# Sommaire du chapitre

# Introduction

La relation de préférence donne le classements, par l'individu, des différents paniers, du point de vue de la satisfaction qu'ils lui procurent. Il serait assez commode si on pouvait attribuer un indice de satisfaction à chaque panier, de manière à représenter parfaitement le classement établi par le consommateur. **La fonction d'utilité** vise justement à apporter cette commodité dans la représentation des préférences des consommateurs.

Cette fonction doit donc attribuer une valeur plus élevée à un panier qui est plus désirable qu'un autre :

$$\begin{aligned} U : \ (x_1, x_2) &\longmapsto U(x_1, x_2) \\ \forall X, Y \quad X \geq Y &\iff U(X) \geq U(Y) \\ \forall X, Y \quad X \sim Y &\iff U(X) \sim U(Y) \end{aligned}$$

Dans cette approche ce qui compte c'est la valeur relative d'un panier par rapport à un autre et non la valeur absolue de chaque panier ($U(.)$). On demande uniquement à la fonction d'utilité de représenter **l'ordre** des différents paniers et non la satisfaction tirée de chaque panier individuel : on a une fonction d'utilité **ordinale**.

**Exemple:** Si l'on a $A > B > C$, les trois fonctions d'utilité $U$, $V$, $W$ représentent ces mêmes préférences :

| | $U$ | $V$ | $W$ |
|---|---|---|---|
| $A$ | 3 | 17 | -1 |
| $B$ | 2 | 10 | -2 |
| $C$ | 1 | 0.1 | -3 |

La fonction d'utilité n'est donc pas unique. En fait, si $U$ est une fonction d'utilité ***ordinale*** qui représente les préférences d'un individu, toute transformation monotone croissante de $U$ représentera toute aussi bien ces préférences :

$$\sqrt{U}, \quad aU + b\ (a \geq 0), \quad e^U, \quad ln\,(U), \ldots$$

# Utilité cardinale

Historiquement, le concept d'utilité initialement développé par les marginaliste était basé sur la possibilité d'obtenir une mesure exacte et en niveau absolu de la satisfaction de l'individu. Dans la théorie de l'utilité **cardinale** on considère que la valeur de la fonction d'utilité pour une panier mesure la satisfaction que tire le consommateur de ce panier. Dans ce cas si l'on a:

$$U(X) = 2U(Y), \qquad (\text{avec } U(Y) > 0)$$

alors cela voudrait dire que le consommateur *aime deux fois* plus $X$ que $Y$. Tandis qu'avec une utilité ordinale tout ce que cela implique est :

$$X > Y$$

Naturellement il est illusoire de vouloir trouver une mesure exacte de la satisfaction des individus. De plus cela n'est pas nécessaire pour étudier les choix des consommateurs.
Nous utiliserons par la suite uniquement des fonctions d'utilité ordinales.

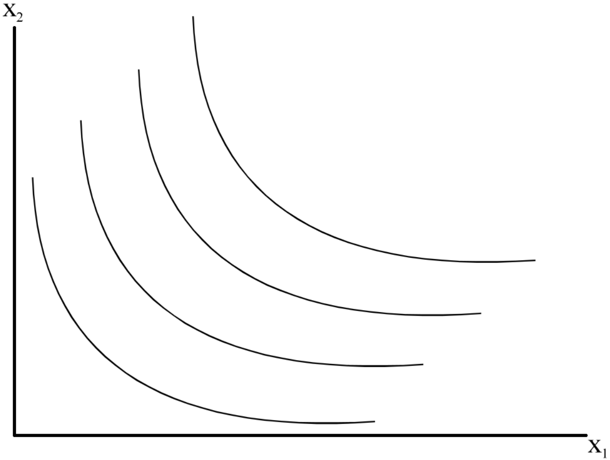
# Construire une fonction d'utilité

Peut-on toujours trouver une fonction pour représenterles préférences? Oui si elles sont normales : si elles représentent un minimum de cohérence.

