Microéconomie II

Chapitre 3: Fonctions de coûts

Pr. Moad El kharrim

Université AbdelMalek Essaâdi, FSJES - Tétouan

Année Universitaire 2017-2018

Sommaire du chapitre

Minimisation des coûts

Chercher à minimiser les coûts correspond donc à :

$$\boldsymbol{Min}\; p_1 x_1^* + p_2 x_2^* \qquad \textbf{Coûts des facteurs}$$

$$\boldsymbol{Sujet\ à}\;\; f(x_1, x_2) = q \qquad \textbf{Fonction de production}$$

Le niveau optimal de cet objectif donnera la **fonction de coût:**

$$C(q;\, p_1, p_2)$$

La combinaison qui minimise les coûts, $E = (x_1^*, x_2^*)$, doit vérifier :

1) |**pente de la tangente**|=|**pente de la droite d'iso-coût**|

$$TMST = \frac{Pm_1(x_1^*, x_2^*)}{Pm_2(x_1^*, x_2^*)} = \frac{p_1}{p_2}$$

2) $\boldsymbol{E}$ permet de produire $\boldsymbol{q}$: $f(x_1^*, x_2^*) = q$

Les solutions de ce système (les valeurs optimales) vont bien sûr en général dépendre des paramètres de ce problème de minimisation : q, p_1 et p_2. Elles vont correspondre aux **demandes conditionnelles** d'inputs : $(x_1^*(q; p_1, p_2), x_2^*(q; p_1, p_2))$. Ces demandes sont conditionnées par le niveau de production visée (q).

Le coût de ce panier optimal est donné par:

$$p_1 \times x_1^*(q; p_1, p_2) + p_2 \times x_2^*(q; p_1, p_2) = C(q; p_1, p_2) = C(q)$$

$C(q)$ est la **fonction de coût total** de la firme.

Facteurs complémentaires

$$f(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$$

Pour produire q, il faut **au moins** q unités de x_1 et q unités de x_2. La minimisation des coûts doit impliquer la suppression des gâchis et donc, l'utilisation des combinaisons **efficaces**.

$$x_1^* = x_2^* = q \quad \textbf{demandes conditionnelles}$$
$$C(q;\, p_1, p_2) = p_1 q + p_2 q = (p_1 + p_2)\, q$$

Substituts parfaits

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

Etant donnée la parfaite équivalence entre les facteurs, la firme choisira d'utiliser celui qui est **le moins cher** pour réaliser toute la production :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{si } p_1 \leq p_2 & x_1^* = q \text{ et } x_2^* = 0 \\ \text{si } p_1 \geq p_2 & x_2^* = q \text{ et } x_1^* = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow C(q;\, p_1, p_2) = \min\{p_1, p_2\} \times q$$

Ici les **demandes conditionnelles** dépendent des **prix** de manière assez brutale (tout ou rien) : *c'est-à-dire toute la production est réalisée avec un seul facteur (**le moins cher**).*

A court terme (**CT**) la firme ne peut ajuster que les facteurs variables quand elle cherche à minimiser ses coûts.

Soit le facteur 2 un facteur fixe : $x_2 = \bar{x}_2$. Le problème de minimisation devient alors :

$$\textbf{Fonction de coût } C_{CT}(q, \bar{x}_2) = \begin{cases} \min\limits_{x_1} p_1 x_1 + p_2 \bar{x}_2 \\ \textbf{Sujet à } \; f(x_1, \bar{x}_2) = q \end{cases}$$

Les demandes conditionnelles des facteurs sont:

$$x_1^* = x_1^{CT}(q;\, p_1, p_2, \bar{x}_2)$$
$$x_2^* = \bar{x}_2$$

et $C_{CT}(q, \bar{x}_2) = p_1 x_1^{CT}(q;\, p_1, p_2, \bar{x}_2) + p_2 \bar{x}_2$

A long terme (**LT**) nous avons à nouveau le problème standard avec tous les fac- teurs variables :

$$\textbf{Fonction de coût } (q) = \begin{cases} \min\limits_{x_1} p_1 x_1 + p_2 x_2 \\ \text{Sujet à } f(x_1, x_2) = q \end{cases}$$

Les deux facteurs de productions peuvent être librement ajustés :

$$C(q) = p_1 x_1^*(q;\, p_1, p_2) + p_2 x_2^*(q;\, p_1, p_2)$$

Coûts fixes et coûts quasi–fixes

Les coûts correspondant aux facteurs dont la consommation par la firme ne dépendent pas du niveau de la production correspondent naturellement aux **coûts fixes**.

