avouer. Si *B* avoue, *A* devrait aussi avouer le fait. Si *B* nie, *A* se devra d'avouer. Il vient donc que la stratégie avouer – avouer est un équilibre de Nash. Mais cet équilibre n'est pas optimal au sens de Pareto car la stratégie nier – nier est plus intéressante du point de vue du bien-être.

4

Interventions de l'Etat et équilibre

La fonction-objectif de l'Etat étant celle de maximiser le bien-être collectif, il se voit dans l'obligation d'intervenir dans le fonctionnement de l'économie. Il peut offrir un bien nécessaire pour la collectivité tout comme il peut soutenir la demande dans un secteur donné. L'Etat peut également intervenir en édictant les règles de jeu à respecter par les acteurs de l'économie. Pour ce faire, il doit disposer des moyens d'action conséquents, l'impôt étant sa principale source de revenu et il doit veiller à ne pas créer un climat défavorable au déroulement de l'activité économique.

Puisque l'impôt repose sur une assiette fiscale qui est composée de biens ou d'activités économiques, il est tout à fait évident que la levée d'un impôt par l'Etat modifiera l'équilibre individuel et l'équilibre du marché. Mais bien sûr, l'effet de l'impôt sur l'équilibre diffère en fonction du type de marché en présence et du type de prélèvement envisagé : impôt spécifique (à l'unité ou à la valeur) ou forfaitaire.

4.1. Impôts et équilibre individuel

4.1.1. Impôt et équilibre du consommateur

Soit un individu qui consomme deux biens : y_1 et y_2. Son revenu m étant donné et les prix de vente des deux biens étant respectivement p_1 et p_2, le problème auquel il est confronté se présente de la sorte :

$$\text{Max } U(y_1, y_2)$$
$$\text{telle que } m \geq p_1 y_1 + p_2 y_2$$
$$\text{avec } y_1, y_2 \geq 0.$$

Les conditions du premier ordre de la maximisation de l'utilité conduisent à la condition d'équilibre selon laquelle le taux marginal de substitution entre biens TmS doit être égal au rapport des prix des biens, soit :

$$TmS = p_1/p_2.$$

Levée d'un impôt spécifique

Un impôt spécifique est un impôt prélevé sur un bien précis. Il peut être prélevé sur chaque unité vendue du bien y_1 pour un montant fixe t (impôt à l'unité) ou pour un montant proportionnel au prix de vente dudit bien sur le marché $t = \sigma p$ (impôt à la valeur).

Admettons que l'Etat lève un impôt spécifique de t unités monétaires par unité du bien y_1 consommée. Il s'en suivra un changement de l'ensemble budgétaire du consommateur, car désormais pour disposer d'une unité de y_1, il faut s'acquitter d'un prix $p_1 + t$. Dans ces conditions, le problème du consommateur devient :

$$\text{Max } U(y_1, y_2)$$
$$\text{telle que } m \geq (p_1 + t)y_1 + p_2 y_2$$
$$\text{avec } y_1, y_2 \geq 0.$$

En prenant les conditions du premier ordre, on arrive à la condition d'équilibre ci-après :

$$TmS = (p_1 + t)/p_2.$$

Cette dernière condition étant différente de la condition d'équilibre avant la levée de l'impôt, on conclut que l'impôt spécifique modifie l'équilibre individuel.

A présent, admettons que l'Etat lève un impôt à la valeur sur le bien y_1. Le problème du consommateur deviendra :

$$\text{Max } U(y_1, y_2)$$
$$\text{telle que } m \geq (1 + \sigma)p_1y_1 + p_2\, y_2$$
$$\text{avec } y_1, y_2 \geq 0.$$

La condition du premier ordre nous donne la relation ci-après :

$$TmS = (1 + \sigma)p_1/p_2.$$

Cette condition est différente de celle avant intervention de l'Etat. La levée de l'impôt ayant conduit à un accroissement du prix du bien 1 sur le marché, l'équilibre du consommateur devrait changer, on devrait s'attendre à une réduction de l'ensemble budgétaire et à une baisse de son niveau de vie.

Levée d'un impôt forfaitaire

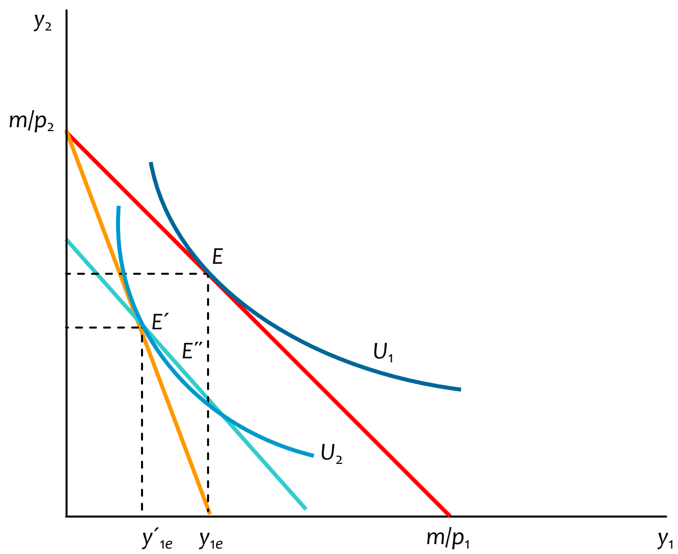
Un impôt forfaitaire ne dépend pas de la quantité de bien vendue (ou achetée) ou du prix auquel le bien est vendu. Il s'agit d'un forfait fixé de manière discrétionnaire par l'Etat. Supposons que le montant de l'impôt forfaitaire soit de *T*. Le problème du consommateur s'écrit :

$$\text{Max } U(y_1, y_2)$$
$$\text{telle que } m - T \geq p_1y_1 + p_2\, y_2$$
$$\text{avec } y_1, y_2 \geq 0.$$

Les conditions marginales donnent lieu à la même condition d'équilibre que celle obtenue avant levée de l'impôt, soit :

$$TmS = p_1/p_2.$$

Il se dégage de ces quatre situations considérées que la condition initiale ne diffère pas de celle après prélèvement de l'impôt forfaitaire. C'est la raison pour laquelle on dit souvent que l'impôt forfaitaire est préféré à l'impôt spécifique. Ceci peut être prouvé par une analyse graphique.



La situation de départ est donnée par le point *E*. La levée de l'impôt spécifique entraîne un pivotement de la droite de budget, lequel pivotement débouche sur un équilibre réalisé au point *E´* avec un niveau de satisfaction U_2. Si l'Etat désire collecter la même recette fiscale par un impôt sur le revenu (impôt forfaitaire), la droite du budget initiale se déplacera parallèlement vers le bas tout en passant par le point *E´*. Sur cette nouvelle droite de budget (en tirets), il est possible d'obtenir un point d'équilibre plus intéressant que *E´*, tel le cas du point *E˝* qui correspond à un niveau de satisfaction supérieur à U_2.

4.1.2. Impôts et équilibre du producteur

Le problème de base du producteur est celui de la maximisation de son profit, soit

$$\text{Max } \pi = py - C(y)$$

où *p* est le prix de l'output *y* et *C*(*y*) la fonction de coût total. En optimisant la fonction de profit, on obtient la condition d'équilibre ci-après :

$$p = Cm.$$

Une firme est dite efficiente sur le marché (*scale efficient*) si elle vérifie cette dernière condition d'équilibre, c'est-à-dire si elle exploite correctement les opportunités lui offertes par le marché.

Levée d'un impôt spécifique

Si l'Etat prélève un impôt de *t* par unité vendue du bien *y*, la fonction de coût du producteur deviendra $C^* = C(y) + ty$ et son problème deviendra :

$$\text{Max } \pi = py - C(y) - ty$$

La condition du premier ordre de la maximisation débouche sur l'égalité suivante

$$p = Cm + t.$$

A l'équilibre, le prix doit être à même de couvrir le coût marginal *Cm* et la taxe *t*.

Admettons à présent que l'Etat prélève un impôt proportionnel au prix de son output. Sa fonction-objectif devient :

$$\text{Max } \pi = py - C(y) - \sigma py$$

ou

$$\text{Max } \pi = (1 - \sigma)py - C(y).$$

La condition du premier ordre de la maximisation nous conduit à la relation suivante :

$$(1 - \sigma)p = Cm.$$

Ceci suggère que seule la fraction $(1 - \sigma)$ du prix rémunère les efforts de la firme en tant que producteur. On peut donc montrer que le prix du bien devrait croître après levée de l'impôt.

$$p = Cm/(1 - \sigma).$$

Levée d'un impôt forfaitaire

Si l'Etat prélève un impôt forfaitaire sur la firme, sa fonction de coût total deviendra $C^* = C(y) + T$ et son problème s'écrira :

$$\text{Max } \pi = py - C(y) - T.$$

La condition marginale est :

$$p = Cm.$$

On peut donc conclure que l'impôt forfaitaire est préféré à l'impôt spécifique (à l'unité ou à la valeur), car la condition d'équilibre du producteur est ici identique à la condition de départ.

