Exercices solutionnés

Exercice 1 : Calculer les matrices $A+B,\ 3B-C,\ A+B-D,\ BC$ et ABC où

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 3\\2 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & -2\end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Considérons les matrices réelles suivantes,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\3 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}6 & -1 & 2\\0 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\-1 & 0 & 2\\2 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}0 & 1 & -2\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad G=\begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 0\\1 & -1\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Déterminer, si c'est possible, les matrices suivantes :

$A+B$, $B+2G^t$, $C+5F$, D^t-E, $(G-H^t)+D$, BA, $C+C^t$, AH, $B^t+((2G)^t+H)$, BC, CD, ED, DE, GH^t, GG^t, H^tH, HH^t, GH, $(H^tG^t)^t$, CGB.

Exercice 3 : Calculer la partie symétrique et la partie anti-symétrique de la matrice suivante :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\4 & 1 & 3\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Trouver les réels $a,b,$ c et d pour que les matrices suivantes soient égales,

$$\begin{pmatrix}a+b & a-b\\2c+d & c-2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\1 & 3\end{pmatrix}\qquad \text{et}\qquad \begin{pmatrix}1 & a & 0\\c & a+b & c-a\\b & d+b & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\4 & 6 & 1\\3 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 5 : Soient les deux matrices carrées d'ordre 3 données par,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\3 & -3/2 & -3\\0 & 0 & 0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad B=\begin{pmatrix}1 & b_{12} & b_{13}\\2 & 0 & 2\\b_{31} & b_{32} & -1\end{pmatrix}$$

où $b_{12},\ b_{13},\ b_{31},\ b_{32}\in\mathbb{R}$.

Déterminer les coefficients de la matrice B telle que $AB=0_3$ où 0_3 est une matrice nulle.

Exercice 6 : Soient les matrices réelles suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\3 & 1 & -1\\1 & 2 & 1\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\2 & 2 & 1\\2 & 0 & -1\end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices suivantes $A+B$, AB, BA, A^2, B^2, AA^t et A^tA.
2. A-t-on $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$?
3. Déterminer $DP(A)$, $DP(B)$, $DP(AB)$, $DP(BA)$, $DP(A^tA)$ et $DP(AA^t)$.
4. Calculer $tr(A)$, $tr(B)$, $tr(A^t)$, $tr(BA)$, $tr(A^tA)$, $tr(AA^t)$, $tr((AB)^t)$, $tr(B^tA^t)$.

Exercice 7 : Montrer que les matrices données ci-dessous sont nilpotentes,

$$A=\begin{pmatrix}3&9&-9\\2&0&0\\3&3&-3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}0&2&3&4&5\\0&0&2&3&4\\0&0&0&2&3\\0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Exercice 8 : Soit la matrice carrée réelle d'ordre 3 donnée par,

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$$

1. Calculer les puissances A^2, A^3 et A^4 .
2. En déduire les puissances successives A^{k}, $(\mathrm{k}\in\mathbb{N}^*)$ de la matrice A.
3. Démontrer le résultat de la question 2 à l'aide d'un raisonnement par récurrence.
4. Même questions pour les matrices suivantes,

$$B=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0&0&0\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}\ \text{ et }\quad E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$$

Exercice 9 :

Soit $A=\left[a_{ij}\right]_{1\le i,j\le 3}$ la matrice d'ordre 3 avec, $a_{ij}=1\ \ \forall i,j=1,2,3$ et soit la matrice $B=A+3I_3$.

1. Calculer les puissances A^2, A^3.
2. En déduire les puissances successives A^n, $(n\ge 1)$ de la matrice A.
3. En déduire B^n pour tout $n\ge 1$.

Exercice 10 :

Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix}3&0&0\\5&-1&0\\7&3&4\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}2&-1&3\\0&0&5\\0&0&3\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}1&0&0\\0&2&4\\0&3&3\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}1&-3&0\\2&4&0\\0&0&3\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&0&3\\0&2&0\\2&0&3\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\5&-1&2\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}2&0&3\\1&4&3\\-1&4&5\end{vmatrix}\qquad\begin{vmatrix}4&-2&4\\2&-3&-4\\3&3&8\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&2&2\\1&2&3&3\\1&2&3&4\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}1&0&-3&1\\0&-2&1&2\\-1&0&3&1\\0&-1&1&2\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&-1\end{vmatrix}\ \begin{vmatrix}-3&4&-5&1\\-1&1&-1&-2\\5&4&-5&4\\9&0&1&-4\end{vmatrix}$$

Exercice 11 : Soit la matrice suivante :

$$A_m=\begin{pmatrix}1&2&1\\m&1&1\\0&1&2\end{pmatrix}$$

1. Déterminer le paramètre m pour que le déterminant de cette matrice soit nul, puis selon le paramètre m, calculer $rg(A_m)$, le rang de la matrice A_m.
2. En appliquant la méthode de Gauss, retrouver $rg(A_m)$.

Exercice 12 : Calculer les inverses, en cas d'existence, des matrices suivantes

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\3&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2&3\\2&1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}-1&0\\1&-2\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}.$$

Exercice 13 : Soit la matrice carrée d'ordre 3 donnée par,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}$$

Quelle est parmi les matrices ci-dessous, son inverse ?

$$B_1=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2}\\ -2 & 1 & -2\\ 2 & \frac{-1}{2} & \frac{11}{2}\end{pmatrix} \text{ ou } B_2=\begin{pmatrix}2 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Exercice 14 : Soit la matrice A donnée par,

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 4 & -3 & 4\\ 3 & -3 & 4\end{pmatrix}$$

1. Calculer la matrice A^3 ;
2. En déduire que la matrice A est inversible ;
3. En déduire l'inverse A^{-1}.

Exercice 15 :

Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est inversible ou non. Dans le cas où la matrice est inversible, calculer son inverse :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 5 & 6 & 1\end{pmatrix},\quad \mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \mathrm{C}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 6\end{pmatrix},\quad \mathrm{D}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 5\end{pmatrix},\quad \mathrm{E}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 7\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{F}=\begin{pmatrix}2 & -2 & -2\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix},\quad \mathrm{G}=\begin{pmatrix}2 & -3 & -1\\ 4 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix},\quad \mathrm{H}=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Exercice 16 : Pour chacune des matrices suivantes, dire si elle est inversible ou non. Dans le cas où la matrice est inversible, calculer son inverse,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 4 & 3\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 3\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad F=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\quad G=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix},\quad H=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & -2\\ -3 & 4 & 3\end{pmatrix},$$

$$J=\begin{pmatrix}4 & 3 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & 2\end{pmatrix}\quad L=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 3\\ -2 & -7 & -1\end{pmatrix}$$

Exercice 17 : Soient les matrices carrées A et B d'ordre 3 données par :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1. Montrer que A et B sont inversibles.
2. Calculer les inverses A^{-1} et B^{-1}.
3. En déduire $(AB)^{-1}$ et $(BA)^{-1}$.

Exercice 18 :

Pour quelle valeur du réel m, la matrice suivante est –elle inversible ?

$$M_m = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Exercice 19 : Pour quelle valeur du paramètre m la matrice A_m est-elle inversible ? calculer A^{-1} en cas d'existence.

$$A_m = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4-m & 2m & 3+m \\ 1+m & -1-m & 1+m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

Exercice 20 : Dire dans chaque cas si A est inversible ou non. Si A est inversible, exprimer son inverse A^{-1} en fonction de A et la matrice identité I,

$$\frac{1}{3}A^2 = 0, \quad A^4 = 0, \quad A^2 = I, \quad A^3 = I, \quad A^2 = -A, \quad A^3 = A,$$
$$A^3 + 2A = I, \quad A^2 - 5A + 6I = 0, \quad A^3 + 4A - 6I = 0$$
$$(A - I)(A + 2I) = 0, \quad (A - 3I)(3A + I) = 0, \quad (A - I)(A + 2I) = -2I, \quad (A + 2I)(A + I) = 3I.$$

Exercice 21 : Soit la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Calculer A^2 puis A^3.
2. Montrer que $-A^3 + 4A^2 - 10A - 2I_3 = 0_3$;
3. En déduire que A^{-1}.