Exemples: le coût de construction des bâtiments, le coût d'achat des machines...etc

Les coûts qui ne dépendent pas du niveau de production mais qui peuvent être évités en arrêtant totalement la production sont des **coûts quasi–fixes**.

Exemples: contrats de location des bâtiments, consommation d'électricité ou de fioul...etc

Coût moyen

Le coût moyen nous donne une approximation du coût unitaire de production :

$$CM(q) = \frac{C(q)}{q}$$

Les coûts totaux de l'entreprise de la manière suivante :

$$C(q) = \underbrace{CV(q)}_{\textbf{Coûts variables}} + \underbrace{F}_{\textbf{Coûts fixes}}$$

$$= p_1 x_1^*(q) + p_2 \bar{x}_2$$

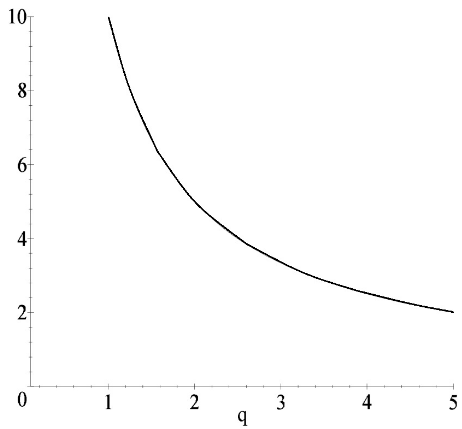
Donc les coûts moyens sont égaux à:

$$CM(q) = \frac{C(q)}{q} = \frac{CV(q) + F}{q} = \frac{CV(q)}{q} + \frac{F}{q}$$
$$= CVM(q) + CFM(q)$$

CM = Coût Variable Moyen + Coûts Fixe Moyen

$CFM(q)$ est une fonction hyperbolique de type $1/x$. Sa courbe est décroissante et convexe.

Exemple : $F = 10$, $CFM(q) = 10/q$



Exemple de CFM

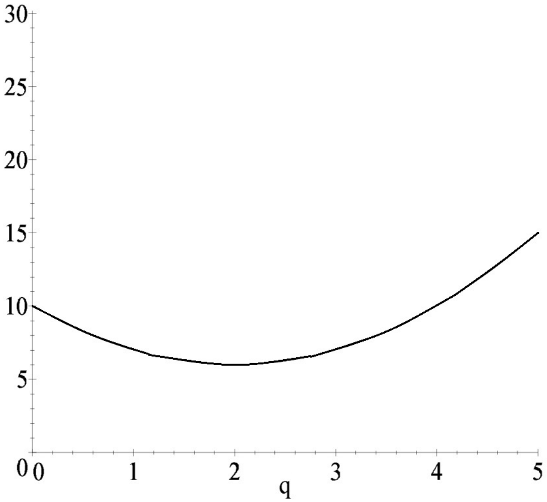
La forme de la courbe $CVM(q)$ est un peu plus difficile à établir car elle dépendra de la croissance des coûts avec le niveau de production.

$$CVM(q) = \frac{CV(q)}{q}$$

Selon la présence et l'importance **des rendements d'échelle croissants**, nous pouvons avoir une zone plus ou moins importante de **décroissance des CVM**. Mais cette décroissance sera en général suivie d'abord par une **constance** et ensuite par une **zone de croissance**. On obtient alors une courbe en $\cup$.

Exemple:

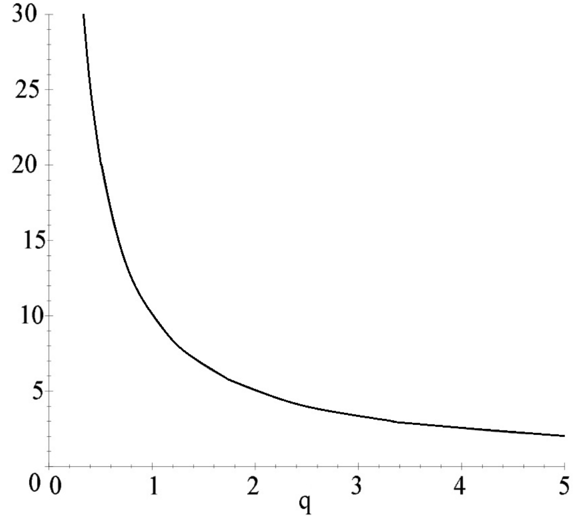
$$CV\left(q\right)=q^{3}-4q^{2}+10q\Longrightarrow CVM\left(q\right)=q^{2}-4q+10$$