4.2. Impôt, équilibre et bien-être en concurrence parfaite

L'équilibre réalisé en concurrence parfaite correspond à un état efficace en ce qu'il maximise le bien-être collectif mesuré par la somme des surplus des consommateurs et des producteurs. Sous ce point, nous analysons l'impact de la levée d'un impôt à l'unité sur l'équilibre du marché.

4.2.1. Fiscalité et production de concurrence parfaite

Admettons que la taxe sur les ventes soit d'un montant t par unité. Le coût total de la firme sera donné par la somme du coût de production réelle et de la charge fiscale, soit :

$$C^* = C(y) + ty$$

où $C(y)$ représente le coût de production et ty la charge fiscale. La condition du premier ordre de la maximisation est :

$$Cm + t = p \quad \text{ou} \quad Cm = p - t.$$

La fonction d'offre qui est dérivée de la fonction de coût marginal Cm se présente comme suit :

$$y^S_i = y(p - t)$$

ou

$$y^S_i = y(p_s)$$

avec $p_s = p_d - t$. La fonction d'offre agrégée est donnée par la somme des fonctions d'offre individuelles :

$$Y^S = \sum y_i(p - t) = Y^S\,(p - t) \text{ ou } Y^S = Y^S(p_s)$$

L'offre globale est ainsi fonction du prix net encaissé par les vendeurs ($p_s = p_d - t$). L'équilibre du marché est déterminé à l'aide de la relation suivante :

$$E = Y^d(p) - Y^S(p - t) = 0$$

ou

$$E = Y^d(p_s + t) - Y^S(p_s) = 0.$$

4.2.2. Effet de l'impôt sur l'équilibre concurrentiel et le bien-être collectif

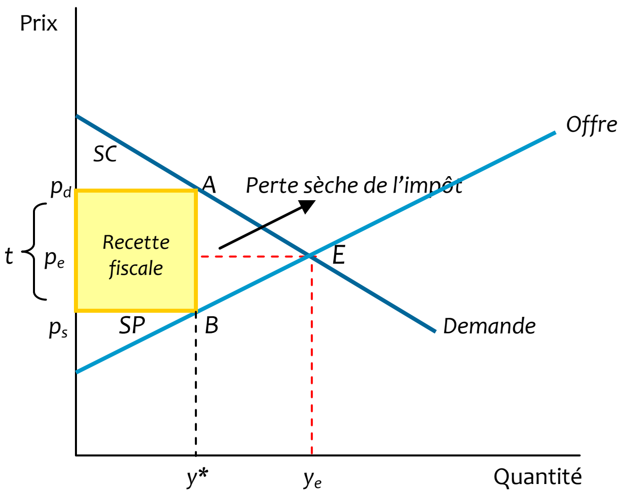
La levée d'une taxe ou d'un impôt par unité de bien vendu sur le marché entraîne une modification de l'équilibre, de la recette réalisée par les offreurs et de la dépense engagée par les demandeurs. Le prix payé par les demandeurs p_d est supérieur à celui perçu par les offreurs p_s, soit :

$$p_d = p_s + t$$

ou

$$p_s = p_d - t.$$

avec t qui représente le montant de la taxe imposée par l'Etat et p_s la rémunération des efforts conjugués par la firme pour produire le bien.



La levée de la taxe t a réduit au même moment le surplus des consommateurs et celui des producteurs. Le triangle *ABE* donne la mesure de la perte en termes de bien-être qu'a occasionné l'impôt (perte sèche de l'impôt). La recette fiscale est donnée par le rectangle p_d-A-B-p_s et les charges respectives des consommateurs et des producteurs dans le financement de l'impôt sont données par p_d-p_e et p_e-p_s.

Illustration

Soit une industrie composée de 100 firmes ayant la même structure de coûts :

$$C_i = 0.1y_i^2 + y_i + 10.$$

La demande qui leur est adressée est de la forme

$$Y^d = 4000 - 400p.$$

Déterminez l'équilibre du marché. Qu'adviendra-t-il si l'Etat impose une taxe spécifique de t UM ? Si $t = 0.9$, quelle sera la charge respectivement supportée par les offreurs et par les consommateurs ?

En égalisant le coût marginal au prix et en résolvant en y, on obtient

$$y = -5 + 5p \qquad \text{avec } p > 1.$$

La fonction d'offre globale est donnée par

$$Y^S = 100y_i = -500 + 500p.$$

En égalant l'offre de la branche à la demande du marché, on arrive à déterminer le prix d'équilibre et la quantité de biens échangée.

$$p_e = 5 \text{ et } Y_e = 2000.$$

Lorsque l'Etat intervient sur le marché, la fonction de coût total de l'entreprise-type devient :

$$C_i = 0.1y_i^2 + y_i + 10 + ty.$$

En égalisant le coût marginal au prix et en résolvant par rapport à y, on obtient

$$y = 5(p - t) - 5.$$

La fonction d'offre globale s'écrit

$$Y^S = 100y_i = -500 + 500(p - t) \qquad \text{avec } p > 1.$$

En égalisant l'offre et la demande, on obtient

$$p = 5 + 5t/9.$$

Si t est égal à 90 centimes, on aura $p^* = 5.5$ et $Y^* = 1800$. Comme conséquence, le prix s'est accru alors que la quantité vendue a diminué. Auparavant, un consommateur payait 5 UM pour disposer d'une unité du bien et l'offreur recevait 5 UM par unité de bien vendue. Avec le changement intervenu, le consommateur devra payer 5.5 UM pour avoir une unité du bien. Les 50 centimes additionnels représentent la part de la taxe unitaire qui est répercutée sur les consommateurs. Le prix net encaissé par l'entreprise est $p_s = 5.5 - 0.9 = 4.6$. Ainsi, l'entreprise prend en charge 40 centimes de la taxe.

4.2.3. Impôt et production de monopole

Soit la fonction de coût du monopoleur que l'on écrit de la sorte :

$$C = C(y).$$

Admettons que l'Etat exige une taxe spécifique de t sur les ventes par unité de bien du monopoleur. La fonction de profit deviendra :

$$\pi = yp(y) - C(y) - ty.$$

La condition du premier ordre de la maximisation donne lieu à la relation suivante :

$$Rm = p(y) + yp'(y) = Cm + t.$$

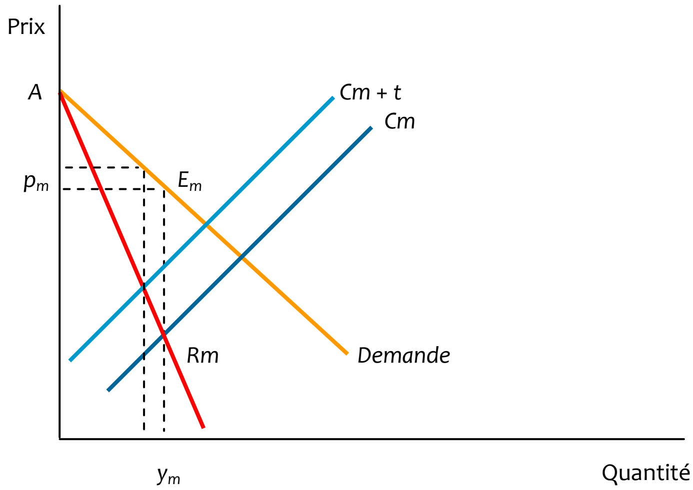
Calculons la différentielle totale de la recette marginale du monopoleur Rm.

$$R''(y)dy = C''(y)dy + dt.$$

Après arrangement de cette dernière relation, on obtient :

$$dy/dt = [R''(y) - C''(y)]^{-1} < 0.$$

La levée d'un impôt spécifique sur les ventes du monopoleur entraîne la diminution de la quantité vendue et la hausse du prix.



Illustration

Soit un monopoleur confronté à une courbe de demande ayant la forme suivante :

$$p = 100 - 4y.$$

Son coût total est donné par :

$$C = 50 + 20y.$$

Caractérisez l'équilibre du monopoleur. Quelle sera sa position d'équilibre si l'Etat instaure un impôt spécifique de 8 unités monétaires sur son output ?

La fonction de profit du monopoleur est de la forme

$$p(y)y - C(y) = 80y - 4y^2 - 50.$$

En rendant égaux le coût marginal et la recette marginale, on obtient

$$100 - 8y = 20.$$

Ce qui donne : $y_e = 10$, $p(y_e) = 60$ et le profit est égal à 350.