Exercice 22 :

Soit la matrice suivante,

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $M^2 + M + I_4 = 0_4$ où I_4 est la matrice identité d'ordre 4. En déduire que $M^3 = I_4$
2. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

Exercice 23 : Soit la matrice A donnée par,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que la matrice A vérifie l'expression suivante : $-A^3 + 4A^2 + 12A + 5I_3 = 0$.
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

Exercice 24 : Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$$

1. Montrer que la matrice A vérifie la relation : $-A^3 + 2A^2 + 6A - 4I_3 = 0_3$;
2. En déduire que la matrice A est inversible et calculer son inverse A^{-1} ;
3. Retrouver l'inverse A^{-1} à l'aide de la méthode des cofacteurs.
4. Appliquer la méthode de Gauss-Jordan pour calculer A^{-1}.

Exercice 25 (CF-10/11) : Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs de a, b et c de $\mathbb{R}$ pour que l'on ait la relation $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0_3$ où 0_3 est la matrice nulle d'ordre 3 et I_3 est la matrice identité d'ordre 3.

Exercice 26 (CF-11/12) : On considère les deux matrices carrées d'ordre 3 données par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices $(A - I_3)^2$ et AB où I_3 est la matrice identité d'ordre 3 ;
2. En déduire que la matrice A est inversible, puis déterminer son inverse A^{-1} ;
3. Montrer que la matrice A vérifie la relation : $A^3 - 2A^2 + A = I_3$;
4. À l'aide de la relation établie à la question 3, donner l'expression de la matrice inverse A^{-1} ;
5. À l'aide de la méthode des cofacteurs, retrouver la matrice inverse A^{-1}.

Exercice 27 (CR-11/12) : Soit les matrices carrées d'ordre 3 données par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices $(I_3 - A)$, $(A + 2I_3)$, $(I_3 - A)(A + 2I_3)$ et puis AB ;
2. En déduire que la matrice A est inversible, puis déterminer son inverse A^{-1} ;
3. Montrer que la matrice A vérifie la relation : $A^3 + A^2 - 2A + 3I_3 = 0_3$;
4. À l'aide de la relation établie à la question 3, donner l'expression de la matrice inverse A^{-1} ;
5. À l'aide de la méthode des cofacteurs, retrouver la matrice inverse A^{-1}.

Exercice 28 (CF-13/14) : Soient les deux matrices carrées réelles d'ordre 3 données par,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer la partie symétrique et la partie antisymétrique de la matrice A ;
2. Calculer les matrices puissances B^2, B^3 et B^4. En déduire à l'aide d'un raisonnement par récurrence les puissances successives B^n, $(n \in \mathbb{N}^*)$ de la matrice B.

Exercice 29 (CF-13/14) :

Soient les trois matrices carrées d'ordre 3 données par,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les matrices $(\mathrm{A}^2 + \mathrm{I}_3)$, $\mathrm{A}(\mathrm{A}^2 + \mathrm{I}_3)$ puis AB ;
2. En déduire que la matrice A est inversible, puis déterminer son inverse A^{-1} ;
3. Montrer que la matrice A vérifie la relation : $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A} + 3\mathrm{I}_3 = 0_3$ où 0_3 est la matrice nulle d'ordre 3 ;
4. À l'aide de la relation établie à la question 3, donner l'expression de la matrice A^{-1} ;

5. À l'aide de la méthode des cofacteurs, retrouver la matrice inverse A^{-1}.

Exercice 30 (CR-13/14) : Soient les trois matrices réelles données par $(c_{12}, c_{13}, c_{31}, c_{32} \in \mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -\frac{3}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad C = \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \\ 2 & 0 & 2 \\ c_{31} & c_{32} & -1 \end{pmatrix}$$

1. Construire une matrice carrée symétrique à partir de la matrice A ;
2. Déterminer les coefficients de la matrice C pour que B et C soient des diviseurs de zéro.

Solutions

Solution 1 :

Tout calcul fait on obtient :

$$
\begin{aligned}
A+B &= \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 5 & 2\end{pmatrix}\\
3B-C &= 3\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 9\\ 4 & 2\end{pmatrix}\\
A+B-D &= (A+B)-D = \begin{pmatrix}4 & 2\\ 5 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 4\end{pmatrix}\\
BC &= \begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix}\\
ABC &= A(BC) = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}8 & 3\\ 4 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12 & 5\\ 28 & 10\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Solution 2 :

Le calcul des opérations $A+B, (G-H^t)+D$, BA, $B^t+((2G)^t+H)$ et GH^t est impossible faute de l'incompatibilité des types. Pour le reste des opérations, tout calcul fait on obtient :

$$
\begin{aligned}
B+2G^t &= \begin{pmatrix}6 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\\
C+5F &= \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & -2 & 3\\ -1 & 5 & 2\\ 2 & 0 & 8\end{pmatrix}\\
D^t-E &= (1 \quad 2 \quad -1)-(0 \quad 1 \quad -2) = (1 \quad 1 \quad 1)\\
C+C^t &= \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -2 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ -3 & 0 & 2\\ 5 & 2 & 6\end{pmatrix}\\
AH &= \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 3 & 5 & 9\end{pmatrix}\\
BC &= \begin{pmatrix}6 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11 & -12 & 22\\ 5 & 0 & 11\end{pmatrix}\\
CD &= \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\ -3\\ -1\end{pmatrix}\\
ED &= (0 \quad 1 \quad -2)\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix} = 4\\
DE &= \begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix}(0 \quad 1 \quad -2) = \begin{pmatrix}0 & 1 & -2\\ 0 & 2 & -4\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\\
GG^t &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 2 & 0\\ 2 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\\
H^tH &= \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 5 & 8\\ 2 & 8 & 13\end{pmatrix}\\
HH^t &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 8\\ 8 & 13\end{pmatrix}\\
GH &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 2 & 4\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$(H^tG^t)^t = GH = \begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 2 & 4\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$CGB = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & 0 & 5\\ 12 & -2 & 4\\ 6 & -2 & -1\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0 & -2 & -6\\ 6 & -4 & -7\\ 30 & -6 & 7\end{pmatrix}$$

Solution 3 :

La partie symétrique de la matrice A est donnée par :

$$\frac{1}{2}(A+A^t) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 4\\ 2 & 4 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2} & 1\\ \frac{3}{2} & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

La partie anti-symétrique de la matrice A est donnée par :

$$\frac{1}{2}(A-A^t) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 4 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -5 & 2\\ 5 & 0 & 2\\ -2 & -2 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -\frac{5}{2} & 1\\ \frac{5}{2} & 0 & 1\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

On remarque que $\left[\frac{1}{2}(A+A^t)\right]+\left[\frac{1}{2}(A-A^t)\right] = A$

Solution 4 :

$$\begin{pmatrix}a+b & a-b\\ 2c+d & c-2d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 6\\ 1 & 3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=4\\ a-b=6\\ 2c+d=1\\ c-2d=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=5\\ b=-1\\ c=1\\ d=-1\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ c & a+b & c-a\\ b & d+b & d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 4 & 6 & 1\\ 3 & 4 & 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}a=3\\ b=3\\ c=4\\ d=1\end{cases}$$

