Microéconomie II

Chapitre 2: Firme concurrentielle et combinaison optimale des facteurs

Pr. Moad El kharrim

Université AbdelMalek Essaâdi, FSJES - Tétouan

Année Universitaire 2017-2018

Sommaire du chapitre

Introduction

Nous avons introduit jusqu'à ce point un certain nombre de concepts qui permettent de caractériser les propriétés de la technologie et de l'organisation de la firme. Nous allons maintenant nous intéresser au comportement de la firme et plus précisément aux choix que la firme doit effectuer de manière optimale.

Nous supposerons dans ce chapitre que l'objectif de la firme est la **maximisation de son profit**.

Le profit est défini comme la différence entre les recettes de la firme (ou chiffre d'affaires) et ses coûts de production.

$$\underbrace{\prod}_{\textbf{Proft}} = \underbrace{p \times q}_{\textbf{Recettes}} - \underbrace{(p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_mx_m)}_{\textbf{Coût facteurs variables}} - \underbrace{(p_{m+1}x_{m+1} + ... + p_lx_l)}_{\textbf{Coût facteurs fixes}}$$

avec

$\boldsymbol{p}$**:** Prix unitaire de vente

$\boldsymbol{l = m + n}$

Les coûts de la firme correspondent à ses dépenses en vue d'acheter les facteurs variables et fixes nécessaires à sa production. Pour chaque input h, si la firme l'achète en quantité x_h et si le prix unitaire est de p_h, la dépense correspondant est de p_hx_h.

Dans ce chapitre nous allons considérer le cas d'une firme qui est sur un **marché concurrentiel (concurrence parfaite)**. Un tel marché se caractérise par l'existence d'une **multitude (en fait une infinité) d'acheteurs** et d'une **multitude de vendeurs** de sorte que les conséquences au niveau du marché des décisions de chaque individu soient négligeables.

Par conséquent, la firme va considérer que quelles que soient les quantités qu'elle vend ou qu'elle achète elle aura toujours affaire aux **mêmes prix sur les marchés.**

Le programme de la firme concurrentielle peut alors s'écrire sous la forme suivante:

$$\boldsymbol{Max}\, p \times q - p_1 x_1 - p_2 x_2 - ... - p_l x_l$$

$$\boldsymbol{Sujet\ \grave{a}}\ q = f(x_1, ..., x_l)$$

Nous allons surtout nous intéresser au choix optimal du panier d'inputs étant donné un niveau de production.

Moins le panier d'input est coûteux, plus son profit sera élevé.

Choix de la combinaison optimale des facteurs

Le problème que nous allons étudier correspond à la recherche de la combinaison la moins chère qui permet de produire un niveau de production donné

$$\boldsymbol{Min}\, p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_l x_l$$

$$\boldsymbol{Sujet\ \grave{a}}\ q = f(x_1, ..., x_l)$$

où la première ligne correspond à la minimisation des coûts et la deuxième ligne correspond à la contrainte technologique de la firme

La solution géométrique

Pour cette étude nous allons nous placer de nouveau dans un cadre à deux facteurs de production. Dans ce cas notre problème devient :

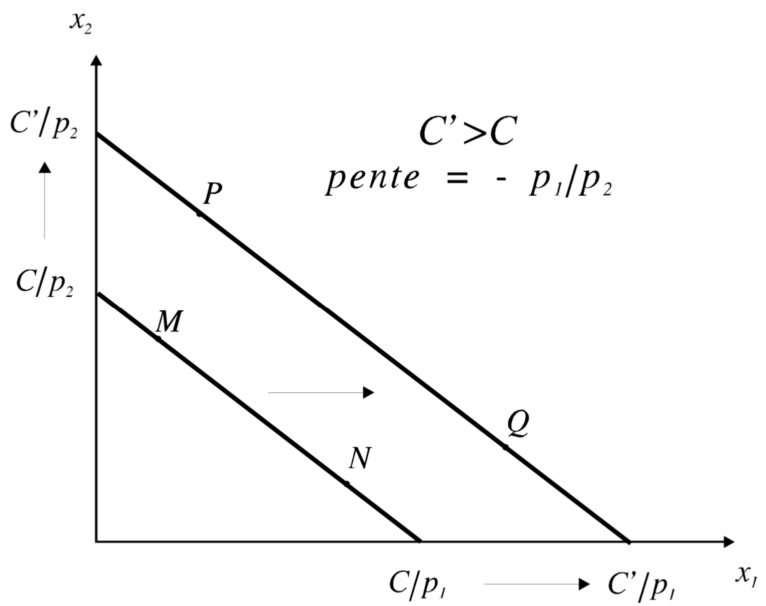
$$\boldsymbol{Min}\, p_1 x_1 + p_2 x_2$$

$$\boldsymbol{Sujet\ \grave{a}}\quad q = f(x_1, x_2)$$

Regardons les combinaisons de production qui correspondent un coût **C** pour la firme.