Si elles ne sont pas transitives ($A > B$, $B > C$ et $C > A$), on ne peut trouver une fonction pour les représenter car:

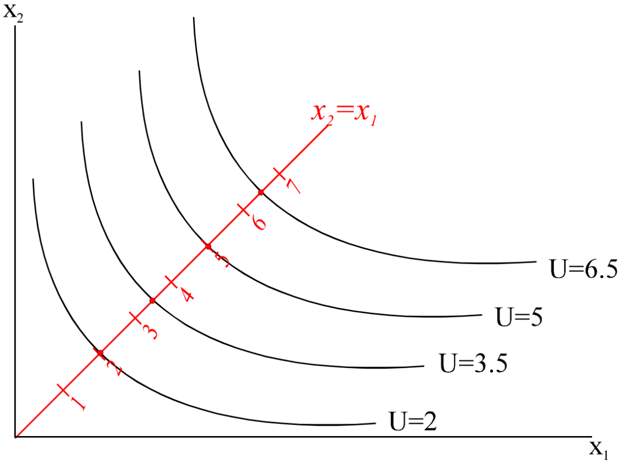
$$U(A) > U(B), \, U(B) > U(C) \Longrightarrow U(A) > U(C)$$

$$\text{et non } U(C) > U(A)$$




Une carte d'indifférence

On peut simplement lui faire correspondre une fonction d'utilité qui associe des valeurs plus élevées à des courbes plus éloignées de l'origine. Elle pourrit associer, par exemple, à chaque panier sa distance par rapport à l'origine




Des préférences à l'utilité

# Exemples de fonction d'utilité

A partir d'une fonction d'utilité $U(x_1, x_2)$, il est aisé de construire les courbes d'indifférences : ces dernières correspondentà tous les paniers qui donnentle même niveau de satisfaction et donc la même valeur d'utilité :

$$I_X = \{Y \mid U(Y) = U(X)\} \text{ ou } I_{U_0} = \{Y \mid U(Y) = U_0\}$$

avec $U(X) = U_0$

Comme les courbes définies par des équations de type :

$$f(x, y) = z_0 = Cste$$

correspondent aux **courbes de niveau** de la fonction $f$, les courbes d'indifférences sont les courbes de niveau de la fonction d'utilité. En faisant varier $U_0$ on obtient les courbes d'indifférences correspondant aux différents niveaux de satisfaction.

# Substituts parfaits

Dans ce cas les deux biens ont la même valeur pour le consommateur.Ce qui compte pour lui, c'est la quantité totale de bien contenu dans chaque panier. Par conséquent la fonction d'utilité

$$U(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

représente bien ces préférences :

- elle a une valeur constante le long des courbes d'indifférence (formée des paniers qui contiennent la même quantité totale de biens);
- elle donne une valeur plus élevée quand la quantité totale augmente (et donc quand la satisfaction de l'individu augmente).

Les courbes d'indifférences correspondent à

$$I_{U_0} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = U_0\}$$

Naturellement les fonctions suivantes représentent tout aussi bien ces préférences :

$$V = \sqrt{U} = \sqrt{x_1 + x_2}$$
$$W = U^2 = (x_1 + x_2)^2$$

De manière générale, si le consommateur considère que le bien 1 a une valeur de $a$ et le bien 2 une valeur de $b$, du point de vue de leur contribution a sa satisfaction, ses préférences peuvent être représentées par la fonction d'utilité suivante : $U(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$

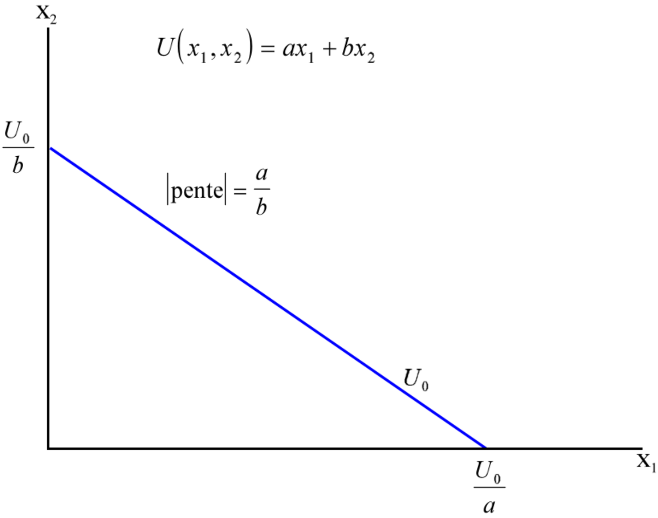
Les courbes d'indifférences sont données par

$$\begin{aligned} I_{U_0} &= \{(x_1, x_2) \mid ax_1 + bx_2 = U_0\} \\ &= \left\{(x_1, x_2) \mid x_2 = \frac{U_0}{b} - \frac{a}{b}x_1\right\} \end{aligned}$$

avec une pente de $-\dfrac{a}{b}$ et les ordonnées à l'origine

$$\begin{aligned} x_1 = 0 &\Longrightarrow x_2 = \frac{U_0}{b} \\ x_2 = 0 &\Longrightarrow x_1 = \frac{U_0}{a} \end{aligned}$$

Ces deux paniers sont équivalents pour lui.