Solution 5 :

$$AB = \begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 3 & -3/2 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & b_{12} & b_{13}\\ 2 & 0 & 2\\ b_{31} & b_{32} & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2b_{31} & 2b_{12}-2b_{32} & 2b_{13}\\ -3b_{31} & 3b_{12}-3b_{32} & 3b_{13}\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ce qui implique, $\begin{cases}-2b_{31}=-3b_{31}=0\\ 2b_{12}-2b_{32}=3b_{12}-3b_{32}=0\\ 2b_{13}=3b_{13}=0\end{cases}$ $\begin{cases}b_{31}=b_{13}=0\\ b_{12}=b_{32}\end{cases}$

On prend par exemple $b_{12}=b_{32}=\alpha,\ \alpha\in\mathbb{R}$

$$B = \begin{pmatrix}1 & \alpha & 0\\ 2 & 0 & 2\\ 0 & \alpha & -1\end{pmatrix}$$

Solution 6 :

Tout calcul fait,

$$A+B = \begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1&0&-2\\2&2&1\\2&0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\5&3&0\\3&2&0\end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&-2\\2&2&1\\2&0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&0&-4\\-3&2&-4\\5&4&-1\end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix}-1&0&-2\\2&2&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&-4&-4\\9&4&3\\1&-2&3\end{pmatrix} \neq AB$$

$$A^2 = \begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3&4&4\\5&-1&4\\8&4&1\end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix}-1&0&-2\\2&2&1\\2&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&-2\\2&2&1\\2&0&-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3&0&4\\4&4&-3\\-4&0&-3\end{pmatrix}$$

$$AA^t = \begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&2\\2&-1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5&1&3\\1&11&4\\3&4&6\end{pmatrix}$$

$$A^tA = \begin{pmatrix}1&3&1\\0&1&2\\2&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&2\\3&1&-1\\1&2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11&5&0\\5&5&1\\0&1&6\end{pmatrix} \neq AA^t$$

1. $$(A+B)^2 = \begin{pmatrix}0&0&0\\5&3&0\\3&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\5&3&0\\3&2&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\15&9&0\\10&6&0\end{pmatrix}$$

$$A^2+2AB+B^2 = \begin{pmatrix}3&4&4\\5&-1&4\\8&4&1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}3&0&-4\\-3&2&-4\\5&4&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3&0&4\\4&4&-3\\-4&0&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6&4&0\\3&7&-7\\14&12&-4\end{pmatrix}$$

   On remarque que $(A+B)^2 \neq A^2+2AB+B^2$, puisque $AB \neq AB$

2. On calcule les diagonales principales des matrices A, B, AB et BA :
   $DP(A) = (1,1,1)$, $DP(B) = (-1,2,-1)$, $DP(AB) = (3,2,-1)$, $DP(BA) = (-3,4,3)$, $DP(AA^t) = (5,11,6)$, $DP(A^tA) = (11,5,6)$.

3. D'après la deuxième question :
   $tr(A) = 3$, $tr(B) = 0$, $tr(BA) = 4$, $tr(A^t) = 3$, $tr(A) = 3$, $tr(A^tA) = 22$, $tr(AA^t) = 22$, $tr((AB)^t) = 4$, $tr(AB) = 4$, $tr(BA) = 4$, $tr(B^tA^t) = 4$, $tr((AB)^t) = 4$, $tr(AB) = 4$, $tr(BA) = 4$.
   On remarque que $tr(BA) = tr(AB)$, $tr(A) = tr(A^t)$

Solution 7 :

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix}3&9&-9\\2&0&0\\3&3&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&9&-9\\2&0&0\\3&3&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\6&18&-18\\6&18&-18\end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix}0&0&0\\6&18&-18\\6&18&-18\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&9&-9\\2&0&0\\3&3&-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = 0_3$$

Comme $A^2 \neq 0_3$ et $A^3 = 0_3$, alors la matrice A est nilpotente d'ordre 3. Ainsi, $A^k = 0_3$, pour tout $k \geq 3$.

$$B^2 = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_4$$

En déduire les puissances successives de B : Comme $B^3 \neq 0_4$ et $B^4 = 0_4$, alors la matrice B est nilpotente d'ordre 4. Ainsi, $B^k = 0_4$, pour tout $k \geq 4$.

-

$$C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 12 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 8 & 36 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_5$$

Comme $C^4 \neq 0_5$ et $C^5 = 0_5$, alors la matrice C est nilpotente d'ordre 5. Ainsi, $C^k = 0_5$, pour tout $k \geq 5$.

Solution 8 :

1. Les matrices puissances :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 1^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 3^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^4 & 0 & 0 \\ 0 & 2^4 & 0 \\ 0 & 0 & 3^4 \end{pmatrix}$$

2. On remarque que les puissances successives de A sont de la forme :

$$\mathrm{A}^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}^*$$

3. Raisonnement par récurrence :

Vérification : pour $k = 1$,

$$\mathrm{A}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 3^1 \end{pmatrix}$$

Hypothèse de récurrence : on suppose qu'à l'ordre k on a :

$$A^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}$$

Démonstration : on montre que le résultat reste vrai à l'ordre $k+1$:

$$A^{k+1} = A^k\ A = \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 2^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{k+1} \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$, $\qquad A^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 4^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix}$

4. On montre de même que :

- Calculons les puissances B^2 et B^3 :

  On remarque que $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2E$ avec $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

  Ainsi, $B^k = (2E)^k = 2^k E^k$ pour tout $\in \mathbb{N}^*$.

  $E^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3E$ $\quad$ donc $B^2 = 2^2.E^2 = 2^2.3E$

  $E^3 = E^2E = 3EE = 3E^2 = 3^2E$ $\quad$ donc $B^3 = 2^3.E^3 = 2^3.3^2E$

  On remarque que les puissances successives de B sont de la forme : $B^k = 2^k.3^{k-1}E$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

  Raisonnement par récurrence :

  Vérification : pour $k = 1$,

  $$B^1 = 2^1.3^0E = 2E$$

  Hypothèse de récurrence : on suppose qu'à l'ordre k on a : $B^k = 2^k.3^{k-1}E$

  Démonstration : on montre que le résultat reste vrai à l'ordre $k+1$, c'est-à-dire, $B^{k+1} = 2^{k+1}.3^kC$?

  $$B^{k+1} = B^k\ B = 2^k.3^{k-1}E.2\,E = 2^{k+1}.3^{k-1}E^2 = 2^{k+1}.3^{k-1}.3E = 2^{k+1}.3^kE$$

  Conclusion : $\forall$ k $\in \mathbb{N}^*$,

  $$B^k = 2^k.3^{k-1}E = 2^k.3^{k-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ et $\quad C^k = 0_3 \quad \forall\, k \geq 3$.

- $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 2^0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^0 & 0 & 2^0 \end{pmatrix}$, $D^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 & 2^1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^1 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}$,

  $D^3 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$ $\quad$ et $\quad D^k = \begin{pmatrix} 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{k-1} & 0 & 2^{k-1} \end{pmatrix} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

- $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3^0E, \qquad E^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3^1E,$

  $E^3 = E^2E = 3^1E^2 = 3^2E$ $\quad$ et $\quad E^k = 3^{k-1}E \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.