Si le monopoleur suivait la règle de concurrence parfaite, on aurait

$$100 - 4y = 20.$$

Ce qui donnerait : $y = 20$, $p = 20$ et le profit serait égal à -50. Il vendrait une quantité plus importante à un prix plus bas et obtiendrait un profit négatif. Si l'Etat lève un impôt de 8 UM par unité d'output vendue par le monopoleur, sa fonction de profit deviendra :

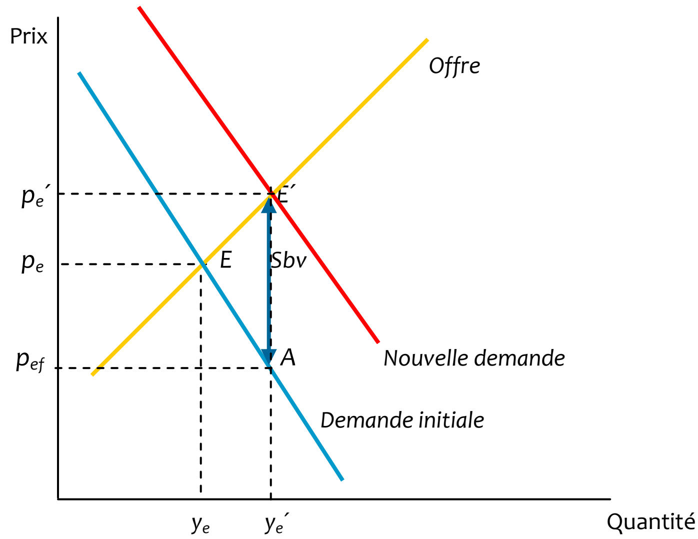
$$\pi = 72y - 4y^2 - 50.$$

En prenant la condition du premier ordre, on obtient $y^* = 9$; $p(y^*) = 64$ et $\pi^* = 274$. La levée de l'impôt a entraîné une diminution des ventes, une hausse du prix de 4 UM, et une baisse du profit de 76 UM.

4.3. Octroi d'une subvention

Lorsque l'Etat constate que la consommation d'un bien est – du point de vue de la santé publique par exemple – nécessaire pour la collectivité, il peut envisager un ensemble d'actions pour stimuler cette consommation. L'un des moyens qu'il peut utiliser est l'octroi d'une subvention à la consommation.

Avec une offre inchangée, l'accroissement de la demande recherché par l'Etat aura comme conséquence l'accroissement du prix pratiqué sur le marché. Cette hausse de prix devrait normalement exclure certaines personnes de la consommation du bien, mais il ne sera pas ainsi car l'Etat va prendre en charge une partie du prix de manière à ce que la charge supportée par unité de bien consommée soit inférieure au prix initial.



L'équilibre initial est réalisé au point E qui correspond au prix p_e et à la quantité y_e. Comme dit plus haut, l'accroissement de la demande du bien – à offre inchangée – entraînera une hausse du prix, soit le passage de p_e à p_e'.

Par un effet d'éviction par le prix, certaines personnes devraient être exclues de la consommation du bien. En effet, du fait que le prix a eu à accroître, certains demandeurs ne seront plus capables d'acheter le bien, d'où la nécessité de voir l'Etat accorder des subventions. La figure ci-dessus montre que la nouvelle quantité d'équilibre est y_e', le prix effectivement payé par les individus est p_{ef} [$< p_e$] et le montant de la subvention est donné par la distance $E'A$.

Initialement, le marché est caractérisé par les relations suivantes :

$$y^d = a - bp$$
$$y^s = -c + hp$$

avec a, b, c et $h > 0$. La résolution donne lieu au prix d'équilibre

$$p_e = (a + c)/(b + h).$$

L'octroi de la subvention modifie la structure du modèle. Ce dernier devient :

$$y^d = a - b(p - sbv)$$
$$y^s = -c + hp$$

avec *sbv* qui représente le montant de la subvention. Le nouveau prix d'équilibre du marché sera :

$$p_e' = (a + bsbv + c)/(b + h).$$

Le prix payé par le consommateur p_{ef} est donné par la différence $p_e' - sbv$, soit :

$$p_{ef} = (a + c - hsbv)/(b + h).$$

4.4. Réglementation et équilibre individuel

Autant que la levée d'un impôt modifie la position d'équilibre des individus, la réglementation de l'activité économique par l'Etat modifie la position d'équilibre de certains agents économiques. Analytiquement, les effets de la réglementation peuvent être appréhendés par les *shadow prices* ou *shadow cost*.

4.4.1. Réglementation et équilibre du producteur

Par un contrôle sévère de l'activité, l'Etat sape l'efficacité qui accompagne la concurrence et impose aux entreprises d'être inefficientes sur le marché (*scale inefficient*) et d'être techniquement inefficaces (*technical inefficient*). Cet état de choses est souvent à la base de la corruption, de la fraude et de l'évasion fiscale.

Le problème économique du producteur peut être posé en termes de maximisation de la production $y = f(x_1, x_2)$ sous une contrainte de coût C, soit :

$$\begin{gathered} \text{Max } y = f(x_1, x_2) \\ \text{telle que } C \geq w_1x_1 + w_2x_2 \\ \text{avec } x_1, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

La résolution de ce programme conduit à la condition d'équilibre ci-après :

$$TmSt = Pmx_1/Pmx_2 = w_1/w_2.$$

Une firme est techniquement efficace si elle égalise son taux marginal de substitution technique *TmSt* au taux de substitution économique (prix relatif des facteurs de production x_1 et x_2). Lorsque l'Etat intervient de manière démesurée, la firme se voit soumise à de nouvelles contraintes qui lui empêchent de vérifier cette condition d'équilibre.

Supposons que la réglementation de l'Etat impose à la firme, en plus de sa contrainte de coût, une contrainte notée $g(x_1, x_2, y) \geq 0$. Le problème du producteur devient :

$$\begin{gathered} \text{Max } y = f(x_1, x_2) \\ \text{telle que } C \geq w_1x_1 + w_2x_2 \\ g(x_1, x_2, y) \geq 0 \\ \text{avec } x_1, x_2 \geq 0. \end{gathered}$$

Le Lagrangien du problème se présente de la sorte :

$$L = f(x_1, x_2) - \lambda(w_1x_1 + w_2x_2 - C) - \beta g(x_1, x_2, y)$$

avec λ et β qui sont des multiplicateurs de Lagrange ou des *shadow prices*.

Les conditions marginales du premier ordre sont :

$$dL/dx_1 = Pmx_1 - \lambda w_1 - \beta g_1 = 0 \longrightarrow Pmx_1 = \lambda w_1 + \beta g_1$$
$$dL/dx_2 = Pmx_2 - \lambda w_2 - \beta g_2 = 0 \longrightarrow Pmx_2 = \lambda w_2 + \beta g_2.$$

On aura ainsi :

$$TmSt \equiv \frac{Pmx_1}{Pmx_2} = \frac{\lambda w_1 + \beta g_1}{\lambda w_2 + \beta g_2}.$$

Si la réglementation de l'Etat est souple, les coûts marginaux qu'elle fera supportés aux firmes seront négligeables : $g_1 = g_2 = 0$. Dans ces conditions, on vérifiera que :

$$TmSt = w_1/w_2.$$

Par contre, si elle est inefficace, g_1, $g_2 \neq 0$ et on aura :

$$TmSt \neq w_1/w_2.$$

Les firmes ne pouvant plus maîtriser leurs coûts, elles deviennent peu compétitives sur le marché et voient leurs contributions au PIB diminuer.

4.4.2. Asymétrie de l'information et réglementation de l'Etat

La théorie de l'asymétrie de l'information (théorie du principal et de l'agent) est souvent utilisée pour expliquer les faiblesses qui accompagnent la réglementation de certains segments ou de certaines activités économiques par l'Etat. En effet, l'Etat qui est appelé à intervenir dans l'économie pour faire opposition à des situations désagréables du point de vue de la collectivité ne dispose pas toujours des informations requises pour bien orienter son action correctrice. Dans ces conditions, il est possible que la réglementation envisagée puisse renforcer l'inefficacité au lieu de la contrecarrer.

Selon la théorie du principal et de l'agent, le gouvernement (le principal) cherche à infléchir les comportements des firmes (agent) ou les amener à prendre certaines décisions en matière de prix et d'investissement conformément aux impératifs de l'intérêt général. Mais puisque le principal ne dispose pas de la même information que l'agent, il y a lieu de se poser la question de savoir quelle est la meilleure réglementation compte tenu de l'information dont dispose le principal et quels sont les résultats sur lesquels débouchera la réglementation ? Est-ce que l'agent réagit conformément aux attentes du principal ?

Souvent, l'Etat intervient sur les marchés en réglementant les prix pratiqués par les firmes de manière à protéger les consommateurs. L'idéal serait que les firmes pratiquent des prix efficaces, c'est-à-dire des prix égaux à leurs coûts marginaux (prix de concurrence parfaite). Mais puisque l'Etat n'a pas une connaissance parfaite des coûts des firmes, il peut le fixer à un niveau trop bas, et partant, contraindre les firmes à quitter la branche ou encore les amener à proposer d'autres produits à des prix plus élevés. La meilleure façon de procéder serait d'asseoir la réglementation sur un compromis entre le principal et l'agent.