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 = C \iff x_2 = \frac{1}{p_2} C - \frac{p_1}{p_2} x_1$$

Dans l'espace (x_1, x_2), ces équations définissent une droite qui est décroissante avec x_1 et dont les intersections avec les axes sont croissantes avec **C.**



Droites d'isocoûts

Une augmentation du niveau des coûts de **C** à **C′** correspond à un déplacement vers la gauche de la droite d'isocoût.

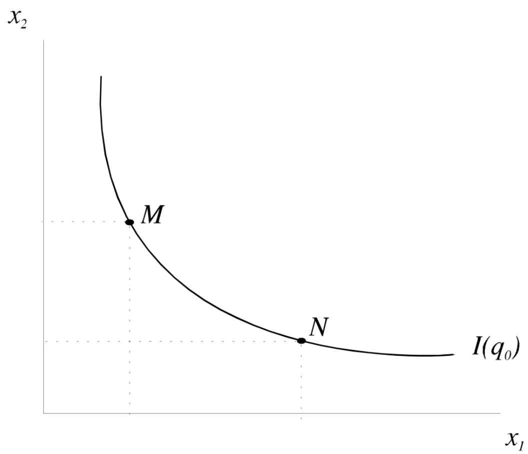
Nous pouvons observer ce résultat en étudiant toutes les substitutions entre les deux facteurs qui gardent constant le niveau de la dépense :

$$C = p_1x_1 + p_2x_2 \qquad dC = p_1dx_1 + p_2dx_2 \Longleftrightarrow x_2 = \frac{1}{p_2}C - \frac{p_1}{p_2}x_1$$

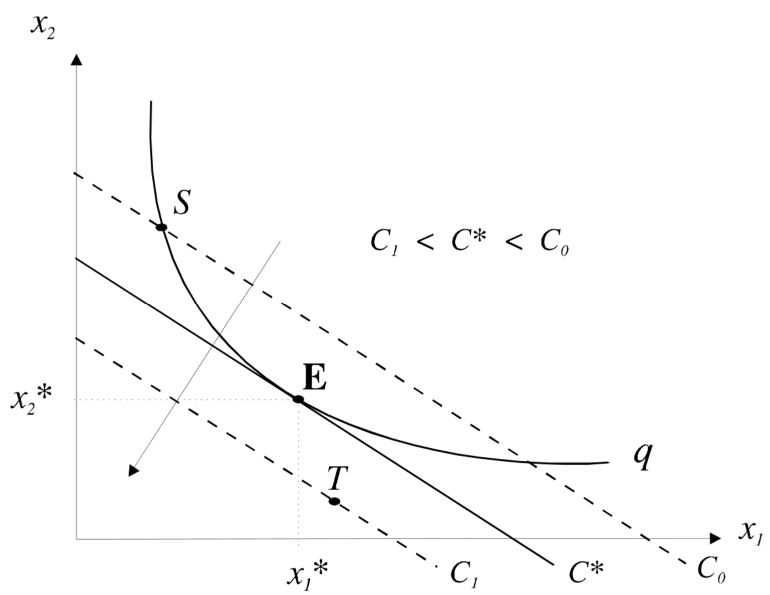
$$\Rightarrow -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{p_1}{p_2} \Longleftrightarrow |\text{pente d'isocoût}| = \frac{p_1}{p_2}$$

La pente de la droite d'isocoût nous donne donc le rapport dans lequel on peut substituer le facteur 2 au facteur 1 tout en gardant constant le niveau de la dépense.

La contrainte $q = f(x_1, x_2)$ nous dit que la firme doit choisir parmi les paniers qui permettent de produire exactement le niveau d'output **q**. Or l'ensemble qui contient ces paniers n'est rien d'autre que **l'isoquante** qui correspond à ce niveau de production.