Solution 9 :

1. Les matrices A et B sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = A + 3I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Les matrices puissances de A :

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3A \\ A^3 &= A^2A = 3AA = 3A^2 = 3^2A \end{aligned}$$

2. On remarque que les puissances successives de A sont de la forme :

$$A^n = 3^{n-1}A \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$

Raisonnement par récurrence :

Vérification : pour $k = 1$,

$$\mathrm{A}^1 = 1A = 1^0A = 1^{1-1}A$$

Hypothèse de récurrence : on suppose qu'à l'ordre $n \geq 1$ on a :

$$A^n = 3^{n-1}A$$

Démonstration : on montre que le résultat reste vrai à l'ordre $n + 1$:

$$A^{n+1} = A^n\, A = 3^{n-1}AA = 3^{n-1}3A = 3^nA$$

Conclusion : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\qquad A^n = 3^{n-1}A$

3. On calcule de même B^n pour tout $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} B^n &= (A + 3I_3)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k (3I_3)^{n-k} \qquad \text{Formule de binôme avec } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 3^{n-k} \binom{n}{k} A^k \\ &= 3^n \binom{n}{0} I_3 + \sum_{k=1}^{n} 3^{n-k} \binom{n}{k} A^k \\ &= 3^n \binom{n}{0} I_3 + \sum_{k=1}^{n} 3^{n-k} \binom{n}{k} A^k \\ &= 3^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} 3^{n-k} \binom{n}{k} 3^{k-1} A \qquad \text{car } \binom{n}{0} = 1 \\ &= 3^n I_3 + 3^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \right) A \end{aligned}$$

Or

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$$

Donc,

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n - 1$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$B^n = 3^n I_3 + 3^{n-1}(2^n - 1)\,A$$

Solution 10 :

Calculons les déterminants suivants :

- $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) \times 4 = -12$ Le déterminant d'une matrice triangulaire inférieure est égal au produit de ses éléments diagonaux.
- $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times 3 = 0$ Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure est égal au produit de ses éléments diagonaux.
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6$ Le déterminant d'une matrice diagonale est égal au produit de ses éléments diagonaux.
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -6$ On développe selon la première ligne
- $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 30$ On développe selon la troisième ligne
- $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -6$ On développe selon la deuxième ligne
- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$ Le déterminant est nul puisque la première ligne et la deuxième ligne de la matrice sont proportionnelles ($L_2 = 2L_1$)
- $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = ?$

Méthode de Sarrus (disposition ligne) :

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ -1 & 4 \end{matrix} \\ &= [(2 \times 4 \times 5) + (0 \times 3 \times (-1)) + (3 \times 1 \times 4)] - [((-1) \times 4 \times 3) + (4 \times 3 \times 2) + (5 \times 1 \times 0)] \\ &= [40 + 0 + 12] - [-12 + 24 + 0] \\ &= 40 \end{aligned}$$

Méthode de Sarrus (disposition colonne) :

$$\begin{aligned} det(A) &= \begin{matrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \end{matrix} \end{matrix} \\ &= [(2 \times 4 \times 5) + (1 \times 4 \times 3) + ((-1) \times 0 \times 3)] - [((-1) \times 4 \times 3) + (2 \times 4 \times 3) + (1 \times 0 \times 5)] \\ &= [40 + 12 + 0] - [-12 + 24 + 0] \\ &= 40 \end{aligned}$$

Méthode des cofacteurs :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = +4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4(13) - 4(3) = 40$$

ou encore

$$det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 40$$

- On applique toutes les propriétés possibles pour faciliter les calculs du déterminant :

$$\begin{vmatrix}4 & -2 & 4\\ 2 & -3 & -4\\ 3 & 3 & 8\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}4 & -2 & 1\\ 2 & -3 & -1\\ 3 & 3 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}L_1\\ L_2+L_1\\ L_3-2L_1\end{matrix} = 4\begin{vmatrix}4 & -2 & 1\\ 6 & -5 & 0\\ -5 & 7 & 0\end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix}6 & -5\\ -5 & 7\end{vmatrix} = 68$$

- $$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = 1$$

- $$\begin{vmatrix}1 & 0 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 3 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{vmatrix}\begin{matrix}L_1\\ L_2\\ L_3+L_1\\ L_4\end{matrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & -3 & 1\\ 0 & -2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 2\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix} = 2$$

- $$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & -2\\ 0 & -2 & 0 & -2\\ 0 & -2 & -2 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & -2 & -2\\ -2 & 0 & -2\\ -2 & -2 & -2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}0 & -2 & -2\\ 0 & 0 & -2\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix}-2 & -2\\ 0 & -2\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{vmatrix} = -8$$

- $$\begin{vmatrix}-3 & 4 & -5 & 1\\ -1 & 1 & -1 & -2\\ 5 & 4 & -5 & 4\\ 9 & 0 & 1 & -4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 0 & -1 & 9\\ -1 & 1 & -1 & -2\\ 9 & 0 & -1 & 12\\ 9 & 0 & 1 & -4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & -1 & 9\\ 9 & -1 & 12\\ 9 & 1 & -4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}10 & 0 & 5\\ 18 & 0 & 8\\ 9 & 1 & -4\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}10 & 5\\ 18 & 8\end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix}-3 & 4 & -5 & 1\\ -1 & 1 & -1 & -2\\ 5 & 4 & -5 & 4\\ 9 & 0 & 1 & -4\end{vmatrix} = 10$$

Solution 11 :

Calculons le déterminant de la matrice A_m :

$$det(A_m) = \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ m & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} - m\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix} = 1-3m$$

Ainsi, $det(A_m) = 0 \iff 1-3m = 0 \iff m = \frac{1}{3}$

Si $m \neq \frac{1}{3}$ alors $det(A_m) \neq 0$ et donc $rg(A_m) = 3$

Si $m = \frac{1}{3}$ alors $det\left(A_{\frac{1}{3}}\right) = 0$ et donc $rg\left(A_{\frac{1}{3}}\right) \leq 2$. Comme $\begin{vmatrix}1 & 2\\ \frac{1}{3} & 1\end{vmatrix} \neq 0$ alors $rg(A) = 2$.

1. Appliquons la méthode de Gauss :

$$A_m = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ m & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix} \underset{\sim}{C_{31}} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & m\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_{21}(-1); L_{32}(-2)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & m-1\\ 0 & -3 & -2\end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{L_{32}(-3)} \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & m-1\\ 0 & 0 & 1-3m\end{pmatrix}$$

Si $1-3m \neq 0$, c'est-à-dire, $m \neq \frac{1}{3}$ alors et donc $rg(A_m) = 3$ (le nombre de pivots est 3).

Si $1-3m=0$, c'est-à-dire, $m=\frac{1}{3}$ alors et donc $rg\left(A_{\frac{1}{3}}\right)=2$, (le nombre de pivots est 2).

Solution 12 :

Les matrices A, B, C, Det E sont inversibles et

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & 2\end{pmatrix},\qquad B^{-1}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -2 & 2\end{pmatrix},\qquad C^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix},$$

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix},\qquad E^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Tandis que la matrice F est non inversible puisque $\det(F)=0$.

Solution 13 :

On remarque que $AB_2=I_3$, donc l'inverse de la matrice A est $A^{-1}=B_2$.

Solution 14 :

Calculons la matrice A^3 :

$$A^2 = \begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 4 & -3 & 4\\ 3 & -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 4 & -3 & 4\\ 3 & -3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -4 & -7 & 8\\ -3 & -6 & 7\end{pmatrix}$$

$$=$$

$$A^3 = \begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -4 & -7 & 8\\ -3 & -6 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 4 & -3 & 4\\ 3 & -3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1. La matrice A est inversible puisque $A^3=A^2A=AA^2=I_3$.
2. L'inverse de la matrice A est :

$$A^{-1}=A^2=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -4 & -7 & 8\\ -3 & -6 & 7\end{pmatrix}$$

Solution 15 :

La matrice A admet une ligne nulle donc,

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 5 & 6 & 1\end{vmatrix}=0$$

La matrice A est non inversible.