Exemple de CVM

Le coût moyen s'obtient en sommant ces deux courbes

$$CM\left(q\right)=\left(q^{2}-4q+10\right)+\left(10/q\right)$$



CM = CVM + CFM

Coût marginal

La variation des coûts sera mesurée en termes relatifs par la fonction de **coût marginal (Cm)** de la firme :

$$Cm\left(q\right)=\frac{\Delta C\left(q\right)}{\Delta q}=\frac{C\left(q+\Delta q\right)-C\left(q\right)}{\Delta q}$$

Naturellement:

$$\begin{aligned}\Delta C\left(q\right)&=\left(CV\left(q+\Delta q\right)+F\right)-\left(CV\left(q\right)+F\right)\\&=\Delta CV\left(q\right)+\underbrace{\Delta F}_{=\mathbf{0}}=\Delta CV\left(q\right)\end{aligned}$$

Ce qui nous intéresse est une évaluation de cette variation des coûts qui ne soit pas conditionnée par la variation Δq retenue.

$$Cm\left(q\right)=\lim_{\Delta q\to 0}\frac{\Delta C\left(q\right)}{\Delta q}=\frac{dC\left(q\right)}{dq}=C'\left(q\right)$$

Quelle relation pouvons-nous établir entre l'évolution du **CM** et celle de **Cm** ?

$$CM\left(q\right)=\frac{C\left(q\right)}{q}$$

$$\begin{aligned}CM'\left(q\right)&=\frac{d}{dq}\left(\frac{C\left(q\right)}{q}\right)\\&=\frac{C'\left(q\right)q-C\left(q\right)\times 1}{q^{2}}\\&=\frac{C'\left(q\right)-C\left(q\right)/q}{q}\\&=\frac{1}{q}\left(Cm\left(q\right)-CM\left(q\right)\right)\end{aligned}$$

Donc l'évolution du **CM** dépend de la relation entre **Cm** et **CM** :

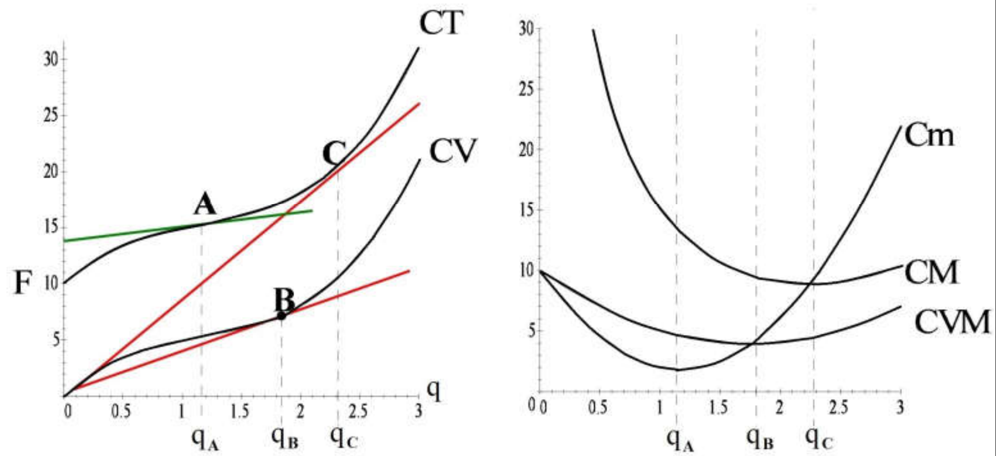
$$Cm\,(q) > CM\,(q) \Longleftrightarrow CM' > 0 \Longrightarrow CM \text{ **croissant**}$$

$$Cm\,(q) = CM\,(q) \Longleftrightarrow CM' = 0 \Longrightarrow CM \text{ **constant**}$$

$$Cm\,(q) < CM\,(q) \Longleftrightarrow CM' < 0 \Longrightarrow CM \text{ **décroissant**}$$

Nous remarquons aussi que la courbe de Cm passe nécessairement par le minimum de la courbe de CM (correspondant à $CM' = 0$). Elle doit aussi passer par le minimum de la courbe de CVM puisque

$$Cm = C' = CV' \Longrightarrow Cm\,(q) = CVM\,(q) \Longleftrightarrow CVM' = 0$$



q_A minimise le Cm (pt d'inflexion du CT)

q_B minimise le CVM (pente minimale pour la corde OB)

q_C minimise le CM (pente minimale pour la corde OC)

