T.D1 : Solution

EX 1

1. La moyenne et l'écart-type de la population sont données comme suit :

$$m = \frac{\sum_{s=1}^{N} (X_s)}{N} = \frac{(2+3+6+8+11)}{5} = 6$$

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{s=1}^{N} (X_s^2)}{N} - m^2 = 10,6$$

2. La moyenne et la variance de l'échantillonnage de moyennes dans le cas d'un tirage indépendant sont données comme suit :

$$E(\bar{X}) = m = 6 \; ; \; V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{10,8}{2} = 5,4.$$

3. Dans le cas d'un tirage exhaustif ou sans remise la moyenne et la variance de la moyenne de l'échantillonnage sont données comme suit :

$$E(\bar{X}) = m = E(X) = 6 \; ; \; V(\bar{X}) = \left(\frac{\sigma^2}{n}\right) \cdot \left(\frac{N-n}{N-1}\right) = \left(\frac{10,8}{2}\right) \cdot \left(\frac{5-2}{5-1}\right) = 5,4 \cdot 0,75 = 4,05.$$

EX 2

1. Les échantillons que l'on peut former à partir de (A-B) sont comme suit : (1-2) ; (3-2) ; (4-2) ; (1-5) ; (3-5) ; (4-5).

Soit la distribution D suivante : (-1) ; (1) ; (2) ; (-4) ; (-2) ; (-1).

2. Soit $m_{(D)}$ qui désigne la moyenne de D, donnée comme suit :

$$m_{(D)} = \frac{-1+1+2-4-2-1}{6} = -\frac{5}{6}.$$

On peut remarquer aussi que $m_{(D)} = m_{(A)} - m_{(B)} = \frac{8}{3} - \frac{7}{2} = -\frac{5}{6}$.

3. La variance de D est par définition égale à :

$$\sigma_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \left(m_{(D)}\right)^2 \; ; \; \sigma_{(D)}^2 = \frac{1+16+1+4+4+1}{6} - \left(-\frac{5}{6}\right) = \frac{137}{36}$$

$$\Rightarrow \sigma_{(D)} = 1,95$$

Il convient de noter que : $\sigma_{(D)}^2 = \sigma_{(A)}^2 + \sigma_{(B)}^2$.

Ex. 3 1. Calculer la proportion « p » des chiffres impairs :

$$= \frac{\text{cas favorables}}{\text{cas possibles}} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

2. a) les échantillons de taille deux, qui peuvent être extraits, avec remise de la population E sont au nombre de $4 \times 4 = 16$.
(c'est un arrangement avec répétition de « p » d'entre les « n » éléments, avec : $p = 2$ et $n = 4$, soit au total $A_4^2 = 4^2 = 16$ échantillons).
Ils sont donnés dans le tableau ci-après :

(1, 1)	(1 ; 2)	(1 ; 4)	(1 ; 6)
(2, 1)	(2 ; 2)	(2 ; 4)	(2 ; 6)
(4 ; 1)	(4 ; 2)	(4 ; 4)	(4 ; 6)
(6 ; 1)	(6 ; 2)	(6 ; 4)	(6 ; 6)

b) Pour chacun des 16 échantillons précédents la fréquence f des chiffres impairs est respectivement :

1	0,5	0,5	0,5
0,5	0	0	0
0,5	0	0	0
0,5	0	0	0

c) La moyenne $\mu_{(f)}$ de la distribution d'échantillonnage des fréquences f précédentes est : $\mu_{(f)} = \dfrac{1 + 0,5 + 0,5 + 0,5 + \dots + 0 + 0}{16} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4} = 0,25 = p$

d) l'écart-type $\sigma_{(f)}$ de la distribution d'échantillonnage des fréquences f est défini par : $\sigma_{(f)} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{16} (f_i - \mu_{(f)})^2}{16}}$

$$\sigma_{(f)} = \sqrt{\frac{(1 - 0,25)^2 + 6 \times (0,5 - 0,25)^2 + 9(0 - 0,25)^2}{16}} = 0,306$$

l'écart-type $\sigma_{(f)}$ de la distribution d'échantillonnage des fréquences f défini à partir de la théorie est : $\sigma_{(f)} = \sqrt{\dfrac{pq}{n}} = \sqrt{\dfrac{\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}{2}} = 0,306$.

EX : 4 1) la taille $N = 5$

la moyenne $\mu = \frac{\sum x_i}{5} = 6$, la variance $V = \sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum x_i^2 - \mu^2 = 8$.

2) On a C_5^2 échantillon possible $C_5^2 = 10$

Échantillon	moyenne
(2;4)	3 $\leftarrow \bar{x}_1$
(2;6)	4
(2;8)	5
(2;10)	6
(4;6)	5
(4;8)	6
(4;10)	7
(6;8)	7
(6;10)	8
(8;10)	9

3) $E(\bar{X}) = \frac{\sum \bar{x}_i}{10} = 6 = \mu$

$\sigma^2(\bar{X}) = \frac{1}{10} \sum \bar{x}_i^2 - \mu^2 = 3$

4) puisque la taille de l'échantillon dépasse 5% de la taille de la population

$V(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \times \frac{N-n}{N-1} = \frac{8}{4} \times \frac{5-2}{5-1}$
$= 3$

5) $\frac{n}{N} = \frac{2}{5} = 0,4$

le taux de sondage est égale à 40% ; on ne peut pas donc ignorer le facteur de correction.