- La matrice B admet une colonne nulle donc,

$$\det(B)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=0$$

La matrice B est non inversible.

- La troisième ligne de la matrice C est proportionnelle à la première ligne ($L_3=3L_1$) donc,

$$\det(C)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\\ 3 & 3 & 6\end{vmatrix}=0$$

La matrice C est non inversible.

- La troisième ligne de la matrice D est combinaison linéaire des deux premières lignes ($L_3=L_1+L_2$) donc,

$$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

La matrice D est non inversible.

- La matrice E est inversible, en effet

$$\det(E) = \begin{matrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \\ -1 & 2 & 1 \end{matrix} = -7\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -49 \neq 0$$

La matrice E est inversible et

$$E^{-1} = \frac{1}{\det(E)} comatrice^t(E)$$

où,

$$comatrice(E) \quad = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -7 & 0 \\ -3 & 4 & -7 \\ 7 & -21 & 0 \end{pmatrix}$$

$$comatrice^t(E) \quad = \begin{pmatrix} -14 & -3 & 7 \\ -7 & 2 & -21 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$E^{-1} = \frac{-1}{49}\begin{pmatrix} -14 & -3 & 7 \\ -7 & 2 & -21 \\ 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{3}{49} & -\frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{2}{49} & \frac{3}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice F est inversible, en effet

$$\det(F) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \left|\begin{matrix} 2 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{matrix}\right. = -\begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

La matrice F est inversible et

$$F^{-1} = \frac{1}{\det(F)} comatrice^t(F)$$

où,

$$comatrice(F) \quad = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 2 & 8 & -6 \\ -4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$comatrice^t(F) \quad = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ -2 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$F^{-1} = \frac{-1}{12}\begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ -2 & 8 & -4 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

- La matrice G est inversible, en effet

$$\det(G)=\begin{vmatrix}2 & -3 & -1\\ 4 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-9\neq 0$$

La matrice G est inversible et

$$G^{-1}=\frac{1}{det(G)}comatrice^{t}(G)$$

où,

$$comatrice(G)\ =\ \begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 2 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}4 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-3 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 2\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 9\\ -2 & 1 & -7\\ -1 & -4 & 10\end{pmatrix}$$

$$comatrice^{t}(G)\ =\ \begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -4\\ 9 & -7 & 10\end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$F^{-1}=\frac{-1}{9}\begin{pmatrix}0 & -2 & -1\\ 0 & 1 & -4\\ 9 & -7 & 10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \frac{2}{9} & \frac{1}{9}\\ 0 & -\frac{1}{9} & \frac{4}{9}\\ -1 & \frac{7}{9} & -\frac{10}{9}\end{pmatrix}$$

- La matrice H est inversible, en effet

$$\det(H)=\begin{vmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 1\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=3(4)(-2)=-24\neq 0$$

La matrice H est inversible et

$$H^{-1}=\frac{1}{det(H)}comatrice^{t}(H)$$

où,

$$comatrice(H)\ =\ \begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}0 & 4\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 0\\ 4 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 4\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & -3 & 12\end{pmatrix}$$

$$comatrice^{t}(H)\ =\ \begin{pmatrix}-8 & 0 & 0\\ 0 & -6 & -3\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$H^{-1}=\frac{-1}{24}\begin{pmatrix}-8 & 0 & 0\\ 0 & -6 & -3\\ 0 & 0 & 12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{8}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Solution 16 :

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad det(A)=6\neq 0,\quad A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\3&4&3\end{pmatrix},\quad det(B)=-3\neq 0,\quad B^{-1}=\frac{-1}{3}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}-1&0\\4&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\3&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&-1\\3&4\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&0\\4&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\3&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\3&4\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&0\\-1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\2&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\2&-1\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t$$

$$B^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&-1&0\\\frac{-11}{3}&\frac{4}{3}&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix},\quad det(C)=2\neq 0,\quad C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2&-1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&-1\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&2\\0&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\0&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}1&2\\2&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\0&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t$$

$$C^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\-1&1&0\\-5&1&2\end{pmatrix}^t$$

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}1&\frac{-1}{2}&\frac{-5}{2}\\0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&4\\0&3&3\end{pmatrix},\quad det(D)=-6\neq 0\quad D^{-1}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2&4\\3&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&4\\0&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&2\\0&3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&0\\3&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&0\\2&4\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&4\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t$$

$$D^{-1}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}-6&0&0\\0&3&-3\\0&-4&2\end{pmatrix}^t$$

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{-1}{2}&\frac{2}{3}\\0&\frac{1}{2}&\frac{-1}{3}\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1&-3&0\\2&4&0\\0&0&3\end{pmatrix},\quad det(E)=30\neq 0,\quad E^{-1}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}4&0\\0&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&4\\0&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-3&0\\0&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-3\\0&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}-3&0\\4&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\2&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&-3\\2&4\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t$$

$$E^{-1}=\frac{1}{30}\begin{pmatrix}12&-6&0\\9&3&0\\0&0&10\end{pmatrix}^t$$

$$E^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5}&\frac{3}{10}&0\\\frac{-1}{5}&\frac{1}{10}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$F=\begin{pmatrix}1&0&3\\0&2&0\\2&0&3\end{pmatrix},\quad det(F)=-6\neq 0,\quad F^{-1}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2&0\\0&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\2&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&2\\2&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&3\\0&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&3\\2&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\2&0\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&3\\2&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&3\\0&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\0&2\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t$$

$$F^{-1}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix}6&0&-4\\0&-3&0\\-6&0&2\end{pmatrix}^t$$

$$F^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-6&0&6\\0&3&0\\4&0&-2\end{pmatrix}$$

$$F^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&1\\0&\frac{1}{2}&0\\\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{3}\end{pmatrix}$$

$$L=\begin{pmatrix}-1&2&4\\1&3&3\\-2&-7&-1\end{pmatrix},\quad \det(L)=-32\neq 0 \text{ et}$$

$$\begin{aligned}L^{-1}&=\frac{-1}{32}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}3&3\\-7&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&3\\-2&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&3\\-2&-7\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}2&4\\-7&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-1&4\\-2&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-1&2\\-2&-7\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}2&4\\3&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}-1&4\\1&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}-1&2\\1&3\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t\\
&=\frac{-1}{32}\begin{pmatrix}+(18)&-(5)&+(-1)\\-(26)&+(9)&-(11)\\+(-6)&-(-7)&+(-5)\end{pmatrix}^t\\
&=\frac{1}{32}\begin{pmatrix}-18&26&6\\5&-9&-7\\1&11&5\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}-\frac{9}{16}&\frac{13}{16}&\frac{3}{16}\\\frac{5}{32}&-\frac{9}{32}&-\frac{7}{32}\\\frac{1}{32}&\frac{11}{32}&\frac{5}{32}\end{pmatrix}\end{aligned}$$

- ✓ La matrice G contient une colonne nulle ($det(G) = 0$), donc G non inversible.
- ✓ Deux colonnes de la matrice H sont opposées ($det(H) = 0$), donc H non inversible.
- ✓ La troisième colonne de J est combinaison linéaire des deux premières colonnes ($det(J) = 0$), donc J non inversible.
- ✓ La troisième ligne et la première ligne de la matrice K sont proportionnelles ($det(K) = 0$), donc K non inversible.