4.5. Monopole naturel, appropriation et gestion des entreprises publiques

4.5.1. Monopole naturel

Les situations de monopole naturel s'expliquent par la présence des coûts fixes très élevés dans certains secteurs de l'économie : chemins de fer, énergie, etc. En effet, si les dimensions requises par l'entreprise ainsi que la technologie à utiliser pour bien exploiter une activité ne sont pas à la portée de tous les exploitants voulant œuvrer dans la branche, l'efficience dans l'exploitation ne sera pas fonction du nombre d'intervenants mais plutôt du nombre d'intervenants pertinents.

Si seule une firme peut œuvrer de manière satisfaisante dans un secteur ou une branche de l'économie, autant mieux la laisser faire que de lui adjoindre d'autres firmes ne pouvant pas exploiter convenablement l'activité. Sur ce, il n'est pas toujours aisé de dire que des situations de monopole réduisent toujours le bien-être ou l'efficience, tout est fonction du type d'activité et des coûts d'installation. Si l'Etat ne dispose pas d'une telle information, il peut se proposer de mener des politiques anti-monopoles et renforcer l'inefficience alors qu'il est censé lui faire opposition. Aussi, il faudrait noter que la politique de concurrence peut comporter des effets positifs sous forme d'un regroupement ou d'une restructuration des firmes d'une branche pour rendre cette dernière plus compétitive et accroître sa contribution à la formation ou à la croissance de la production intérieure.

L'école autrichienne a sévèrement critiqué la conception selon laquelle les monopoles rapportés aux marchés de concurrence parfaite, procurent un niveau de satisfaction sociale moindre en ce que la comparaison des structures de différents marchés est une œuvre dénuée de tout sens et que la concurrence implique un changement continu des structures. Ceci est d'autant plus évident puisque certaines situations de monopole ne sont pas le fait du hasard mais plutôt le produit de l'innovation introduite par une firme ayant bien évalué et bien pénétré le marché dans lequel elle œuvre.

Il convient de remarquer que certains secteurs à coûts fixes très importants n'offrent des bénéfices que dans le très long terme, ce qui interdit à certains exploitants de s'y engager. Ainsi, si l'activité est jugée trop importante pour la collectivité, l'Etat peut se faire monopoleur dans la branche en question.

4.5.2. Appropriation et gestion publiques des firmes

Alors que souvent l'appropriation des firmes par l'Etat est considérée comme dépourvue de sens en termes d'efficience économique, il arrive des fois que l'Etat intervienne dans l'économie en tant que propriétaire d'entreprises, notamment par le moyen de la nationalisation. Cette dernière mesure s'explique souvent par :

- le besoin de disposer d'instruments de planification ou de politique économique ;
- le soutien des secteurs en déclin et la préservation ou protection de l'emploi ;
- le renforcement du rôle de l'Etat dans l'économie de manière à assurer un passage du capitalisme au socialisme.

La théorie économique du bien-être social justifie la nationalisation ou l'appropriation publique des firmes par l'existence des situations de monopole naturel. Ces dernières situations étant caractérisées par des rendements d'échelle croissants (les coûts unitaires tendent à baisser quand l'échelle de production augmente), l'allocation optimale des ressources ne saurait être réalisée en concurrence. Et puisque tout monopoleur produit moins qu'à l'optimum de Pareto et pratique des prix plus élevés que ceux du régime concurrentiel, son action peut entraîner une perte en termes de bien-être social. A cet égard, l'Etat peut recourir à la nationalisation de la firme ou peut lui imposer la pratique des prix peu rémunérateurs, c'est-à-dire des prix égaux aux coûts marginaux tout en lui payant des subventions pour couvrir les pertes résultant des prix pratiqués.

Il se pose ainsi un problème fondamental d'arbitrage entre efficience économique et équité sociale, lequel problème se situe au cœur du débat nationalisation/privatisation. Faut-il promouvoir l'efficacité ou l'équité sociale, ou encore quel compromis pour les deux ?

Tarification au coût marginal

L'objectif poursuivit par l'Etat est la maximisation du bien-être collectif ou surplus total ST, soit la somme des surplus des consommateurs et des producteurs : $ST = SC + SP$. Au sens de Pareto, la maximisation de ce surplus total ou du bien-être n'est réalisable que lorsque le prix est fixé au niveau du coût marginal ($p = Cm$), pourvu qu'il n'y ait pas d'externalités et que la concurrence règne. Ceci revient à dire que les consommateurs payent un prix qui couvre toutes les ressources utilisées dans la production d'une unité additionnelle de bien.

En situation de monopole, ce critère parétien de l'efficacité n'est pas vérifier en ce que le monopoleur pratique un prix toujours supérieur au coût marginal ($p > Cm$) et ne réalise pas la production qui aurait été offerte en situation de concurrence parfaite. Sur ce, s'il s'agit d'un monopole public, c'est-à-dire d'une firme devant œuvrer pour la réalisation du bien-être collectif, il faudrait revoir les critères de fixation du prix de vente du bien.

L'une des façons d'agir serait de demander l'entreprise publique en situation de monopole de pratiquer une tarification au coût marginal, c'est-à-dire de pratiquer ne correspondant pas à son pouvoir de *price maker*. Ainsi, l'entreprise devrait encourir une perte puisque son activité ne répond plus aux exigences de la profitabilité mais plutôt à l'impératif de la réalisation du bien-être collectif. Mais pour ne pas voir l'entreprise fermer ses portes, il faut que l'Etat lui accorde une subvention de manière à couvrir la perte résultant de cette tarification au coût marginal.

Il faut noter que l'application de la tarification au coût marginal se heurte à des difficultés pratiques aussi bien en ce qui concerne l'évaluation des coûts marginaux que la détermination du montant de la subvention et la prise en ligne de compte des fluctuations de la demande, lesquelles ne vont pas sans conséquences sur la réalisation et la profitabilité de l'activité. La nécessité de subvention entraîne un recours à l'impôt, à l'emprunt ou à la création de monnaie, ce qui ne manque pas d'engendrer des coûts en bien-être et des distorsions sur d'autres segments de l'économie.

La tarification au coût marginal donne lieu à une offre efficace mais pour les situations de monopole naturel, au niveau de prix correspondant, le monopoleur n'arrive pas à couvrir toutes les charges productives. Si le monopoleur pratique un prix égal à son coût moyen de production, il ne réalisera plus de perte mais son offre ne sera plus efficace ($y_{CM} < y_{Cm}$).

Gestion à l'équilibre

Toujours pour des raisons de maximisation du bien-être collectif, les entreprises du portefeuille de l'Etat en situation de monopole peuvent pratiquer une gestion à l'équilibre, c'est-à-dire pratiquer des qui couvrent exactement leurs charges de production. A cet effet, on doit vérifier l'égalité du prix p avec le coût moyen CM, soit :

$$p = CM.$$

Cette façon de faire paraît, à certains égards, plus intéressante que la tarification au coût marginal. Dans ce cas, l'Etat ne devra pas payer des subventions aux entreprises publiques pour couvrir des pertes et il évitera de créer des distorsions sur d'autres segments de l'économie par la levée d'un impôt, la contraction d'un emprunt ou la création de la monnaie. Bref, tout en préservant l'intérêt général, par ce critère de fixation du prix, l'Etat veille à l'équilibre de ses finances et n'affectera pas négativement l'environnement économique général.

Tout compte fait, la gestion publique se fait souvent de manière à ne pas garantir l'efficacité économique mais plutôt en fonction de l'équité sociale. Ainsi, l'analyse de l'influence de l'appropriation publique se fait en termes de comparaison de l'efficience allocative sur le marché avec l'efficience interne (de l'entreprise).

Contrôle externe des entreprises publiques

Pour surveiller la gestion des entreprises publiques par les mandataires, des organes de contrôle externe sont prévus. Il existe une multiplicité de contrôles. Tout d'abord, les entreprises publiques sont soumises au contrôle des ministres de tutelle.

Contrairement aux entreprises privées, le contrôle des comptes des entreprises publiques n'est pas effectué par les commissaires aux comptes, mais par la Cour des comptes qui est un organe au service du Parlement. Ce dernier peut lui-même procéder à un contrôle des entreprises publiques. Au sein de chaque assemblée, peuvent être constituées des commissions de contrôle qui ont pour fonction de récolter des informations et de rédiger un rapport.

5

Biens publics et externalités

Ce chapitre traite des biens publics et des effets externes. Dans la première section, nous définissons le concept de bien public, expliquons comment se détermine la quantité optimale d'un bien public et présentons le critère de la fourniture optimale d'un bien public. Dans la deuxième section, nous expliquons le concept d'externalité et parlons de la correction des effets externes négatifs et de la promotion des effets externes positifs par l'Etat.