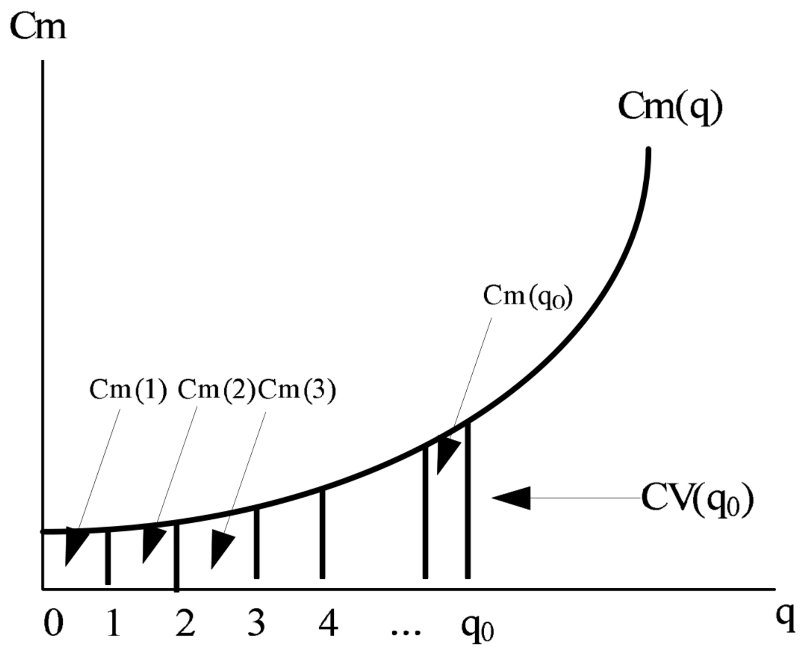
$$Cm'\,(q_A) = 0 \Longleftrightarrow CT''\,(q_A) = 0 : \quad \textbf{Point d'inflexion en A}$$

$$Cm\,(q_B) = CVM\,(q_B) \Longleftrightarrow CVM'\,(q_B) = 0 : \quad \textbf{Minimum du CVM}$$

$$Cm\,(q_C) = CM\,(q_C) \Longleftrightarrow CM'\,(q_C) = 0 : \quad \textbf{Minimum du CM}$$

Le coût marginal mesure approximativement le coût de chaque unité supplémentaire.

nous pouvons remarquer que le **coût variable** est en fait la **somme des coûts marginaux** que la firme a du payer pour atteindre le niveau de production considérée



Coût variable et coûts marginaux

$$
\begin{aligned}
CV(q) = {} & [CV(q) - CV(q-1)] \\
& + [CV(q-1) - CV(q-2)] \\
& + [CV(q-2) - CV(q-3)] \\
& \vdots \\
& + \underbrace{[CV(1) - CV(0)]}_{=[CV(1)-0]} \\
& = Cm(q) + Cm(q-1) + \cdots + Cm(1)
\end{aligned}
$$

La surface sous la courbe de Cm jusqu'à q_0 nous donne le coût variable total correspondant au niveau q_0. Ce que nous pouvons noter en utilisant l'opérateur d'intégration :

$$CV(q_0) = \int_0^{q_0} Cm(q)\, dq$$

Exemple:

$$CT(q) = 2q^3 - 7q^2 + 10q + 10$$

$$Cm(q) = 6q^2 - 14q + 10$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{q_0} Cm(q)\, dq &= \int_0^{q_0} \left(6q^2 - 14q + 10\right) dq \\
&= \left(2q^3 - 7q^2 + 10q\right) - 0 \\
&= CV(q_0) - CV(0) = CV(q_0)
\end{aligned}
$$

Rendements d'échelle et les fonctions de coût

Rappel : les rendements d'échelle sont

$f(tx_1, tx_2) > t \times f(x_1, x_2) \Rightarrow$ Rendements d'échelle **croissants**

$f(tx_1, tx_2) = t \times f(x_1, x_2) \Rightarrow$ Rendements d'échelle **constants**

$f(tx_1, tx_2) < t \times f(x_1, x_2) \Rightarrow$ Rendements d'échelle **décroissants**

pour tout $t > 1$

Quel est la conséquence des rendements d'échelle sur la forme de la fonction de coût?

