

### Applications :

#### Application n°1 :

Supposons que des consommateurs aient les fonctions d'utilité suivantes :

$$U = f(x,y) = X^{1/4} Y^{1/4}$$

$$U = f(x,y) = a X Y$$

$$U = f(x,y) = X^{1/2} Y$$

1. Déterminer les utilités marginales que procurent chacun des biens pour ces trois fonctions d'utilités.
2. Déterminer le TMS<sub>XY</sub> pour chacune de ces fonctions.

#### Application n°2 :

On considère la fonction d'utilité continue dans le modèle à deux biens :  $U = f(x,y) = XY^2$

1. Représentez graphiquement les courbes d'indifférence pour les valeurs 4 et 16 de la fonction d'utilité.
2. Déterminez le TMS<sub>XY</sub>.

#### Application n°3 :

Soient deux biens X et Y de prix respectifs  $P_x$  et  $P_y$  et R le revenu du consommateur.

1. Ecrivez l'équation de la droite de budget. Représentez la dans un plan orthogonal pour  $P_x = P_y = 2$  et  $R = 20$ .
2. Déterminez la surface des consommations possibles.
3. De combien doit varier R, à prix constants, pour que l'individu puisse consommer 6 unités du bien X et 7 unités du bien Y.

#### Application n°4 :

Le tableau ci -après donne les points de deux courbes d'indifférence différentes pour un consommateur.

1. Tracer ces courbes I et II sur votre copie.
2. Définir les courbes d'indifférence ?
3. Calculer le TMS<sub>xy</sub> à tous les points consécutifs des deux courbes d'indifférence.

	I		II
2	13	3	12
3	6	4	8
4	4.5	5	6.3
5	3.5	6	5
6	3	7	4.4
7	2.7	8	4

## Exercices :

### Exercice 1 :

Soit un consommateur dont les choix sont exprimés à l'aide de la fonction d'utilité ordinale suivante :  $U = f(x,y) = 2 XY$ , où X et Y sont les quantités consommées des biens X et Y.

1. Donner l'expression du  $TMS_{xy}$  comme rapport des utilités marginales des biens.
2. Donner son expression comme l'opposé de la dérivée de la courbe d'indifférence pour un niveau d'utilité fixé à 100.
3. Calculer les valeurs du  $TMS_{xy}$  pour  $x=20$ ,  $x=25$  et  $x=50$  en utilisant les deux méthodes. Vérifier l'équivalence des résultats.
4. Que signifie un  $TMS_{xy}$  de 4 ?
5. Pour un budget de 200 dirhams,  $P_x = 12$  dhs et  $P_y = 6$ dhs, calculer les quantités à consommer à l'équilibre par la méthode du TMS à l'équilibre.
6. Quel est le niveau d'utilité maximal obtenu ?

### Exercice 2 :

Dans le cas d'une fonction de satisfaction de la forme:  $U = f(x,y) = 4X^2 Y$  et d'une contrainte budgétaire:  $100 = 10X+20Y$

1. Déterminez les quantités demandées à l'optimum en utilisant la méthode de Lagrange. Quel est le niveau de l'utilité totale?
2. Quelle est la signification économique du multiplicateur de Lagrange?
3. On admet que le prix des biens sont  $P(x) = 5$  et  $P(y) = 10$ . Quel est le revenu nécessaire pour obtenir un maximum de satisfaction sur la même courbe d'indifférence qu'à la question précédente?

# TDM<sup>o</sup> 1

## Economiste

### Application<sup>o</sup> 1

① Déterminer les utilités marginales qui procurent chacun des biens pour ces trois fonctions d'utilités.

②  $U = f(x, y) = X^{1/4} Y^{1/4}$

\*  $U_{mx} = f(x, y)'_x = (X^{1/4} Y^{1/4})'_x = \frac{1}{4} X^{(1/4)-1} Y^{1/4}$

$U_{mx} = \frac{1}{4} X^{-3/4} Y^{1/4} = \frac{Y^{1/4}}{4 X^{3/4}}$

$U_{mx} = \frac{Y^{1/4}}{4 X^{3/4}}$

\*  $U_{my} = f(x, y)'_y = (X^{1/4} Y^{1/4})'_y = \frac{1}{4} X^{1/4} Y^{(1/4)-1}$

$U_{my} = \frac{1}{4} X^{1/4} Y^{-3/4} = \frac{X^{1/4}}{4 Y^{3/4}}$

$U_{my} = \frac{X^{1/4}}{4 Y^{3/4}}$

③  $U = f(x, y) = a X^\alpha Y^\beta$

\*  $U_{mx} = f(x, y)'_x = (a X^\alpha Y^\beta)'_x = \alpha a X^{\alpha-1} Y^\beta$