5.1. Biens publics

Par définition, les biens privés sont à usage exclusif en ce que leur consommation diminue les quantités disponibles pour les autres. Ils sont ainsi caractérisés par une rivalité dans leur consommation. On les qualifie parfois de biens « réductibles ». Certains biens n'ont pas ces propriétés, tel le cas de l'éclairage public dans les rues. La quantité d'éclairage est fixe et la consommation de cette quantité d'éclairage par un individu n'affecte en rien la quantité disponible pour la consommation des autres. Par conséquent, l'éclairage public est un bien sans rivalité et à usage non-exclusif.

Les biens qui ne répondent pas au principe de la rivalité entre consommateurs sont des biens publics. Ceux qui ne possèdent ni la caractéristique de rivalité ni la caractéristique de l'exclusion par le prix, sont des biens publics purs : qualité de l'environnement, sécurité publique, … Il n'existe pas de concurrence entre les agents qui utilisent un bien collectif. L'air que nous respirons sur terre en constitue un bon exemple : chacun peut respirer sans empêcher quiconque de l'imiter et sans réduire la consommation d'air des autres individus.

La théorie économique distingue les biens collectifs purs des biens collectifs mixtes. Un bien collectif est pur s'il remplit simultanément trois conditions : en premier lieu, il est impossible d'en réserver l'utilisation à certains et de l'interdire à d'autres ; il y a impossibilité d'exclusion. Par exemple, la défense du territoire bénéficie à tous ses habitants, alors que l'utilisation du réseau autoroutier peut être interdite à certains du fait du droit de péage dont il faut s'acquitter pour l'emprunter. Toutefois, dans cet exemple précis, il est utile de préciser que dès lors qu'un individu peut s'acquitter de ce droit, personne ne peut s'opposer à ce qu'il utilise le réseau. En second lieu, tous les individus ont la faculté de consommer ce bien collectif : il est, par exemple, permis à chacun de déambuler à sa guise sur une voie publique. Enfin, la satisfaction procurée par la consommation d'un bien collectif pur ne dépend pas du nombre des usagers : elle est identique pour tous.

Les biens collectifs ne sont pas caractérisés, comme d'aucuns pourraient le penser, par leur gratuité. Comme tout bien, ils ont un coût. Dans un grand nombre de cas, c'est à l'État ou aux collectivités publiques qu'incombent la production et le financement de ces biens. C'est par le biais de l'impôt, que l'État finance la mise à disposition de ces biens collectifs. Le coût engendré par cette production n'est pas intégralement supporté par le consommateur, car ces biens non marchands, lorsqu'ils sont facturés, le sont à prix coûtant et n'intègrent pas les principes de la tarification privée qui inclut le profit du producteur.

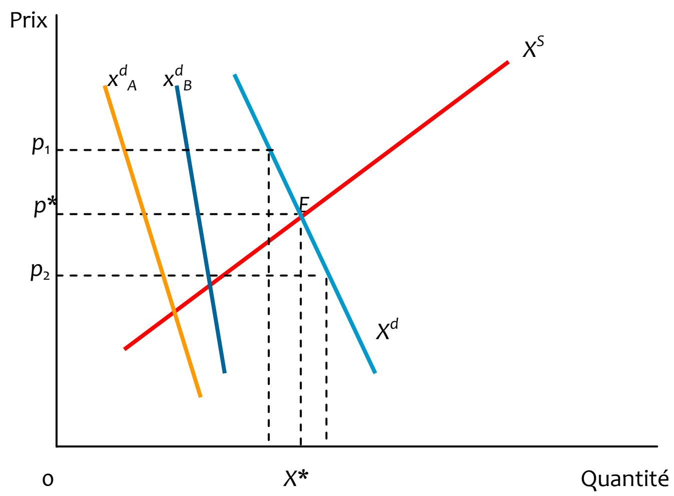
Le problème de la tarification des biens publics suscite des controverses lorsque l'utilisation d'un bien collectif engendre des effets externes en agissant sur le niveau de satisfaction des autres agents, comme c'est le cas pour les biens collectifs dits mixtes. On peut rencontrer des externalités positives tout comme des externalités négatives. Par exemple, la satisfaction d'un individu qui dispose d'une encaisse monétaire ou d'un téléphone dépend du nombre de personnes qui en possèdent et avec lesquelles il peut faire des transactions ou entrer en contact. Dans ce cas précis, on parle d'une externalité positive : la satisfaction de l'agent s'accroît avec l'augmentation du nombre d'usager de la monnaie ou d'utilisateur de la téléphonie. Par contre, si un individu utilise les transports en commun pendant les heures de pointe, chacun représente une gêne pour les autres usagers, et tous voient diminuer leur satisfaction à emprunter le transport en commun.

La tarification optimale du bien collectif devra alors permettre une internalisation, c'est-à-dire une prise en compte des coûts et des avantages sociaux, de manière à orienter les individus vers une utilisation socialement utile des biens collectifs. La difficulté, ici, est renforcée par l'existence des distorsions qui existent entre le niveau de satisfaction individuel de l'agent utilisateur et le niveau de satisfaction collectif de la communauté qui profite de ces biens. C'est donc le poids relatif de ces externalités liées à la consommation qui commande en partie la fixation du prix des biens collectifs.

5.1.1. Détermination de la quantité optimale des biens publics

Soit une économie faite de deux individus qui consomment un bien privé x. La demande de l'individu A est x^d_A et celle de B est x^d_B. Puisqu'ils achètent normalement des quantités différentes du bien mais au même prix, la demande totale de ce bien X^d est donnée par la somme des demandes individuelles, soit : $X^d = x^d_A + x^d_B$. La courbe de demande totale est obtenue en additionnant horizontalement les courbes de demandes individuelles.

Détermination de la quantité optimale d'un bien privé

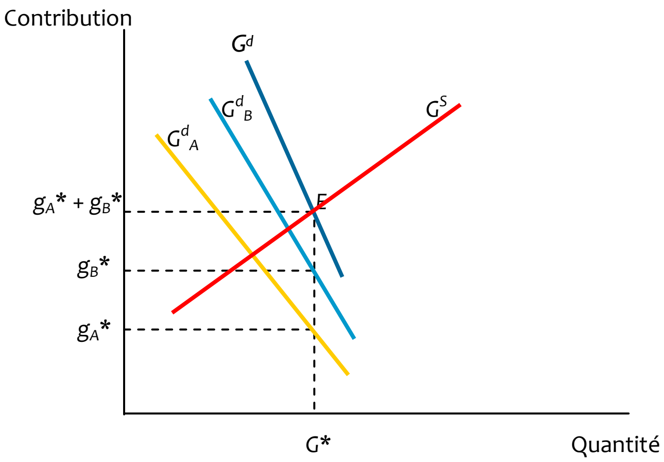


Le prix d'équilibre du marché est p^*, car il permet d'égaliser l'offre à la demande. Ce prix est un indicateur du bénéfice marginal que chaque consommateur retire de la consommation d'une unité du bien x. Etant donné que la courbe d'offre X^S est dérivée de la courbe de coût marginal, le bénéfice marginal obtenu par chaque individu p^* est égal au coût marginal de production Cm, soit $p^* = Cm$.

Considérons maintenant un bien public G. Etant donné que la quantité totale du bien G est utilisée par chaque consommateur de manière non-exclusive et que le prix payé par la société pour disposer de G est égale à la somme des prix payés par chaque individu, la courbe de demande totale est obtenue en additionnant verticalement les courbes de demande individuelles.

Du point de vue de la société ou de la collectivité, la quantité optimale est celle qui correspond à l'égalité du bénéfice marginal social et du coût marginale social. Le bénéfice marginal social est la somme des bénéfices marginaux de tous les individus qui partagent l'utilisation du bien public G.

Détermination de la quantité optimale d'un bien public



Le coût marginal est égal à la contribution d'un individu au financement de G. Pour la collectivité, le coût marginal appelé coût marginal social est donné par la somme des contributions individuelles, soit $g_A^* + g_B^*$.

5.1.2. Fourniture efficace des biens publics

Considérons une économie dans laquelle circulent deux biens : x un bien privé et G un bien public. Nous supposons que le prix du bien x est égal à un et que la société est faite de deux individus. Ces derniers disposent chacun d'un revenu R_i et doivent déterminer leur contribution marginale g_i à l'acquisition du bien public. Si l'individu contribue à hauteur de g_i, sa consommation du bien privé sera $x_i = R_i - g_i$. La fonction d'utilité individuelle est notée $U_i(G, x_i)$ avec $U'(.) > 0$.

Le coût de production du bien public est $C(G)$. Par conséquent, la société pourra acquérir le bien public si la somme des contributions marginales permet de couvrir C.

$$G = \begin{cases} \text{offert} & \text{si } g_A + g_B \geq C. \\ \text{non-offert} & \text{si } g_A + g_B < C. \end{cases}$$

Au sens de Pareto, la fourniture d'un bien public sera efficace si la somme des contributions individuelles est telle que $g_A + g_B \geq C$ et que :

$$U_A(G, R_A - g_A) > U_A(0, R_A)$$
$$U_B(G, R_B - g_B) > U_B(0, R_B).$$

Dans le cas contraire, il serait malvenu que les individus financent la fourniture du bien public.