EX.5 D'aprés l'énoncé de l'exercice on a :

$N = 3000$; $m = 68$; $\sigma = 3$.

X désigne le poids des étudiants, avec $X \leadsto N(m;\sigma)$.

1. La moyenne et l'écart-type d'échantillonnage des moyennes si l'on extrait 80 échantillons de 25 étudiants chacun sont données comme suit :

a) Dans le cas d'un tirage non exhaustif :

$E(\bar{X}) = m = 68$ et $\sigma_{(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{3}{5} = 0,6$

b) Dans le cas d'un tirage exhaustif :

$E(\bar{X}) = m = 68$

et $\sigma_{(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \times \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{3}{5} \times \sqrt{\frac{3000-25}{3000-1}} \simeq \frac{3}{5} = 0,6$

Il convient de noter que $\sigma_{(\bar{X})_{T.S.R}} \simeq \sigma_{(\bar{X})_{T.A.S}}$ puisque le coefficient d'exhaustivité $\frac{N-n}{N-1} \simeq 1$ et le rapport $\frac{n}{N} \simeq 0$.

2.a: puisque $X \leadsto N(m;\sigma) \Rightarrow \bar{X} \leadsto N\left(E(\bar{X});\sigma_{(\bar{X})}\right)$

(Ou si $X \leadsto N(m, V(X)) \Rightarrow \bar{X} \leadsto N(E(\bar{X}); V(\bar{X})))$

Donc, le nombre d'échantillons dont la moyenne est comprise entre :

Ex: 5 → suite :

68,3 Kg et 68,8 Kg est calculé comme suit :

$$\mathbb{P}(68,3 \leq \bar{X} \leq 68,8) = \mathbb{P}\left(\frac{68,3-68}{0,6} \leq \frac{\bar{X}-68}{0,6} \leq \frac{68,8-68}{0,6}\right) \quad (*)$$

on pose : $Z = \frac{\bar{X}-68}{0,6} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$(*) \Rightarrow = \mathbb{P}(0,5 \leq Z \leq 1,33) = \mathbb{P}(Z \leq 1,33) - \mathbb{P}(Z \leq 0,5)$$

$$= F(1,33) - F(0,5)$$

$$= 0,9066 - 0,6915 = 0,2151.$$

D'où le nombres d'échantillon dont la moyenne est comprise entre : 68,3 Kg et 68,8 Kg est égale à $\underline{80} \times 0,2151 = \underline{\underline{17}}$ échantillon

2.b. De la même façon, on va calculer le nombre d'échantillon dont la moyenne est inférieure à 68,4 Kg :

$$\mathbb{P}(\bar{X} \leq 68,4) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}-68}{0,6} \leq \frac{68,4-68}{0,6}\right) = \mathbb{P}(Z \leq 0,67)$$

$$= 0,7486$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\bar{X} \leq 68,4) = 0,7486$$

D'où le nombre d'échantillon dont la moyenne est inférieurs à 68,4 Kg. est égal à $80 \times 0,7486 = \ldots$ échantillon.

Ex : 6 $X \rightsquigarrow N(72, 6)$

1. $\mathbb{P}(X < 63) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{63-\mu}{\sigma}\right)$

on pose : $Z = \frac{X-72}{6}$, $Z \rightsquigarrow N(0,1)$

$= \mathbb{P}\left(\frac{X-72}{6} < \frac{63-72}{6}\right)$

$= \mathbb{P}(Z < -1{,}5)$

$= 1 - 0{,}933 = 0{,}0668.$

2. i) distribution de la moyenne de l'échantillon : $n = 25$.

ii) $\bar{X} \rightsquigarrow N\left(72 ; \frac{\sigma}{\sqrt{25}}\right) = N(72 ; 1{,}2)$

3. $\mathbb{P}(69 < \bar{X} < 75) = \mathbb{P}\left(\frac{69-72}{1{,}2} < \frac{\bar{X}-72}{1{,}2} < \frac{75-72}{1{,}2}\right)$

on met $Z = \frac{\bar{X}-72}{1{,}2} \rightsquigarrow N(0,1)$

$= \mathbb{P}\left(\frac{69-72}{1{,}2} < Z < \frac{75-72}{1{,}2}\right)$

$= 2\,\mathbb{P}(Z < 2{,}5) - 1 = 0{,}9876.$

4. $\mathbb{P}(|\bar{X}-72| > 3) = 1 - \mathbb{P}(|\bar{X}-72| < 3)$

$= 1 - \mathbb{P}(69 < \bar{x} < 75)$

$= 1 - 0{,}9876$

$= 0{,}012.$

Ex:7 **1.** soit la v.a X qui désigne les notes des étudiants.