Contraintes technologiques et isoquantes



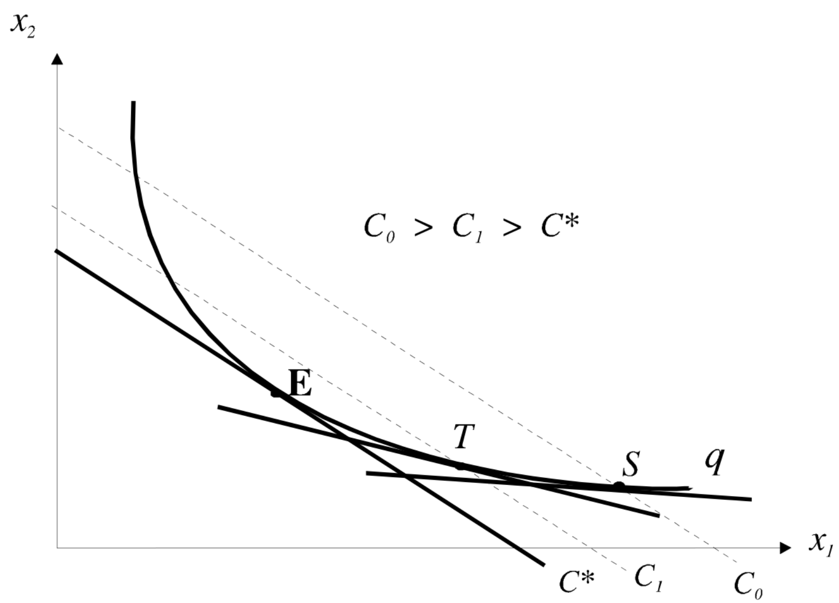
L'optimum de la firme

Le panier $\boldsymbol{E}$ est donc le panier le moins cher possible qui permet d'atteindre le niveau de production $\boldsymbol{q}$: c'est l'**optimum de la firme**. Il correspond au choix des quantités (x_1^*, x_2^*) pour les deux facteurs: c'est la **combinaison optimale** des deux facteurs de production.
Le point $\boldsymbol{E}$ est donc caractérisé par les conditions suivantes:

$$\boldsymbol{E}: \ (x_1^*, x_2^*) \text{ tel que } \begin{cases} |\text{pente d'isocoût}| = \dfrac{p_1}{p_2} \\ \\ = TMST\,(x_1^*, x_2^*) = \dfrac{Pm_1}{Pm_2}\,(x_1^*, x_2^*) \\ \\ = \dfrac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}\,(x_1^*, x_2^*) \\ \\ f\,(x_1^*, x_2^*) = q \end{cases} \tag{1}$$

La firme atteint son optimum quand sa valorisation privée correspond exactement à **la valorisation sociale**, autrement dit, quand le rapport des **contributions des deux facteurs** à sa production correspond exactement à **leur valeur relative au niveau du système de marché**.

Le **TMST** nous indique dans quelle mesure on peut diminuer l'utilisation d'un facteur et augmenter celle de l'autre et garder la production constante.



TMST et rapports des prix

Le panier **S** permet de produire l'output **q** mais pour ce panier le TMST (la pente de la tangente) est <u>inférieur</u> au rapport des prix $\Longrightarrow$ La valorisation dans la firme du facteur 1 est inférieure à la valorisation sociale de ce bien.
La firme peut donc substituer du facteur 2 au facteur 1 de manière à garder le même niveau de production et réduire ses dépenses, puisque le facteur 2 contribue mieux à la production et il coûte relativement moins cher.

Les conditions **(1)** nous donnent un système de **deux équations à deux inconnus** (x_1^*, x_2^*). En résolvant ce système on peut déterminer la combinaison optimale d'inputs nécessaire à la production de l'output **q**:

$$TMST\left(x_1^*, x_2^*\right) = \frac{Pm_1}{Pm_2}\left(x_1^*, x_2^*\right) = \frac{\partial f/\partial x_1}{\partial f/\partial x_2}\left(x_1^*, x_2^*\right) = \frac{p_1}{p_2}$$

Exemple: Pour notre exemple de fonction Cobb-Douglas, nous avions, $f\left(x_1, x_2\right) = 10x_1^{1/4}x_2^{3/4}$

$$TMST_{2,1} = \frac{Pm_1}{Pm_2} = \frac{2.5x_1^{-3/4}x_2^{3/4}}{7.5x_1^{1/4}x_2^{-1/4}} = \frac{x_2}{3x_1} = \frac{p_1}{p_2}$$

$$\Rightarrow x_2^* = \frac{3x_1p_1}{p_2} = g\left(x_1^*\right)$$

$$f\left(x_1^*, g\left(x_1^*\right)\right) = 10\left(x_1^*\right)^{1/4} g\left(x_1^*\right)^{3/4} = q$$

$$= 10\left(x_1^*\right)^{1/4}\left(\frac{3x_1^*p_1}{p_2}\right)^{3/4} = 10 \times 3^{3/4}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{3/4} x_1^* = q$$

$$= 22.8\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{3/4} x_1^* = q \Rightarrow x_1^* = \frac{q}{22.8}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{3/4}$$