Substituts parfaits

# Compléments parfaits

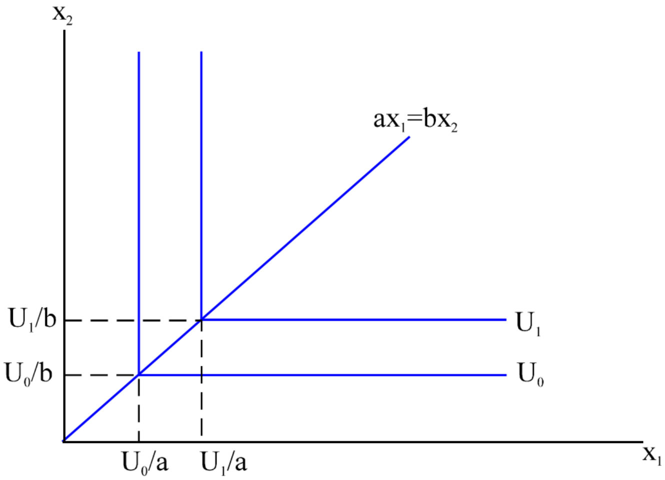
Le consommateur doit combiner deux biens dans des proportions fixes pour pouvoir en tirer une satisfaction.

**Exemple :** abat-jour ($x_1$) et ampoules ($x_2$). Pour tirer satisfaction de l'achat d'un abat– jour, le consommateur doit aussi acheter au moins une ampoule avec. Le nombre de luminaires qui marchent effectivement est donné par :

$$min\left\{x_1, x_2\right\} = U\left(x_1, x_2\right)$$

De manière générale, si les deux biens doivent être combiné dans des proportions fixes :

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{a}{b} \Longrightarrow U\left(x_1, x_2\right) = min\left\{ax_1, bx_2\right\}$$



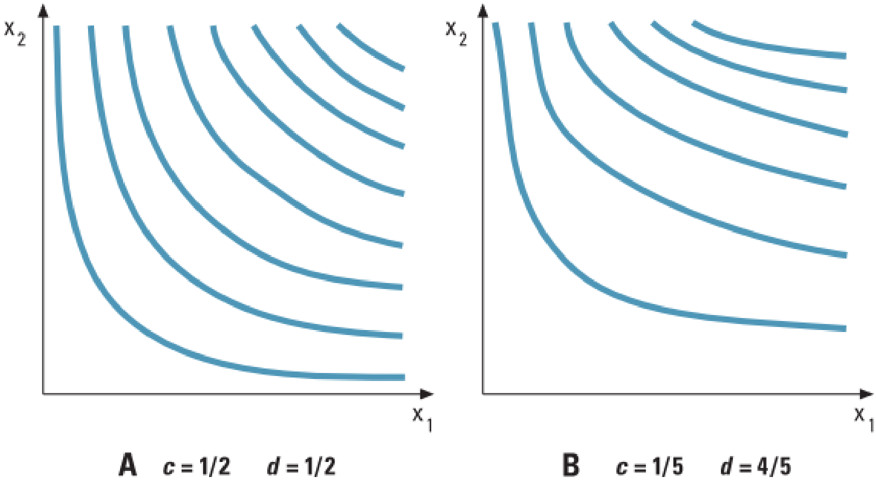

Biens complémentaires

# Les préférences Cobb-Douglas

Une autre fonction d'utilite couramment employée est la fonction d'utilite **Cobb-Douglas**:

$$u\left(x_1, x_2\right) = x_1^c x_2^d$$

ou $c$ et $d$ sont des nombres positifs qui décrivent les preferences du consommateur.




Les courbes d'indifférence Cobb-Douglas

Evidemment, une transformation monotone de la fonction d'utilite Cobb-Douglas représente exactement les memes préférences. II est intéressant d'en considérer deux exemples.

**1er exemple**, si nous prenons le **logarithme naturel** (ou neperien) de l'utilité, le produit se transforme en somme. Nous obtenons alors

$$v(x_1, x_2) = \ln(x_1, x_2) = c \ln x_1 + d \ln x_2$$

Les courbes d'indifférence pour cette fonction d'utilité sont totalement identiques a celles correspondant a la fonction Cobb-Douglas initiale.