Solution 17 :

Montrons que A et B sont inversibles :

$$det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

$$det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

1. Calculons les inverses A^{-1} et B^{-1} :

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$=$$

$$B^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. En déduire $(AB)^{-1}$ et $(BA)^{-1}$:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{2} & 4 \\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{4} & \frac{3}{2} \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(BA)^{-1} = A^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{5}{2} & 6 \\ \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & -2 \\ \frac{1}{4} & \frac{-3}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

Solution 18 :

Calculons d'abord $\det(M_m)$:

$$\det(M_m) = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m-1 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 1-m & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ -1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 2 & m+1 \end{vmatrix}$$

$$= (m-1)\begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & m+1 \end{vmatrix} = (m-1)(m(m+1)-2) = (m-1)(m^2+m-2) = (m-1)^2(m+2)$$

Ou mieux encore

$$
\begin{aligned}
\det(M_m) &= \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{matrix} m+2 & m+2 & m+2 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{matrix} \\
&= (m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} \\
&= (m+2)(m-1)^2
\end{aligned}
$$

Si $m = -2$ ou $m = 1$, alors $\det(M_m) = 0$, la matrice M_m est donc non inversible.

Si $m \neq -2$ et $m \neq 1$, alors $\det(M_m) \neq 0$, la matrice M_m est donc inversible.

Solution 19 :

Tout calcul fait on a :

$$
\begin{aligned}
\det(A_m) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4-m & 2m & 3+m \\ 1+m & -1-m & 1+m \end{vmatrix} \\
& \quad\;\; C_1 \qquad C_1+C_2 \qquad C_3-C_1 \\
&= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4-m & 4+m & -1+2m \\ 1+m & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= (1+m)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4+m & -1+2m \end{vmatrix} \\
&= 9m(1+m)
\end{aligned}
$$

Donc, si $m \neq 0$ et $m \neq -1$ alors $\det(A_m) \neq 0$ et A_m est inversible.

Pour tout $m \in \mathbb{R} - \{-1,0\}$, $det(A) = 9m(1+m) \neq 0$. Donc la matrice A_m est inversible et son inverse est donné par :

$$A_m^{-1} = \frac{1}{\det(A_m)} comatrice^t(A_m)$$

où,

$$
comatrice(A_m) = \begin{pmatrix}
+\begin{vmatrix} 2m & 3+m \\ -1-m & 1+m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4-m & 3+m \\ 1+m & 1+m \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4-m & 2m \\ 1+m & -1-m \end{vmatrix} \\
-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1-m & 1+m \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1+m & 1+m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1+m & -1-m \end{vmatrix} \\
+\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2m & 3+m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4-m & 3+m \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4-m & 2m \end{vmatrix}
\end{pmatrix} =
$$

$$
\begin{pmatrix} 3m^2+6m+3 & -(1-m-2m^2) & -m^2-5m-4 \\ -(3m+3) & m+1 & -(-4m-4) \\ 3-3m & -(5m+1) & 7m-4 \end{pmatrix}
$$

$$
comatrice(A_m) = \begin{pmatrix} 3m^2+6m+3 & -(1-m-2m^2) & -m^2-5m-4 \\ -(3m+3) & m+1 & -(-4m-4) \\ 3-3m & -(5m+1) & 7m-4 \end{pmatrix} \text{ et}
$$

$$
comatrice^t(A_m) = \begin{pmatrix} 3m^2+6m+3 & -3m-3 & 3-3m \\ 2m^2+m-1 & m+1 & -5m-1 \\ -m^2-5m-4 & 4m+4 & 7m-4 \end{pmatrix}
$$

Ainsi,

$$
A_m^{-1} = \frac{1}{9m(1+m)}\begin{pmatrix} 3m^2+6m+3 & -3m-3 & 3-3m \\ 2m^2+m-1 & m+1 & -5m-1 \\ -m^2-5m-4 & 4m+4 & 7m-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{m+1}{3m} & -\dfrac{1}{3m} & \dfrac{3-3m}{9m(1+m)} \\ \dfrac{2m-1}{9m} & \dfrac{1}{9m} & -\dfrac{5m+1}{9m(1+m)} \\ -\dfrac{m+4}{9m} & \dfrac{4}{9m} & \dfrac{7m-4}{9m(1+m)} \end{pmatrix}
$$

$$\begin{aligned}\det(M_m) &= \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = \begin{matrix} m+2 & m+2 & m+2 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{matrix} \\ &= (m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = (m+2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 \end{vmatrix} \\ &= (m+2)(m-1)^2 \end{aligned}$$

Si $m = -2$ ou $m = 1$, alors $\det(M_m) = 0$, la matrice M_m est donc non inversible.

Si $m \neq -2$ et $m \neq 1$, alors $\det(M_m) \neq 0$, la matrice M_m est donc inversible.

Solution 19 :

Tout calcul fait on a :

$$\begin{aligned}\det(A_m) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4-m & 2m & 3+m \\ 1+m & -1-m & 1+m \end{vmatrix} \\ & \quad\ \ C_1 \qquad C_1+C_2 \qquad C_3-C_1 \\ &= \begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 4-m & 4+m & -1+2m \\ 1+m & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (1+m)\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 4+m & -1+2m \end{vmatrix} \\ &= 9m(1+m) \end{aligned}$$

Donc, si $m \neq 0$ et $m \neq -1$ alors $\det(A_m) \neq 0$ et A_m est inversible.

Pour tout $m \in \mathbb{R} - \{-1,0\}$, $det(A) = 9m(1+m) \neq 0$. Donc la matrice A_m est inversible et son inverse est donné par :

$$A_m^{-1} = \frac{1}{\det(A_m)} comatrice^t(A_m)$$

où,

$$comatrice(A_m) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2m & 3+m \\ -1-m & 1+m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 4-m & 3+m \\ 1+m & 1+m \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 4-m & 2m \\ 1+m & -1-m \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1-m & 1+m \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1+m & 1+m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1+m & -1-m \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2m & 3+m \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4-m & 3+m \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4-m & 2m \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 3m^2+6m+3 & -(1-m-2m^2) & -m^2-5m-4 \\ -(3m+3) & m+1 & -(-4m-4) \\ 3-3m & -(5m+1) & 7m-4 \end{pmatrix}$$

$$comatrice(A_m) = \begin{pmatrix} 3m^2+6m+3 & -(1-m-2m^2) & -m^2-5m-4 \\ -(3m+3) & m+1 & -(-4m-4) \\ 3-3m & -(5m+1) & 7m-4 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$comatrice^t(A_m) = \begin{pmatrix} 3m^2+6m+3 & -3m-3 & 3-3m \\ 2m^2+m-1 & m+1 & -5m-1 \\ -m^2-5m-4 & 4m+4 & 7m-4 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$A_m^{-1} = \frac{1}{9m(1+m)}\begin{pmatrix} 3m^2+6m+3 & -3m-3 & 3-3m \\ 2m^2+m-1 & m+1 & -5m-1 \\ -m^2-5m-4 & 4m+4 & 7m-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m+1}{3m} & -\frac{1}{3m} & \frac{3-3m}{9m(1+m)} \\ \frac{2m-1}{9m} & \frac{1}{9m} & -\frac{5m+1}{9m(1+m)} \\ -\frac{m+4}{9m} & \frac{4}{9m} & \frac{7m-4}{9m(1+m)} \end{pmatrix}$$

Solution 20 :

- Comme $\det(A) = 0$ alors la matrice A d'ordre n est dans ce cas non inversible, en effet :

$$\frac{1}{3}A^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \det\left(\frac{1}{3}A^2\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{3^n}\det(A^2) = \frac{1}{3^n}(\det(A))^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 0$$

- Si $A^4 = 0$ alors $\det(A^4) = \det(0)$ et donc $[\det(A)]^4 = 0$. La matrice étant non inversible.