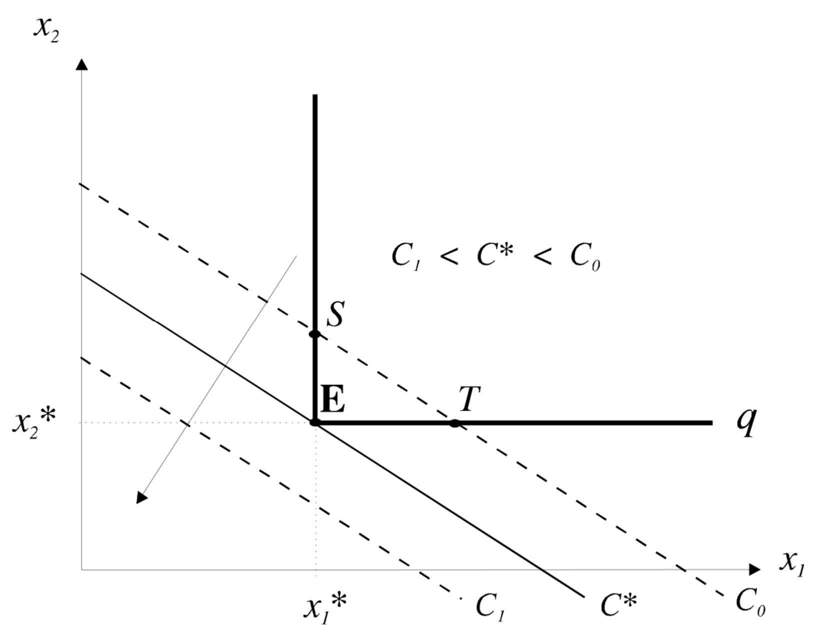
$$\Rightarrow x_2^* = g\left(x_1^*\right) = \frac{3q}{22.8}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{1/4}$$

Application numérique: Si $p_1 = p_2 = 1$ et $q = 100$

$$x_1^* = \frac{100}{22.8} = 4.39$$

$$x_2^* = \frac{300}{22.8} = 13.17$$

Cette méthode de calcul basée sur la tangence n'est valable que pour les technologies à facteurs substituables. Pour les technologies à facteurs complémentaires, on ne peut l'utiliser directement. Néanmoins le principe reste le même : la firme essaye de se placer sur la courbe d'isocoût la plus basse possible. La figure suivante permet d'illustrer cela.



Combinaison optimale des facteurs complémentaires

La forme des isoquantes influence donc fondamentalement la détermination de l'optimum de la firme.

Pour le premier cas nous allons prendre une isoquante entièrement linéaire (*notre exemple était linéaire sur une portion seulement*). Ce type d'isoquante appartient à une fonction de production de type **linéaire**:

$$f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 = q_0$$

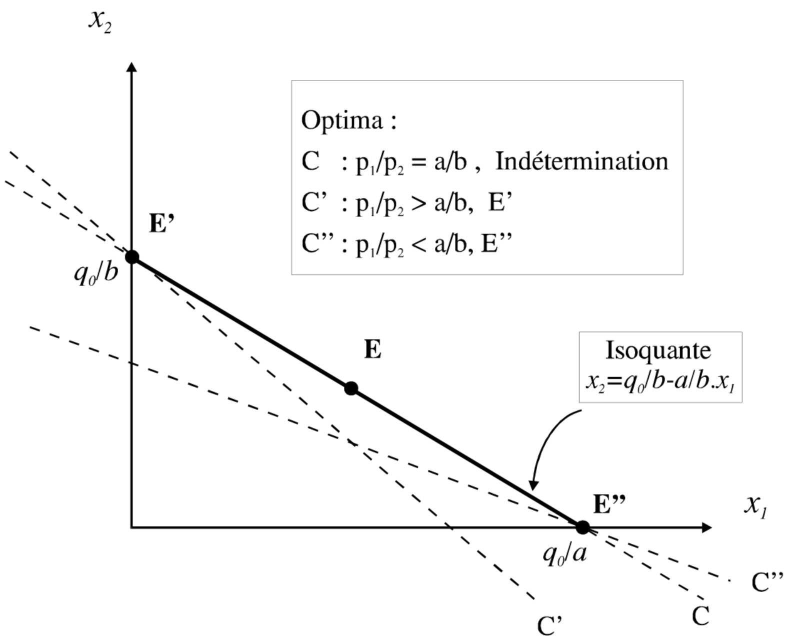
$$x_2 = \frac{q_0}{b} - \frac{a}{b}x_1 \Longrightarrow TMST = -\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{a}{b} = Cste$$

On observe que le **TMST** reste constant le long de chaque isoquante, quel que soit le panier de facteurs considéré.