D'après l'énoncé de l'exercice, X suit une loi normale de paramètres : $E(X) = m = 72$ et $\sigma_{(X)} = 9$ $\left(X \rightsquigarrow \mathbb{N}(72;9)\right)$.

Donc la Probabilité pour qu'un seul étudiant choisit au hasard ait une note supérieure à 80 est calculée comme suit :

$$\mathbb{P}(X > 80) = \mathbb{P}\left(\frac{X - E(X)}{\sigma(X)} > \frac{80 - 72}{9}\right)$$

$$= \mathbb{P}(Z > 0,89) \text{ avec } \underset{\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}}{\underset{\shortparallel}{Z}} \rightsquigarrow \mathbb{N}(0,1)$$

$$= 0,1867.$$

2. puisque $X \rightsquigarrow N(72;9) \Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow N\left(E(\bar{X}), \sigma(\bar{X})\right)$.

avec $E(\bar{X}) = E(X) = m = 72$ et $\sigma_{(\bar{X})} = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}} = \frac{9}{\sqrt{10}}$.

Donc la Prob pour qu'un éch aléatoire de 10 étudiants ait une note moy sup à 80 est calculée comme suite :

$$\mathbb{P}(\bar{X} > 80) = \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma(\bar{X})} > \frac{80 - 72}{\left(\frac{9}{\sqrt{10}}\right)}\right) = \mathbb{P}(Z > 2,8)$$

$\left(\text{avec } Z = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sigma(X)} \rightsquigarrow N(0,1)\right)$

$$= 0,0026.$$

3. si X ne suit pas une loi normale alors on supposera que $\bar{X}$ suit une loi de Student à $n-1$ degrés de liberté. $(10 - 1 = 9)$.

Dans ce cas : $\mathbb{P}(\bar{X} > 80) = \mathbb{P}(Z > 2,8) = 0,02$.

EX : 8 soit la v.a X qui désigne la taille des étudiants. pour un échantillon de 10 étudiants, on sait que :

$$E(\overline{X}) = m = 1,70$$

$$V(\overline{X}) = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{0,8^2}{10} = 0,064 \Rightarrow \sigma_{(\overline{X})} = 0,25$$

la prob pour que la moyenne de l'échantillon s'écarte de 6 cm de la moyenne de la population m est calculée comme suit :

$$P\left(E(\overline{X}) - 0,06 \leq \overline{X} \leq E(\overline{X}) + 0,06\right) \Rightarrow P(m - 0,06 \leq \overline{X} \leq m + 0,06)$$

$$\Rightarrow P(1,7 - 0,06 \leq \overline{X} \leq 1,7 + 0,06) \Rightarrow P(1,64 \leq \overline{X} \leq 1,76)$$

puisque $X \leadsto N(m ; \sigma) \Rightarrow \overline{X} \leadsto N\left(E(\overline{X}) ; \sigma_{(\overline{X})}\right)$.

donc $T = \dfrac{\overline{X} - E(\overline{X})}{\sigma_{(\overline{X})}} \leadsto N(0,1)$.

$$\rightarrow P(1,64 \leq \overline{X} \leq 1,76) \Rightarrow P\left(\frac{1,64 - m}{\sigma_{(\overline{X})}} \leq \frac{\overline{X} - m}{\sigma_{(\overline{X})}} \leq \frac{1,76 - m}{\sigma_{(\overline{X})}}\right)$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{1,64 - 1,7}{0,25} \leq T \leq \frac{1,76 - 1,7}{0,25}\right) = P(-0,24 \leq T \leq 0,24) = 0,1896$$

$$\simeq 19\,\%$$

Donc, on a 19 chance sur 100, pour que la moyenne de l'échantillon soit comprise entre 1,64 m et 1,76 m.

Ex 9 : 1) On a $m = 600$; $\sigma = 50$; $n = 25$

$X \rightsquigarrow N(600, 50)$

$\Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow N\left(600 ; \frac{50}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow \bar{X} \rightsquigarrow N(600, 10)$

et $V(\bar{X}) = 100$.

2) $P(590 < \bar{X} < 610) = P\left(\frac{590 - 600}{10} < \frac{\bar{X} - 600}{10} < \frac{610 - 600}{10}\right)$

$= P(-1 < Z < 1)$

$= 2P(Z < 1) - 1 = 0,6826$.

où $Z = \frac{\bar{X} - 600}{10} \rightsquigarrow N(0,1)$

3) Cherchons x tel que :

$P(\mu - x < \bar{X} < \mu + x) = 0,95$

$\Rightarrow P(-x < \bar{X} - \mu < x) = 0,95$

$\Rightarrow P\left(\frac{-x}{10} < \frac{\bar{X} - \mu}{10} < \frac{x}{10}\right) = 0,95$

$\Rightarrow 2P\left(Z < \frac{x}{10}\right) - 1 = 0,95 \Rightarrow P\left(Z < \frac{x}{10}\right) = 0,975$

$\Rightarrow \frac{x}{10} = 1,96 \Rightarrow \underline{x = 19,6}$