- Si $A^2 = I \Rightarrow A \times A = I$ alors la matrice A est inversible et $A^{-1} = A$.

- La matrice A est dans ce cas inversible :

$$A^3 = I \quad \Rightarrow \quad A \times A^2 = I$$

Donc,

$$A^{-1} = A^2$$

- Supposons A inversible,

$$A^2 = -A \quad \Longrightarrow \quad A^{-1}A^2 = -A^{-1}A = -I \quad \Longrightarrow \quad A = -I$$

Les matrices inversibles vérifiant l'équation $A^2 = -A$ sont les matrices A telles que $A = -I$, $\det(A) = \pm\ 1$

- Si $A^3 = A$. Supposons A inversible,

$$A^3 = A \quad \Longrightarrow \quad A^{-1}A^3 = A^{-1}A = I \quad \Longrightarrow \quad A^2 = I \quad \Longrightarrow \quad A = A^{-1}$$

Les matrices inversibles qui vérifient l'équation $A^3 = A$ sont les matrices A telles que $A = A^{-1}$.

- La matrice A est dans ce cas inversible :

$$A^3 + 2A = I \quad \Rightarrow \quad A\ [A^2 + 2I] = I$$

Donc,

$$A^{-1} = A^2 + 2I$$

- La matrice A est dans ce cas inversible :

$$A^2 - 5A + 6I = 0 \quad \Rightarrow \quad A\left[\frac{-1}{6}(A - 5I)\right] = I$$

Donc,

$$A^{-1} = \frac{-1}{6}(A - 5I)$$

- $A^3 + 4A - 6I = 0$ alors,

$$A^3 + 4A - 6I = 0 \quad \Longrightarrow \quad A\left[\frac{1}{6}(A^2 + 4I)\right] = I$$

La matrice A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 + 4I)$.

- La matrice A est dans ce cas inversible :

$$(A - I)\,(A + 2I) = 0 \quad \Rightarrow \quad A^2 + A = 2I \quad \Rightarrow \quad A\left[\frac{1}{2}(A + I)\right] = I$$

Donc,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A + I)$$

- Si $(A - 3I)(3A + I) = 0$ alors,

$$(A - 3I)(3A + I) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 3A^2 - 8A - 3I = 0 \quad \Longrightarrow \quad A\left[A - \frac{8}{3}I\right] = I$$

La matrice A est inversible et $A^{-1} = A - \frac{8}{3}I$.

- Si $(A + 2I)(A + I) = 3I$ alors,

$$(A+2I)(A+I)=3I \quad\Longrightarrow\quad A^2+3A=I \quad\Longrightarrow\quad A[A+3I]=I$$

La matrice A est inversible et $A^{-1}=A+3I$.

Solution 21 :

Tout calcul fait on obtient,

$$\begin{aligned}
A^2 &= AA = \begin{pmatrix}1&-1&2\\1&2&3\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&2&3\\1&-2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2&-7&1\\6&-3&11\\0&-7&-3\end{pmatrix}\\
A^3 &= A^2A = \begin{pmatrix}2&-7&1\\6&-3&11\\0&-7&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&2&3\\1&-2&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4&-18&-16\\14&-34&14\\-10&-8&-24\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
-A^3+4A^2-10A-2I_3 &= -\begin{pmatrix}-4&-18&-16\\14&-34&14\\-10&-8&-24\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}2&-7&1\\6&-3&11\\0&-7&-3\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&2&3\\1&-2&1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$-A^3+4A^2-10A-2I_3 = 0_3 \quad\Longrightarrow\quad A\left[\frac{1}{2}(-A^2+4A-10\,I_3)\right] = I_3$$

et son inverse est donné par :

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{2}(-A^2+4A-10\,I_3)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\begin{pmatrix}2&-7&1\\6&-3&11\\0&-7&-3\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&2&3\\1&-2&1\end{pmatrix}-10\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}-8&3&7\\-2&1&1\\4&-1&-3\end{pmatrix}\right)\\
&= \begin{pmatrix}-4&\frac{3}{2}&\frac{7}{2}\\-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\2&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Vérification :

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&2\\1&2&3\\1&-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4&\frac{3}{2}&\frac{7}{2}\\-1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\2&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Solution 22 :

1. Tout calcul fait on obtient

$$M^2=MM=\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\2&0&-1&-1\\3&1&-2&-2\\1&-2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\2&0&-1&-1\\3&1&-2&-2\\1&-2&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1&0&1\\-2&-1&1&1\\-3&-1&1&2\\-1&2&-1&0\end{pmatrix}$$

et

$$M^2+M+I_4=\begin{pmatrix}-2&1&0&1\\-2&-1&1&1\\-3&-1&1&2\\-1&2&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-1&0&-1\\2&0&-1&-1\\3&1&-2&-2\\1&-2&1&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}=0_4$$

Comme les deux matrices M et I_4 sont commutables, alors

$$M^3-I_4=(M-I_4)(M^2+M+I_4)=0_4$$

D'où $M^3=I_4$.

2. Comme $M^3=I_4$ alors $MM^2=M^2M=I_4$ alors la matrice M est inversible et

$$M^{-1}=M^2=\begin{pmatrix}-2&1&0&1\\-2&-1&1&1\\-3&-1&1&2\\-1&2&-1&0\end{pmatrix}$$

Solution 23 :

D'après le théorème de Cayley Hamilton, la matrice A annule son polynôme caractéristique qui est égal à :

$$-A^3+tr(A)A^2-(M_{11}+M_{22}+M_{33})A+\det(A)I_3$$

or, $tr(A)=4$, $M_{11}+M_{22}+M_{33}=-1-1-10=-12$ et

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&3&1\\4&2&3\\2&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2&1\\-2&-1&3\\0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1&2\\-2&-1\end{vmatrix}=5$$

D'où,

$$-A^3+4A^2+12A+5I_3=0_3$$

1. Comme $det(A)=5\neq 0$ alors la matrice A est inversible

$$-A^3+4A^2+12A+5I_3=0_3\quad\Rightarrow\quad A\left[\frac{-1}{5}(-A^2+4A+12I_3)\right]=I_3$$

et son inverse est donné par :

$$A^{-1}=\frac{-1}{5}(-A^2+4A+12I_3)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{7}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{1}{5}\\0&1&-2\end{pmatrix}$$

Solution 24 :

D'après le théorème de Cayley Hamilton, la matrice A annule son polynôme caractéristique (On calcule $\mathcal{P}_A(\lambda)=\det(A-\lambda I_3)$) :

$$-A^3+tr(A)A^2-(M_{11}+M_{22}+M_{33})A+\det(A)I_3=0_3$$

or,

$tr(A)=2$,

$M_{11}+M_{22}+M_{33}=\begin{vmatrix}2&3\\2&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\-1&-1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}=-8+0+2=-6$,

$$\det(A)=\begin{matrix}1&0&1\\1&2&3\\-1&2&-1\end{matrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\1&2&2\\-1&2&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&2\\2&0\end{vmatrix}=-4$$

D'où,

$$-A^3+2A^2+6A-4I_3=0_3$$

1. Comme $\det(A)=-4\neq 0$ alors la matrice A est inversible et

$$-A^3+2A^2+6A-4I_3=0_3\quad\Rightarrow\quad A\left[\frac{1}{4}(-A^2+2A+6I_3)\right]=I_3$$

et son inverse est donné par :