La règle de la tangence implique l'égalité entre le **TMST** et le rapport des prix or a priori il n'y a aucune raison que l'on ait cette égalité.

Le rapport **a/b** est donné par la technologie et le rapport des prix par les marchés, il n'y a aucune raison que ces deux mécanismes donnent le même résultat.

En effet même si l'on a l'égalité, la détermination de l'optimum de la firme reste problématique (voir figure suivante).



Problèmes d'optimisation liés à la linéarité de l'isoquante

La droite $\mathbf{C'}$ correspond à une pente plus élevée (en valeur absolue). Dans ce cas nous avons:

$$\frac{p_1}{P_2} > \frac{a}{b} = TMST$$

La firme a toujours intérêt à <u>substituer le facteur 2 au facteur 1</u> (*le facteur 1 est relativement trop cher par rapport à sa contribution à la production*).

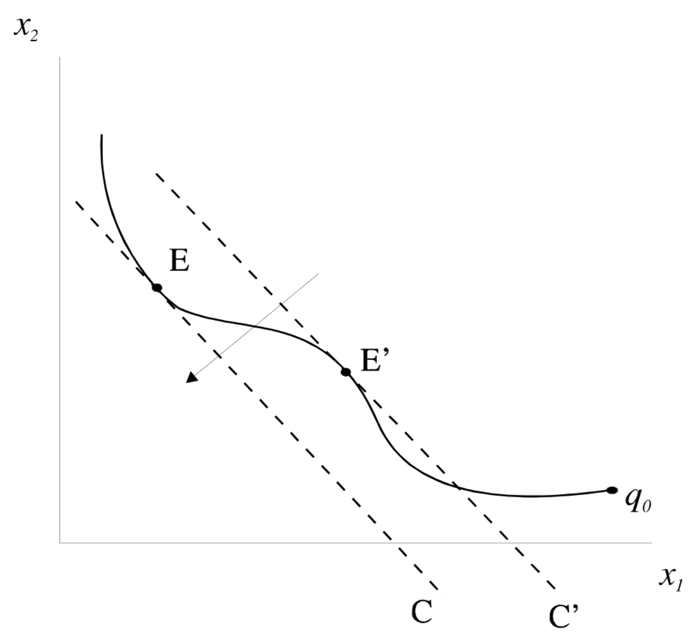
Cette substitution doit continuer jusqu'à ce que la firme ne puisse plus diminuer la quantité de 1 et augmenter celle de 2. On a donc une **solution en coin** : le point $\mathbf{E'}$.

Nous avons la situation symétrique pour la droite $\mathbf{C}''$:

$$\frac{p_1}{P_2} < \frac{a}{b} = TMST$$

la firme a donc intérêt à substituer le facteur 1 au facteur 2. On a la **solution en coin** : $\mathbf{E}''$.

L'autre cas de figure nous montre que la règle de la tangence peut même conduire à des solutions sous-optimales. Nous pouvons voir les implications de cette configuration dans la figure suivante;



Concavité partielle de l'isoquante et sous-optimalité

La solution analytique : le Lagrangien

Nous allons introduire maintenant une méthode de calcul qui va nous permettre de calculer directement la (ou les) combinaison(s) de facteurs qui minimise(nt) les dépenses de la firme.

$$\boldsymbol{Min}\ p_1x_1 + p_2x_2$$

$$\boldsymbol{Sujet\ \grave{a}}\ q = f\left(x_1, x_2\right)$$

Il s'agit d'un problème de minimisation d'une fonction sous une contrainte d'égalité.

En fait, en utilisant le Lagrangien, on aura un nouveau problème de maximisation sans contraintes où les conditions d'optimalité vont automatiquement tenir compte de la contrainte du problème initial.