Le problème classique qui se pose pour la fourniture du bien public est celui du passager clandestin (free rider). Du fait qu'ils ne peuvent être exclus de la consommation des biens publics, certains consommateurs peuvent être tentés d'en éviter le coût en se comportant en passagers clandestins. A cet effet, l'offre des biens publics risque d'être insuffisante. Dans un équilibre de marché, un agent rationnel n'aura pas intérêt à participer à la production autant qu'il le pourrait : en effet, l'avantage qu'il perçoit du bien public est largement indépendant de sa contribution, tandis que le coût qu'il supporte est directement lié à sa contribution.

Il convient également de signaler que la non-révélation des préférences complique l'estimation de la demande des biens publics. Pour maximiser le bien-être social, il importe de déterminer l'institution la plus qualifiée pour estimer la demande et comparer les coûts et bénéfices de la fourniture des biens publics.

5.1.3. Fourniture des biens publics par le vote

L'existence des biens publics est souvent considérée comme un argument décisif en faveur de l'intervention de l'Etat. Mais, quand bien même l'on établit l'incapacité des forces du marché à générer une quantité efficiente de biens publics, on ne peut pas se contenter de dire que l'Etat fait mieux que les privés. C'est cette prétention qui peut être contestée d'autant plus que le problème de la production des biens publics ne soit pas un problème technique, mais plutôt un problème qui concerne les préférences des agents.

Souvent, on recourt au vote pour déterminer la quantité de bien public à offrir. Il faut cependant noter que ce mode d'allocation pose quelques problèmes. Les choses commencent bien mal pour un Etat démocratique, dans la mesure où la base sur laquelle reposent les décisions de l'Etat est le vote, ce dernier étant lui même un *bien public pur*. Ceci ne doit pas être compris dans le sens qui plairait aux apôtres de la volonté générale, mais dans le sens technique.

Le problème du vote à la majorité est qu'il mesure seulement les préférences ordinales pour le bien public alors que les conditions d'efficacité requièrent une comparaison des dispositions à payer. Supposons qu'il y ait trois individus devant décide de la fourniture d'un bien public par vote. Si deux des trois individus votent pour la fourniture, l'option sera d'acquérir ledit bien. Mais si la somme des contributions marginales est inférieure au coût de fourniture, le vote perd son sens.

Pour contourner cette faiblesse, un autre type de vote est proposé, celui qui implique que les individus déclarent leurs dispositions à payer pour le bien public, la règle étant que le bien public sera fourni si la somme des dispositions à payer déclarées est supérieure ou égale à $C(G)$. Mais ce type de vote n'est pas lui-même à l'abri des déboires. Si l'un des votants estime que l'offre du bien public l'arrangera plus que les autres, il peut déclarer un montant arbitrairement élevé pour influencer la décision d'offrir le bien. Ceci peut être évité si on impose aux individus de payer exactement ce qu'ils ont déclaré être prêts à payer.

Enfin, signalons que le vote peut conduire à un paradoxe. Supposons qu'il y ait trois individus : **A**, **B** et **C**, et trois niveaux de fourniture du bien public : 1, 2 et 3. **A** préfère 1 à 2 et 2 à 3, **B** préfère 2 à 3 et 3 à 1, **C** préfère 3 à 1 et 1 à 2. Dans ce cas, il y a une majorité pour préférer 1 à 2, une majorité pour préférer 2 à 3 et une autre pour préférer 3 à 1. On se trouve ainsi dans une impasse. Seules les autorités publiques sont capables de trancher.

5.2. Les externalités

Outre la fourniture des biens publics, l'Etat intervient parfois pour corriger des distorsions engendrées par les externalités négatives et soutenir certaines activités produisant des externalités positives. Il y a externalité lorsque les actions d'un individu ont une influence directe sur l'environnement d'un autre individu. Il y a également externalité lorsqu'un échange économique affecte un tiers et que cet effet n'agit pas par l'intermédiaire du système de prix. On distingue notamment externalité négative, situation dans laquelle le tiers est lésé, et externalité positive, situation dans laquelle le tiers se retrouve mieux loti. Dans le secteur de la consommation, il y a une externalité lorsque l'utilité d'un consommateur est directement influencée par les actions d'un autre consommateur, et dans le secteur de la production, il y a externalité lorsque l'échelle d'activité d'une firme est directement influencée par les actions d'un autre agent.

La présence d'externalités a pour conséquence générale de rendre inefficaces les équilibres de marchés comme nous l'avons déjà dit. Cet état de choses pousse à étudier des modes alternatifs d'allocation des ressources. Pour rendre efficace une allocation en présence d'externalités, il faut envisager une correction des prix auxquels sont confrontés les individus.

5.2.1. Exemple d'une externalité négative de production

Supposons qu'on ait deux entreprises : *A* et *B*. L'entreprise *A* produit un bien chimique *x* qu'elle vend sur un marché concurrentiel. Cette production de *x* impose un coût $e(x)$ à l'entreprise *B* qui est une pêcherie en ce que l'entreprise *A* déverse dans la rivière des produits toxiques qui tuent les poissons. La pollution cause un préjudice à l'entreprise *B*. Soit *p* le prix du bien *x*. Les profits des deux entreprises sont :

$$\pi_A = px - C(x)$$
$$\pi_B = -e(x)$$

Pour simplifier l'exposé, on ignore le profit réalisé par l'entreprise *B*.

La quantité d'équilibre x_e est donnée par $p = C'(x_e)$. Cette production est trop importante du point de vue social. L'entreprise *A* ne tient compte que des coûts qu'elle s'impose à elle-même (coûts privés : $C(x)$) et ignore les coûts qu'elle impose à l'entreprise *B*. Autrement dit, elle ignore le coût social de son activité : coût privé plus coût imposé à l'autre entreprise.

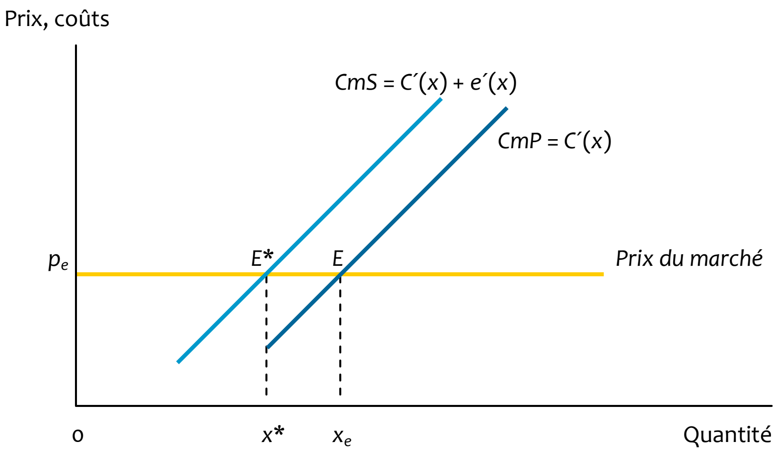
Pour déterminer la production efficace du point de vue de la société, il faut internaliser l'effet externe. A cet égard, on va supposer que les deux entreprises ont fusionné. Dans ces conditions, le profit devient :

$$\pi = \pi_A + \pi_B = px - C(x) - e(x)$$

et la condition de maximisation du premier ordre de ce problème est :

$$p = C'(x^*) + e'(x^*).$$

La quantité $x^* < x_e$ est une quantité efficace ; elle est caractérise par le fait que le prix est égal au coût marginal social. Pour faire bref, en présence d'une externalité, l'allocation est Pareto-optimale lorsque le prix est égal au coût marginal social et non lorsqu'il est égal au coût marginal privé.



La courbe de coût marginal social *CmS* représente le supplément de coût imposé à la société par la production du bien chimique *x*. Elle se localise au-dessus de la courbe de coût marginal privé *CmP* parce que l'entreprise *A* ignore le coût marginal externe $CmE = e'(x)$.

5.2.2. Correction des externalités négatives

Pour faire face aux effets externes négatifs, l'Etat peut édicter une réglementation appropriée ; par exemple les usines doivent élever la hauteur de leurs cheminées, les avions ne doivent pas survoler les zones habitées, … Mais il n'est pas facile de définir des normes exactes et de mesurer les coûts et avantages de la réglementation. C'est pour cela que plusieurs économistes suggèrent le recours à la taxation pour rapprocher les coûts privés des coûts sociaux.