$U_{mx} = \alpha a X^{\alpha-1} Y^\beta$

\*  $U_{my} = f(x, y)'_y = (a X^\alpha Y^\beta)'_y = \beta a X^\alpha Y^{\beta-1}$

$U_{my} = \beta a X^\alpha Y^{\beta-1}$

④  $U = f(x, y) = X^{1/2} Y$

\*  $U_{mx} = f(x, y)'_x = (X^{1/2} Y)'_x = \frac{1}{2} X^{(1/2)-1} Y = \frac{Y}{2 X^{1/2}}$

$U_{mx} = \frac{Y}{2 X^{1/2}}$

\*  $U_{my} = f(x, y)'_y = (X^{1/2} Y)'_y = X^{1/2}$

$U_{my} = X^{1/2}$

② Déterminer le TMS<sub>xy</sub> pour chaque fonction.

② pour  $U = f(x, y) = X^{1/4} Y^{1/4}$

$TMS_{xy} = \frac{U_{mx}}{U_{my}} = \frac{Y^{1/4}/4 X^{3/4}}{X^{1/4}/4 Y^{3/4}} = \frac{4 Y^{1/4} Y^{3/4}}{4 X^{3/4} X^{1/4}} = \frac{Y}{X}$

$TMS_{xy} = \frac{Y}{X}$

③ pour  $U = f(x, y) = a X^\alpha Y^\beta$

$TMS_{xy} = \frac{U_{mx}}{U_{my}} = \frac{\alpha a X^{\alpha-1} Y^\beta}{\beta a X^\alpha Y^{\beta-1}}$

On a  $\frac{Y^\beta}{Y^{\beta-1}} = Y^{\beta-(\beta-1)} = Y$

et  $\frac{X^{\alpha-1}}{X^\alpha} = X^{\alpha-1-\alpha} = X^{-1}$

donc  $TMS_{xy} = \frac{\alpha a Y}{\beta a X} = \frac{\alpha Y}{\beta X}$

$TMS_{xy} = \frac{\alpha Y}{\beta X}$

④ Pour  $U = f(x, y) = X^{1/2} Y$

$TMS_{xy} = \frac{U_{mx}}{U_{my}} = \frac{Y/2 X^{1/2}}{X^{1/2}} = \frac{Y}{2 X^{1/2} X^{1/2}} = \frac{Y}{2 X}$

$TMS_{xy} = \frac{Y}{2 X}$

### Application N<sup>o</sup> 2

On a la fonction d'utilité  $U = f(x, y) = XY^2$

① Pour représenter graphiquement les courbes d'indifférence pour les valeurs  $U_0 = 4$  et  $U_1 = 16$ , il faut déterminer l'équation de la courbe d'indifférence pour chaque niveau d'utilité.

\* Pour  $U_0 = 4$

On a  $U_0 = XY^2$   
c-à-d  $4 = XY^2$   
 $Y^2 = \frac{4}{X}$   
 $Y = \sqrt{\frac{4}{X}}$

donc  $Y = \frac{2}{\sqrt{X}}$  est l'équation de la courbe d'indifférence pour  $U_0 = 4$

\* Pour  $U_1 = 16$

On a  $U_1 = XY^2$

c.a.d  $16 = XY^2$

$Y^2 = \frac{16}{X}$

$Y = \sqrt{\frac{16}{X}}$

Donc  $Y = \frac{4}{\sqrt{X}}$  est l'équation de la courbe d'indifférence Pour  $U_1 = 16$

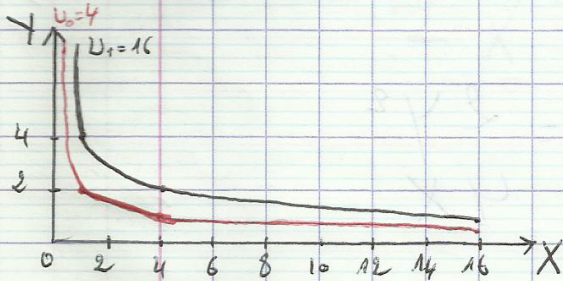
\* Représentation Graphique

- Pour  $U_0 = 4$

X	1	4	16
Y	2	1	0,5

- Pour  $U_1 = 16$

X	1	4	16
Y	4	2	1



②  $TMS_{xy} = \frac{U_{mx}}{U_{my}} = \frac{P(x,y)'_x}{P(x,y)'_y}$   
 $= \frac{Y^2}{2XY}$   
 $= \frac{Y}{2X}$