Rendements d'échelle constants

Soit

$$\begin{aligned} C(1; p_1, p_2) &= \text{coût minimanl pour } q = 1 \\ &\equiv p_1 x_1^*(1;\, p_1, p_2) + p_2 x_2^*(1;\, p_1, p_2) \\ &\equiv c \end{aligned}$$

Si la firme désire produire $q > 1$, avec les rendements d'échelle constants, nous devons avoir :

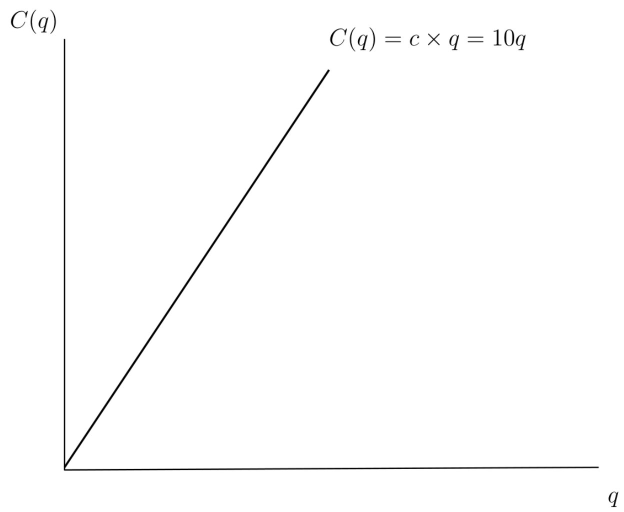
$$f(x_1^*(1), x_2^*(1)) = 1 \Longrightarrow f(qx_1^*(1), qx_2^*(1)) = q \times f(x_1^*(1), x_2^*(1)) = q$$

La fonction de coût est alors donnée par :

$$\begin{aligned} C(q) &= q \times p_1 x_1^*(1) + q \times p_2 x_2^*(1) = q \times (p_1 x_1^*(1) + p_2 x_2^*(1)) \\ &= q \times C(1;\, p_1, p_2) = c \times q \end{aligned}$$

Par conséquent la fonction de coût est **linéaire**

Exemple: $C(1;\, p_1, p_2) = c = 10 \Longrightarrow C(q) = 10q$



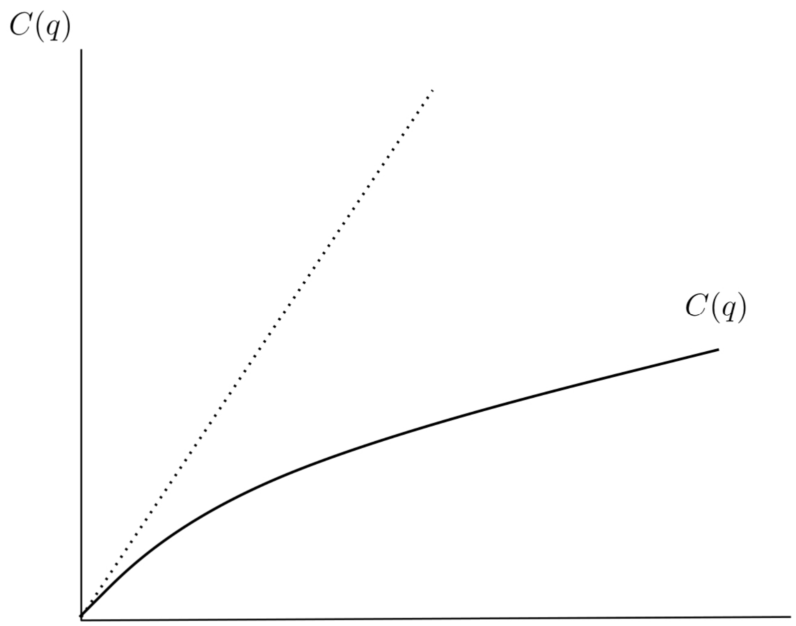
Rendements d'échelle constants

Rendements d'échelle croissants

Dans ce cas nous aurons :

$$f(qx_1^*(1), qx_2^*(1)) > q \times f(x_1^*(1), x_2^*(1)) = q$$

pour produire q, il faut multiplier la combinaison $(x_1^*(1), x_2^*(1))$ par un facteur **inférieur** à q. Les coûts augmentent donc **moins que proportionnellement** à l'augmentation de l'output.