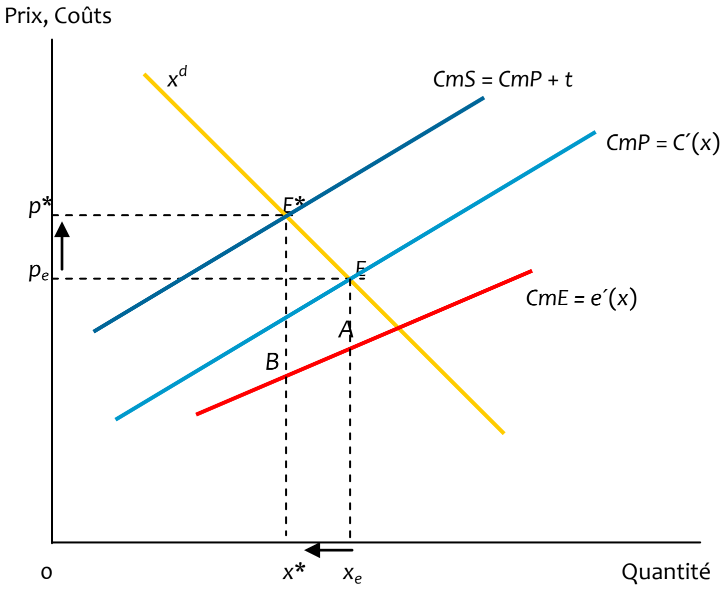
-. Taxe à la Pigou

Etant donné que le choix de l'entreprise *A* repose sur un prix incorrect, une taxe correctrice peut lui être imposée de manière à parvenir à une allocation efficace. On appelle taxes à la Pigou des taxes correctrices de ce genre.

Admettons que l'entreprise *A* soit soumise à une taxe *t* sur sa production. La condition de premier ordre de la maximisation du profit devient :

$$p = C'(x^*) + t.$$

En fixant la taxe à un montant égal à $e'(x)$, l'Etat conduira l'entreprise A à choisir $x = x^*$. Le problème devient dès lors de la connaissance de la fonction du coût de l'externalité $e(x)$.



Le prix d'équilibre p_e est déterminé par les forces du marché sans tenir compte du fait que la production du bien *x* impose à la collectivité un coût marginal externe *CmE* sous forme de pollution. Au point *E*, le coût marginal externe est donné par la distance x_eA.

En imposant la taxe *t* à l'entreprise *A*, l'Etat l'incite à ramener sa production au niveau optimal x^* pour lequel le prix est égal au coût marginal social. Avec cette intervention, le niveau de la pollution a été réduit : on est passé de x_eA à x^*B.

5.2.3. Exemple d’une externalité positive

Autant qu’il est possible que le comportement d’un individu rejaillisse négativement sur le niveau de vie ou l’activité d’un autre individu, il est possible d’avoir un effet externe positif. Par le fait qu’une personne soit scolarisée, elle peut directement exercer une influence positive sur son environnement ou sur les personnes qui y vivent.

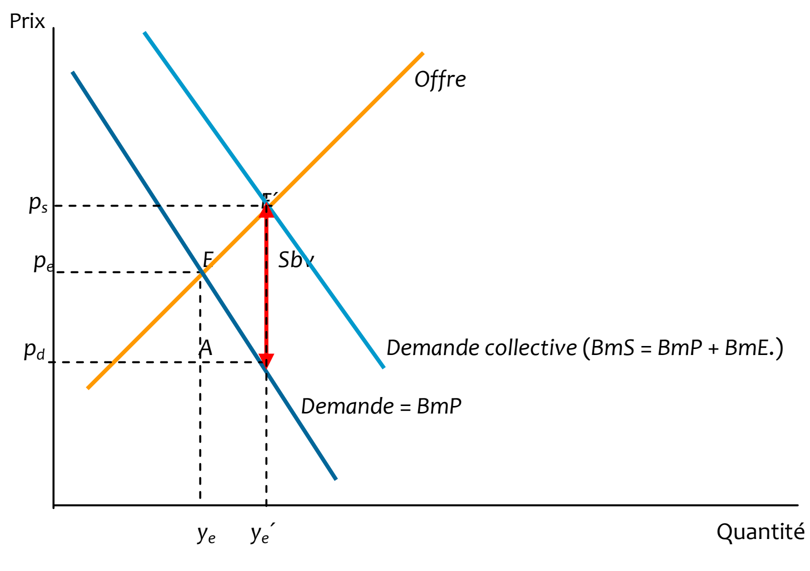
Comme les effets externes positifs ne produisent pas de désagrément mais plutôt des changements bénéfiques du point de vue de la collectivité, ils ne seront pas à corriger mais par contre à promouvoir. L’Etat par des subventions, peut soutenir certains comportements individuels contribuant à la réalisation du bien-être collectif. Par une réglementation, l’Etat peut également favoriser de tels comportements.

5.2.4. Bénéfices marginaux privé, externe et social

Par bénéfice marginal privé, on entend l’avantage ou le gain que retire un individu de l’acte qu’il pose ou qu’il a posé. Par contre, le bénéfice marginal externe c’est le gain qu’une tierce personne retire de l’acte posé par un autre agent économique. Le bénéfice marginal social est le bénéfice que la collectivité tire de l’acte posé par un individu de manière isolée pour répondre à ses intérêts personnels. Ainsi, le bénéfice marginal social est égal à la somme du bénéfice marginal privé et du bénéfice marginal externe, soit :

$$BmS = BmP + BmE.$$

Dans ces conditions, l’équilibre qui sera réalisé sur le marché de par l’action des privés exclusivement ne sera pas celui recherché par l’Etat pour toute la collectivité.



L’équilibre initial est réalisé au point *E* qui correspond au prix p_e et à la quantité y_e. Etant donné que la consommation du bien produit un effet externe positif, l’Etat souhaitera voir la demande du bien s’accroître dans la collectivité. Or, tout accroissement de la demande – à offre inchangée – entraîne une hausse du prix, soit le passage de p_e à $p_e´$.

Par un effet d’éviction par le prix, certaines personnes seront exclues de la consommation du bien. En effet, du fait que le prix a eu à accroître, certains demandeurs ne seront plus capables d’acheter le bien, d’où la nécessité de voir l’Etat accorder des subventions. La figure ci-dessus montre que la quantité d’équilibre collectif est $y_e´$, le prix effectivement payé par les individus est p_d [< p_e] et le montant de la subvention est donné par la distance *E´A*.

Références bibliographiques

1. Chiang, A., 1974, Fundamental Methods of Mathematical Economics, 2ième éd. Mc Graw Hill, New York.
2. Quandt, R.E. et Henderson, J., 1982, Microéconomie : Formulation mathématique élémentaire, éd. Dunod, Paris.
3. Jacquemin, A. et H. Tulkens, 1990, Fondements de l'Economie Politique, éd. De Boeck, Bruxelles.
4. Lecaillon, J., 1993, Analyse microéconomique, éd. Cujas, Paris.
5. Madnani, G.M.K., 1991, Mathematical Economics. Microeconomic theory, $2^{ième}$ éd. Oxford & IBH Publishing, New Delhi.
6. Malinvaud, E., 1969, Leçons de théorie microéconomique, éd. Dunod, Paris.
7. Redslob, A., 1995, L'économie en pratique, $3^{ième}$ édition Litec, Paris.
8. Simon, C. et L. Blume, 1998, Mathématiques pour économistes, éd. De Boeck, Bruxelles.
9. Varian, H.R., 1997, Introduction à la microéconomie, éd. De Boeck, Bruxelles.
10. Varian, H.R., 1995, Analyse microéconomique, éd. De Boeck, Bruxelles.

Annexe
Optimisation et conditions d'optimalité

Le problème d'allocation des ressources de l'homme à ses fins multiples et/ou concurrentes peut être appréhendé comme un problème d'optimisation mathématique. Nous parlerons dans cette annexe, des problèmes d'optimisation et de leurs résolutions. Nous présenterons les contions classiques d'optimisation et les conditions de Khun-Tucker.

Optimisation libre et optimisation sous contrainte

Un problème d'optimisation consiste à définir, dans un ensemble de faisabilité, la valeur d'une variable ou d'un ensemble de variables permettant d'atteindre un objectif précis. Pour ainsi dire, un extremum est un point idéal en ce qu'il répond au mieux à une norme ou exigence.

Optimisation libre

Un problème d'optimisation libre consiste à optimiser une fonction-objectif sans que celle-ci ne soit soumise à une contrainte ou à un ensemble de contraintes.

Optimiser

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Optimisation sous contrainte

Un problème d'optimisation sous contrainte consiste à optimiser une fonction-objectif en tenant compte d'une contrainte ou d'un ensemble de contraintes spécifiant la rareté des ressources de l'agent économique.

Optimiser

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\text{telle que } g(x_1, x_2, \dots, x_n) = C.$$

Ce problème peut s'interpréter comme un problème de recherche d'un compromis entre l'objectif poursuivi et les possibilités de réalisation de l'agent ou opérateur économique.

Conditions classiques d'optimisation

Avant de présenter les conditions classiques d'optimisation, nous rappellerons le concept de dérivée d'une fonction en un point donné de son domaine de définition et le concept de développements en séries de Taylor.

Soit $y = f(x)$, une fonction définie dans un domaine précis. La variation de y qui résulte d'une variation de x à concurrence de t est de : $f(x + t) - f(x)$. On définit la dérivée de cette fonction au point x^* par :

$$\frac{df(x^*)}{dx} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x^* + t) - f(x^*)}{t},$$

si cette limite existe. On dit alors que la fonction est différentiable en x^*.