On va donc associer une variable supplémentaire, λ, à la contrainte du problème. Le programme de la firme va alors devenir :

$$\boldsymbol{Min}_{(\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2},\boldsymbol{\lambda})}\ L\left(x_1, x_2; \lambda\right) = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda\left(f\left(x_1, x_2\right) - q\right)$$

$\dfrac{\partial L}{\partial x} > 0$: on peut diminuer la valeur du Lagrangien en diminuant x;

$\dfrac{\partial L}{\partial x} < 0$: on peut diminuer la valeur du Lagrangien en augmentant x;

$\dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$: on ne peut diminuer la valeur du Lagrangien en modifiant x;

Par conséquent, si l'on est à l'optimum au point $(x_1^*, x_2^*; \lambda^*)$, on doit nécessairement avoir :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1}(x_1^*, x_2^*; \lambda^*) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2}(x_1^*, x_2^*; \lambda^*) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1^*, x_2^*; \lambda^*) = 0 \end{cases}$$

Si les isoquantes sont strictement convexes alors ces conditions sont suffisantes pour déterminer le minimum global. En utilisant l'expression détaillée du Lagrangien ces conditions deviennent :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = q - f(x_1, x_2) = 0 \end{cases}$$

On observe que la dernière condition est exactement la contrainte de notre problème initial. Par conséquent la minimisation sans contraintes du Lagrangien tient nécessairement compte de cette contrainte.

A partir du rapport des deux premières conditions nous obtenons:

$$p_1 = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_1} \qquad \text{et} \qquad p_2 = \lambda \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{p_1}{p_2} = \frac{\partial f / \partial x_1}{\partial f / \partial x_2} = TMST(x_1^*, x_1^*)$$

$$q = f(x_1^*, x_2^*)$$

Exemple : Pour notre fonction de production nous avons de nouveau

$$\boldsymbol{Min}\; p_1 x_1 + p_2 x_2$$

$$\boldsymbol{Sujet\ à}\;\; f(x_1, x_2) = 10 x_1^{1/4} x_2^{3/4} = q$$

$$\boldsymbol{Min}_{(x_1, x_2, \lambda)}\; L(x_1, x_2; \lambda) = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \lambda \left(10 x_1^{1/4} x_2^{3/4} - q\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 0 \Leftrightarrow p_1 = \lambda \left(2.5 x_1^{-3/4} x_2^{3/4}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 0 \Leftrightarrow p_2 = \lambda \left(7.5 x_1^{1/4} x_2^{-1/4}\right) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow 10 x_1^{1/4} x_2^{3/4} = q \end{cases}$$

A partir des deux premières conditions on obtient : $\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{x_2}{3x_1} = TMST$

Maximisation de profit et les décisions de la firme

La firme va acheter les facteurs de production sur des marchés concurrentiels mais nous allons aussi supposer qu'elle peut vendre sa production sur un marché de même type, sur lequel le prix (p) est donné pour elle: elle est preneuse de prix sur ce marché aussi. Elle va alors choisir le niveau de production qui va maximiser son profit et réaliser cette production en utilisant un panier optimal d'input (sinon, elle aurait pu augmenter son profit en choisissant un panier d'input qui coûte moins cher).

Profit de la firme

Nous avons défini le profit comme :

$$\prod = \textbf{Recettes-Coûts}$$

Si le prix du produit est p, ses recettes seront données par

$$\textbf{Recettes totales} = \boldsymbol{pq}$$

Ses coûts vont résulter de l'achat des différents facteurs de production

$$\textbf{Coûts totaux} = \sum_l p_l x_l$$

Horizon temporel de la firme

Dans le **court terme (CT)**, certains facteurs de production seront considérés comme fixes.

Dans le **long terme (LT)** tous les facteurs de production sont variables.

Le problème de maximisation de profit de la firme n'est pas tout-à-fait de même nature dans ces deux horizons temporels.

Maximisation de profit à court terme

Considérons que la firme utilise deux facteurs de production de tel sorte que le **second facteur soit un facteur fixe**.

Notons par $\bar{x}_2$ le niveau fixe de ce facteur. La firme doit donc réaliser sa production en utilisant des paniers du type $(x_1, \bar{x}_2)$ où seul x_1 peut être ajusté. Son problème de maximisation de profit devient alors

$$\boldsymbol{Max_{x_1}}\ p \times q - p_1 x_1 - p_2 \bar{x}_2$$

$$q = f(x_1; \bar{x}_2)$$

En substituant la seconde condition dans la première, nous obtenons un problème assez simple:

$$\boldsymbol{Max_{x_1}}\ p \times f(x_1; \bar{x}_2) - p_1 x_1 - p_2 \bar{x}_2$$

car le profit ne dépend plus que d'une seule variable maintenant, étant donné que $\bar{x}_2$ et tous les prix sont des constantes pour la firme

$$\boldsymbol{\pi(x_1; \bar{x}_2)} = p \times f(x_1; \bar{x}_2) - p_1 x_1 - p_2 \bar{x}_2$$

La solution de ce problème peut être établi simplement avec une approche graphique.