$TMS_{xy} = \frac{Y}{2X}$

Application N°3

① L'équation de la droite de Budget

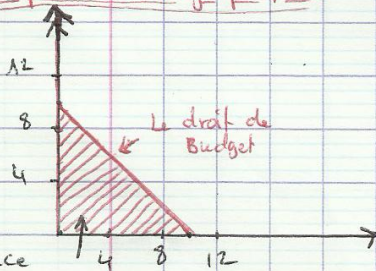
Pour  $P_x = P_y = 2$  et  $R = 20$

On a  $R = X P_x + Y P_y$

c.a.d  $20 = 2X + 2Y$

donc  $Y = -X + \frac{20}{2}$  est l'équation de la droite du Budget

\* Représentation graphique



La surface de la consommation possible

②

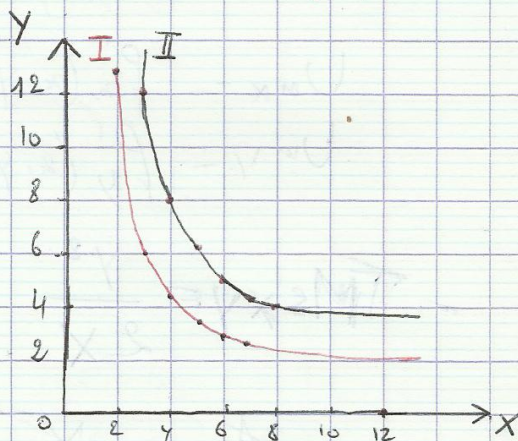
⑤ La surface de la consommation possible est les points du droit de Budget et tous les points qui se situent en bas de ce droit

③ Pour que le consommateur puisse consommer 6 unités du Bien X et 7 unités du bien Y il doit dépenser 26 dhs car  $26 = (6 \times 2) + (7 \times 2)$

Donc R doit augmenter de 6 pour que le consommateur puisse consommer 6 unités de X et 7 de Y

Application N°4

① Représentation graphique de I et II



② La courbe d'indifférence est la courbe qui joint l'ensemble des combinaisons X et Y qui procurent au consommateur le même niveau de satisfaction

③ Le Calcul de  $TMS_{xy}$

	I			II		
X	Y	$TMS_{xy}$	X	Y	$TMS_{xy}$	
2	12	-	3	12	-	
3	8	7	4	8	4	
4	6,3	1,5	5	6,3	1,7	
5	5	1	6	5	1,7	
6	4,4	0,5	7	4,4	0,6	
7	4	0,3	8	4	0,2	

## Exercices

### Exercice ①

- ① L'expression du  $TMS_{xy}$  comme rapport des utilités marginales des biens.  
On a  $U = f(x, y) = 2XY$

$$TMS_{xy} = \frac{U_{mx}}{U_{my}}$$

$$* U_{mx} = f(x, y)'_x = 2Y$$

$$+ U_{my} = f(x, y)'_y = 2X$$

$$TMS_{xy} = \frac{2Y}{2X} = \frac{Y}{X}$$

donc  $TMS_{xy} = \frac{Y}{X}$

- ② L'expression du  $TMS_{xy}$  comme l'opposé de la dérivée de la courbe d'indifférence pour  $U_0 = 100$

→ Détermination de l'équation de la courbe d'indifférence

On a  $U_0 = 2XY$

c.à.d  $100 = 2XY$

$$Y = \frac{100}{2X} = \frac{50}{X}$$

donc  $Y = \frac{50}{X}$  est l'équation de la courbe d'indifférence pour  $U_0 = 100$

$$TMS_{xy} = - (Y(x))'$$

$$= - \left( \frac{50}{X} \right)'$$

$$= - \left( - \frac{50}{X^2} \right)$$

$$= \frac{50}{X^2}$$

donc  $TMS_{xy} = \frac{50}{X^2}$

- ③ Les valeurs du  $TMS_{xy}$  pour  $x=20$ ,  $x=25$  et  $x=50$

→ méthode ①

X	20	25	50
Y	2,5	2	1
$TMS_{xy}$	0,125	0,08	0,02

→ méthode ②

X	20	25	50
$TMS_{xy}$	0,125	0,08	0,02

On remarque que les Résultats de  $TMS_{xy}$  pour les deux méthodes sont les mêmes

- ④  $TMS_{xy} = 4$ ; signifie que le consommateur doit abandonner 4 unités de bien Y pour obtenir une unité supplémentaire de bien X en gardant le même niveau de satisfaction