Considérons une fonction linéaire $F(t)$ définie par :

$$F(t) = f(x^*) + tf'(x^*).$$

Cette fonction est une bonne approximation de f au voisinage du point x^* puisque :

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(x^*+t)-F(t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x^*+t)-f(x^*)-tf'(x^*)}{t}=0.$$

En conséquence, on peut écrire :

$$f(x^*+t)\approx f(x^*)+tf'(x^*)$$
$$f(x^*+t)\approx f(x^*)+tf'(x^*)+0{,}5t^2f''(x^*)$$

Ces expressions sont appelées les développements des séries de Taylor, respectivement d'ordre 1 et d'ordre 2.

Théorème de Rolle et conditions du premier ordre

Soit une fonction $y = f(x)$ définie et continue sur $[a, b]$ et dérivable dans$]a, b[$. Si $f(a) = f(b) = 0$, alors, il existe au moins une valeur c de$]a, b[$qui vérifie $f'(c) = 0$.

Démonstration.

Si la fonction est constante, on vérifiera pour tout point de $[a, b]$ que $f'(x) = 0$. Ce qui correspond à la proposition avancée. Si la fonction n'est pas constante, elle prend des valeurs positives ou négatives. Pour simplifier, supposons qu'elle prend des valeurs positives. Si c correspond au maximum, on doit vérifier que $\forall\ x \in [a, b]$, $f(c) \geq f(x)$. La dérivée de la fonction au point c est donnée par :

$$f'(c)=\lim_{t\to 0}\frac{f(c+t)-f(c)}{t}.$$

Etant donné que la dérivée d'une fonction en un point existe que si et seulement si sa limite approchée par la gauche est égale à sa limite approchée par la droite, on aura :

$$f'(c)=\lim_{t\to 0}\frac{f(c+t)-f(c)}{t}=0.$$

Développement des séries de Taylor et conditions du second ordre

Soit la fonction $y = f(x)$. Son approximation d'ordre 2 autour du point x^* est donnée par la relation :

$$f(x^*+t)\approx f(x^*)+tf'(x^*)+0{,}5t^2f''(x^*).$$

Condition du second ordre pour un maximum

Si x^* est un maximum, il vient que $f(x^* + t) - f(x^*) \leq 0$ et on établit l'égalité suivante

$$f(x^*+t)-f(x^*)=0{,}5t^2f''(x^*),$$

car $f'(x^*) = 0$. Par conséquent, on aura comme condition du second ordre pour un maximum :

$$f''(x^*)\leq 0.$$

Condition du second ordre pour un minimum

Si x^* est un minimum, il vient que $f(x^* + t) - f(x^*) \geq 0$ et on établit, par un raisonnement analogue à celui utiliser pour la condition du second ordre d'un maximum, que la condition du second ordre pour un minimum est :

$$f''(x^*) \geq 0.$$

Tout compte fait, les conditions classiques d'optimisation sont :

$$\text{Pour un maximum : } f'(x^*) = 0 \text{ et } f''(x^*) \leq 0$$
$$\text{Pour un minimum : } f'(x^*) = 0 \text{ et } f''(x^*) \geq 0.$$

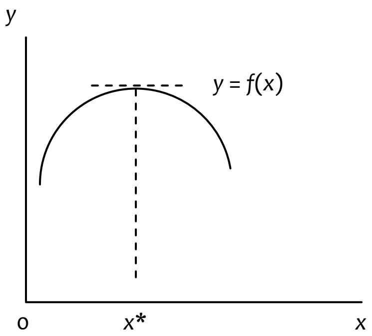
Par conséquent, en formalisant un problème économique, on doit veiller à ce que la solution à un problème de maximisation ou de minimisation devra respecter ces conditions.

Conditions de Khun-Tucker

Les conditions classiques donnent lieu à des solutions intérieures, c'est-à-dire des valeurs optimales toujours différentes de zéro, et pourtant, il est possible d'avoir des solutions frontières, soit des situations dans lesquelles l'agent économique réalise son équilibre pour des valeurs nulles des variables de décisions. Pour tenir compte de telles situations Khun et Tucker ont proposé des conditions plus pertinentes que les conditions classiques.

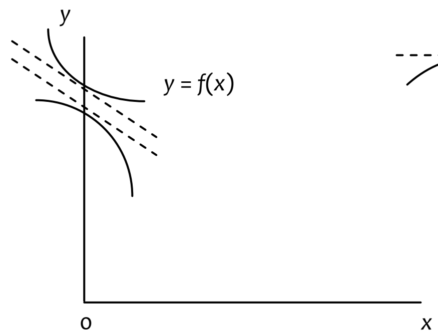
Considérons les trois graphiques ci-après pour présenter les conditions de Khun-Tucker.

Figure a



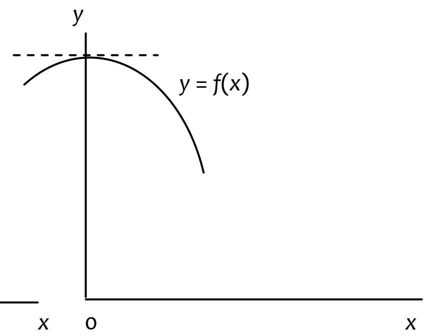
$f'(x^*) = 0$
$x^* > 0$

Figure b



$f'(x^*) < 0$
$x^* = 0$

Figure c



$f'(x^*) = 0$
$x^* = 0$

Il ressort de ces trois graphiques qu'un maximum peut être une solution intérieure ou une solution frontière. Par ailleurs, la condition du premier ordre peut correspondre à une dérivée négative (cfr *figure b*). En synthétisant ces trois situations, on arrive aux conditions de Khun-Tucker, soit :

$$f'(x^*) \leq 0,\ x^* \geq 0, \text{ et } x^* f'(x^*) = 0.$$

Interprétation des conditions de Khun-Tucker

Considérons le problème d'une firme qui produit son output à l'aide de n inputs. Sa fonction de production s'écrit :

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

La fonction-objectif de la firme s'écrit :

$$\text{Max } \pi = p\, f(x_1, x_2, \dots, x_n) - \sum w_i x_i.$$

p représente le prix de l'output et w_i les prix des inputs utiliser par la firme. Les conditions de Khun-Tucker pour ce problème de maximisation sont :

$$pf_i\,'(.) - w_i \leq 0,\ x^* \geq 0, \text{ et } x_i^* f\,'(.) = 0.$$

Si la productivité marginale en valeur du ième facteur $pf_i\,'(.)$ est inférieure au prix du facteur w_i, la valeur optimale du facteur sera $x_i^* = 0$. Par contre, x_i^* sera supérieur à zéro si la productivité marginale en valeur du facteur est égale au prix du facteur.

Méthode de substitution

La méthode de substitution consiste à résoudre la contrainte en fonction d'une des variables de décisions, soit en prenant x_2 comme une fonction de x_1 : $x_2 = h(x_1)$. Cette nouvelle expression est renvoyée dans la fonction-objectif de manière à ramener le problème d'optimisation sous contrainte à un problème d'optimisation libre. On aura ainsi :

$$\text{Max } y = f[x_1, h(x_1)]$$

On se rapportera à la condition du premier ordre de manière à déterminer x_1^*, et en rentrant dans la fonction $h(.)$, on définira x_2^*.

Méthode du multiplicateur de Lagrange

La méthode de Lagrange consiste à ramener un problème d'optimisation sous contrainte à un problème d'optimisation libre en passant par une fonction auxiliaire appelée fonction de Lagrange ou Lagrangien. Le Lagrangien du problème présenté ci-dessus est :

$$L = f(x_1, x_2) \pm \lambda[c - g(x_1, x_2)]$$

avec λ qu'on appelle multiplicateur de Lagrange. Il donne la mesure de la sensibilité du comportement optimisant par rapport à un desserrement d'un élément de la contrainte du problème.

En dérivant la fonction de Lagrange par rapport aux variables de décisions et par rapport à λ, on obtient un système d'équations donnant les valeurs optimales x_i^* des variables de décision.

Méthode d'égalisation des pentes

Une autre approche de résolution d'un problème d'optimisation sous contrainte consiste à égaliser les pentes de la fonction à optimiser et de la contrainte. Prenons la différentielle totale de $f(.)$ ainsi que celle de $g(.)$.

$$dy = f_1 dx_1 + f_2 dx_2 = 0$$
$$dg = g_1 dx_1 + g_2 dx_2 = 0$$

Les pentes des courbes représentatives de $f(.)$ et $g(.)$ sont respectivement :

$$-d\,x_2/dx_1 = f_1/f_2 \quad \text{et} \quad -d\,x_2/dx_1 = g_1/g_2.$$

C'est en égalisant ces deux pentes – tout en se servant de la contrainte – que l'on pourra déterminer la solution optimale du problème.