Dans l'espace (x_1, q) nous pouvons représenter à la fois la fonction de production de la firme $q = f(x_1; \bar{x}_2)$ et les droites d'isoprofit qui, de manière similaire aux isoquantes, nous donnent toutes le combinaison de q et de x_1 qui permettent à la firme d'atteindre un même niveau de profit π_0.

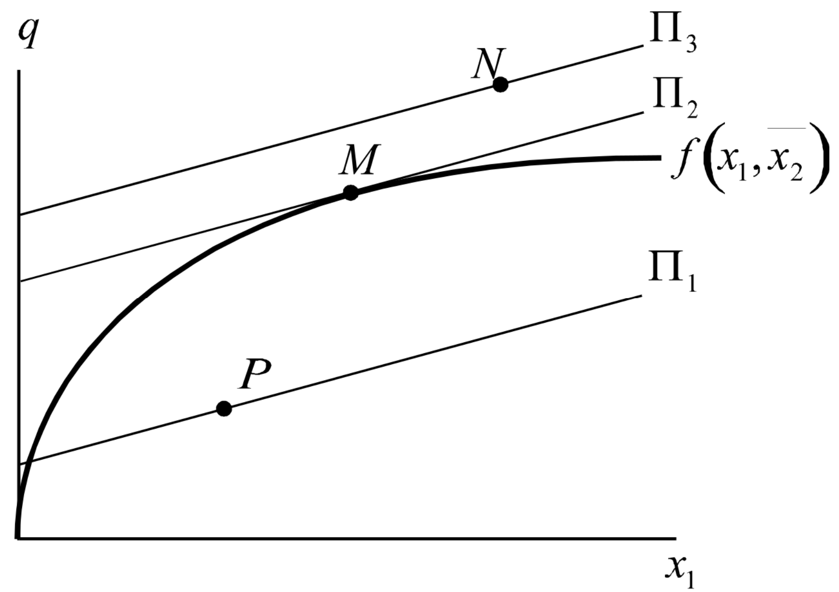
$$p \times q - p_1 x_1 - p_2 \bar{x}_2 = \pi_0$$

$$\Rightarrow q = \gamma(x_1; \pi_0, \bar{x}_2) = \frac{\pi_0 + p_2 \bar{x}_2}{p} + \frac{p_1}{p} x_1$$

La pente de la droite d'isoprofit est donnée par $\frac{\partial \gamma}{\partial x_1} = \frac{p_1}{p} \geq 0$ et que la droite se déplace vers le haut quand on considère un niveau de profit plus élevé : $\frac{\partial \gamma}{\partial \pi} = \frac{1}{p} > 0$

$\Longrightarrow$Par conséquent la droite d'isprofit correspondant à $\pi_1 > \pi_0$ est au dessus de celle correspondant à π_0.

Les deux éléments de ce problème (la fonction de production et l'isoprofit) sont bien sûr conditionné par le niveau du facteur 2.



Maximisation de profit à Court Terme (CT)

Le profit $\prod_3$ est plus intéressant pour la firme mais sa technologie et le niveau donné du facteur 2 ne lui permettent pas d'atteindre ce niveau de profit.

Cette solution graphique montre que deux conditions doivent être remplies à l'optimum de la firme (x_1^*, q^*):

1) La pente de la tangente à la fonction de production (dq/dx_1) en x_1^* et celle de la droite d'isoprofit doivent être égales:

$$Pm_1 = \frac{p_1}{p} \Longleftrightarrow pPm_1 = p_1$$

2) La production q^* doit être réalisable avec $x_1^* \Rightarrow q^* = f(x_1^*; \bar{x}_2)$

Exemple :

Si la fonction de production de la firme est $q = f(x_1, x_2) = \sqrt{10}x_1^{1/4}x_2^{1/2}$ et le second facteur est fixe à court terme, avec $x_2 = \bar{x}_2 = 160$, la fonction de production de **court terme** de la firme est donnée par $q = f(x_1, 160) = 40x_1^{1/4}$.