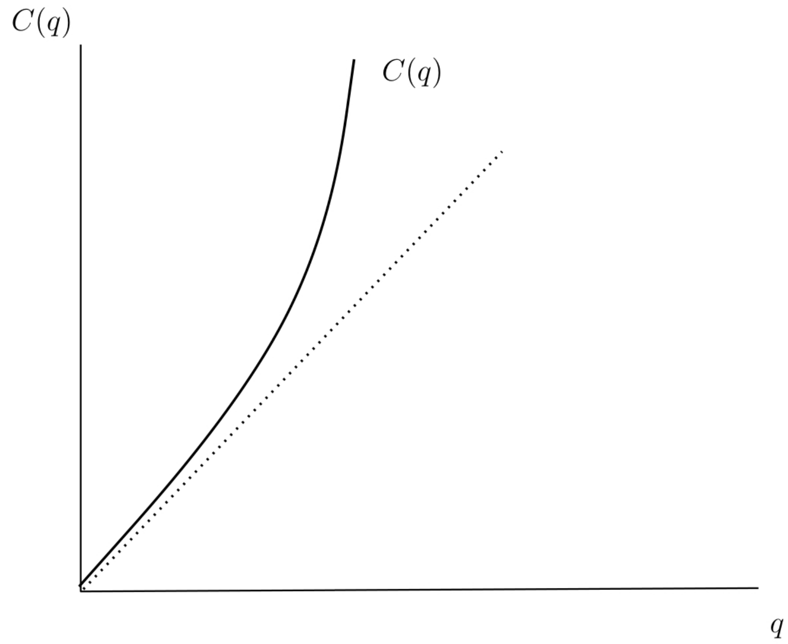
Rendements d'échelle croissants

Rendements d'échelle décroissants

C'est le cas symétrique du précédent.

$$f\left(qx_1^*(1), qx_2^*(1)\right) < q \times f\left(x_1^*(1), x_2^*(1)\right) = q$$

Donc pour produire q il faut multiplier l'échelle de production par un facteur **supérieur** à q. Les coûts augmenteront alors **plus que proportionnellement** à l'augmentation du niveau de la production.



Rendements d'échelle décroissants

Utilisation du coût moyen pour caractériser les rendements d'échelle

<u>**Rappel:**</u> Coût moyen $CM(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

1) les rendements d'échelle **constants :**

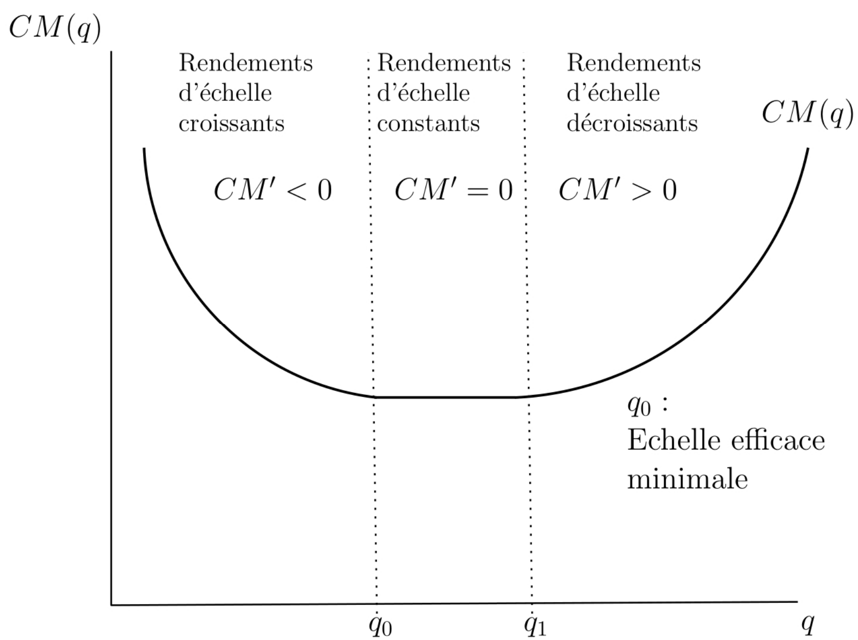
$$C(q) = cq \Rightarrow CM(q) = \frac{C(q)}{q} = c \Rightarrow \frac{\partial CM(q)}{\partial q} = 0$$

2) Les rendements d'échelle **croissants**, le numérateur augmente moins vite que le dénominateur et donc le coût moyen est décroissant :

$$\frac{\partial CM(q)}{\partial q} < 0$$

3) Les rendements d'échelle **décroissants:**

$$\frac{\partial CM(q)}{\partial q} > 0$$



Evolution des rendements d'échelle

Choix de capacité de production et fonction de coût de long terme

A long terme tous les facteurs deviennent variables : il n'existe plus de coûts fixes. Par conséquent :

$$\textbf{A long terme: } CT(0) = CV(0) = 0$$

S'il existe des facteurs **quasi-fixes** alors la courbe de coût moyen aura toujours une forme en $\cup$ du fait de la décroissance des coûts quasi-fixes moyens. Considérons que la firme ajuste ses capacités de production dans le temps.