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{4}(-A^2 + 2A + 6\, I_3) \\
&= \frac{1}{4}\left(-\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 10 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

<u>Vérification :</u>

$$
AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

2. Méthode des cofacteurs :

$$
\begin{aligned}
A^{-1} &= \frac{1}{-4}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t \\
&= \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} +(-8) & -(2) & +(4) \\ -(-2) & +(0) & -(2) \\ +(-2) & -(2) & +(2) \end{pmatrix}^t \\
&= \frac{-1}{4}\begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

3. Effectuons une suite d'opérations élémentaires en ligne sur la matrice suivante

$$
\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).
$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\sim}{L_{21}(-1); L_{31}(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{L_{32}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{L_2\left(\frac{1}{2}\right); L_3\left(\frac{-1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\underset{\sim}{L_{13}(-1); L_{23}(-1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Ainsi, la matrice inverse est :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que : $A^{-1}\,A = A\ \ A^{-1} = I_3$

Solution 25 (CF-10/11) : Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Déterminer les valeurs de a, b et c de $\mathbb{R}$ pour que l'on ait la relation $A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = 0_3$:

$1^{ère}$ méthode : On sait que toute matrice carrée d'ordre 3 vérifie la relation :

$$-A^3 + tr(A)A^2 - \alpha(A)A + \det(A)\, I_3 = 0_3$$

avec,

$$\begin{aligned} tr(A) &= 0 + 0 + 1 = 1 \\ \alpha(A) &= M_{11} + M_{22} + M_{33} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \\ \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$-A^3 + A^2 - A - I_3 = 0_3$$

Ou encore

$$A^3 - A^2 + A + I_3 = 0_3$$

C'est-à-dire, $b = c = -a = 1$.

2ème méthode : Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) \\ &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -\lambda & -1 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda[-\lambda(1-\lambda)+1] + (1-\lambda) - 1 - 1 + \lambda \\ &= -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 \end{aligned}$$

D'après le théorème de Cayley Hamilton, toute matrice carrée annule son polynôme caractéristique et donc,

$$-A^3 + A^2 - A - I_3 = 0_3$$

Ou encore

$$A^3 - A^2 + A + I_3 = 0_3$$

C'est-à-dire, $b = c = -a = 1$.

3ème méthode : calculons,

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= A^2\ A \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$A^3 + aA^2 + bA + cI_3 = \begin{pmatrix} c-1 & a+b & b-1 \\ -a-b & -2a+c-3 & -2a-b-1 \\ b-1 & 2a+b+1 & a+b+c-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $a = -1$, $b = 1$ et $c = 1$ et donc

$$A^3 - A^2 + A + I_3 = 0_3$$

Solution 26 (CF-11/12) : Considérons les matrices carrées d'ordre 3 données par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculons les matrices suivantes :

$$(A - I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

2. Comme $AB = I_3$ alors, la matrice A est inversible et son inverse $A^{-1} = B$.
3. Montrons que la matrice A vérifie la relation : $A^3 - 2A^2 + A = I_3$:

   On sait que toute matrice carrée d'ordre 3 vérifie la relation :

$$-A^3 + tr(A)A^2 - \alpha(A)A + \det(A)\, I_3 = 0_3$$

   avec,

$$\begin{aligned} tr(A) &= 1 + 0 + 1 = 2 \\ \alpha(A) &= M_{11} + M_{22} + M_{33} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \\ \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Ainsi,

$$-A^3 + 2A^2 - A + I_3 = 0_3$$

   Ou encore

$$A^3 - 2A^2 + A = I_3$$

4. À l'aide de la relation établie à la question 3, donnons l'expression de la matrice A^{-1} :

$$\begin{aligned} A^3 - 2A^2 + A = I_3 \quad &\Longrightarrow \quad A[A^2 - 2A + I_3] = I_3 \\ &\Longrightarrow \quad A^{-1} = A^2 - 2A + I_3 \\ &\Longrightarrow \quad A^{-1} = (A - I_3)^2 \\ &\Longrightarrow \quad A^{-1} = B \end{aligned}$$

   Ainsi,

$$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. À l'aide de la méthode des cofacteurs, retrouvons la matrice inverse A^{-1} : comme $\det(A) = 1 \neq 0$ alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} comatrice^t(A)$$

   où,

$$comatrice(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$comatrice^t(A) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Ainsi,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{B}.$$

Solution 27 (CR-11/12) : Considérons les matrices carrées d'ordre 3 données par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculons les matrices suivantes :

$$(I_3 - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A + 2I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(I_3 - A)(A + 2I_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \mathrm{B}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3I_3$$

2. Comme $AB = 3I_3$ alors $A\left[\frac{1}{3}B\right] = I_3$. Ainsi, la matrice A est inversible et son inverse $A^{-1} = \frac{1}{3}B$.

3. Montrons que la matrice A vérifie la relation : $A^3 + A^2 - 2A + 3I_3 = 0_3$:

On sait que pour toute matrice carrée d'ordre 3 vérifie la relation :

$$-A^3 + tr(A)A^2 - \alpha(A)A + \det(A)\, I_3 = 0_3$$

avec,

$$tr(A) = 1 - 2 + 0 = -1$$

$$\begin{aligned} \alpha(A) &= M_{11} + M_{22} + M_{33} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -3 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$-A^3 - A^2 + 2A - 3I_3 = 0_3$$

Ou encore

$$A^3 + A^2 - 2A + 3I_3 = 0_3$$

4. À l'aide de la relation établie à la question 3, donnons l'expression de la matrice A^{-1} :

$$\begin{aligned} A^3 + A^2 - 2A + 3I_3 = 0_3 &\implies A[A^2 + A - 2I_3] = -3I_3 \\ &\implies A\left[\frac{-1}{3}(A^2 + A - 2I_3)\right] = I_3 \\ &\implies A^{-1} = \frac{-1}{3}(A^2 + A - 2I_3) \\ &\implies A^{-1} = \frac{-1}{3}(A - I_3)(A + 2I_3) \\ &\implies A^{-1} = \frac{1}{3}(I_3 - A)(A + 2I_3) \\ &\implies A^{-1} = \frac{1}{3}B \end{aligned}$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \frac{1}{3}B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. À l'aide de la méthode des cofacteurs, retrouvons la matrice inverse A^{-1} : comme $\det(A) = -3 \neq 0$ alors,

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} comatrice^t(A)$$

où,

$$comatrice(A) = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$comatrice^t(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$A^{-1} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\text{B}.$$

Solution 28 (CF-13/14) : Soient les deux matrices carrées réelles d'ordre 3 données par,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. La partie symétrique de la matrice A est donnée par $\frac{1}{2}(A + A^t)$:

$$\frac{1}{2}(A + A^t) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

La partie antisymétrique de la matrice A est donnée par $\frac{1}{2}(A - A^t)$:

$$\frac{1}{2}(A - A^t) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{5}{2} & 1 \\ \frac{5}{2} & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On remarque que $\left[\frac{1}{2}(A + A^t)\right] + \left[\frac{1}{2}(A - A^t)\right] = A$

2. Calculons les matrices puissances B^2, B^3 et B^4 :

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^1 & 0 & 2^1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^1 & 0 & 2^1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 & 0 & 2.2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2.2 & 0 & 2.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$B^4 = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 2^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^2 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2^2 & 0 & 2.2^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2.2^2 & 0 & 2.2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 2^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^3 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}$$

On remarque que les puissances successives de B sont de la forme :

$$B^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} = 2^{n-1}B \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$$