**2ème exemple**, nous portons cette fonction a la puissance $1/(c+d)$,

nous obtenons

$$x_1^{\frac{c}{c+d}} x_2^{\frac{d}{c+d}}$$

En définissant $a = \dfrac{c}{c+d}$

Nous pouvons écrire la fonction d'utilité comme suit:

$$v(x_1, x_2) = x_1^a x_2^{1-a}$$

# Utilité marginale

**L'utilité** est la satisfaction qu'un individu retire de la consommation de biens et de services.

**L'utilité marginale** mesure la variation d'utilité qui résulte d'une modification d'une unité de la quantité consommée d'un bien

$$x_1 \to (x_1 + \Delta x_1) \Longrightarrow U(x_1, x_2) \to U(x_1 + \Delta x_1, x_2)$$

$$\frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{U(x_1 + \Delta x_1, x_2) - U(x_1, x_2)}{\Delta x_1} = Um_1$$

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x_1} = \frac{\partial U}{\partial x_1} = Um_1$$

Si $x_1$ varie de $dx_1$, la variation de l'utilité peut être approximée par :

$$dU = Um_1 dx_1$$

**Exemple:** Le tableau suivant donne les niveaux d'utilité que retire Ahmed des différents nombres de films qu'il peut regarder par mois, ces utilités sont fonctions de ses préférences et sont calculées à partir de sa fonction d'utilité. On constate que le premier film procure à Ahmed, 50 unités de satisfaction de plus, le deuxième, $88 - 50 = 33$ unités de satisfaction de plus, etc.

| **Films** | | |
|---|---|---|
| **Quantité** | **Utilité** | **Utilité marginale** |
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 50 | 50 |
| 2 | 88 | 38 |
| 3 | 121 | 33 |
| 4 | 150 | 29 |
| 5 | 175 | 25 |

**Important :** la valeur de l'utilité marginale dépend de la forme particulière de la fonction d'utilité utilisée car c'est une mesure de variation d'utilité et donc c'est une mesure **cardinale**.

**Exemple :** Si $U(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2$, et $Um_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} = 2$,

avec $V = 2U = 4x_1 + 2x_2$, et $Um_1 = \frac{\partial V}{\partial x_1} = 4$

Donc on ne peut utiliser l'utilité marginale en tant que telle pour représenter les comportements de consommation. On pourra néanmoins utiliser une autre grandeur qu'on construit en utilisant les utilités marginales : le TMS.

# Propriétés des fonctions d'utilité

La fonction d'utilité $U$ est généralement supposée croissante et concave en chacun de ses arguments.

- **Croissante:** plus la quantité d'un bien est importante, plus la satisfaction de l'individu sera grande.
- **Concave:** plus la quantité d'un bien est grande, plus le supplément de satisfaction de l'individu sera faible (utilité marginale décroissante).

$(x_1, x_2) \rightarrow U(x_1, x_2) = u(x_1) + v(x_2)$

$Um_1(x_1)$ mesurée par $u'(x_1) > 0$ et

$Um_2(x_2)$ mesurée par $v'(x_2) > 0$

Hypothèse de décroissance de l'utilité marginale

$$\Longrightarrow u''(x_1) < 0 \quad \text{et} \quad v''(x_1) < 0$$

# Utilité marginale et TMS

Considérons une situation où le consommateur substitut $dx_2$ en $dx_1$:

$$\begin{aligned} dx_1 &\Longrightarrow dU = Um_1 dx_1 \\ &+ \\ dx_2 &\Longrightarrow dU = Um_2 dx_2 \\ &\Longrightarrow dU = Um_1 dx_1 + Um_2 dx_2 = 0 \end{aligned}$$

car il s'agit d'une substitution. Nous avons alors :

$$dU = 0 \Longleftrightarrow -\frac{dx_2}{dx_1} = TMS_{2,1} = \frac{Um_1}{Um_2}$$

Le TMS ne dépend pas de la fonction d'utilité retenue :

$$U = x_1 + x_2 \Rightarrow Um_1 = Um_2 = 1 \rightarrow TMS = 1$$

$$V = U^2 = (x_1 + x_2)^2 \Rightarrow Um_1 = Um_2 = 2\,(x_1 + x_2) \rightarrow TMS = 1$$

$$W = e^U = e^{x_1 + x_2} \Rightarrow Um_1 = Um_2 = e^{x_1 + x_2} \rightarrow TMS = 1$$

# Résumé

- Une fonction d'utilité est simplement une façon de représenter ou de synthétiser un ordre de préférences. Les valeurs numériques des niveaux d'utilité n'ont pas de signification intrinsèque.
- Toute transformation monotone d'une fonction d'utilité représente dès lors les mêmes préférences que la fonction initiale.
- Le taux marginal de substitution (TMS) peut être calcule a partir de la fonction d'utilite, a l'aide de la formule TMS$= \dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = -\dfrac{Um_1}{Um_2}$