Soit k : **la taille de l'entreprise**. A court terme, k représente de manière synthétique tous les facteurs fixes. La fonction de coût de court terme est alors donnée par :

$$C_{CT}(q; k)$$

(k correspond alors à $\bar{x}_2$, ainsi qu'aux autres facteurs fixes).

Pour un niveau donné de q_0 il existe une taille optimale de l'entreprise

$$k(q) : \textbf{ la taille optimale pour } q$$

Nous savons qu'à long terme la firme utiliser exactement cette taille optimale puis- qu'elle pourra ajuster l'utilisation de tous les facteurs de production :

$$\textbf{Coûts de long terme : } C(q) = C_{CT}(q;\, k(q))$$

Analysons un peu plus en détail cette relation **(court terme)** / **(long terme)**.

Soient un niveau de production q_0 et $k_0 = k(q_0)$, la taille optimale correspondant à q_0. Nous avons alors :

<u>Pour q_0</u>

$$C(q_0) = C_{CT}(q_0; k_0)$$

$$\frac{C(q_0)}{q_0} \leq \frac{C_{CT}(q_0; k_0)}{q_0}$$

$$CM_{LT}(q_0) \leq CM_{CT}(q_0; k_0)$$

<u>Pour $q \neq q_0$</u>

$$C(q) \leq C_{CT}(q; k_0)$$

$$\frac{C(q)}{q} \leq \frac{C_{CT}(q; k_0)}{q}$$

$$CM_{LT}(q) \leq CM_{CT}(q; k_0)$$

car pour tout niveau de production $q \neq q_0$, $k(q)$ permet de faire **au moins aussi bien que** k_0 qui n'est optimale que pour q_0. Par conséquent, la courbe de $CM_{CT}(q; k_0)$ doit être au–dessus de $CM_{LT}(q) = CM_{CT}(q; k(q))$ pour tous les niveaux de production sauf q_0.

Pour q_0 et $k \neq k_0$

$$C(q_0) \leq C_{CT}(q_0; k)$$

$$\frac{C(q_0)}{q_0} \leq \frac{C_{CT}(q_0; k)}{q_0}$$

$$CM_{LT}(q_0) \leq CM_{CT}(q_0; k)$$

De même nous pouvons calculer les tailles optimales correspondant à d'autres niveaux de production :

$$k_1 = k(q_1),\ k_2 = k(q_2), ...$$

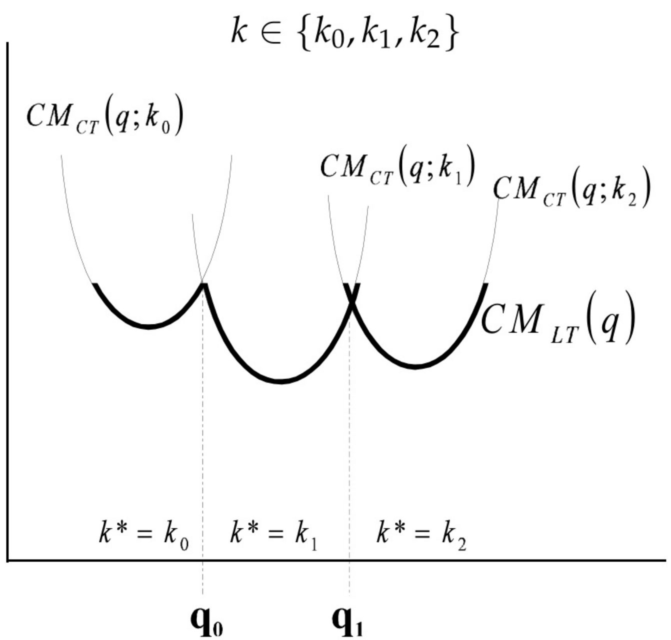
qui sont les solutions du problème suivant pour chaque niveau de production q:

$$\min_k CT_{CT}(q, k)$$

Courbes de coûts moyens de long terme: deux cas

Petit nombre de tailles possibles

Si le choix de la taille optimale ne peut se faire totalement librement, la firme doit choisir, pour chaque niveau de production, la taille la mieux adaptée à partir d'un ensemble fini de tailles possibles;