L'équation $Pm_1 = \frac{p_1}{p}$ nous permet de déterminer la quantité optimale de facteur 1 que la firme doit utiliser:

$$Pm_1 = \frac{10}{x_1^{3/4}} = \frac{p_1}{p} \Longleftrightarrow x_1^* = \left(10\frac{p}{p_1}\right)^{4/3}$$

Application Numérique:

$p = 27$, $p_1 = 1$, $p_2 = 1 \Longrightarrow x_1^* = (10 \times 27)^{4/3} = 1745.1$

$\Longrightarrow q^* = 40(x_1^*)^{1/4} = 40(10 \times 27)^{1/3} = 258.53$

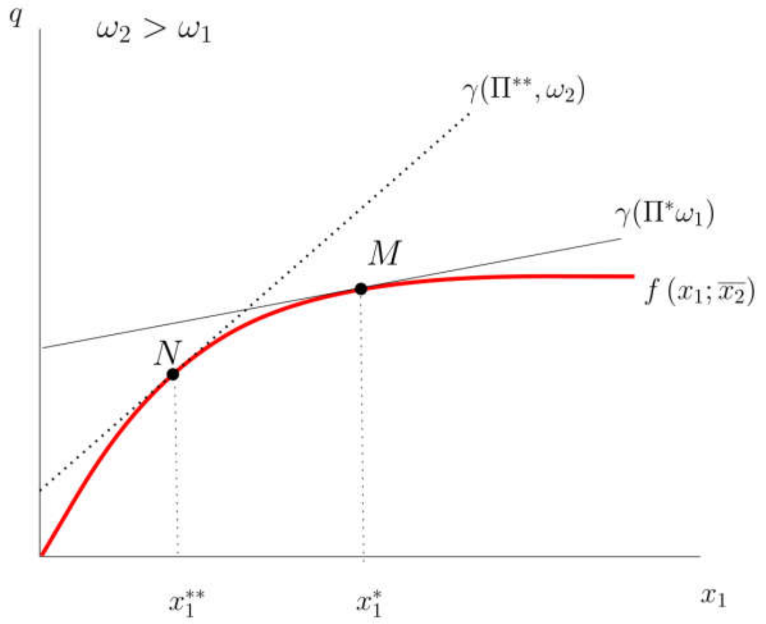
Le profit optimale de la firme en découle :

$\Pi^* = p \times q^* - p_1 \times x_1^* - p_2 \times \bar{x}_2 = 27 \times 258.53 - 1 \times 1745.1 - 1 \times 160 = 5075.2$

Statique comparative à court terme

Nous pouvons étudier graphiquement comment l'optimum de la firme réagit face aux variations des deux (en fait un seul) principaux paramètres de ce problème : les prix p_1 et p.

En effet ce qui compte pour l'établissement du point de tangence entre la droite d'isoprofit la plus élevée et la fonction de production à **CT** est le prix relatif $\omega = p_1/p$.



Statique comparative à CT

Maximisation du profit à long terme

A long terme, tous les facteurs de production sont variables et l'objectif de l'entreprise devient:

$$\max_{x_1, x_2} pf(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2$$

Nous avons de nouveau un optimum si la firme ne peut améliorer son profit en modifiant les quantités utilisées des inputs :

$$\left.\begin{array}{l} pPm_1(x_1^*, x_2^*) = p_1 \\ pPm_2(x_1^*, x_2^*) = p_2 \end{array}\right\} \Longrightarrow (x_1^*, x_2^*) \Longrightarrow q^*$$

On a donc un système de 2 équations à deux inconnues. En le résolvant, nous obtenons :

$$\left.\begin{array}{l} x_1^*(p; p_1, p_2) \\ x_2^*(p; p_1, p_2) \end{array}\right\} \text{Les fonctions de demande de facteurs}$$

$$\Longrightarrow q^* = f(x_1^*, x_2^*) \Longrightarrow \Pi^*$$

Résumé (1/3)

- Le profit est la différence entre les recettes et les coûts. Dans cette définition, il est important de mesurer tous les coûts en utilisant les prix du marché appropriés.
- Les facteurs fixes sont les facteurs dont la quantité est indépendante du niveau de l'output; les facteurs variables sont les facteurs dont les quantités utilisées varient en fonction du niveau de l'output.
- À court terme, certains facteurs doivent être utilisés en quantités prédéterminées.

  À long terme, tous les facteurs peuvent varier.

Résumé (2/3)

- Si une entreprise maximise ses profits, la valeur du produit marginal (ou produit marginal en valeur) de chaque facteur variable doit être égale à son prix.
- Le modèle de maximisation du profit implique que la fonction d'offre d'une entreprise concurrentielle doit être une fonction croissante du prix de l'output et que la fonction de demande de chaque facteur doit être une fonction décroissante de son prix.
- Si une entreprise concurrentielle est caractérisée par des rendements d'échelle constants, ses profits maximums à long terme sont nuis.