- ⑤ L'équilibre de consommateur pour  $R=200$ ,  $P_x=12$ ,  $P_y=6$

Le Programme est de maximisation

À l'équilibre on a

$$p \cdot TMS_{xy} = \frac{U_{mx}}{U_{my}} = \frac{P_x}{P_y}$$

$$R = xP_x + yP_y$$

$$p \cdot TMS_{xy} = \frac{Y}{X} = \frac{12}{6}$$

$$200 = 12X + 6Y$$

$$p \cdot \frac{Y}{X} = 2$$

$$200 = 12X + 6Y$$

$$p \cdot Y = 2X \quad \text{①}$$

$$200 = 12X + 6Y \quad \text{②}$$

on remplace ① dans ②

$$200 = 12X + 6(2X)$$

$$200 = 12X + 12X$$

$$200 = 24X$$

$$X^* = \frac{200}{24} = 8,33$$

donc  $Y^* = 2 \times 8,33 = 16,66$

donc  $E(X^* = 8,33, Y^* = 16,66)$

- ⑥ le niveau d'utilité maximal

$$U_{max} = 2X^*Y^*$$

$$= 2 \times 8,33 \times 16,66$$

$$= 277,5$$

$U_{max} = 277,5$

### Exercice ②

- ① L'équilibre de consommateur pour  $U = f(x, y) = 4x^2y$ ,  $100 = 10x + 20y$

Le programme est de maximisation

À l'équilibre la fonction de Lagrange est

$$L(x, y, \lambda) = 4x^2y + \lambda(100 - 10x - 20y)$$

Condition de 1<sup>er</sup> ordre

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8xy - 10\lambda = 0 \text{ (1)} \\ 4x^2 - 20\lambda = 0 \text{ (2)} \\ 100 - 10x - 20y = 0 \text{ (3)} \end{cases}$$

de (1) et (2) on a

$$\lambda = \frac{8xy}{10} = \frac{4x^2}{20}$$

$$\frac{8xy}{10} = \frac{4x^2}{20}$$

$$160xy = 40x^2$$

$$y = \frac{40x^2}{160x}$$

$$y = \frac{1}{4}x$$

on remplace ceci dans (3)

$$100 = 10x + 20\left(\frac{1}{4}x\right)$$

$$100 = 10x + 5x$$

$$100 = 15x$$

$$x^* = \frac{100}{15} = 6,67$$

$$y^* = \frac{1}{4} \times 6,67 = 1,67$$

donc  $E(x^* = 6,67, y^* = 1,67)$

$$U_{\max} = 4 \times (6,67)^2 \times 1,67 = 297,18$$

$$U_{\max} = 297,18$$

(2) La signification de le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$

$$\lambda = \frac{4x^2}{20} = \frac{4 \times (6,67)^2}{20} = 8,89$$

$$\lambda = 8,89$$

Le multiplicateur de Lagrange  $\lambda$  est l'utilité marginale de Revenu, c-à-d l'utilité obtenue après la dépense d'une unité supplémentaire de Revenu,  $\lambda = 8,89$  signifie que lorsque le Revenu augmente de 1dhs l'utilité augmente de  $\lambda = 8,89$ , c-à-d

lorsque le Revenu passe de 100 à 101 l'utilité passe de 297,18 à 306,07

(3) Détermination de Revenu nécessaire pour obtenir une utilité  $U_0 = 297,18$  pour

$$Px = 5, P(y) = 10$$

Le Programme est de minimisation La fonction de Lagrange est

$$L(x, y, \lambda) = 5x + 10y + \lambda(297,18 - 4x^2y)$$

Condition de 1<sup>er</sup> ordre

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 5 - 8\lambda xy = 0 \text{ (1)} \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 10 - 4\lambda x^2 = 0 \text{ (2)} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 297,18 - 4x^2y = 0 \text{ (3)} \end{cases}$$

de (1) et (2) on a

$$\lambda = \frac{5}{8xy} = \frac{10}{4x^2}$$

$$\frac{5}{8xy} = \frac{10}{4x^2}$$

$$\frac{4x^2}{8xy} = \frac{10}{5}$$

$$\frac{4x}{8y} = 2$$

$$16y = 4x$$

$$y = \frac{4}{16}x$$

$$y = \frac{1}{4}x$$

On remplace ceci dans (3)

$$297,18 = 4x^2 \left(\frac{1}{4}x\right)$$

$$297,18 = 4 \times \frac{1}{4} x^3$$

$$297,18 = x^3$$

$$x^3 = 297,18$$

$$x^* = \sqrt[3]{297,18} = 6,67$$

$$y^* = \frac{1}{4} \times 6,67 = 1,67$$

donc  $E(x^* = 6,67, y^* = 1,67)$

$$R_{\min} = (6,67 \times 5) + (1,67 \times 10)$$

$$R_{\min} = 50$$

$$\text{Donc } R_{\min} = 50$$