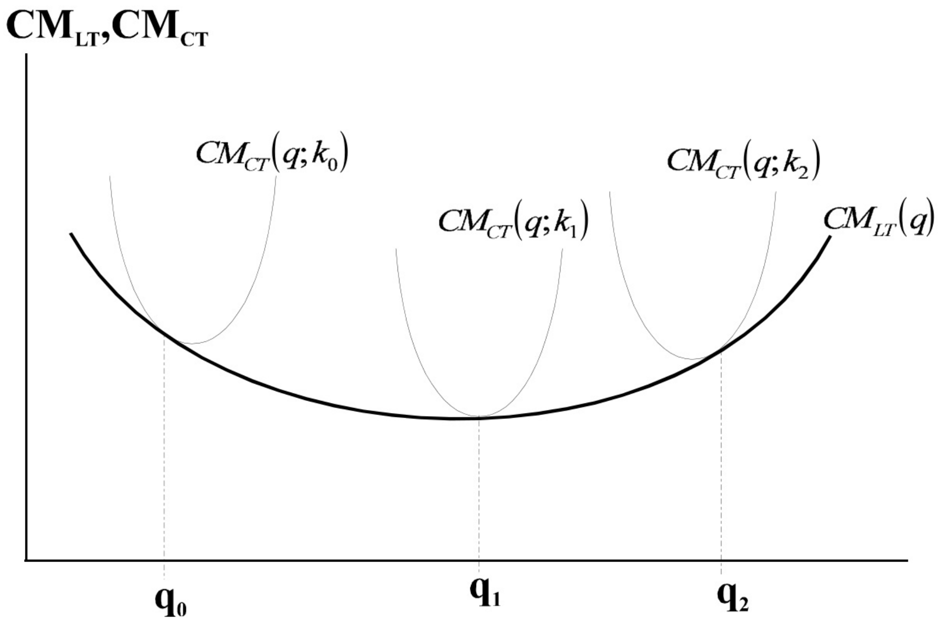


Choix parmi un ensemble fini de tailles possibles

Taille parfaitement variable

Dans ce cas la firme pourra adapter la taille de manière continue, en résolvant le problème

$$\min_k CT_{CT}(q, k)$$

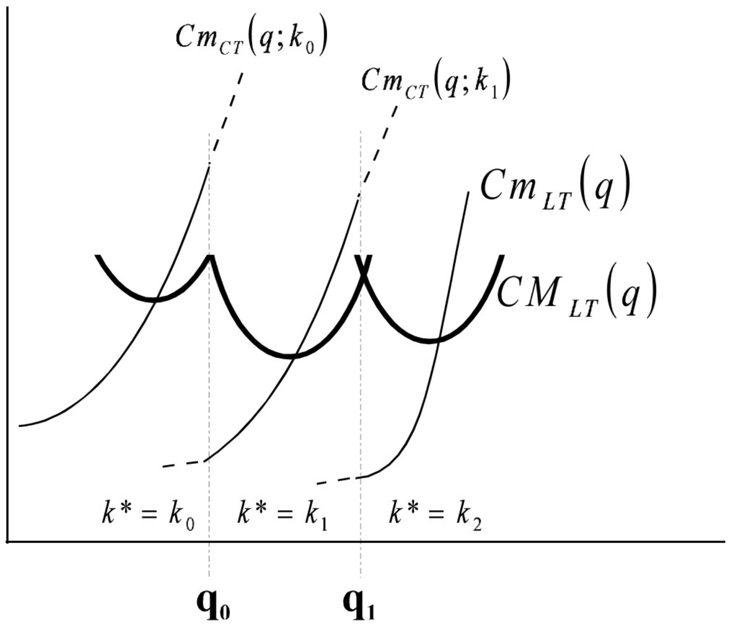


Choix parmi un ensemble continu de tailles possibles

Coûts marginaux de long terme

Le coût marginal va correspondre, pour chaque niveau de production, à la fonction de coût avec la taille optimale

$$Cm_{LT}(q) = \begin{cases} Cm_{CT}(q; k_0) & si \quad q \leq q_0 \\ Cm_{CT}(q; k_1) & si \quad q_0 < q < q_1 \\ Cm_{CT}(q; k_2) & si \quad q > q_1 \end{cases}$$



Choix parmi un ensemble continu de tailles possibles

Si l'on peut **ajuster librement** la taille optimale :

$$Cm_{CT}(q) = Cm_{CT}(q;\, k(q))$$